

ISSN 1998-6688 (Print)
ISSN 2959-8109 (Online)

ҚАЗАҚСТАН-БРИТАН ТЕХНИКАЛЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ
HERALD
OF THE KAZAKH-BRITISH TECHNICAL
UNIVERSITY
ВЕСТНИК
КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Volume 20, Issue 2
April-June 2023

**ҚАЗАҚСТАН-БРИТАН ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ**

**HERALD
OF THE KAZAKH-BRITISH TECHNICAL UNIVERSITY**

**ВЕСТНИК
КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Алматы

№ 2 (65)

2023

Главный редактор – **Кулпешов Б.Ш.**

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

**Акжалова А.Ж., Асилбеков Б.К., Ахметжанов А.Ж., Әбдірахманов А.Р.
Баженов Н.А., Байжанов Б.С., Бейсенханов Н.Б., Бисембаев А.С.,
Буркитбаев М.М., Досболаев М.К. Зазыбин А.Г., Ивахненко А.П., Исахов
А.А., Исмаилов А.А., Kang Wanli, Кожабеков С.С., Коробкин В.В.,
Курбатов А.П., Молдабаева Г.Ж., Нусупов К.Х., Пак А.А., Сарсенбекулы Б.,
Судоплатов С.В., Тургазинов И.К., Умаров Ф.Ф., Шамои П.С.**

Издание зарегистрировано Министерством культуры и информации Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на учет СМИ № 9757 – Ж от 03.12.2008 г.

Журнал зарегистрирован в Международном центре по регистрации сериальных изданий ISSN
(ЮНЕСКО, г. Париж, Франция)

Подписной индекс – 74206

Издается с 2004 года. Выходит 4 раза в год.

УЧРЕДИТЕЛЬ

Казахстанско-Британский технический университет

ISSN 1998-6688 (Print)
ISSN 2959-8109 (Online)

© Казахстанско-Британский
технический университет, 2023

МАЗМҰНЫ

ФИЗИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР

Жарылгапов Б., Оразбаев С.А.

ЖЖ РАЗРЯД НЕГІЗІНДЕГІ RESVD ӘДІСІ АРҚЫЛЫ НАНОБӨЛШЕКТЕРДІ СИНТЕЗДЕУ.....6

Темірхан М.С.

ИІЛУ СЫНАҚТАРЫ ЖӘНЕ СОҢҒЫ ЭЛЕМЕНТТЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ АРҚЫЛЫ
ПОЛИЭФИРЛІ ШЫНЫ ТАЛШЫҚТАН (SMC) ЖАСАЛҒАН ОҢТАЙЛАНДЫРЫЛҒАН
ЛЮКТЕРДІ ТАЛДАУ.....13

Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кукушкин С.А., Султанов А.Т., Кейінбай С.,

Шыныбаев Д.С., Құсайынова А.Ж.

АТОМДАРДЫ СӘЙКЕС АЛМАСТЫРУ АРҚЫЛЫ БЕТКЕ ЖАҚЫНДАҒЫ КРЕМНИЙ
ҚАБАТТАРЫНДА КРИСТАЛДЫҚ SiC ТҮЗІЛУІ.....27

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР

Асқарбекқызы А., Баженов Н.А.

КЕЙБІР СТАНДАРТ РЕТТЕРГЕ ИЗОМОРФТЫ ӨЗІ ТОЛЫҚ СЫЗЫҚТЫ РЕТТЕРДІҢ
ИНДЕКСТІ ЖИЫНДАРЫ.....36

Касатова А., Кабиденев А., Бекенов М.

АЛГЕБРАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР СЫНЫПЫНЫҢ ТОЛЫҚТЫҚ КРИТЕРИІНІҢ АЛГЕБРАЛЫҚ
СИПАТТАМАСЫ.....43

Құлпешов Б.Ш.

ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАР МОДЕЛДЕРІНІҢ ГИПЕРГРАФТАРЫНЫҢ
ҚАСИЕТТЕРІ.....49

Марданов Н.А.

ТЕРНАРЛЫ ТӨРТКЕН СӘЙКЕСТЕРІ.....57

Мархабатов Н.Д.

БІР ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСЫ БАР ҚҰРЫЛЫМ ТЕОРИЯЛАРЫНЫҢ
АППРОКСИМАЦИЯЛАРЫ.....67

Сағандық А.Т., Исахов А.А.

АДАМ РЕФЛЕКСТЕРІ КЕЗІНДЕГІ SARS-COV-2 БӨЛШЕКТЕРІНІҢ ТАРАЛУЫН
МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ.....73

КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР

Алитурлиева А.Е

ТЕНЗОРЛЫҚ ҮДЫРАУ АРҚЫЛЫ БАЙЛАНЫСТЫ БОЛЖАУ.....92

Қнятов Е.Н., Акжалова А.Ж., Садок Бен Яхия

ЖЕЛ ЭНЕРГИЯСЫНЫҢ ӨНДІРІСІН БОЛЖАУДАҒЫ ДӘЛДІКТІ ЖАҚСARTY YШІН
УАҚЫТ ҚАТАРЛАРЫ НЕГІЗІНДЕГІ ТӘСІЛДЕР.....103

Құланбай Ш.Б., Бекетова Г.С., Тулегенова Э.Н.

БИОМЕТРИЯЛЫҚ ӘДІСТЕРДІ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ӨНДЕУ.....115

Самбурская С.А.

ҚАУІПСІЗ КАРОТАЖ ЖӘНЕ БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІН ДАМЫТУ ЕНУ СЫНАҒЫ YШІН.....125

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ

Жарылгапов Б., Оразбаев С.А.

СИНТЕЗ НАНОЧАСТИЦ МЕТОДОМ PECVD НА ОСНОВЕ ВЧ-РАЗРЯДА.....6

Темірхан М.С.

АНАЛИЗ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ ЛЮКОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ ПОЛИЭФИРНОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА (SMC), ЧЕРЕЗ ИСПЫТАНИЯ НА ИЗГИБ И СИМУЛЯЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....13

Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кукушкин С.А., Султанов А.Т., Кейінбай С.,

Шыныбаев Д.С., Кусайнова А.Ж.

ФОРМИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО SiC В ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ КРЕМНИЯ МЕТОДОМ СОГЛАСОВАННОГО ЗАМЕЩЕНИЯ АТОМОВ.....27

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Аскарбеккызы А., Баженов Н.А.

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА САМОПОЛНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ, ИЗОМОРФНЫХ НЕКОТОРЫМ СТАНДАРТНЫМ ПОРЯДКАМ.....36

Касатова А., Кабиденев А., Бекенов М.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРИТЕРИЯ ПОЛНОТЫ КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....43

Кулпешов Б.Ш.

СВОЙСТВА ГИПЕРГРАФОВ МОДЕЛЕЙ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ.....49

Марданов Н.А.

ТЕРНАРНЫЕ ТОЖДЕСТВА ТОРТКЕНА.....57

Мархабатов Н.Д.

АППРОКСИМАЦИИ ТЕОРИЙ СТРУКТУР С ОДНИМ ОТНОШЕНИЕМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ.....67

Сагандык А.Т., Исахов А.А.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЧАСТИЦ SARS-COV-2 ПРИ РЕФЛЕКСАХ ЧЕЛОВЕКА.....74

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Алитурлиева А.Е

ПРОГНОЗ СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЗОРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ.....92

Княтов Е.Н., Акжалова А.Ж., Садок Бен Яхия

ПОДХОДЫ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗА ВЕТРОЭНЕРГЕТИКИ.....103

Куланбай Ш.Б., Бекетова Г.С., Тулегенова Э.Н.

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА БИОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ.....115

Самбурская С.А.

РАЗРАБОТКА БЕЗОПАСНОЙ СИСТЕМЫ ЛОГИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ НА ПРОНИКНОВЕНИЕ.....125

CONTENTS

PHYSICAL SCIENCE

Zharylgapov B., Orazbayev S.A. NANOPARTICLE SYNTHESIS BY THE PECVD METHOD BASED ON RF DISCHARGE.....	6
Temirhan M.S. ANALYSIS OF OPTIMIZED MANHOLE COVERS MADE OF GLASS-REINFORCED POLYESTER (SMC) THROUGH BENDING TESTS AND FINITE ELEMENT SIMULATIONS.....	13
Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Kukushkin S.A., Sultanov A.T., Keiinbay S., Shynybayev D.S., Kusainova A.Zh. FORMATION OF CRYSTALLINE SiC IN NEAR-SURFACE SILICON LAYERS BY METHOD OF COORDINATED SUBSTITUTION OF ATOMS.....	27

MATHEMATICAL SCIENCES

Askarbekkyzy A., Bazhenov N.A. INDEX SETS OF SELF-FULL LINEAR ORDERS ISOMORPHIC TO SOME STANDARD ORDERS.....	36
Kasatova A., Kabidenov A., Bekenov M. ALGEBRAIC CHARACTERISTICS OF THE CRITERION OF COMPLETENESS OF A CLASS OF ALGEBRAIC SYSTEMS.....	43
Kulpeshov B.Sh. PROPERTIES OF HYPERGRAPHS OF MODELS OF WEAKLY O-MINIMAL THEORIES.....	49
Mardanov N.A. TRIPLE TORTKEN IDENTITIES.....	57
Markhabatov N.D. APPROXIMATIONS OF THE THEORIES OF STRUCTURES WITH ONE EQUIVALENCE RELATION.....	67
Sagandyk A.T., Issakhov A.A. MATHEMATICAL MODELING OF SARS-COV-2 PARTICLES' PROPAGATION DURING HUMAN REFLEXES.....	73

COMPUTER SCIENCE

Aliturliyeva A.E LINK PREDICTION USING TENSOR DECOMPOSITION.....	92
Knaytov Ye. N., Akzhalova A. Zh., Sadok Ben Yahia TIME SERIES-BASED APPROACHES FOR IMPROVING WIND POWER GENERATION FORECAST ACCURACY.....	103
Kulanbay Sh.B., Beketova G.S., Tulegenova E.N. RESEARCH AND DEVELOPMENT OF BIOMETRIC METHODS.....	115
Samburskaya S.A. DEVELOPMENT OF A SECURE LOGGING AND MANAGEMENT SYSTEM FOR PENETRATION TESTING.....	125

ӨОЖ 537.52

ГТАХР 29.27.43

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-6-12>

Жарылгапов Б.^{1*}, Оразбаев С.А.¹

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

*E-mail: zharylgapovberdibek@gmail.com

ЖЖ РАЗРЯД НЕГІЗІНДЕГІ PECVD ӘДІСІ АРҚЫЛЫ НАНОБӨЛШЕКТЕРДІ СИНТЕЗДЕУ

Аңдатпа. Бұл ғылыми мақала вакуумдық қондырғыда төменгі қысымдағы жоғары жиілікті (жж) разрядты плазмадағы көміртегі нанобөлшектерінің синтезін зерттеу нәтижелерін ұсынады. Көміртекті нанобөлшектердің өздігінен орын ауыстыру кернеуі, температура және разряд қуаты тәрізді плазманың әр түрлі параметрлерінде өсуі экспериментті түрде зерттелінді. Эксперимент 0.5–1.1 мбар қысым диапазонында және 6–20 Вт қуат шамаларында жүргізілді. Зерттеу нәтижелері көміртегі нанобөлшектердің синтезделу уақыты, соның ішінде олардың түзілуі мен өсуі плазма параметрлеріне байланысты екенін көрсетті. Плазманың параметрлерінің (температура, қысым, қуат және т.б) өзгерісі нанобөлшектердің өсуі мен қалыптасу процестерін айтарлықтай өзгерте алатыны экспериментте тіркелді. Плазма температурасының жоғарылауы көміртегі нанобөлшектерінің пайда болу уақытының ұлғаюына алып келуі бұл жұмыстың маңызды қорытындыларының бірі болып табылады. Сондай-ақ пайда болған нанобөлшектердің қасиеті разряд қуатына, разряд қысымына және разряд қуатының температураға тәуелділігі графиктері алынды. Алынған нәтижелер плазмалық ортадағы көміртегі нанобөлшектердің синтез процесін түсіну және бақылау үшін құнды ақпарат беретіні сөзсіз. Сонымен қатар эксперименттік нәтижелер наноэлектроника және катализ салаларында, сондай-ақ әртүрлі технологиялық қосымшалар үшін өте маңызды ақпарат болып табылады.

Тірек сөздер: плазма, нанобөлшектер, ЖЖ разряд, PECVD.

Zharylgapov B.^{1*}, Orazbayev S.A.¹

Al-Farabi Kazakh National University, 050000, Almaty, Kazakhstan

*E-mail: zharylgapovberdibek@gmail.com

NANOPARTICLE SYNTHESIS BY THE PECVD METHOD BASED ON RF DISCHARGE

Abstract. This scientific paper presents the results of the study of the synthesis of carbon nanoparticles in radio-frequency (RF) discharge plasma at low pressures in a vacuum apparatus. The growth of carbon nanoparticles was studied under different plasma parameters, such as variation of self-displacement voltage, temperature, and discharge power. The experiment was performed in the pressure range of 0.5-1.1 mbarr and powers of 6-20 W. The results showed that the synthesis time of carbon nanoparticles, including their formation and growth, depends on the plasma parameters. Small changes in temperature, pressure, and plasma power can significantly change the growth and formation of nanoparticles. An important conclusion of this work is that increasing the temperature of the plasma-forming gas leads to an increase in the formation time of carbon nanoparticles. The dependences of nanoparticle growth on the discharge power, self-displacement voltage on the discharge pressure, and temperature on the discharge power were also obtained. The results obtained provide valuable information for understanding and controlling the synthesis process of carbon nanoparticles in the plasma environment. This is important for various technological applications, including nanoelectronics and catalysis.

Key words: plasma, nanoparticles, RF discharge, PECVD.

Жарылгапов Б.^{1*}, Оразбаев С.А.¹

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, 050000, г. Алматы, Казахстан

*E-mail: zharylgapovberdibek@gmail.com

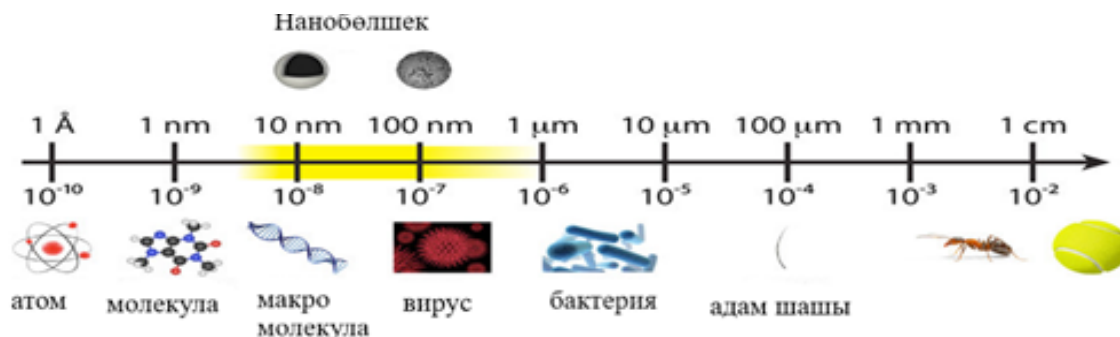
СИНТЕЗ НАНОЧАСТИЦ МЕТОДОМ PECVD НА ОСНОВЕ ВЧ-РАЗРЯДА

Аннотация. Данная научная статья представляет результаты исследования синтеза углеродсодержащих наночастиц в плазме высокочастотного (ВЧ) разряда при низких давлениях в вакуумной установке. Был изучен рост углеродных наночастиц при различных параметрах плазмы, таких как изменение напряжения самосмещения, температуры и мощности разряда. Эксперимент был проведен в диапазоне давлений 0.5–1.1 мбар и мощностях 6–20 Вт. Результаты исследования показали, что время синтеза углеродных наночастиц, включая их формирование и рост, зависит от параметров плазмы. Даже незначительные изменения в температуре, давлении и мощности плазмы могут существенно изменить процессы роста и формирования наночастиц. Важным выводом данной работы является то, что повышение температуры плазмообразующего газа приводит к увеличению времени формирования углеродных наночастиц. Также были получены зависимости роста наночастиц от мощности разряда, напряжения самосмещения от давления разряда и температуры от мощности разряда. Полученные результаты предоставляют ценную информацию для понимания и контроля процесса синтеза углеродных наночастиц в плазменной среде. Это имеет важное значение для различных технологических приложений, включая области нанoeлектроники и катализа.

Ключевые слова: плазма, наночастицы, ВЧ-разряд, PECVD.

Кіріспе

Нанобөлшектердің (100 нм немесе одан төменгі өлшемге ие объект түрі) қолданылу аясы электроника, медицина және косметика сияқты әр түрлі өндірістік жұмыстар мен технологияларды қамтиды. Нанобөлшектерге реальды жағдайда вирус пен шаң бөлшектерінің өлшемі тән [1-5] (сурет 1)



Сурет 1 – Нанобөлшектердің салыстырмалы өлшем диапазоны

Әр түрлі разрядтық ортадағы нанобөлшектердің қалыптасуы және оларды басқару қазіргі ғылым мен технологиядағы белсенді зерттелетін тақырыптар болып табылады. Әсіресе ЖЖ жиілікті разряд негізіндегі PECVD әдісі нанобөлшектердің пайда болу қасиеті және оларды бақылау үшін қолданылатын маңызды әдістерінің бірі болып табылады. Бұл әдісте тұндырылатын прекурсорлардың реакция жылдамдығын жеделдету үшін газдық разрядты плазма енгізіледі [7-12].

ЖЖ разрядта нанобөлшектердің пайда болуына әсер ететін негізгі факторлардың бірі температура болып табылады. Температураның жоғарылауы конденсация мен диффузия жылдамдығын арттыру арқылы нанобөлшектердің өсуіне ықпал ететіні анықталды. Бұл нәтиже қажетті өлшемдері мен қасиеттері бар нанобөлшектерді синтездеу процестерін оңтайландыру үшін өте маңызды.

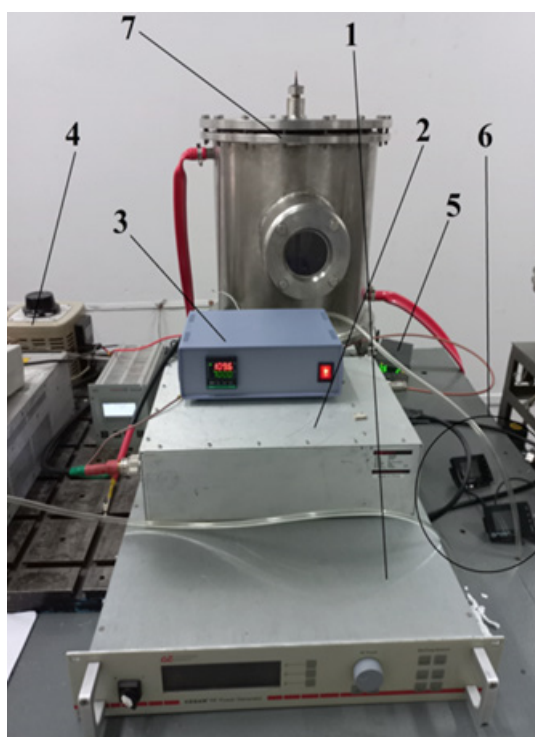
Сонымен қатар, ЖЖ разрядта нанобөлшектердің пайда болу механизмі өздігінен орын ауыстыру кернеуіне, плазма температурасына және разряд қуатына айтарлықтай тәуелді екендігі анықталды. Аталған параметрлер мен нанобөлшектердің өсу механизмдері арасындағы байланысты егжей-тегжейлі зерттеуді қажет етеді. Бақыланатын механизмдерге конденсация, коагуляция және агрегация жатады.

Осы параметрлердің оңтайлы мәндерін анықтау ЖЖ разрядында нанобөлшектердің түзілуін бақылауға және оңтайландыруға мүмкіндік береді [13-16]

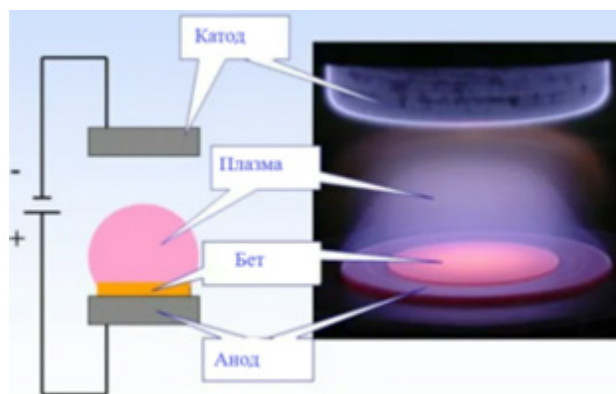
Бұл жұмыстың негізгі мақсаты ЖЖ разряд негізіндегі PECVD әдісін қолдану арқылы алынған нанобөлшектердің плазма параметрлеріне (температура, қысым және т.б.) әсерлерін зерттеу.

Материалдар және әдістер

Эксперименттік қондырғы герметикалық вакуумдық ыдыстан, газ жіберу портынан және салқындату жүйесінен тұрады. Көмертегі нанобөлшектерін синтездеу үшін иондық сәулелік тұндыру әдісі қолданылды. Генератор көмегімен енгізілетін жоғары жиілікті разряд әсерінен орта иондалады. Яғни газ молекулалары ион мен атомдарға ыдырайды. Плазмалық үдеріс негізінде атомдар мен иондар бір-бірімен коагуляцияланып, нанобөлшектер пайда болады. Зерттеу барысында нанобөлшектердің өлшемі разряд параметріне (қысым, температура, тұндыру уақыты, газ қоспасының құрамы және т.б.) тәуелді екені анықталды. Плазма түзуші газ ретінде метан, аргон газы пайдаланылды. Эксперименттік қондырғы 2 суретте көрсетілген.



а)

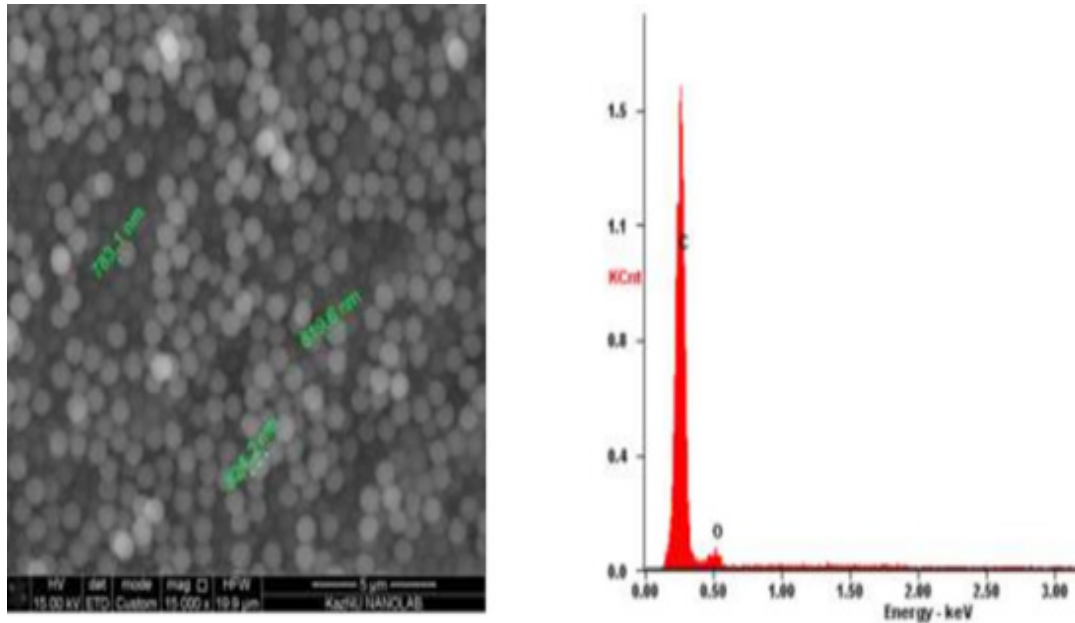


ә)

Сурет 2 – а) эксперименттік қондырғының сыртқы бейнесі. 1– ЖЖ генератор, 2 – сигнал үйлестіруші қорап, 3 – температура реттеуіш, 4 – автотрансформатор, 5 – қысым индикаторы, 6 – газ ағын реттегіш, 7 – вакуумдық ыдыс; ә) плазма түзілуінің принциптік схемасы

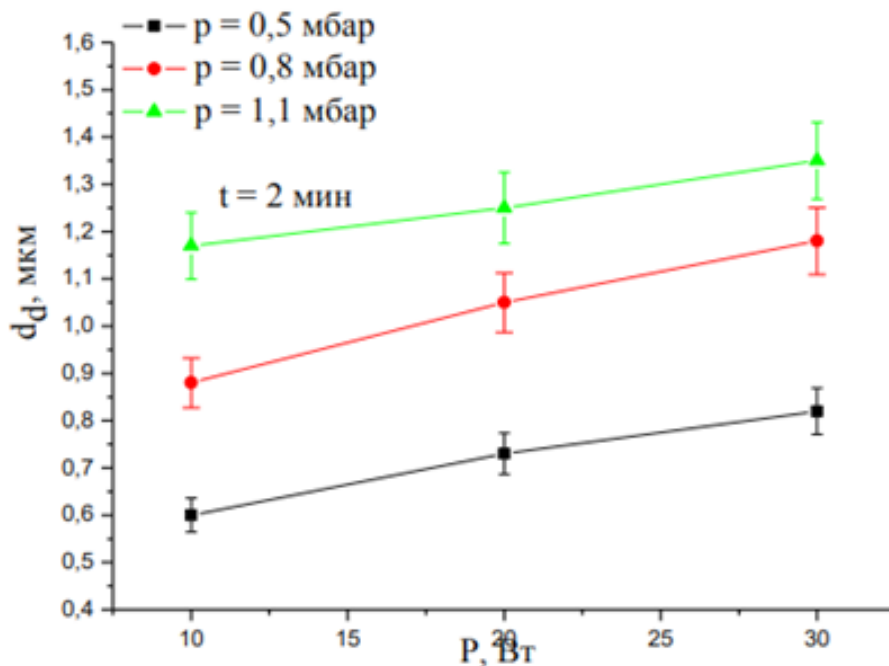
Нәтижелер мен талқылау

Экспериментте жоғарыда талқыланған әдіс нәтижесінде алынған нанобөлшектердің құрылымдық қасиеті сканерлеуші электрондық микроскоп (СЭМ) көмегімен зерттелінді. Сондай-ақ көміртегі бөлшектерінің пайда болатынына көз жеткізу үшін химиялық құрамы талданды. Алынған бейнелер 3 суретте көрсетілген. Келесідей эксперимент параметрлерінде жасалынды: қуат 30 Вт және орта қысымы 0.799 мбар.



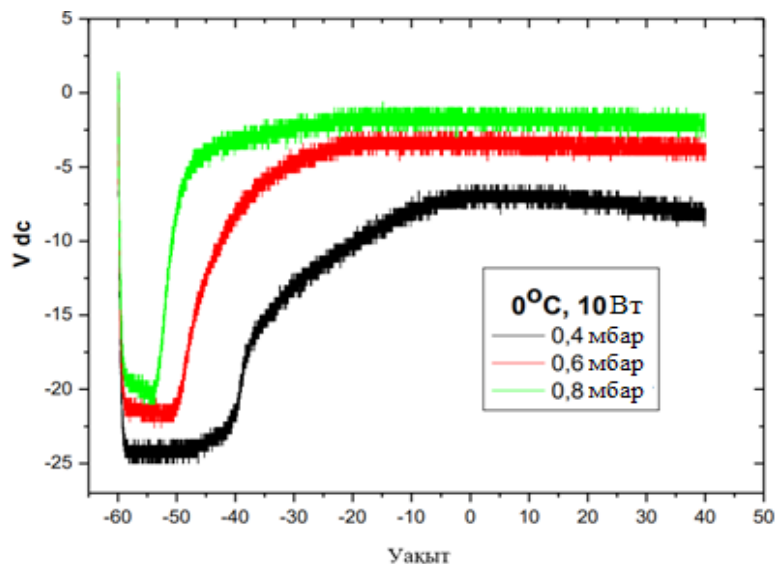
Сурет 3 – Түзілген нанобөлшектер мен оның химиялық құрамы. Эксперимент параметрлері: қуат 30 Вт және қысым 0.79 томбар

Сондай-ақ нанобөлшектердің морфологиялық қасиетін зерттеу үшін пайда болатын бөлшек өлшемінің разряд қуатына тәуелділігі зерттелінді. Графикте көрініп тұрғандай разряд қуатын арттырған сайын нанобөлшектердің өлшемі артады. Себебі қуат артқан сайын ортадағы мобильділігі жоғары электрондардың энергиясы артады. Энергияның артуы иондану жылдамдығының артуына, сәйкесінше иондардың тұндыру жылдамдығының артуына себепші. Осының нәтижесінде нанобөлшектердің өлшемінің өсуіне алып келеді. 4-суретте 3 түрлі қысым мәнінде 2 минут бойы жасалған нәтижелер көрсетілген.



Сурет 4 – Түзілген нанобөлшектердің өлшемінің қуатқа тәуелділігі

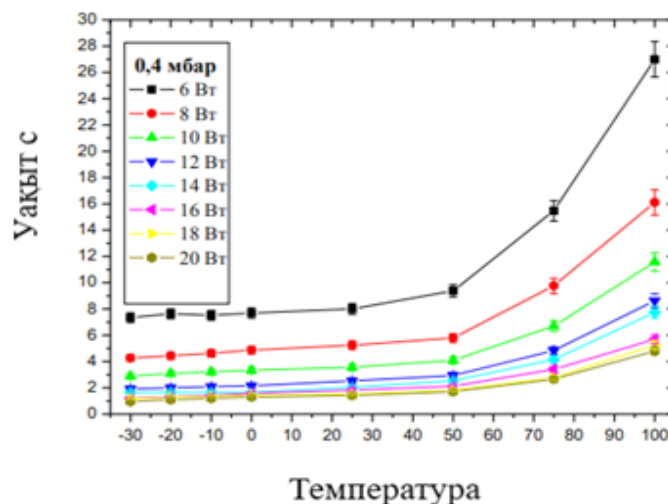
Нанобөлшектердің өсу механизмі разрядтың орын ауыстыру кернеуінің мәніне байланысты. Себебі өздігінен орын ауыстыру кернеуі плазма параметрін белгілі стабилді күйде сақтап тұрады. Сондай-ақ бұл параметр бөлшектердің қозғалғыштығын анықтайды. Яғни плазманың температурасын басқаруға мүмкіндік береді. 5 суретте өздігінен орын ауыстыру кернеуінің әртүрлі қысым мәніндегі уақытқа тәуелділігі көрсетілген.



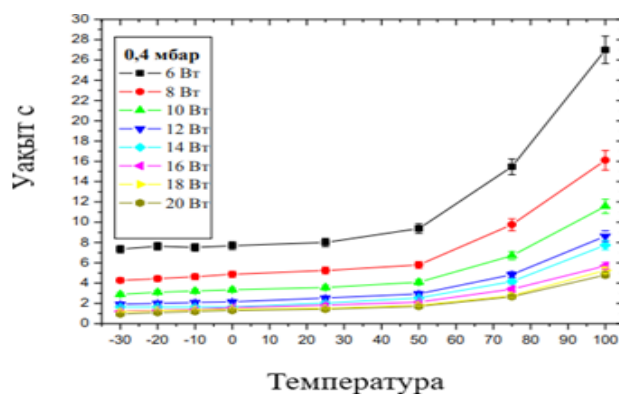
Сурет 5 – Өздігінен орын ауыстыру кернеуінің газ қысымына тәуелділігі ($\text{Ar}+\text{CH}_4$)

Графиктен көрініп тұрғандай разряд қуаты артқан кезде өздігінен орын ауыстыру кернеуі төмендегенін көре аламыз. Бірақ сәл уақыт мезетінде тұрақталатыны байқалады.

Экспериментте алынған нәтижелер негізінде нанобөлшектердің өсуі газ температурасына тәуелді шама екені байқалды. Өйткені температураның жоғарлауы нанобөлшектерді түзілуіне жауап беретін химиялық реакциялар жүру үрдісінің артуына алып келеді. Сондай-ақ разряд қуатын арттырған кезде ортадағы нейтрал бөлшектер, яғни атомдар мен газ молекулалары арасында соқтығысу ықтималдылығы жоғарлайды. Мұндай процесс нанобөлшектердің өлшемінің артуына алып келеді. Яғни өсу механизмі газ температурасына тәуелділігі екенін дәлелдейді. Сондай-ақ қысым шамасын арттырған кезде молекулалық қосылыстар мен прекурсорлардың құрамы жоғарылап, нанобөлшектердің қарқынды өсуін қамтамасыз етеді. Сараптай келе, нанобөлшектердің өсу механизмі температура және қысым сияқты плазма параметрлеріне (температура және қысым) тәуелділігі екені дәлелденді.



а)



ә)

Сурет 6 – Нанобөлшектердің өсу уақытының газ температурасына және разряд қуатындағы тәуелділігі

Қорытынды

Аталған мақалада ЖЖ плазмадағы PECVD әдісінің көмегімен нанобөлшектердің өсу механизмі зерттелінді. Бөлшектердің өсу механизмі өздігінен орын ауыстыру кернеуіне, газ температурасына, қысымға және разряд қуатына тәуелді екені анықталды. Атап айтсақ разряд қуатының артуы иондардың тұндыру жылдамдығы өсуіне, өздігінен орын ауыстыру кернеуі плазма параметрінің стабилді күйде сақтап тұруына, температураның жоғарлауы нанобөлшектерді түзілуіне жауап беретін химиялық реакциялар жүру үрдісінің артуына алып келеді. Сонымен қатар экспериментте нанобөлшектерді өсіру үшін газ бен разрядтың комбинациясы негізінде оңтайлы параметрлері анықталды. Болашақта плазмадағы нанобөлшектердің өсу үдерістерін бақылау және бағалау мақсатында компьютерлік әдістер қолданылатын болады.

References

- 1 Roco M.C. (2011) The long view of nanotechnology development: the National nanotechnology initiative at 10 years, *J. of Nanoparticle Research*, vol. 13, pp. 897–919.
- 2 Khushwant S. Yadav, Sheeba Jacob, Anil M. Pethe. (2022) Chapter 10 – Nanomaterials physics: A critical review, *Photophysics and Nanophysics in Therapeutics*.
- 3 Eric Vogel. (2007) Technology and metrology of new electronic materials and devices. *Nature Nanotechnology*, vol. 2, pp. 25–32.
- 4 Bayda S., Adeel M., Tuccinardi T., Cordani M. & Rizzolio F. (2019) The History of Nanoscience and Nanotechnology: From Chemical-Physical Applications to Nanomedicine. *Molecules*, 25(1), 112. <https://doi.org/doi:10.3390/molecules25010112>.
- 5 Gogotsi Y. (2014). What Nano Can Do for Energy Storage. *ACS Nano*, 8(6), 5369–5371. <https://doi.org/doi:10.1021/nn503164x>.
- 6 Rajput N.S. & Luo X. (2015) FIB Micro-/Nano-fabrication, *Micromanufacturing Engineering and Technology*, 61–80. <https://doi.org/doi:10.1016/b978-0-323-31149-6.00003-7>.
- 7 Rohkamm E., Spemann D., Scholze F. & Frost F. (2021) Characterization of an RF excited broad beam ion source operating with inert gases, *Journal of Applied Physics*, 129(22), 223305. <https://doi.org/doi:10.1063/5.0052758>.
- 8 Weiser M. (2009). Ion beam figuring for lithography optics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 267(8-9), 1390–1393. <https://doi.org/doi:10.1016/j.nimb.2009.01.051>.
- 9 Sobolewski M.A., J. K. Olthoff and Y. Wang. (1999) Ion energy distributions and sheath voltages in a radio-frequency-biased, inductively coupled, high-density plasma reactor, *J. Appl. Phys.* 85, 3966–3975.
- 10 Woodworth J.R., M.E. Riley, D.C. Meister, B.P. Aragon, M.S. Le and H. H. Sawin. (1996) Ion energy and angular distributions in inductively coupled radio frequency discharges in argon, *J. Appl. Phys.* 80, pp.1304–1311.
- 11 Chevolleau T. and Fukarek W. (2000) Ion flux, ion energy distribution and neutral density in an inductively coupled argon discharge, *Plasma Sources Sci. Technol.* 9, pp. 568–573.
- 12 Wen D.-Q., W. Liu, F. Gao, M.A. Lieberman and Y.-N. Wang. (2016) A hybrid model of radio frequency biased inductively coupled plasma discharges: Description of model and experimental validation in argon, *Plasma Sources Sci. Technol.* 25, 045009.

13 Orazbayev S.A., Henault M., Ramazanov T.S., Boufendi L., Batryshev D.G. & Gabdullin M.T. (2019) Influence of Gas Temperature on Nucleation and Growth of Dust Nanoparticles in RF Plasma. IEEE Transactions on Plasma Science, 1–5. <https://doi.org/doi:10.1109/tps.2019.2912805>.

14 Lin J., Orazbayev S., Hénault M., Lecas T., Takahashi K. & Boufendi L. (2017) Effects of gas temperature, pressure, and discharge power on nucleation time of nano-particles in low pressure C₂H₂/Ar RF plasmas, Journal of Applied Physics, 122(16), 163302. <https://doi.org/doi:10.1063/1.5007951>.

15 Beckers J., Stoffels W.W. & Kroesen G.M.W. (2009) Temperature dependence of nucleation and growth of nanoparticles in low pressure Ar/CH₄RF discharges, Journal of Physics D: Applied Physics, 42(15), pp. 155-206. <https://doi.org/doi:10.1088/0022-3727/42/15/155206>.

16 Kovacevic E., Berndt J., Strunskus T. & Boufendi L. (2012) Size dependent characteristics of plasma synthesized carbonaceous nanoparticles, Journal of Applied Physics, 112(1), 013303. <https://doi.org/doi:10.1063/1.4731751>.

Авторлар туралы мәліметтер

Жарылганов Бердібек (корреспонденция авторы)

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Әл-Фараби к-сі, 71, Алматы қ., 050000, Қазақстан

ORCID ID 0009-0001-1692-2427

E-mail: zharylgapovberdibek@gmail.com

Оразбаев Саги

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Әл-Фараби к-сі, 71, Алматы қ., 050000, Қазақстан

ORCID ID 0000-0002-7286-9990

E-mail: sagi.orazbayev@gmail.com

Информация об авторах

Жарылганов Бердібек (автор для корреспонденции)

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, ул. Аль-Фараби, 71, г. Алматы, 050000, Казахстан

ORCID ID 0009-0001-1692-2427

E-mail: zharylgapovberdibek@gmail.com

Оразбаев Саги

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, ул. Аль-Фараби, 71, г. Алматы, 050000, Казахстан

ORCID ID 0000-0002-7286-9990

E-mail: sagi.orazbayev@gmail.com

Information about authors

Zharylgapov Berdibek (corresponding author)

Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Street, 71, Almaty, 050000, Kazakhstan

ORCID ID 0009-0001-1692-2427

E-mail: zharylgapovberdibek@gmail.com

Orazbayev Sagi

Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Street, 71, Almaty, 050000, Kazakhstan

ORCID ID 0000-0002-7286-9990

E-mail: sagi.orazbayev@gmail.com

УДК 67.02
МРНТИ 67.09.55
<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-13-26>

Темірхан М.С.

ТОО «Институт новых материалов», 050062, г. Алматы, Казахстан
E-mail: maksat.temirkhan@nu.edu.kz

АНАЛИЗ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ ЛЮКОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ ПОЛИЭФИРНОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА (SMC), ЧЕРЕЗ ИСПЫТАНИЯ НА ИЗГИБ И СИМУЛЯЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация. Настоящая научная статья посвящена исследованию и моделированию композитных крышек люков из полиэфирного стеклопластика, которые являются альтернативой традиционным металлическим крышкам. Введение этих заменителей обусловлено проблемами, связанными с коррозией и кражами стальных и чугунных крышек, а также с их недостаточной устойчивостью к химическим веществам. Крышки люков, изготовленные из полиэфирного стеклопластика, обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционными металлическими крышками. Они обеспечивают высокое соотношение прочности и жесткости к массе, что делает их легкими и удобными в установке. Этот материал также обладает высокой стойкостью к коррозии, что значительно продлевает срок его службы. Несмотря на преимущества композитных крышек люков, исследования, связанные с их моделированием, симуляцией и механическими испытаниями, остаются недостаточными. В данной статье представлены результаты исследования, в котором крышка люка была изготовлена из двух слоев полиэфирного листового пресс-материала с использованием дополнительного ребра жесткости. Далее проводились испытания на изгиб, а полученные результаты были проанализированы с помощью симуляции метода конечных элементов (МКЭ). Целью данного исследования являлось подтверждение валидности модели, построенной для композитных крышек люков, а также сопоставление результатов с экспериментальными данными по деформациям. Полученные результаты имеют важное практическое значение для дальнейшего развития и оптимизации конструкции композитных крышек люков, а также для повышения их надежности и долговечности.

Ключевые слова: крышки люков, полиэфирный-листовой пресс-материал, армирование стекловолокном, сэндвич-композит, метод конечных элементов.

Темірхан М.С.

«Жаңа материалдар институты» ЖШС, 050062, Алматы, Қазақстан
E-mail: maksat.temirkhan@nu.edu.kz

ІІЛУ СЫНАҚТАРЫ ЖӘНЕ СОҢҒЫ ЭЛЕМЕНТТЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ АРҚЫЛЫ ПОЛИЭФИРЛІ ШЫНЫ ТАЛШЫҚТАН (SMC) ЖАСАЛҒАН ОҢТАЙЛАНДЫРЫЛҒАН ЛЮКТЕРДІ ТАЛДАУ

Аңдатпа. Бұл ғылыми мақала дәстүрлі металл кәріз қақпақтарына балама болып табылатын шыны талшықтарымен нығайтылған полиэфирден жасалған композиттік люк қақпақтарын зерттеуге және модельдеуге бағытталған. Болат пен шойыннан жасалған кәріз қақпақтарының тоттануы және ұрлануы, сондай-ақ олардың химиялық заттарға жеткіліксіз төзімділігі алмастырғыштардың пайда болуының негізгі себептері. Полиэфирлі шыны-пластиктан жасалған люк қақпақтары дәстүрлі металл қақпақтармен салыстырғанда бірқатар артықшылықтарға ие. Олар жоғары беріктік пен салмақ қатынасын қамтамасыз етеді. Бұл оларды орнатуды оңай және ыңғайлы етеді. Бұл материал сонымен қатар коррозияға жоғары төзімділікке ие, бұл оның қызмет ету мерзімін едәуір ұзартады. Композиттік люк қақпақтарының артықшылықтарына қарамастан, оларды модельдеуге және механикалық сынауға қатысты зерттеулер жеткіліксіз болып қала береді. Бұл мақалада, люк қақпағын әзірлеу үшін қосымша қаттылық қабырғасы орнатылып, екі түрлі полиэфирлі қаңылтыр қолданылды. Люк қақпақтары механикалық сынақтардан өткізілді және шекті элементтер әдісі көмегімен талданды. Нәтижелердің және құрастырылған модельдің дұрыстығын растау үшін эксперимент барысында алынған деформация нәтижелері шекті элементтер әдісі нәтижелерімен салыстырылды. Алынған нәтижелер композиттік люк қақпақтарының дизайнын одан әрі дамыту және оңтайландыру, сондай-ақ олардың сенімділігі мен беріктігін арттыру үшін маңызды практикалық мәнге ие.

Тірек сөздер: люк қақпақтары, шыны талшықтарымен нығайтылған полиэфир, сэндвич композиті, шекті элементтер әдісі.

Temirhan M.S.

“Institute of New Materials” LLP, 050062, Almaty, Kazakhstan

E-mail: maksat.temirkhan@nu.edu.kz

ANALYSIS OF OPTIMIZED MANHOLE COVERS MADE OF GLASS-REINFORCED POLYESTER (SMC) THROUGH BENDING TESTS AND FINITE ELEMENT SIMULATIONS

Abstract. This scientific article is devoted to the study and modeling of composite manhole covers made of polyester fiberglass, which are an alternative to traditional metal covers. These substitutes were introduced due to the problems associated with corrosion and theft of steel and cast iron manhole covers, as well as their insufficient resistance to chemicals. Manhole covers made from fiber reinforced plastic have a number of advantages over traditional metal covers. They provide a high strength-to-weight ratio, making them easy and comfortable to install. This material also has a high resistance to corrosion, which greatly extends its service life. Despite the advantages of composite manhole covers, studies related to their mechanical testing and simulations remain insufficient. This article presents the results of a study in which a manhole cover was made from two layers of polyester sheet press material using an additional stiffener. Then, bending tests were carried out, and the results were analyzed using finite element method (FEM) simulation. The purpose of this study was to confirm the validity of the model built for composite manhole covers, as well as to compare the results with experimental data on deformations. The results obtained are of great practical importance for the further development and optimization of the design of composite manhole covers, as well as for improving their reliability and durability.

Key words: manhole covers, glass-fiber reinforced polyester sheet press material, sandwich composite, finite element method.

Список сокращений и специальных терминов

SMC – Sheet Moulding Compound. Полиэфирный листовой пресс-материал;

GRC – Glass fiber Reinforced Concrete. Бетон, армированный стекловолокном;

GRP – Glass fiber Reinforced Plastic. Пластик, армированный стекловолокном;

CSM – Chopped Strand fiberglass Mat. Мат из рубленого стекловолокна;

MAT – Matted Fiberglass. Матовое стекловолокно, полученное путем рубки; стекловолокна типа E;

МКЭ (FEM) – Finite Element Method. Метод конечных элементов;

ISO – International Organization for Standardization. Международная организация стандартизации;

UTS – Universal Testing Machine. Универсальная машина для статических испытаний.

1. Введение

В области гражданского строительства, а именно в изготовлении трубопроводов, применяемых для подачи и транспортировки питьевой воды, химических установок для перекачки агрессивных жидкостей и систем канализации для сточных вод, использование пластика, армированного стекловолокном, уже не является новинкой [1]. В таких стеклопластиковых трубах для склеивания стеклянных волокон обычно применяются термореактивные смолы, такие как полиэфирные, винилэфирные и эпоксидные [2]. Гибкие композитные трубы из высокотемпературного полиэтилена, армированные арамидными волокнами, обладают термостабильностью при температуре ниже 95 °С и внутреннем давлении ниже 4 МПа [3]. Готовые элементы, такие как крышки люков для водопроводных и канализационных сетей или пешеходные дорожки, также производятся с использованием цементных композитов, армированных волокном, и композитов на основе термопластичных отходов с армированием из литейного песка и стали [4].

В последние годы композитные крышки люков и крышки резервуаров из композитных материалов широко применяются для обеспечения доступа к системам центрального теплоснабжения, системам транспортировки жидкостей, канализационным системам и геотермальным установкам [5]. В коррозионных средах традиционные крышки люков, изготовленные из материалов, таких как сталь, литая сталь и железобетон, часто заменяются композитными материалами нового поколения, такими

как GFRP, для решения проблем коррозии. Крышки люков, изготовленные из композитных материалов, имеют множество преимуществ по сравнению с металлическими крышками. Они обеспечивают высокое соотношение прочности и жесткости к массе, а также обладают легкостью, что позволяет справиться с их установкой одному человеку. Кроме того, они характеризуются высокой стойкостью к химическим веществам (коррозии), обладают электроизоляционными свойствами и обеспечивают значительное снижение теплопередачи, защищая пешеходов от воздействия подземной среды. Они также генерируют меньше шума при движении пешеходов или автомобилей по сравнению с чугунными покрытиями [5].

Композитные материалы сложные в переработке, не имеют перепродажной стоимости, что исключает риск кражи и связанных с ней случаев серьезных аварий и травм, вызванных отсутствием крышек люков. Еще одним преимуществом использования стеклопластика для изготовления покрытий является то, что такие материалы практически не мешают сигналам беспроводной связи в случае защитных применений электрической коммутации для технологии интеллектуальных сетей [1]. Стеклопластики, применяемые при создании крышек для люков, подвержены воздействию условий окружающей среды, таких как влажность, температурные циклы, ультрафиолетовое излучение. Это объясняется тем, что свойства полимерной матрицы меняются под долгосрочным влиянием окружающей среды [6]. Для винилэфирной смолы наблюдается увеличение некоторых характеристик (степень сшивки, температура стеклования, прочность на растяжение) при выдержке в атмосферных условиях до 12 месяцев, однако длительное воздействие приводит к небольшому снижению показателей [7].

Композитные материалы на основе полиэфирных смол, произвольно армированных стекловолокном (SMC), демонстрируют стабильные механические свойства даже после длительного контакта с водой [8]. При этом после погружения полиэфирной смолы в воду более чем на год отмечается незначительное снижение модуля изгиба E на 5% и прочности на изгиб на 3,2% [8]. При аналогичной продолжительности погружения водой винилэфирного композита модуль упругости при изгибе и предел прочности при изгибе снижаются на 6,7 и 12,2% соответственно [8]. В случае стеклопластика на основе эпоксидной смолы подобные условия приводят к уменьшению механических свойств: модуль упругости при изгибе снижается на 22%, а предел прочности при изгибе – на 31,25% [8]. Такие результаты указывают на то, что полиэфирную смолу можно использовать при изготовлении труб или крышек люков, используемых в канализационных системах. Снижение механических свойств полимерной матрицы, армированной стекловолокном, основывается на деградации поверхности соединения стекловолокна и матрицы, а также самой матрицы [8]. Исследования указывают на важность учета анизотропии композиционных материалов и стыков между сегментами при проектировании и анализе надежности композитных крышек [9].

В этой работе был спроектирован новый люк, сделанный из трехслойного композита на основе полиэфирного стеклопластика с дополнительным ребром жесткости, чтобы численно оценить валидность использования подобных материалов для производства люков.

2. Основные положения

Цель исследования. Чтобы использовать новый многослойный композит для изготовления крышек люков, необходим тщательный анализ напряжений и деформаций в механически нагруженных крышках. Следовательно, основной целью данного исследования является анализ напряжений и деформаций, возникающих в крышке люка, изготовленной из многослойного композитного материала, используя метод конечных элементов (МКЭ). Также целью является валидация модели, созданной МКЭ, через экспериментальные тестирования фактического люка.

Новизна проекта. В области гражданского строительства уже давно применяется пластик, армированный стекловолокном, для изготовления трубопроводов и других систем. Однако в данном исследовании был разработан новый трехслойный композитный материал для люков на пешеходных линиях. Он также может быть использован для дорожных люков с армированием стальной сеткой. Многослойный композит состоит из листов полиэфирной смолы, армированных стекловолокном. Новизной данного исследования является многослойная композитная структура и топология с использованием ребра жесткости для повышения прочности. Композитные материалы из полиэфирной смолы также обладают большей пластичностью перед потерей целостности [8].

3. Материалы и методы

Крышки люков представляют собой круглые или квадратные пластины, которые составляют покрытие канализационных систем. Как правило, они располагаются на тротуарах или дорогах и поэтому должны быть очень прочными и долговечными, чтобы выдерживать нагрузку и воздействие на них постоянного веса транспортных средств. Обычно они изготавливаются из чугуна, а иногда и из бетона, чтобы выдерживать большие нагрузки. Обычно они весят около 50 кг в зависимости от используемого материала и размера и часто имеют круглую форму.

Крышки люков имеют определенные стандарты и спецификации, которых необходимо придерживаться независимо от материала, размера и формы крышки люка. Стандарты, на которые следует обратить внимание, включают:

- BS EN 124: европейский стандарт для крышек желобов и люков для транспортных средств и пешеходов (послужил основой и руководством для этой работы) [10].
- BS 497: спецификация для крышек люков, решеток дорожных водостоков и рам для дренажа.
- BS 7903: руководство по выбору и использованию крышек желобов и люков для установки на шоссе.
- BS PAS 25: пластмассовые рамы для использования в верхушках водостоков и люков в пешеходных зонах.
- ASTM F1142-98: стандартные технические условия для сборки крышки люка на болтах масло- и водонепроницаемой.
- ASTM F1143-98: стандартные технические условия для сборки крышки люка, закрепленной болтами, приподнятой, масло- и водонепроницаемой.

Крышки люков, предназначенных для входа человека, должны соответствовать требованиям безопасности, действующим в месте установки. Как правило, диаметр люка должен быть не менее 600 мм. Крышки люков должны быть подвергнуты нагрузочным испытаниям, чтобы убедиться в их долговечности и прочности.

3.1. Оптимизированная геометрия крышки канализационных люков

Оптимизация геометрии люков предполагает проектирование их формы и структуры с целью достижения максимальной прочности, долговечности и эффективности. Композитные люки обычно изготавливаются из армированных материалов, таких как стекловолокно или углеродное волокно, которые обеспечивают выдающееся соотношение прочности и веса по сравнению с традиционными материалами, такими как бетон или чугун. Однако для достижения максимальной прочности канализационных люков необходимо правильно подобрать оптимальную геометрию в соответствии с выбранными материалами.

1. Круглая форма: композитные люки часто имеют конусообразную или цилиндрическую форму, поскольку эти формы распределяют нагрузки более эффективно, обеспечивая структурную целостность и минимизируя концентрацию напряжений. Более того, такая конструкция также обеспечивает удобство при демонтаже и установке.

2. Ребристая структура: геометрия композитных люков включает в себя внутренние ребра или арматурные конструкции. Эти элементы повышают жесткость и несущую способность, предотвращая деформации и обеспечивая долговременную прочность. Был проведен ряд исследований, где увеличение количества радиальных ребер на люках влияет на уменьшение максимального напряжения. Вдобавок анализ результатов максимального прогиба в центре крышки показывает, что при увеличении радиуса внутреннего кругового ребра максимальное вертикальное смещение уменьшается. В нашем исследовании оптимальная геометрия канализационного люка базируется на результатах следующей статьи [11].

3. Конструкция фланца и кромки: верхние отверстия композитных люков обычно имеют фланец или выступающую кромку. Такая конструкция обеспечивает простоту установки и надежное соединение с крышкой люка, предотвращая проникновение воды и повышая общую герметичность.

4. Отверстия для доступа и каналы: конструкция композитных люков предусматривает соответствующие отверстия и каналы для доступа в целях обслуживания и осмотра. Эти отверстия обеспечивают легкий доступ к подземным коммуникациям, таким как канализационные линии или электрические кабели, что упрощает ремонт и техническое обслуживание.

5. Противоскользящие элементы: для повышения безопасности композитные люки часто оснащаются противоскользящими элементами на поверхности, такими как текстурированные рисунки или покрытия. Это помогает предотвратить несчастные случаи, обеспечивая лучшее сцепление для рабочих или пешеходов, которые могут ходить по люку [12].

6. Коррозионностойкие материалы: композитные люки известны своей превосходной устойчивостью к коррозии, что делает их идеальными для использования в суровых условиях. Оптимизированная геометрия обеспечивает покрытие материалами всех участков, подверженных коррозии, таких как стыки и края, что обеспечивает долговременную прочность и снижает потребность в техническом обслуживании.

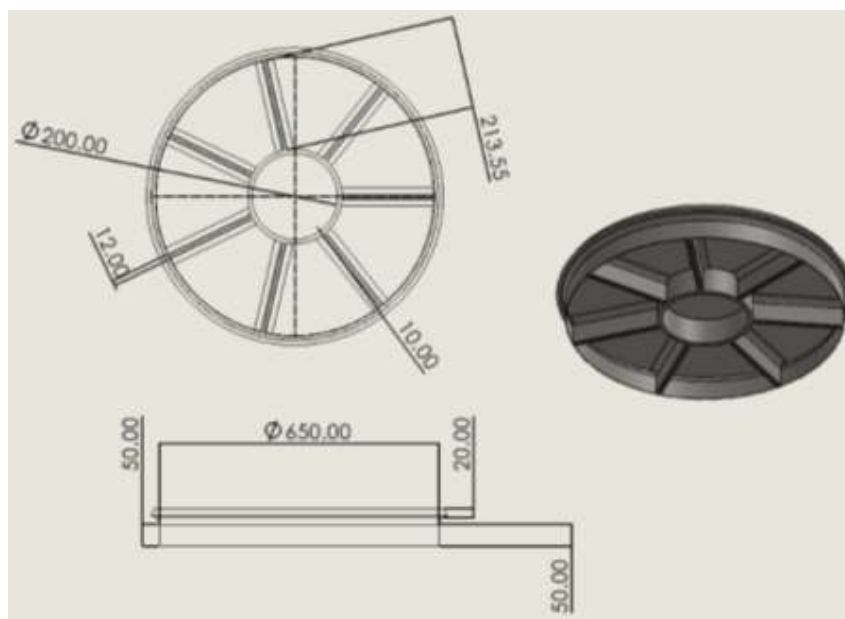


Рисунок 1 – Геометрия люка

При проектировании композитных люков крайне важно учитывать факторы, такие как требования к нагрузке, условия движения, состояние почвы, и любые специфические требования проекта. Оптимизированная геометрия гарантирует, что композитные люки эффективно справятся с внешними нагрузками, обеспечивая долговечное и надежное решение для доступа к подземным коммуникациям. Финальная геометрия канализационного люка включает в себя семь радиальных ребер для прочности, с фланцами для достижения герметичности и с узорами на поверхности для достижения противоскользящих элементов, как представлено на рисунке 1.

3.2. Материалы

В этой работе в качестве основы для люка был использован полиэфирный листовой пресс-материал (SMC), армированный стекловолокном. Стекловолокно – это продукт, изготовленный из очень тонких стеклянных волокон. Он стал полезным и эффективным благодаря своей способности заменить асбест во многих областях применения в качестве экологически чистой альтернативы. Непрерывное стекловолокно используется в электроизоляции, а также в качестве армирующего агента для армирования цемента и пластмассы.

Есть несколько видов/классов стекловолокна: A, AR, C, E, S и т.д. Эти наиболее распространенные типы характеризуются следующим образом [13]:

стекло A: щелочесодержащее стекло, используемое для производства волокна;

стекло E: обычное стекло, используемое в непрерывных стеклянных волокнах, обладает высоким электрическим сопротивлением и содержит щелочи менее 1%;

стекло S: характеристики аналогичны стеклу E, но имеют более высокую прочность.

Эти различные классы основаны на производственном процессе стекловолокна. Однако при выборе стекловолокна в качестве композитного материала необходимо сначала оценить желаемые свойства. Например, для GRC необходимо использовать стекловолокна типа E или стекла AR, которые либо обладают низкой щелочностью, либо устойчивы к щелочным средам в связи с реактивностью, возникающей при взаимодействии со щелочными компонентами цемента [14]. Если продукт требует высокой прочности на растяжение и способен выдерживать большие нагрузки, то, вероятно, следует использовать стекловолокно типа S [14]. Крайне важно оценить характеристики и свойства желаемого изделия, чтобы правильно понять, что нужно для армирования.

Пластмассовые смолы, как правило, обладают достаточной прочностью на сжатие, но довольно слабы на растяжение. В то время как стеклянные волокна прочные на растяжение, но слабые на прочность сжатия. В этом отношении вместе они могут сопротивляться сжимающим и растягивающим нагрузкам [15]. Крошечные нити из стекловолокна предотвращают образование трещин или дефектов внутри продукта и его разрушение в результате.

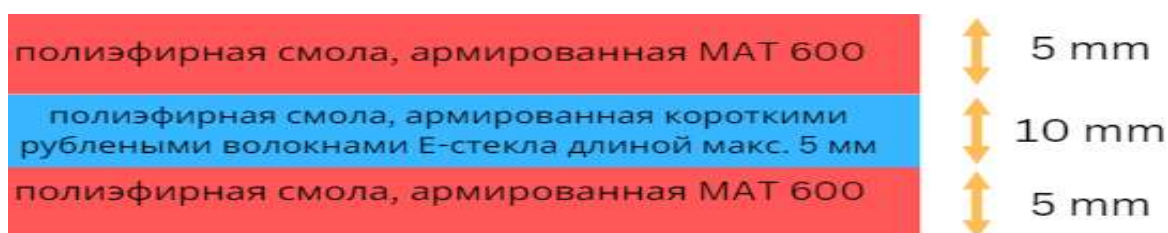


Рисунок 2 – Структура люка

На рисунке 2 изображена структура композитного материала, используемого для изготовления крышки люка для этой работы. Сэндвич-композит содержит три слоя в поперечном сечении: сердцевина сделана из подслоев полиэфирной смолы, армированной MAT 600, и с двух сторон его покрывает два слоя полиэфирной смолы, армированных короткими рублеными волокнами E-стекла длиной макс. 5 мм. Ребро жесткости полностью сделано из полиэфирной смолы, армированной MAT 600. Материал MAT представляет собой стекловолоконный материал с рублеными нитями, также известный как нетканое полотно. Плотность этого материала составляет 600 г/м². Он представляет из себя нетканый материал, изготовленный из E-стекловолокна путем случайного и равномерного распределения непрерывных ровингов нитей длиной 50 мм, сочетаемых с полиэфирным связующим в порошковой форме. Он подходит для использования в ручном формовании стеклопластика, такого как различные листы, панели, корпуса лодок, а также для создания коррозионноустойчивых транспортных средств.

Согласно коммерческому производителю, используемый SMC материал (полиэфирная смола, армированная MAT 600) имеет следующие свойства [16]:

Таблица 1 – Свойства SMC армированный MAT 600

№	Свойство	Значение
1	Плотность	11,90 г/см ³
2	Прочность на изгиб	115 МПа
3	Модуль изгиба	14.000 МПа
4	Коэффициент Пуассона	0.324
5	Прочность на растяжение	86 МПа
6	Ударная вязкость	120 кДж/м ²
7	Дугостойкость	180 сек

8	Огнестойкость по UL 94 HB	V0 на 1,6 мм
9	Теплостойкость	250 °C
10	Водопоглощение	0,03 – 0,05 %

Как известно, при проведении конечно-элементного анализа крышки люка необходимо определить механические свойства материалов, составляющих каждый слой. Для определения механических свойств материалов, соответствующих каждому слою, проводились экспериментальные испытания стандартизированными образцами в соответствии с европейскими стандартами (ISO 14125), учитывающими форму и размер образцов. Для создания композитных образцов, армированных либо материалом МАТ 600, либо короткими рублеными волокнами из стекловолокна типа Е, сначала были изготовлены две композитные плиты размером 400×300×6,5 мм³. Содержание стекловолокна в композите полиэфирной смолы, армированном МАТ 600, составляло 42 массовых процента. Содержание стекловолокна в композите, армированном короткими рублеными стекловолокнами, составляло 30 массовых процента. Затем из каждого типа композитной плиты, армированной либо материалом МАТ 600, либо короткими рублеными стекловолокнами, было вырезано по десять образцов для испытания на изгиб методом трех точек.

3.3. Процесс изготовления

Процесс производства имеет решающую важность в определении механических свойств люка, изготовленного из композитных материалов. Сначала на специально подготовленную форму, смазанную воском 827, помещается слой полиэстера, армированного МАТ 600. Затем на форму были нанесены слои полиэфирной смолы, армированные рублеными стекловолокнами. Затем в соответствии с рисунком 1 на форму наносился последний слой крышки люка. Ламинированная композитная крышка люка была затем запрессована гидравлическим прессом. После того как он был уплотнен, он был оставлен для затвердевания примерно на 30 минут, а затем удален, чтобы продолжить сушку и отверждение.



Рисунок 3 – Крышка люка после прессы

3.4. Тестирование

Метод измерения, используемый для измерения и регистрации деформаций, возникающих в крышке люка, основан на методе электрореактивной тензометрии.



Рисунок 4 – Испытания крышки люка на механическую прочность на машине UTS

Давление в 2000 Н было оказано на изготовленный люк с середины, вертикально вниз, как показано на рисунке 4. По всей толщине люка были установлены тензодатчики, которые высчитывали деформацию люка при разных значениях давления. В результате был построен график силы против максимальной деформации.

4. Результаты и обсуждение

4.1. Анализ канализационного люка методом конечных элементов

Модель крышки люка была протестирована конечно-элементным анализом с использованием коммерческого программного обеспечения Comsol Multiphysics. Конечно-элементная модель крышки люка представлена на рисунке 6. Геометрия была создана в SolidWorks и экспортирована с помощью Livelink для проведения анализа МКЭ. Для моделирования композитных материалов и расчета действующих напряжений и сил на крышку люка в Comsol использовались две физические модели: Solid Mechanics и Layered Shell.

Для описания поведения твердых материалов при механических нагрузках, включая упругую и пластическую деформацию, анализ методом конечных элементов требует определения соответствующих граничных условий, которые описывают напряжение, деформацию и их взаимосвязь. Эти условия и начальные параметры обеспечивают основу для моделирования и анализа механической реакции материалов с использованием физического модуля Comsol Solid Mechanics.

Конструкция крышки люка соответствует Госстандарту Республики Казахстан (2013) [17], где устанавливается расчетная нагрузка в размере 5.3 фунта на поверхность обшивки люка. Композитная версия стальной крышки люка отвечает жесткостным и прочностным требованиям Комитета технического регулирования и метрологии РК [17], включая максимальный прогиб в пределах 70 мм и коэффициент безопасности 3,3 для обеспечения структурной прочности. Переходя к геометрии, канализационный люк технологически ограничен максимальной толщиной композитной оболочки в 20 мм и диаметр люка должен быть более 600 мм [18]. Прочностной анализ композитных оболочек проводится с использованием критерия максимальных напряжений (уравнение 1) [19].

$$\xi = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{XT}^f}{\sigma_{XT}^f} \text{ or } \frac{\sigma_{XC}^f}{\sigma_{XC}^f} \\ \frac{\sigma_{YT}^f}{\sigma_{YT}^f} \text{ or } \frac{\sigma_{YC}^f}{\sigma_{YC}^f} \\ \frac{\sigma_{XT}^f}{\sigma_{YT}^f} \text{ or } \frac{\sigma_{XC}^f}{\sigma_{YC}^f} \end{array} \right. \quad (1)$$

Предел прочности слоя оболочки при растяжении (сжатии) вдоль и поперек волокон представлен соответственно σ_{XT}^f и σ_{YT}^f (σ_{XC}^f и σ_{YC}^f). Прочность на сдвиг слоя в его плоскости обозначается σ_{XY}^f . Компоненты тензора напряжений σ_{XT} , σ_{YT} (σ_{XC} , σ_{YC}) и σ_{XY} определяются относительно той же системы координат, что и заданные предельные прочности слоя. Значение $\xi \geq 0,3$ (с учетом коэффициента безопасности) свидетельствует о соответствии критерию разрушения.

Используя граничные условия метода конечных элементов (МКЭ), канализационный люк с радиусом $R=650$ мм и простым подкрепленным краем был подвергнут равномерной постоянной нагрузке q в области квадрата, расположенного в центре канализационного люка (см. рисунок 5 а и б). Условие равновесия для радиуса r элемента пластины, как показано на рисунке 5, было использовано для определения внутренней поперечной силы Q (уравнение 2) [20].

$$Q = \frac{-\pi r^2 q}{2r\pi} \quad (2)$$

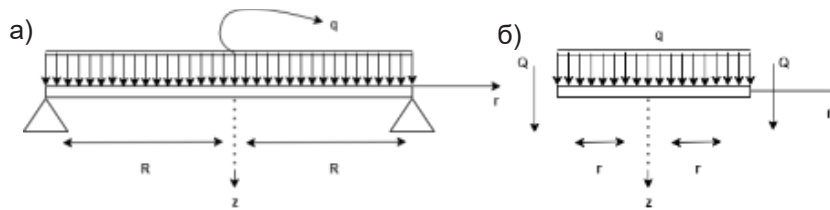


Рисунок 5 – а) конечно-элементная модель крышки люка и б) конечно-элементная модель участка приложенной силы

В результате симуляции каждый узел элемента имеет шесть степеней свободы. Конечно-элементная модель, используемая в анализе, состоит из 63 102 элементов и 18 126 узлов. Конкретно 5586 узлов соответствуют крышке, 669 узлов соответствуют опоре и 1022 узла соответствуют пуансону. Для построения данной модели использовалась сетка, разработанная в программе Comsol Solid Mechanics.

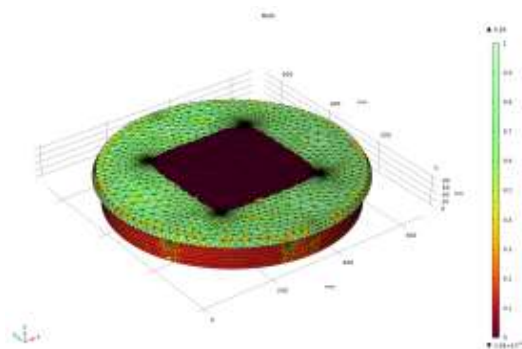


Рисунок 6 – Конечно-элементная модель

На рисунке 7 (а и б) представлены граничные условия и внешняя нагрузка, которая прикладывается к модели. Внешняя сила постепенно передается к блоку (участок зеленого цвета), а затем через контактную область между блоком и композитной крышкой доходит до люка. В конечно-элементной модели определен контакт «узел-поверхность» между крышкой и блоком, а также между крышкой и опорой. В дополнение к этому внешней боковой силой канализационного люка определен как граничное условие в связи с ограничением люка грунтом.

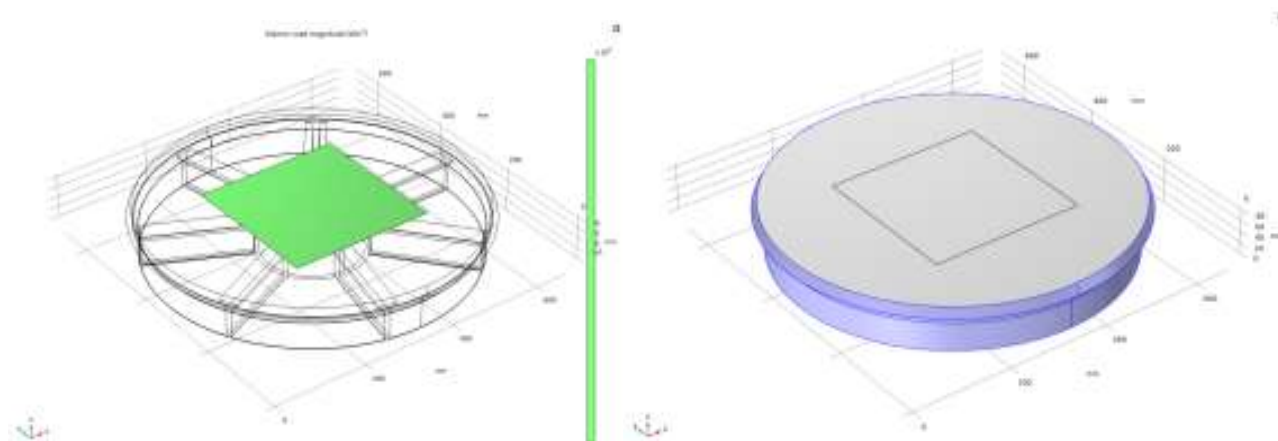


Рисунок 7 – а) участок приложенной силы (левая сторона)
и б) граничные условия и внешняя нагрузка (правая сторона)

На рисунке 8 (а и б) показаны результаты деформации и напряжения крышки канализационного люка. Поскольку внешняя сила была приложена в центре объекта, основные изменения были замечены в соответствующей области. Однако следует отметить, что шкала деформации представлена в -9 степени, указывая на незначительные изменения материала. Следовательно, согласно результатам симуляции, предложенная модель канализационного люка соответствует государственным стандартам и выдерживает соответствующую нагрузку с минимальными деформациями.

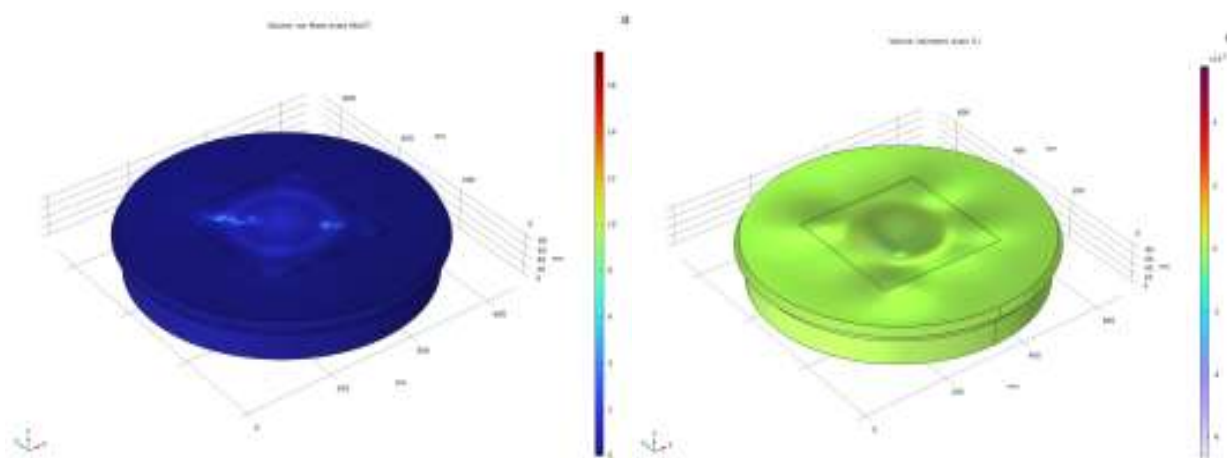


Рисунок 8 – а) изометрический вид результатов напряжения
и б) изометрический вид результатов деформации

4.2 Сравнительный анализ экспериментальной и компьютерной модели

Кривые сила – деформация, полученные в ходе экспериментального испытания, были сравнены с кривыми, полученными в результате анализа МКЭ, как показано на рисунке 9. Значения, полученные из эксперимента и МКЭ, показывают похожую тенденцию, что демонстрирует валидность созданной модели.

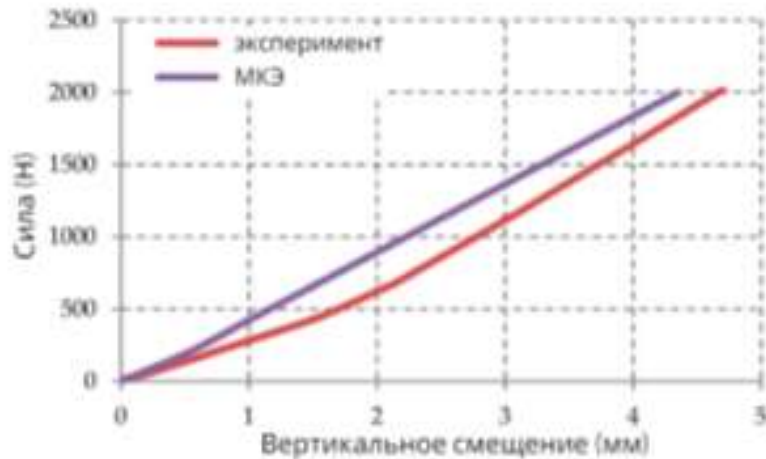


Рисунок 9 – Результаты: сила против смещения

Чтобы еще больше подчеркнуть корреляцию между результатами экспериментального испытания и МКЭ для исследуемой круглой композитной крышки люка, в данном исследовании сравниваются деформации, зарегистрированные при различных положениях датчика деформации: в радиальном и тангенциальном направлениях. Деформации в радиальном и тангенциальном направлениях, соответствующие каждому тензометрическому датчику, строятся против вертикальной деформации люка, вызванной вертикальной силой. Рисунки 10 и 11 демонстрируют сравнительные графики, полученные в радиальном и тангенциальном направлении по отношению к цилиндрической системе координат.

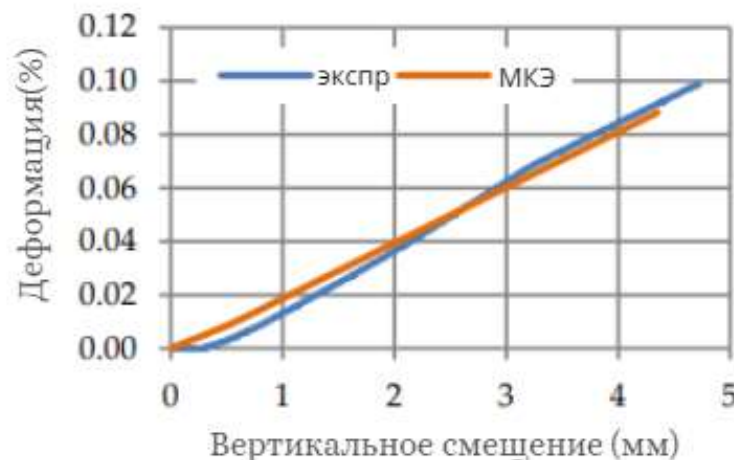


Рисунок 10 – Результаты: радиальная деформация против смещения

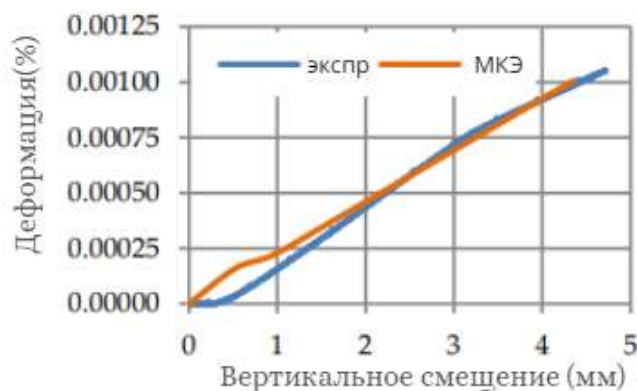


Рисунок 11— Результаты: тангенциальная деформация против смещения

5. Заключение

Схожая тенденция и большое количество почти одинаковых значений между экспериментальными данными по деформации и результатами МКЭ показывают валидность построенной модели МКЭ. Максимальная деформация люка была 0,165% в тангенциальном направлении и 0,111% в радиальном направлении, что показывает: значения деформаций были в пределах приемлемого. Анализ МКЭ показывает максимальное напряжение 12,75 МПа в анализируемой крышке люка, соответствующее полиэфирной смоле МАТ 600. Это напряжение значительно ниже среднего максимального напряжения изгиба 49 МПа для композита МАТ 600 стекловолокно/полиэстер. Композитные крышки люков демонстрируют высокую прочность, способную выдерживать внешние силы, превышающие 2000 Н. Это делает их идеальными для использования не только в водопроводных и канализационных сетях, но и на городских улицах с пешеходным движением. Однако для обеспечения безопасности на улицах с интенсивным транспортным движением требуется дополнительный анализ, исходя из реальных данных о нагрузках от автотранспорта. Это позволит определить максимальную грузоподъемность композитных крышек. Возможно, потребуется внести изменения в геометрию или структуру материала композита, чтобы уверенно обеспечить его способность выдерживать такие нагрузки.

Таким образом, композитные крышки люков предлагают значительные преимущества, включая высокую прочность и пригодность для использования как в водопроводных и канализационных сетях, так и на городских улицах с пешеходным движением. С дополнительным анализом и оптимизацией топологии они могут стать надежным решением для городских улиц с интенсивным транспортным движением.

Список литературы

- 1 Rafiee R. Simulation of the long-term hydrostatic tests on Glass Fiber Reinforced Plastic pipes / R. Rafiee, B. Mazhari // *Composite Structures*. – 2016. – № 136. – С. 56–63.
- 2 Environmental life cycle analysis of pipe materials for sewer systems / E. Vahidi, E. Jin, M. Das [и др.] // *Sustainable Cities and Society*. – 2016. – № 27. – С. 167–174.
- 3 Experimental study on the thermostable property of aramid fiber reinforced PE-RT pipes / G. Qi, Y. Wu, D. Qi [и др.] // *Natural Gas Industry B*. – 2015. – Т. 5. – № 2. – С. 461–466.
- 4 El Haggag, S. Reinforcement of thermoplastic rejects in the production of manhole covers / S. El Haggag, L. El Hatow // *Journal of Cleaner Production*. – 2009. – Т. 4. – № 17. – С. 440–446.
- 5 Weight reduction and strengthening of marine hatch covers by using composite materials / B.E. Tawfik, H. Leheta, A. Elhewy, T. Elsayed // *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. – 2017. – Т. 2. – № 9. – С. 185–198.

- 6 Cerbu C. Moisture effects on the mechanical behavior of fir wood flour/glass reinforced epoxy composite / C. Cerbu, C. Cosereanu // *BioResources*. – 2016. – Т. 4. – № 11. – С. 1. ISSN 8364-8385
- 7 Mezghani, K. Long term environmental effects on physical properties of vinylester composite pipes / K. Mezghani // *Polymer Testing*. – 2012. – Т. 1. – № 31. – С. 76–82.
- 8 Effect of Moisture on GFRP Composite Materials / N. Sateesh, P.S. Rao, D.V. Ravishanker, K. Satyanarayana // *Materials Today: Proceedings*. – 2015. – Т. 4-5. – № 2. – С. 2902–2908.
- 9 Bondyra A. Design of composite tank covers / A. Bondyra, M. Klasztorny, A. Muc // *Composite Structures*. – 2015. – № 134. – С. 72–81.
- 10 BS EN 124:1994 Gully Tops and Manhole Tops for Vehicular and Pedestrian Areas. Design Requirements, Type Testing, Marking, Quality Control : дата введения 01-01-1994. – London : BSI Standards, 1994. – 40 с.
- 11 An auto lifting device to lift manhole cover with ergonomics consideration / W.N.A.W. Draman, D.L Majid, M.I. Ishak [и др.] // *AIP Conference Proceedings*. – 2017. – № 020067. – С. 1.
- 12 Калашникова М.С. Сравнительный анализ изображений на наземных люках зарубежных стран / М.С. Калашникова, В.П. Калашников // *Вестник ПНИПУ. Машиностроение*. – 2010. – Т. 25. – № 1. – С. 86–92. ISSN 2224-9877.
- 13 Humphreys J. The manufacturing technology of continuous glass fibres: K. L. Loewenstein Elsevier Scientific Publishing Company 300 pp £10.60 / J. Humphreys // *Composites*. – 1974. – Т. 6. – № 5. – С. 267.
- 14 Effect of fiber prestressing on mechanical properties of glass fiber epoxy composites manufactured by vacuum-assisted resin transfer molding / M. Mohamed, M.M. Selim, H. Ning, S. Pillay // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. – 2019. – Т. 1-2. – № 39. – С. 21–30.
- 15 Gotch T. The failure of reinforced plastics: Edited by F.L. Matthews. Published by Mechanical Engineering Publications Ltd, PO Box 24, Northgate Avenue, Bury St Edmunds IP32 6BW, UK. ISBN 0 85298 709 9/297, softcover, 74 pages. 21.00 (UK), 23.10 (rest of the world) / T. Gotch // *Reinforced Plastics*. – 1990. – Т. 5. – № 34. – С. 8.
- 16 Meyer, R. W Handbook of Polyester Molding Compounds and Molding Technology / R.W. Meyer. – New York : Springer, 2012. – 371 с. ISBN 978-1-4613-1961-0.
- 17 СТ РК 2384-2013. Люк смотровых колодцев и дождеприемник ливневых колодцев из композитных материалов: дата введения 2010-10-17. – Астана : Стандарт Республики Казахстан, 2013. – 20 с.
- 18 Hatow L. Utilization of thermoplastic rejects with different reinforcing elements in the production of manhole covers : специальность Environmental Engineering : Master Thesis / Hatow. – Cairo, 2013. – 122 с.
- 19 Chawla, K.K. Composite Materials: Science and Engineering / K.K. Chawla. – New York : Springer, 1998. – 475 с. – ISBN 978-1-4757-2966-5.
- 20 Optimization of the circular manhole cover made of ductile cast iron using the finite element method/ M. Lovrenić-Jugović, M. Glavaš, Z. Štrkalj [и др.] // *Machines. Technologies. Materials*. – 2018. – Т. 5. – № 12. – С. 225–233.

References

- 1 Rafiee R. and Mazhari B. (2016) *Composite Structures*, 136, pp. 56–63. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.058>
- 2 Vahidi E., Jin E., Das M., Singh M. and Zhao F. (2016) *Sustainable Cities and Society*, 27, pp. 167–174. <https://doi.org/10.1016/j.scs.2016.06.028>
- 3 Qi G., Wu Y., Qi D., Wei B., Li H., Ding N. and Cai X. (2015) *Natural Gas Industry B*, 2(5), pp. 461–466. <https://doi.org/10.1016/j.ngib.2015.09.023>
- 4 El Haggag S. and El Hatow L. (2009). *Journal of Cleaner Production*, 17(4), pp. 440–446. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2008.07.007>
- 5 Tawfik B. E., Leheta H., Elhewy A. and Elsayed. T. (2017) *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 9(2), pp. 185–198. <https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2016.09.005>
- 6 Cerbu C. and Cosereanu C. (2016) *BioResources*, 11(4). <https://doi.org/10.15376/biores.11.4.8364-8385>
- 7 Mezghani K. (2012) *Polymer Testing* 31(1), pp. 76–82. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2011.10.001>
- 8 Sateesh N., Rao P.S., Ravishanker D.V. and Satyanarayana K. (2015) *Materials Today: Proceedings*, 2(4–5), pp. 2902–2908. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2015.07.252>
- 9 Bondyra A., Klasztorny M. and Muc A. (2015) *Composite Structures*, 134, pp. 72–81. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.008>
- 10 Gully Tops and Manhole Tops for Vehicular and Pedestrian Areas: Design Requirements, Type Testing, Marking, Quality Control. Pretoria: SABS Standards Division (London, UK, 1994).
- 11 Draman W.N.A.W., Majid D.L., Ishak M.I., Rosli M.U., Lailina N.M. and Ismail, R.I., *AIP Conference Proceedings*, 020067, (2017). <https://doi.org/10.1063/1.5002261>
- 12 Kalashnikova M.S. and Kalashnikov B.P. (2010) *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroenie, materialovedenie*, 12(2), pp. 86–92

- 13 Humphreys J. (1974) Composites, 5(6), 267. [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(74\)90368-1](https://doi.org/10.1016/0010-4361(74)90368-1)
- 14 Mohamed M., Selim M. M., Ning H. and Pillay S. (2019) Journal of Reinforced Plastics and Composites, 39 (1–2), pp. 21–30. <https://doi.org/10.1177/0731684419868841>
- 15 Gotch T. (1990) Reinforced Plastics, 34(5). [https://doi.org/10.1016/0034-3617\(90\)90088-v](https://doi.org/10.1016/0034-3617(90)90088-v)
- 16 Meyer R.W. (1987) Handbook of polyester molding compounds and molding technology. (Springer, US)
- 17 Lyuk smotrovyyh kolodcev i dozhdepriemnik livnestochnyyh kolodcev iz kompozitnyh materialov. Tekhnicheskie usloviya. Standart Respubliki Kazakhstan, ST RK 2384 (2013).
- 18 Hatow L. (2007) Utilization of thermoplastic rejects with different reinforcing elements in the production of manhole covers, Master thesis. AUC Knowledge Fountain.
- 19 Chawla K.K. (2021) Composite materials: Science and engineering.
- 20 Lovrenić-Jugović M., Glavaš Z., Štrkalj A., Lj S. and Radišić F. (2018) Machines. Technologies. Materials, 12(5), pp. 225–233.

Информация об авторе

Максат Темирхан

PhD Назарбаев университета, научный сотрудник, ТОО «Институт новых материалов»,
ул. Кабдолова, 10, 050062, г. Алматы, Казахстан
ORCID ID: 0000-0001-6283-3401
E-mail: maksat.temirkhan@nu.edu.kz

Автор туралы мәлімет

Максат Темірхан

PhD Назарбаев Университеті, ғылыми қызметкер, «Жаңа материалдар институты» ЖШС, Кабдолов
көш., 10, 050062, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID: 0000-0001-6283-3401
E-mail: maksat.temirkhan@nu.edu.kz

Information about author

Maksat Temirhan

PhD Candidate Nazarbayev University, Research Assistant, Institute of New Materials LLP, Kabdolova
st. 10, 050062, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID: 0000-0001-6283-3401
E-mail: maksat.temirkhan@nu.edu.kz

UDC 537.311:322

IRSTI 29.19.22:47.09.48

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-27-35>

**Nussupov K.Kh.¹, Beisenkhanov N.B.^{1*}, Kukushkin S.A.², Sultanov A.T.¹, Keiinbay S.¹,
Shynybayev D.S.¹, Kusainova A.Zh.¹**

¹Kazakhstan-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan

²Federal State Budgetary Institution of Science “Institute of Problems of Mechanical Engineering,
Russian Academy of Sciences”, 199178, St. Petersburg, Russia

*E-mail: beisen@mail.ru

FORMATION OF CRYSTALLINE SiC IN NEAR-SURFACE SILICON LAYERS BY METHOD OF COORDINATED SUBSTITUTION OF ATOMS

Abstract. In this work, monocrystalline films of silicon carbide were synthesized on the surface of a Si(100) silicon wafer using the method of coordinated substitution of atoms. The films were synthesized at temperatures of 1200 °C and 1300 °C for 20 minutes in a CO gas flow at a pressure of 0.8 Pa. The effect of 1200–1300 °C temperatures on the formation of single- and polycrystalline layers, as well as nanostructured SiC phases in the near-surface region of silicon by the method of atom substitution, is analyzed. The formation of a high-quality crystalline silicon carbide film and the influence of synthesis conditions on the total volume of SiC structural phases, microstructure and nanostructure of the surface are shown. It was found that an increase in temperature from 1200 °C to 1300 °C led to a more intensive formation of silicon carbide and an increase in the number of Si–C bonds by 1.9 times due to an increase in the thickness of the synthesized silicon carbide layer. There is an increase in the proportion of the crystalline phase due to a more intense transformation of the nuclei of nanocrystals into micro- and nanocrystals. Intense processes of penetration of carbon atoms deep into silicon at a temperature of 1300 °C with amorphization of its structure and the formation of Si-C, which can transform into crystalline phases at temperatures above 1300 °C, are assumed. The proportion of the SiC crystalline phase increases to 50.2% of the film volume due to the intensive transformation of nanocrystal nuclei into micro- and nanocrystals. It has been experimentally shown that the formation of various SiC structures on Si (100) occurs in full accordance with the main principles of the method of coordinated substitution of atoms.

Key words: silicon carbide, structure, crystallization, synthesis, method of coordinated substitution of atoms.

**Нусупов К.Х.¹, Бейсенханов Н.Б.^{1*}, Кукушкин С.А.², Султанов А.Т.¹, Кейінбай С.¹,
Шыныбаев Д.С.¹, Кусайнова А.Ж.¹**

Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

Ресей ғылым академиясының Машина жасау мәселелері институтының Ғылым Федералдық
мемлекеттік бюджеттік мекемесі, 199178, Санкт-Петербург қ., Ресей

*E-mail: beisen@mail.ru

АТОМДАРДЫ СӘЙКЕС АЛМАСТЫРУ ӘДІСІ АРҚЫЛЫ КРЕМНИЙ ҚАБАТТАРЫНЫҢ БЕТҮСТІНЕ КРИСТАЛДЫҚ SiC ТҮЗІЛУІ

Аңдатпа: Бұл жұмыста Si(100) кремний тілігінің бетінде атомдарды сәйкес алмастыру әдісімен кремний карбидінің монокристалды қабықшалары синтезделді. Қабықшалар 0,8 Па қысымдағы СО газ ағынында 20 минут ішінде 1200 °C және 1300 °C температураларда синтезделді. 1200–1300 °C температураларының атомдарды алмастыру әдісімен кремнийдің бетке жақын аймағындағы моно және поликристалды қабаттардың, сондай-ақ нанокұрылымды SiC фазаларының түзілуіне әсері талданған. Жоғары сапалы кристалды кремний карбидті қабыршақтың түзілуі және синтез жағдайларының SiC құрылымдық фазаларының жалпы көлеміне, бетінің микроқұрылымы мен нанокұрылымына әсері көрсетілген. Температураның 1200 °C-тан 1300 °C-қа дейін жоғарылауы кремний карбидінің қарқынды түзілуіне және синтезделген кремний карбиді қабатының қалыңдығының ұлғаюына байланысты Si–C байланыстарының санының 1,9 есе артуына әкелетіні анықталды. Нанокристалдар ядроларының микро және нанокристалдарға неғұрлым қарқынды түрленуіне байланысты кристалдық фазаның үлес салмағының артуы байқалады. Көміртек атомдарының кремнийге 1300 °C температурада терең енуінің

қарқынды процестері оның құрылымының аморфизациялануы және 1300 °С жоғары температурада кристалдық фазаларға айналуы мүмкін Si-C байланыстарының түзілуі болып табылады. SiC кристалдық фазасының үлесі нанокристалдық ядролардың микро және нанокристалдарға қарқынды трансформациясы есебінен қабыршақтың көлемінің 50,2% дейін артады. Si (100) бетінде әртүрлі SiC құрылымдарының түзілуі атомдарды сәйкес алмастыру әдісінің негізгі принциптеріне толық сәйкес келетіні тәжірибе жүзінде көрсетілген.

Тірек сөздер: кремний карбиді, құрылым, кристалдану, синтездеу, атомдарды сәйкес алмастыру әдісі.

**Нусупов К.Х.¹, Бейсенханов Н.Б.^{1*}, Кукушкин С.А.², Султанов А.Т.¹, Кейінбай С.¹,
Шыныбаев Д.С.¹, Кусайнова А.Ж.¹**

¹Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения
Российской академии наук, 199178, г. Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: beisen@mail.ru

ФОРМИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО SiC В ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ КРЕМНИЯ МЕТОДОМ СОГЛАСОВАННОГО ЗАМЕЩЕНИЯ АТОМОВ

Аннотация. В работе на поверхности кремниевой пластины Si(100) методом согласованного замещения атомов синтезированы монокристаллические пленки карбида кремния. Синтез пленок осуществлен при температурах 1200 °С и 1300 °С в течение 20 минут в потоке газа СО при давлении 0.8 Па. Анализируется влияние температур 1200–1300 °С на формирование методом замещения атомов моно- и поликристаллического слоев, а также наноструктурированных фаз SiC в приповерхностной области кремния. Показано формирование высококачественной кристаллической пленки карбида кремния и влияние условий синтеза на общий объем структурных фаз SiC, микроструктуру и наноструктуру поверхности. Обнаружено, что увеличение температуры с 1200 °С до 1300 °С привело к более интенсивному формированию карбида кремния и росту количества Si-C-связей в 1,9 раза вследствие увеличения толщины синтезированного слоя карбида кремния. Происходит увеличение доли кристаллической фазы за счет более интенсивной трансформации зародышей нанокристаллов в микро- и нанокристаллы. Предположены интенсивные процессы проникновения атомов углерода вглубь кремния при температуре 1300 °С с аморфизацией его структуры и образованием Si-C-связей, которые могут трансформироваться в кристаллические фазы при температурах выше 1300 °С. Доля кристаллической фазы SiC увеличивается до 50,2% объема пленки за счет интенсивной трансформации зародышей нанокристаллов в микро- и нанокристаллы. Экспериментально показано, что формирование разнообразных структур SiC на Si (100) происходит в полном соответствии с основными положениями метода согласованного замещения атомов.

Ключевые слова: карбид кремния, структура, кристаллизация, синтез, метод согласованного замещения атомов

Introduction

In 2008, a method was discovered for synthesizing thin SiC epitaxial films on Si based on the coordinated substitution of a part of silicon atoms for carbon atoms inside the near-surface Si layer [1]. The term "the coordinated substitution" means that new chemical bonds between Si and C atoms are formed simultaneously and in coordination with the destruction of old Si-Si bonds in silicon, which leads to the preservation of the overall structure of chemical bonds. The Method of Coordinated Substitution of Atoms (MCSA) is based on the use of the chemical reaction $2\text{Si}_{\text{solid}} + \text{CO}_{\text{gas}} = \text{SiC}_{\text{solid}} + \text{SiO}_{\text{gas}}$, proposed in [1], which proceeds in two stages.

At the first stage of the reaction, the CO molecule interacts with the surface of the silicon substrate and decomposes into a carbon atom and an oxygen atom. The oxygen atom enters a chemical reaction with the Si atom, which results in the formation of SiO gas. The SiO gas is removed from the system, and a vacancy is formed in place of the silicon atom of the substrate, which was included in the composition of the SiO gas. The active carbon atom released because of a chemical reaction from a CO molecule is shifted to an interstitial position in the silicon lattice. As a result of the shift of carbon to the interstitial position, an intermediate phase of the so-called "pre-carbide" silicon is formed. This phase is silicon saturated with defect pairs $\text{C} + \text{V}_{\text{Si}}$ [2,3], where C is a carbon atom in the interstitial position in silicon, V_{Si} is a silicon vacancy formed because of the removal of a silicon atom in the composition of the SiO_{gas} gas. One Si cell contains 4 pairs of $\text{C} + \text{V}_{\text{Si}}$ dilatation defects, i.e. in "pre-carbide" silicon, everything is ready for the transformation of silicon into silicon carbide.

At this stage, the carbon atoms move in a coordinated manner towards the silicon vacancies, forming silicon carbide [1]. A detailed analysis of these processes is described in a series of works summarized in reviews [1,2,4].

The method of coordinated substitution of atoms in the synthesis of epitaxial SiC films has such advantages as the possibility of obtaining high-quality crystalline films on the surface of single-crystal silicon.

Main provisions

In this experiment, silicon carbide SiC is synthesized on the (100) Si face at low CO pressure by the method of coordinated substitution of atoms.

As is known [5,6], the slip planes in crystals with a diamond lattice at temperatures exceeding 0.5 of the melting point of the crystal are the family of (111) planes, and the sliding occurs along [110] directions. Therefore, on a smooth (100) silicon surface, SiC of the (100) orientation cannot be nucleated during growth by the MCSA method. The (100) Si face upon conversion transforms into a SiC face consisting of many facets resembling sawtooth structures, the side faces of which are covered with the (111), (110), and (210) planes.

The theory of growth of SiC on Si (100) by the MCSA method was constructed in [7]. In this paper, a formula was derived that relates the pressure of the CO gas to the synthesis temperature of the SiC layer. According to this formula, only at a high CO pressure, about $3 \cdot 10^3$ Pa and, for example, at a temperature of 1250°C, is it possible to form a SiC film of orientation (100), i.e. at this CO gas pressure, only the SiC(100) face on Si(100) will form. However, at such a high pressure, according to [8], the thickness of the SiC layer cannot grow more than a few nanometers. At lower pressures, (111), (110), (210) and other faces will form. Various nanostructures and SiC polytypes will form on the Si(100) surface. In this case, the film structure will be mainly polycrystalline, although there will also be epitaxial facets of SiC orientations (111) of the cubic SiC modification or hexagonal SiC polytypes, but having a nonpolar orientation (not the 0001 orientation). The formation of this kind of nanocrystals is of interest for various applications. That is why the purpose of this work was to study the processes of formation of various SiC structures on the (100) Si face at low CO pressure, at which CO intensively penetrates deep into Si and is intensively converted into Si.

Materials and Methods

The structure of SiC nanolayers synthesized by the atom substitution method on the surface of c-Si (100) wafers $7 \times 7 \times 0.3$ mm in size and with a resistivity of 4–5 Ω cm was studied using IR spectroscopy and scanning electron microscopy. The SiC films were synthesized in a special electric furnace at a temperature of 1200 and 1300°C for 20 minutes in a CO gas flow at a pressure of 0.8 Pa [9].

To analyze the composition and structure of silicon carbide films, IR absorption spectra were obtained using a Nicolet iS-50 IR spectrometer (ThermoScientific, USA). The software for the spectrometer makes it possible to decompose infrared spectra into components and determine the position, amplitude, and area of the maxima. Main technical characteristics of Nicolet iS50: signal-to-noise ratio - 55000, wavenumber scale error limits - ± 0.01 cm^{-1} ; resolution - 0.09 cm^{-1} ; beam splitter: XT-KBr (11000 – 375 cm^{-1}) [10-12].

The surface of the samples was studied using a Quanta 200i 3D scanning electron microscope (FEI Company) with a directly heated tungsten cathode designed for qualitative and quantitative analysis of nanosized objects. The microscope is equipped with a thermionic gun and a station with a focused ion beam with a built-in system for energy dispersive microanalysis and analysis of the structure and texture of materials. Electronic optics: accelerating voltage from 200 V to 30 kV and high vacuum resolution of 3 nm. Ion optics: accelerating voltage from 2 to 30 kV and resolution at 30 kV - 9 nm.

Results and discussion

To analyze the structural quality of the films, the IR absorption spectra of the films were decomposed into components. The position of the component maxima in the spectrum was determined and their area was calculated. These data can be used to estimate the degree of crystallinity and phase composition of the films. The data obtained for a film synthesized at a temperature of 1200°C, a pressure of 0.8 Pa for 20 min are shown in Figure 1.

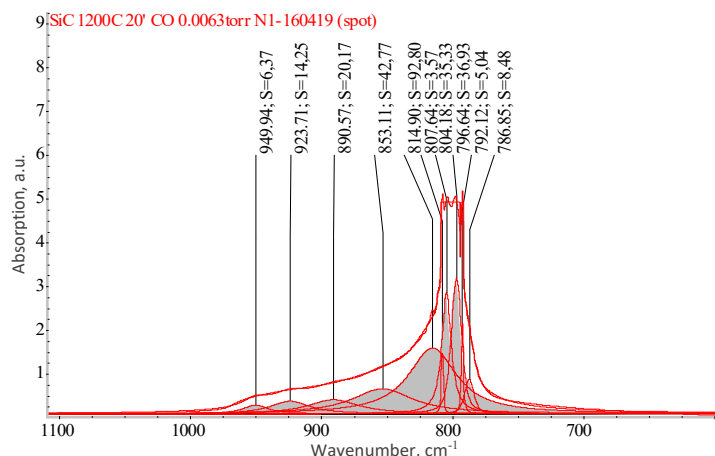


Figure 1 – Mathematical decomposition of the IR spectrum of the SiC film synthesized in an atmosphere of CO gas (1200 °C, 0.8 Pa, 20 min) by the method of atom substitution

As indicated in [13], the theoretical values of the infrared absorption peaks for cubic, hexagonal and rhombic modifications are 795.9 cm^{-1} for β -SiC (3C-SiC), 799.5 cm^{-1} for 2H-SiC, 797.6 cm^{-1} for 4H-SiC, 797.0 cm^{-1} for 6H-SiC, 797.5 cm^{-1} for 15R-SiC. Since the values obtained in the experiment may have insignificant differences, it can be assumed that the sample contains a monocrystalline phase of SiC (maximum at 796.64 cm^{-1}).

The total area of the SiC peak of the IR spectrum was 266 a.u. (Figure 1). If intense IR maxima, namely, intense peaks at 792.12–807.64 cm^{-1} , are identified with the crystalline, micro- and nanocrystalline phases, then their total area is ~81 a.u., or 30.4% of the IR- spectrum and volume of the SiC phase. The amorphous phase, close to the defective crystalline phase (peak 786.85 cm^{-1}) [10,11,14], is 8.48 a.u., or 3.2% of the volume of the SiC phase. There are also nanocrystal nuclei and carbon-vacancy structures (spectrum components in the range 814.90–949.94 cm^{-1}), which total 176 a.u., or 66.4% of the SiC phase [11].

It was found that an increase in temperature to 1300 °C led to a more intense formation of silicon carbide and an increase in the number of Si–C bonds by a factor of 1.9 (from 266 to 499 a.u.). These data do not contradict the provisions of review [4] on an increase in the thickness of silicon carbide layers with an increase in the synthesis temperature. All components grew (Figure 2). As is known [14], even in the case of crystallization of amorphous silicon carbide layers obtained by ion implantation, an increase in the fraction of the crystalline phase is observed from 40–50% at 900 °C to 70–80% at 1200 °C.

An increase in the volume and proportion of the amorphous component of SiC from ~8.5 a.u. (3.2%) to ~93 a.u. (18.7%) indicates a more intense absorption of carbon atoms and the formation of amorphous structures in the "film-substrate" transition layer. This temperature turned out to be insufficient for the crystallization of these structures. The presence of an intense sharp peak at 785 cm^{-1} (Figure 2) indicates the absorption of radiation by elongated Si–C bonds corresponding to the defective SiC phase, which is transitional between amorphous and crystalline in terms of its structural quality. The presence of a broad component with a maximum at 748.77 cm^{-1} may indicate intense processes of penetration of carbon atoms deep into silicon with amorphization of its structure and the formation of Si-C bonds in addition to dilatation dipoles. However, it should be taken into account that the results of studies of silicon carbide films synthesized by ion implantation indicate the impossibility of obtaining single-crystal layers at temperatures up to 1400 °C. This is due to the formation of superstrong carbon clusters during energetic ion implantation.

These results well confirm the conclusions of [7] about the features of the formation of SiC on the Si (100) surface and about the decisive role of the orientation of dilatation dipoles in the process of formation of the symmetry of the SiC film.

At the same time, the number of sharp maxima in the spectrum increased significantly up to 864.95 cm^{-1} . This may indicate the intense formation of nano- and microcrystals of various sizes [13,15].

If in Figure 2 we identify intense IR maxima from 794.74 to 864.95 cm^{-1} with the crystalline phase,

then their integrated intensity is 251 a.u., or 50.2% of the volume of the SiC phase, i.e. share is increasing significantly. Thus, an intensive transformation of the nuclei of nanocrystals into micro- and nanocrystals is observed. The total number of nanocrystal nuclei and carbon-vacancy structures (spectrum components in the range 874.48-958.92 cm^{-1}) add up to 155 a.u., and the fraction is halved to 31.1% of the film volume. However, the high amplitude of the peaks of crystalline SiC suggests a possibility of higher content of the single-crystal component of silicon carbide.

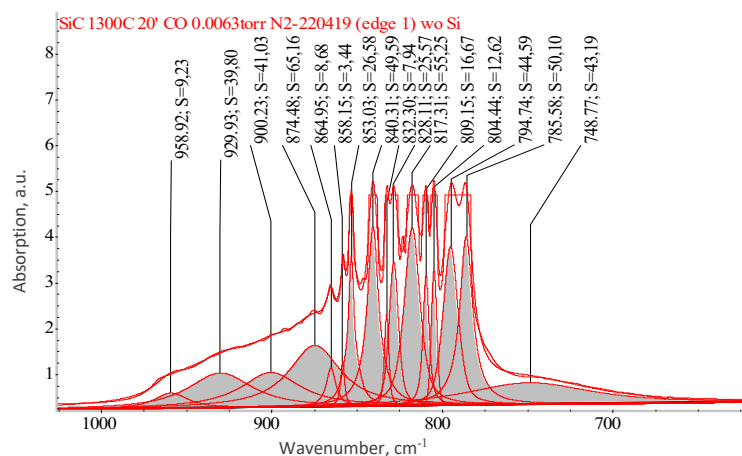


Figure 2 – Mathematical decomposition of the IR spectrum of the SiC film synthesized in an atmosphere of CO gas (1300 °C, 0.8 Pa, 20 min) by the method of atom substitution

Studies on a Quanta 200i 3D scanning electron microscope showed that with a synthesis duration of 20 minutes, a temperature of 1300°C and a pressure of 0.8 Pa, a microcrystalline surface structure is formed (Figure 3) with grain sizes of 3-20 μm .

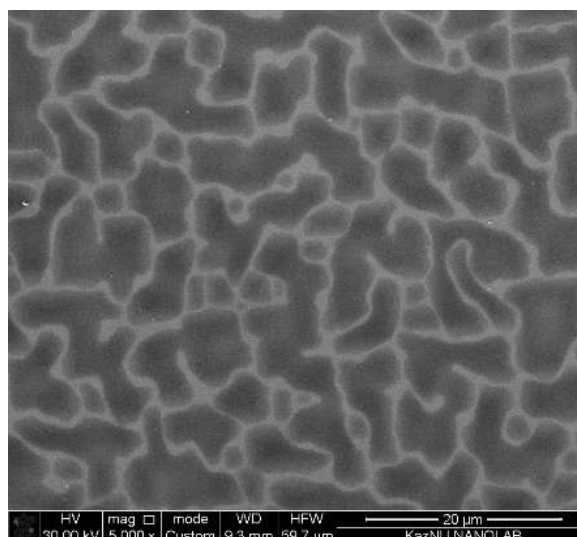


Figure 3 – Scanning electron microscopy (1300 °C, 0.8 Pa, 20 min) of the surface of the SiC film synthesized in a CO gas atmosphere by atom substitution method

Conclusions

The crystalline silicon carbide films containing mono- and microcrystalline phases of SiC were synthesized by the method of coordinated substitution of atoms in a special electric furnace at temperatures of 1200 °C and 1300 °C for 20 minutes in a CO gas flow at a pressure of 0.8 Pa in the near-surface region of a Si(100) wafer.

It was found that an increase in temperature from 1200 °C to 1300 °C led to a more intensive formation of silicon carbide and an increase in the number of Si–C bonds by 1.9 times due to an increase in the thickness

of the synthesized silicon carbide layer. The proportion of the SiC crystalline phase increases to 50.2% of the film volume due to the intensive transformation of nanocrystal nuclei into micro- and nanocrystals. However, the high amplitude of the peaks of crystalline SiC suggests a possibility of higher content of the single-crystal component of silicon carbide.

Acknowledgments

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058438).

References

- 1 Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2008) New method for growing silicon carbide on silicon by solid-phase epitaxy: Model and experiment, *Physics of the Solid State*, vol. 50 (7), pp. 1238–1245. <https://doi.org/10.1134/S1063783408070081>
- 2 Kukushkin S.A., Osipov A.V. and Feoktistov N.A. (2014) Synthesis of Epitaxial Silicon Carbide Films through the Substitution of Atoms in the Silicon Crystal Lattice: A Review, *Physics of the Solid State*, vol. 56 (8), pp. 1507–1535. <https://doi.org/10.1134/S1063783414080137>
- 3 Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2012) Thin-film heteroepitaxy by the formation of the dilatation dipole ensemble, *Doklady Physics*, vol. 57, pp. 217–220. <https://doi.org/10.1134/S1028335812050072>
- 4 Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2014) Topical review. Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films, *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 47, 313001–313001–41. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/31/313001>
- 5 Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2022) Thermodynamics, kinetics, and technology of synthesis of epitaxial layers of silicon carbide on silicon by coordinated substitution of atoms, and its unique properties. A review, *Condensed Matter and Interphases*, vol. 24(4), pp. 407–458. <https://doi.org/10.17308/kcmf.2022.24/10549>
- 6 Kelly A., Groves G.W. (1970) *Crystallography and crystal defects*. London: Longman, 428 p.
https://books.google.kz/books/about/Crystallography_and_Crystal_Defects.html?id=1bC6nQEACAAJ&redir_esc=y
- 7 Kukushkin S.A., Osipov A.V. and Soshnikov I.P. (2017) Growth of epitaxial SiC layer on Si (100) surface of n- and p-type of conductivity by the atoms substitution method, *Reviews on Advanced Materials Science*, vol. 52, pp. 29–42. http://www.ipme.ru/e-journals/RAMS/no_15217/05_15217_kukushkin.pdf
- 8 Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2017) Drift mechanism of mass transfer on heterogeneous reaction in crystalline silicon substrate, *Physica B: Condensed Matter*, vol. 512, pp. 26–31. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physb.2017.02.018>
- 9 Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Bakranova D.I., Keinbai S., Turakhun A.A., Sultan A.A. (2018) Razrabotka i izgotovleniye vakuumnoy elektropechi dlya termoobrabotki i sinteza nanostruktur i materialov (Development and manufacture of a vacuum electric furnace for heat treatment and synthesis of nanostructures and materials.), *Vestnik KBTU*, vol. 3(46), pp. 134–144.
- 10 Kukushkin S.A., Nussupov K.Kh., Osipov A.V., Beisenkhanov N.B., Bakranova D.I. (2017) Structural properties and parameters of epitaxial silicon carbide films, grown by atomic substitution on the high-resistance (111) oriented silicon, *Superlattices and Microstructures*, vol. 111, pp. 899–911. <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.07.050>
- 11 Kukushkin S.A., Nussupov K.Kh., Osipov A.V., Beisenkhanov N.B. and Bakranova D.I. (2017) X-Ray Reflectometry and Simulation of the Parameters of SiC Epitaxial Films on Si (111), Grown by the Atomic Substitution Method, *Physics of the Solid State*, vol. 59 (5), pp. 1014–1026. <https://doi.org/10.1134/S1063783417050195>
- 12 Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Keinbay S., Sultanov A.T. (2022) Silicon carbide synthesized by RF magnetron sputtering in the composition of a double layer antireflection coating SiC/MgF₂, *Optical Materials*, 112370, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2022.112370>
- 13 Mutschke H., Andersen A.C., Clément D., Peiter H.T. (1999) Infrared properties of SiC particles, *Astron. Astrophys.*, vol. 345, pp. 187–202. <https://adsabs.harvard.edu/full/1999A%26A...345..187M>
- 14 Kimura T., Kagiya Sh. and Yugo Sh. (1981) Structure and annealing properties of silicon carbide thin layers formed by ion implantation of carbon ions in silicon, *Thin Solid Films*, 81, pp. 319–327. [https://doi.org/10.1016/0040-6090\(81\)90516-2](https://doi.org/10.1016/0040-6090(81)90516-2)
- 15 Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B. (2011) The Formation of Silicon Carbide in the SiC_x Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si. In book: *Silicon carbide – Materials, Processing and Applications in Electronic Devices*, Ed. Moumita Mukherjee, InTech, Chapter 4, pp. 69–114. <https://doi.org/10.5772/22256>

Information on the authors

Nusupov Kair Khamzaevich (corresponding author)

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Laboratory of Alternative Energy and Nanotechnologies, JSC "Kazakhstan-British Technical University", st. Tole bi 59, 050000, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID 0000-0001-8200-7510
E-mail: rich-famouskair@mail.ru

Beisenkhanov Nurzhan Beisenkhanovich (corresponding author)

Doctor of Physics and Mathematics, Dean, Chief Researcher, School of Materials Science and Green Technologies, KBTU JSC, st. Tole bi, 59, 050000, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID 0000-0002-5908-5614
E-mail: beisen@mail.ru

Kukushkin Sergey Arsenievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory, Laboratory of Structural and Phase Transformations in Condensed Matter, Institute for Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Vasilievsky Island, Bolshoi Prospekt, 61, Russia, 199178.
ORCID ID 0000-0002-2973-8645
E-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com

Sultanov Asanali Talgatbekuly

Ph.D. student, head of the laboratory, Laboratory of Alternative Energy and Nanotechnologies, KBTU JSC, 59 Tole bi str., 050000, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID 0000-0003-0074-431X
E-mail: asanalisultanovs@gmail.com

Keyinbay Symayil

Master, Junior Researcher, Laboratory of Alternative Energy and Nanotechnologies, KBTU JSC, st. Tole bi, 59, 050000, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID 0000-0002-7268-7193
E-mail: Keiinbay_symaiyl@mail.ru

Shynybaev Darkhan Serikovich

Bachelor, leading operator of the technological line, Laboratory of Alternative Energy and Nanotechnologies, KBTU JSC, st. Tole bi, 59, 050000, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID 0009-0000-7729-7517
E-mail: darhan.86@mail.ru

Kusaynova Aizhan Zhambulovna

Master student, leading chemical technologist, Laboratory of alternative energy and nanotechnologies, KBTU JSC, st. Tole bi, 59, 050000, Almaty, Kazakhstan
ORCID ID 0000-0002-2485-9739
E-mail: a.kusainova@kbtu.kz

Авторлар туралы мәліметтер

Нусупов Каир Хамзаевич

Ф-м.ғ.д., бас ғылыми қызметкер Баламалы энергетика және нанотехнологиялар зертханасы, «Қазақ-Британ техникалық университеті» АҚ, АҚ «КБТУ», Төле би, 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID 0000-0001-8200-7510
E-mail: rich-famouskair@mail.ru

Бейсенханов Нуржан Бейсенханович (корреспонденция авторы)

Ф.-м.ғ.д., декан, бас ғылыми қызметкер Материалтану және жасыл технологиялар мектебі, АҚ «ҚБТУ», Төле би 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID 0000-0002-5908-5614
E-mail: beisen@mail.ru

Кукушкин Сергей Арсеньевич

Ф.-м.ғ.д., зертхана меңгерушісі, Конденсацияланған заттардағы құрылымдық және фазалық өзгерістер зертханасы RFA Машина жасау мәселелері институты, Санкт-Петербург қ., ВА, Үлкен даңғылы, 61, Ресей, 199178
ORCID ID 0000-0002-2973-8645
E-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com

Султанов Асанали Талгатбекулы

Ph.D. студенті, зертхана меңгерушісі Баламалы энергетика және нанотехнологиялар зертханасы, АҚ «ҚБТУ», Төле би 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID 0000-0003-0074-431X
E-mail: asanalisultanovs@gmail.com

Кейінбай Сымайыл

Магистр, кіші ғылыми қызметкер Баламалы энергетика және нанотехнологиялар зертханасы, АҚ «ҚБТУ», Төле би 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID 0000-0002-7268-7193
E-mail: keiinbay_symaiyl@mail.ru

Шыныбаев Дархан Серикович

Бакалавр, технологиялық желінің жетекші операторы, Баламалы энергетика және нанотехнологиялар зертханасы, АҚ «ҚБТУ», Төле би 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID 0009-0000-7729-7517
E-mail: darhan.86@mail.ru

Кусайнова Айжан Жамбуловна

Магистрант, жетекші химик-технолог, Баламалы энергетика және нанотехнологиялар зертханасы, АҚ «ҚБТУ», Төле би 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID 0000-0002-2485-9739
E-mail: a.kusainova@kbtu.kz

Информация об авторах

Нусупов Каир Хамзаевич

Д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, Лаборатория альтернативной энергетики и нанотехнологий, АО «Казахстанско-Британский технический университет», ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан
ORCID ID 0000-0001-8200-7510
E-mail: rich-famouskair@mail.ru

Бейсенханов Нуржан Бейсенханович (автор для корреспонденции)

Д.ф.-м.н., декан, главный научный сотрудник, Школа материаловедения и зеленых технологий, АО «ҚБТУ», ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан
ORCID ID 0000-0002-5908-5614
E-mail: beisen@mail.ru

Кукушкин Сергей Арсеньевич

Д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Лаборатория структурных и фазовых превращений в конденсированных средах, Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой проспект, 61, Россия, 199178.

ORCID ID 0000-0002-2973-8645

E-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com

Султанов Асанали Талгатбекулы

Ph.D. студент, заведующий лабораторией, Лаборатория альтернативной энергетики и нанотехнологий, АО «КБТУ», ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0000-0003-0074-431X

E-mail: asanalisultanovs@gmail.com

Кейінбай Сымайыл

Магистр, младший научный сотрудник, Лаборатория альтернативной энергетики и нанотехнологий, АО «КБТУ», ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0000-0002-7268-7193

E-mail: Keiinbay_symaiyl@mail.ru

Шыныбаев Дархан Серикович

Бакалавр, ведущий оператор технологической линии, Лаборатория альтернативной энергетики и нанотехнологий, АО «КБТУ», ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0009-0000-7729-7517

E-mail: darhan.86@mail.ru

Кусайнова Айжан Жамбуловна

Магистрант, ведущий химик-технолог, Лаборатория альтернативной энергетики и нанотехнологий, АО «КБТУ», ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0000-0002-2485-9739

E-mail: a.kusainova@kbtu.kz

UDC 510.5

IRSTI 27.03.45

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-36-42>

Askarbekkyzy A.,^{1*} Bazhenov N.A.²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050000, Kazakhstan

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia

*E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

INDEX SETS OF SELF-FULL LINEAR ORDERS ISOMORPHIC TO SOME STANDARD ORDERS

Abstract. The work of Bazhenov N.A., Zubkov M.V., Kalmurzayev B.S. started investigation of questions of the existence of joins and meets of positive linear preorders with respect to computable reducibility of binary relations. In the last section of this work, these questions were considered in the structure of computable linear orders isomorphic to the standard order of natural numbers. Then, the work of Askarbekkyzy A., Bazhenov N.A., Kalmurzayev B.S. continued investigation of this structure. In the last article, the notion of a self-full linear order played important role. A preorder R is called self-full, if for every computable function $g(x)$, which reduces R to R , the image of this function intersects all $\text{supp}(R)$ -classes. In this article, we measure exact algorithmic complexities of index sets of all self-full recursive linear orders isomorphic to the standard order of natural numbers and to the standard order of integers. Researching the index sets allows us to measure exact algorithmic complexities of different notions in constructive structures, that we are investigating. We prove that the index set of all self-full computable linear orders isomorphic to the standard order of natural numbers is a Π_3^0 -complete set. We also prove that the index set of all self-full computable linear orders isomorphic to the standard order of integers is Π_3^0 -complete.

Key words: linear order, self-full order, index set, computable reducibility.

Асқарбекқызы А.,^{1*} Баженов Н.А.²

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., 050000, Қазақстан

²С.Л. Соболев атындағы Математика Институты РГА СБ, Новосибирск қ., 630090, Ресей

*E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

КЕЙБІР СТАНДАРТ РЕТТЕРГЕ ИЗОМОРФТЫ ӨЗІ ТОЛЫҚ СЫЗЫҚТЫ РЕТТЕРДІҢ ИНДЕКСТІ ЖИЫНДАРЫ

Аңдатпа. Баженов Н.А., Калмурзаев Б.С., Зубков М.В. жұмыстарында позитивті сызықтық реттердің бинарлы қатынастардың есептелімді көшірілуіне қатысты супремумы мен инфимумының бар болуы туралы сұрақтарын зерттеу басталған болатын. Жұмыстың соңғы тарауында бұл сұрақтар натурал сандардың стандартты ретіне изоморфты болатын есептелімді сызықты реттердің құрылымында қарастырылды. Одан кейін, Асқарбекқызы А., Баженов Н.А., Калмурзаев Б.С. жұмыстарында осы құрылымды зерттеу жалғасын тапты. Соңғы жұмыста өзітолық сызықты реттер ұғымы үлкен рөл ойнады. Егер R жарты ретін R -ге көшіретін кез келген есептелімді $g(x)$ функциясының мәндер жиыны барлық $\text{supp}(R)$ -класстарымен қиылысса, R жарты реті өзі толық рет деп аталады. Бұл мақалада натурал сандардың стандарт ретіне және бүтін сандардың стандарт ретіне изоморфты барлық сызықтық реттердің индексті жиындарының алгоритмдік күрделілігі нақты бағаланады. Индексті жиындарды зерттеу қарастырылып отырған конструктивті құрылымдардағы түрлі ұғымдардың нақты күрделілігін бағалауға мүмкіндік береді. Натурал сандардың стандартты ретіне изоморфты болатын өзітолық есептелімді сызықты реттердің индексті жиындары Π_3^0 -толық жиын болатындығы дәлелденеді. Бүтін сандардың стандартты ретіне изоморфты болатын өзі толық есептелімді сызықты реттердің индексті жиындары Π_3^0 -толық жиын болатындығы дәлелденеді.

Тірек сөздер: сызықты рет, өзітолық рет, индексті жиын, есептелімді көшіру.

Аскарбеккызы А.,^{1*} Баженов Н.А.²¹Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, 050000, Казахстан²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия

*E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА САМОПОЛНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ, ИЗОМОРФНЫХ НЕКОТОРЫМ СТАНДАРТНЫМ ПОРЯДКАМ

Аннотация. В работе Баженова Н.А., Зубкова М.В., Калмурзаева Б.С. было начато исследование вопросов существования супремумов и инфимумов позитивных линейных предпорядков относительно вычислимых сводимостей бинарных отношений, в последней главе эти вопросы были рассмотрены в структуре вычислимых линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел. Далее, в работе Аскарбеккызы А., Баженова Н.А., Калмурзаева Б.С. было продолжено исследование этой структуры. В последней работе немаловажную роль сыграло понятие самополных линейных порядков. Предпорядок R называется самополным, если для любой вычислимой функции $g(x)$, осуществляющей сводимость R в R , ее область значений пересекает все $\text{supp}(R)$ -классы. В данной статье оценивается точная алгоритмическая сложность индексных множеств всех самополных рекурсивных линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел и целых чисел. Исследование индексных множеств позволяет оценить точную сложность различных понятий в исследуемых конструктивных структурах. Доказывается, что индексное множество самополных вычислимых линейных порядков, изоморфных стандартному порядку натуральных чисел, является Π_3^0 -полным множеством. Доказывается, что индексное множество самополных вычислимых линейных порядков, изоморфных стандартному порядку целых чисел, является Π_3^0 -полным множеством.

Ключевые слова: линейный порядок, самополный порядок, индексное множество, вычислимая сводимость

Introduction

In this paper, we investigate the algorithmic complexity of positive preorders on the set of natural numbers (we denote by ω) and isomorphic to the standard order of natural numbers (we denote this as ω_{st}), also to the standard order of integers (we denote this as ζ_{st}).

In this article, we keep the notations and terminology as in [1].

Let R, S be binary relations on ω . We say that R is *computably reducible* to S (denoted by $R \leq_c S$), if there is a computable function $f(x)$ such that

$$x R y \leftrightarrow f(x) S f(y)$$

for all $x, y \in \omega$. We say that R and S are *computably equivalent* (denoted by $R \equiv_c S$), if $R \leq_c S$ and $S \leq_c R$ [].

There is a computable numbering α for the family of all positive preorders on ω . For simplicity, by P_i we will denote the positive preorder with index i (i.e., we will consider $\alpha(i) = P_i$). Given a class $K \subseteq \{P_x: x \in \omega\}$, we say that $I_K = \{x: P_x \in K\}$ is an *index set* of the class K . Studying index sets allows us to get an exact measure of the algorithmic complexity for different classes of positive preorders K . Article [3] was completely devoted to researching index sets for different classes of positive preorders.

The papers [4-9] measured index sets of classes of positive equivalence relations in universal numbering for the family of all positive equivalences.

Main provisions. Material and methods

Notation $\exists! x$ means that «there is a unique x », and $\exists^\infty x$ means that «there are infinitely many x ». By Id we denote the identity equivalence relation on ω . By $\text{card}(A)$ we denote the cardinality of a set A . Let R be a preorder and $j \in \omega$, then by $[j]_R$ we denote the set $\{x: (x, j) \in R \ \& \ (j, x) \in R\}$.

In proofs, we will use the following fact [10, Theorem 4.3.11]: $A \in \Sigma_3^0$ iff there is a computable

ternary predicate R such that

- If $x \in A$, then there is a unique y , that $(\exists^\infty z)R(x, y, z)$;
- If $x \in A$, then for any $\neg(\exists^\infty z)R(x, y, z)$.

We will use the following notations:

Ceers = $(\{\deg_c(E): E \text{ is a positive equivalence}\}; \leq_c)$,

Ceprs = $(\{\deg_c(P): P \text{ is a positive preorder}\}; \leq_c)$,

Celps = $(\{\deg_c(L): L \text{ is a positive linear preorder}\}; \leq_c)$.

Definition [7]. A preorder R is called *self-full* if for any reduction $g: R \leq_c R$ the following holds: for any number $j \in \omega$ there is $k \in \omega$, such that $g(k) \in [j]_R$.

The papers [11, 12] studied the following structure:

$\Omega = (\{\deg_c(L): L \text{ is a computable linear order isomorphic to } \omega_{st}\}; \leq_c)$

Moreover, in [11] it was proved that there exists an antichain of self-full degrees above any given degree $\alpha \in \Omega$. This fact implies that the structure Ω has continuum many automorphisms. Also, in [10] it was proved that there is no strong minimal cover for a non-self-full degree. This result implies that, in the structure Ω , the self-full degrees are precisely those elements that have a strong minimal cover. Note that a linear order $L \in \Omega$ is self-full iff every computable function $f \neq id$ does not reduce L to L .

In this paper, we measure the index sets of the following classes:

- $I_{SF\Omega} = \{i: P_i \text{ is a self-full linear order isomorphic to } \omega_{st}\}$;
- $I_{SFZ} = \{i: P_i \text{ is a self-full linear order isomorphic to } \zeta_{st}\}$.

In particular, we prove that both sets are Π_3^0 -complete sets.

Results and discussion

The index set $I_\Omega = \{i: P_i \in \Omega\}$ is Π_3^0 -complete. The upper bound is implied by the following: $P_i \in \Omega$ is equivalent to this condition:

$$P_i \text{ is linear \& } P_i \text{ is antisymmetric \& } (\forall x)(\exists y)(\forall z > y)[x <_{P_i} z]. \quad (1)$$

The predicate $x <_{P_i} z$ is computable, if P_i is linear and antisymmetric. This means that the predicate (1) is equivalent to a Π_3^0 -sentence.

The lower bound for I_Ω follows from Theorem 3(a) in [13], or from Example 2 in [14].

Theorem 1. The index set $I_{SF\Omega} = \{i: P_i \text{ is a self-full linear order isomorphic to } \omega_{st}\}$ is Π_3^0 -complete.

Proof. Self-fulness of P_i is equivalent to the following:

$$(\forall e) \left[\exists y(\varphi_e(y) \uparrow) \vee \left[(\forall u, v)[u \leq_{P_i} v \leftrightarrow \varphi_e(u) \leq_{P_i} \varphi_e(v)] \rightarrow (\forall a \exists b)(a \sim_{P_i} \varphi_e(b)) \right] \right],$$

which is equivalent to a Π_3^0 -condition. From the proof given above, $P_i \in \Omega$ is equivalent to a Π_3^0 -condition. Then, the conjunction of these conditions is also equivalent to a Π_3^0 -condition.

Now we show the completeness. Suppose that a set A belongs to the class Π_3^0 . Then there is a computable relation $Q(x, y, z)$ such that

$$x \notin A \leftrightarrow (\exists! y)(\exists^\infty z)Q(x, y, z)$$

For every $e \in \omega$ we satisfy the following requirements for the constructed order $L = L_x$:

- SF_e : if $\varphi_e \neq id$, then φ_e does not reduce L to L .
- IS_e : if $(\exists^\infty z)Q(x, e, z)$, then $L \notin \Omega$.

In the construction of relation L there will be conflicts between strategies, which will be resolved by finite injury priority. Assume that the set of SF -strategies is linearly ordered of type ω : for instance, $SF_0 < SF_1 < \dots$. A given strategy IS_e does not conflict with the other strategies, so IS_e essentially will

work in the background mode.

In the strategy SF_e , we say that $2x_e$ is a fresh number if $2x_e$ is greater than $\varphi_{e'}(a) \downarrow$ for the higher priority strategies $SF_{e'}$, $e' < e$. In the construction, a notion “putting a fresh number after some number a in the order L_x at some stage $s+1$ ” means that we define $L_{x,s+1} = L_{x,s} \cup \{(z, y): a <_{L_{x,s}} y\} \cup \{(y, z): y \leq_{L_{x,s}} a\}$, where z is the least odd number not in $dom(L_{x,s})$.

STRATEGY for SF_e :

1. Wait for a fresh number $2x_e$, such that $\varphi_e(2x_e) \downarrow >_L 2x_e$;
2. Let $a := \varphi_e(2x_e)$. Wait until $\varphi_e(a)$ is defined;
3. If $\varphi_e(a) \downarrow >_L a$, then put $k := card([a, \varphi_e(a)]_L)$ fresh numbers after $2x_e$. Every time when $card([a, \varphi_e(a)]_L)$ increases, we will put a fresh number after $2x_e$.

Strategy SF_e has two outcomes:

wait: Stuck at step 1 or step 2. Then one of the following is true:

(a) The function φ_e is not total.

(b) $\varphi_e(2x_e) \downarrow \leq_L 2x_e$, or $\varphi_e(a) \downarrow \leq_L a$. Then $\varphi_e = id$ or φ_e does not reduce L to L .

In both cases the requirement SF_e is satisfied.

act: Reaching step 3. If $\varphi_e(a) \leq_L a$, then the requirement is satisfied. Otherwise, $card([2x_e; a]_L) > card([a; \varphi_e(a)]_L)$. Then φ_e cannot be a computable reduction from L to L , and in this case we initialize the lower priority strategies of type $SF_{e'}$, which chose $2x_j$ less than $\varphi_e(a)$, as its own number at step 1. “The strategy SF_e is initialized” means that this strategy starts again from its step 1.

STRATEGY for IS_e :

1. Choose the number $2e$;
2. Let $k := card(\{z: Q(x, e, z)\})$. Put k fresh odd numbers after $2e$ in L .

CONSTRUCTION.

At stage 0, we assume that $L_{x,0} = \{(2z, 2y): z \leq y\}$.

At stage $s+1$ we visit all strategies SF_i and IS_i for $i \leq s$. In IS_i we define k as $card(\{z: Q(x, i, z) \& z \leq s\})$. And in IS_i all conditions will be considered at the stage s .

Define $L_x = \bigcup_{s \in \omega} L_{x,s}$.

Lemma 1.1. L_x is a linear order on ω .

Proof. It is known that the function $f(x) = x+2$ has infinitely many Gödel numbers (let $\varphi_{e_i} = f$). Then $\varphi_{e_i}(2x_{e_i}) \downarrow$ and strictly greater than $2x_{e_i}$ for every e_i . Moreover, $\varphi_{e_i}(2x_{e_i}) = 2x_{e_i} + 2 = a$, $\varphi_{e_i}(a) \downarrow$ and strictly greater than a . According to the strategy SF_{e_i} , at least one odd number should be put after $2x_{e_i}$. Since there are infinitely many such e_i , each odd number will be put after some number. Hence, L_x is a linear order on ω .

Lemma 1.2. If $x \notin A$, then $L_x \not\cong \omega$.

Proof. Let $x \notin A$, then $(\exists! y)(\exists^\infty z)Q(x, y, z)$. Inside the interval $[2y, 2y+2]_{L_x}$, the construction builds ω^* . Hence, $L_x \not\cong \omega$.

Lemma 1.3. If $x \notin A$, then $L_x \not\cong \omega$.

Proof. Let z be a natural number. We show that only finitely many elements will be enumerated inside $[2z, 2z+2]_{L_x}$. According to the strategy IS_e , by the construction precisely $k := card(\{z: Q(x, e, z)\})$ elements will be enumerated after the number $2z$ (i.e., finitely many elements).

This number $2z$ can be the fresh number $2x_e$ for some strategies SF_e . Let SF_{e_0} be the first strategy, which reached step 3. At the first stage s_0 , when it happened, it is obvious that the interval $[a; \varphi_{e_0}(a)]_{L_{x,s_0}}$ is finite. Consequently, there are finitely many intervals $[2y, 2y+2]_{L_x}$ in this interval. If new elements are enumerated inside the interval $[2y, 2y+2]_{L_x}$ according to the strategy IS_y , then some elements after $2x_e$ could be enumerated.

In addition, another strategy with higher priority SF_e can pick $2z$ as its own number at step 1 and reach step 3. In this case, every action from above will be repeated. Since there are only finitely many strategies with higher priority, in the end only finitely many elements will be enumerated inside the interval $[2z, 2z + 2]_{L_x}$.

Since z is an arbitrary number, the constructed order L_x will be isomorphic to ω .

The sequence $(L_x)_{x \in \omega}$ is a computable numbering of some subfamily of the family of all positive preorders. Consequently, there is a computable function f such that $L_x = P_{f(x)}$ for every $x \in \omega$.

$$x \in A \leftrightarrow f(x) \in I_{SF\Omega}.$$

Theorem 1 is proved.

For $i \in \omega$, the preorder P_i is a computable linear order isomorphic to ζ_{st} if and only if:

P_i is linear & P_i is antisymmetric &

$$\neg[\exists x \forall y (x \leq_{P_i} y)] \& \neg[\exists x \forall y (x \geq_{P_i} y)] \& (\forall x, y)(\exists z) \\ (\forall u)[x <_{P_i} u <_{P_i} y \rightarrow u < z] \quad (2)$$

The predicate $x <_{P_i} z$ is computable, if P_i is linear and antisymmetric. Hence, the predicate (2) is equivalent to a Π_3^0 -sentence.

Theorem 2. The index set $I_{SFZ} = \{x: P_x \text{ is a self-full linear order isomorphic to } \zeta_{st}\}$ is Π_3^0 -complete.

Proof. We take the order L_x constructed in Theorem 1, and we define the order Z_x as follows:

$$a \leq_{Z_x} b \leftrightarrow [a = 2k \& b = 2m \& k \leq_{L_x} m] \vee \\ [a = 2k + 1 \& b = 2m + 1 \& m \leq_{L_x} k] \vee \\ [a = 2k + 1 \& b = 2m]$$

Suppose that L_x is a self-full order isomorphic to ω_{st} . We show self-fullness of Z_x by reduction to a contradiction. Assume that Z_x is a non-self-full order. Then there is a computable function $f(x) \neq id$ that reduces Z_x to Z_x . Let t be an element such that $f(t) \neq t$. We construct a function $g: \omega \rightarrow \omega$ as follows:

- if $f(t) <_{Z_x} t$, then

$$g(y) = \begin{cases} y, & 2y + 1 >_{Z_x} t, \\ \frac{f(2y + 1) - 1}{2}, & 2y + 1 \leq_{Z_x} t. \end{cases}$$

- if $t <_{Z_x} f(t)$, then

$$g(y) = \begin{cases} y, & 2y <_{Z_x} t, \\ \frac{f(2y)}{2}, & 2y \geq_{Z_x} t. \end{cases}$$

A simple analysis shows that the function $g(x) \neq id$ computably reduces L_x to L_x , which contradicts the self-fullness of L_x .

If $L_x \not\cong \omega_{st}$, then it is obvious that $Z_x \not\cong \zeta_{st}$. Thus, reduction of an arbitrary Π_3^0 -set F to I_{SFZ} can be proved as in Theorem 1.

Theorem 2 is proved.

Conclusion

Upper bound of the index sets of these classes was found:

- $I_{SF\Omega} = \{i: P_i \text{ is a self-full linear order isomorphic to } \omega_{st}\};$
- $I_{SFZ} = \{i: P_i \text{ is a self-full linear order isomorphic to } \zeta_{st}\}.$

It is proved that both sets are Π_3^0 -complete sets.

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, grant AP08856493 “Positive graphs and computable reducibility on them as mathematical model of databases.”

REFERENCES

- 1 Ershov Yu.L. (1977) Theory of numberings. Moscow: Nauka. (In russian).
- 2 Bernardi C. and Sorbi A. (1983) Classifying positive equivalence relations, The Journal of Symbolic Logic, vol. 48, no. 3, pp. 529–538.
- 3 Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A. and Torebekova M.A. (2022) Ob indeksnyh mnozhestvah dlya klassov pozitivnyh predporyadkov, Algebra i logika, vol. 61, no.1, pp. 42–76.4 (In russian).
- 4 Gao S. and Gerdes P. (2001) Computably enumerable equivalence relations, Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, vol. 67, no. 1, pp. 27–59.
- 5 Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L. and Sorbi A. (2014) Universal computably enumerable equivalence relations, The Journal of Symbolic Logic, vol. 79, no. 1, pp. 60–88.
- 6 Andrews U. and Sorbi A. (2016) The complexity of index sets of classes of computably enumerable equivalence relations, The Journal of Symbolic Logic, vol. 81, no. 4, pp. 1375–1395.
- 7 Andrews U. and Sorbi A. (2019) Joins and meets in the structure of ceers, Computability, vol. 8, no. 3–4, pp. 193–241.
- 8 Andrews U. and Badaev S.A. (2020) On isomorphism classes of computably enumerable equivalence relations, The Journal of Symbolic Logic, vol. 85, no. 1, pp. 61–86.
- 9 Badaev S.A. and Sorbi A. (2016) Weakly precomplete computably enumerable equivalence relations, Mathematical Logic Quarterly, vol. 62, issue 1–2, pp. 111–127.
- 10 Soare R.I. (2016) Turing Computability, Theory and applications. Berlin: Springer.
- 11 Askarbekkyzy A., Bazhenov N.A. and Kalmurzayev B.S. (2022) Computable Reducibility for Computable Linear Orders of Type ω , Journal of Mathematical Sciences, vol. 267, pp. 429–443.
- 12 Bazhenov N.A., Kalmurzayev B.S. and Zubkov M.V. (2023) A note on joins and meets for positive linear preorders, Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 20, no. 1, pp. 1–16.
- 13 Kreisel, G., Shoenfield, J. and Wang, H. (1960) Number theoretic concepts and recursive well-orderings, Arch math Logik, vol. 5, 42–64.
- 14 Ash C.J. and Knight J.F. (1990) Pairs of recursive structures, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 46, issue 3, pp. 211–234.

Information on the authors

Askarbekkyzy Aknur (corresponding author)

Master Student, Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Street, 71, Almaty, 050000, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0003-0075-4438

E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

Bazhenov Nikolay Alekseevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at Sobolev Institute of Mathematics, 4, academician Koptyug av., 630090, Novosibirsk, Russia

ORCID ID: 0000-0002-5834-2770

E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Авторлар туралы мәліметтер

Асқарбекқызы Ақнұр (корреспонденция авторы)

Магистрант, Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Әл-Фараби к-сі, 71, Алматы қ., 050000, Қазақстан

ORCID ID: 0000-0003-0075-4438

E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

Баженов Николай Алексеевич

Физика-математика ғылымдарының кандидаты, аға ғылыми қызметкер, С.Л. Соболев атындағы Математика Институты РГА СБ, Новосибирск қ., 630090, Ресей

ORCID ID: 0000-0002-5834-2770

E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Информация об авторах

Асқарбекқызы Ақнұр (автор для корреспонденции)

Магистрант, Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, ул. Аль-Фараби, 71, г. Алматы, 050000, Казахстан

ORCID ID: 0000-0003-0075-4438

E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

Баженов Николай Алексеевич

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия

ORCID ID: 0000-0002-5834-2770

E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

УДК 510.67
 МРНТИ 27.03.66
<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-43-48>

Касатова А.¹, Кабиденев А.², Бекенов М.^{2*}

¹Медицинский университет Караганды, 100000, г. Караганды, Казахстан

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, 010008, г. Астана, Казахстан

*E-mail: bekenov50@mail.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРИТЕРИЯ ПОЛНОТЫ КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Во многих источниках по теории моделей помимо доказанных свойств о классах алгебраических систем приводятся характеристики этих свойств в алгебраических терминах, то есть показывают природу этих свойств в ракурсе универсальной алгебры. Например, класс квазимногообразий или многообразий определяют, используя теоретико-модельные понятия выполнения квазитожеств или тождеств и в алгебраических понятиях замкнутости относительно прямых произведений, ультрапроизведений, выполнения локальности, замкнутости относительно гомоморфизмов. Х.Дж. Кейслер привел алгебраическую характеристику критерия аксиоматизируемости класса алгебраических систем, используя замкнутость класса относительно ультрапроизведения и изоморфизма алгебраических систем, а также замкнутости относительно ультрастепеней для дополнения классу. Х.Дж. Кейслер не приводит, однако, какую-либо алгебраическую характеристику критерия полноты класса алгебраических систем. В данной статье получена алгебраическая характеристика критерия полноты класса алгебраических систем. Для сравнения: дать алгебраическую характеристику критерия модельной полноты класса в терминах, используемых в статье, не представляется возможным. Это показывает, что алгебраическая природа полного и модельно полного классов некоторым образом различается.

Ключевые слова: класс алгебраических систем, элементарное вложение, аксиоматизируемость, отношение частичного порядка.

Касатова А.¹, Кабиденев А.², Бекенов М.^{2*}

¹Қарағанды медицина университеті, 100000, Қарағанды қ., Қазақстан

² Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті 010008, Астана қ., Қазақстан

*E-mail: bekenov50@mail.ru

АЛГЕБРАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР СЫНЫПЫНЫҢ ТОЛЫҚТЫҚ КРИТЕРИЙІНІҢ АЛГЕБРАЛЫҚ СИПАТТАМАСЫ

Андатпа. Модельдер теориясы бойынша көптеген дереккөздерде алгебралық жүйелердің кластары туралы дәлелденген қасиеттермен қатар, бұл қасиеттердің сипаттамалары алгебралық терминдермен беріледі, яғни олар бұл қасиеттердің табиғатын әмбебап алгебра тұрғысынан көрсетеді. Мысалы, квази сорттар немесе сорттар класы модельдік-теориялық ұғымдар, квази сәйкестіктер немесе сәйкестіктердің орындалуы, ал алгебралық түсініктерде тікелей туындыларға, ультраөнімдерге, локальдылықтың орындалуына, гомоморфизмдерге қатысты тұйықтыққа байланысты анықталады. Мұндай мысалдар кейбір басқа дереккөздерде келтірілген. Х. Дж. Кейслер алгебралық жүйелер класының аксиоматизациялану критерийіне алгебралық сипаттама берді, алгебралық жүйелердің ультра өнімі мен изоморфизмі астындағы класстың тұйықталуын, сондай-ақ классты толықтыру үшін ультра күштердің астында жабылуын қолданды. Х.Дж.Кейслер, алайда, алгебралық жүйелердің толық класы үшін критерийдің ешқандай алгебралық сипаттамасын бермейді. Естеріңізге сала кетейік, алгебралық жүйелер класы қандай да бір теорияның алгебралық жүйелер класымен сәйкес келсе, алгебралық жүйелер класы аксиоматизацияланатын деп аталады, алгебралық жүйелер класы қандай да бір толық теорияның алгебралық жүйелер класымен сәйкес келсе, алгебралық жүйелер класы толық деп аталады, ал класс алгебралық жүйелердің класы кейбір модельдік толық теорияның алгебралық жүйелерінің класымен сәйкес келсе, модель-толық деп аталады. Бұл мақалада алгебралық жүйелер класы үшін толықтық критерийінің алгебралық сипаттамасы алынған. Салыстыру үшін мақалада

қолданылған терминдер бойынша сыныптың модельдік толықтығы критерийінің алгебралық сипаттамасын беру мүмкін емес. Бұл толық және модельдік толық кластардың алгебралық табиғаты біршама өзгеше екенін көрсетеді.

Тірек сөздер: алгебралық жүйелер класы, элементар кірістіру, аксиоматизация, ішінара реттік қатынас.

Kasatova A.¹, Kabidenov A.², Bekenov M.^{2*}

¹Medical University of Karagandy, 100000, Karagandy, Kazakhstan

²L.N. Gumilyov Eurasian National University, 010008, Astana, Kazakhstan

*E-mail: bekenov50@mail.ru

ALGEBRAIC CHARACTERISTICS OF THE CRITERION OF COMPLETENESS OF A CLASS OF ALGEBRAIC SYSTEMS

Abstract. In many sources on model theory, in addition to the proven properties about classes of algebraic systems, the characteristics of these properties are given in algebraic terms, that is, they show the nature of these properties from the perspective of universal algebra. For example, the class of quasi-varieties or varieties is defined using model-theoretic concepts, fulfillment of quasi-identities or identities, and in algebraic concepts of closedness with respect to direct products, ultraproducts, fulfillment of locality, closedness with respect to homomorphisms. H.J. Keisler gave an algebraic characterization of the criterion for the axiomatizability of a class of algebraic systems, using the closure of the class under the ultraproduct and isomorphism of algebraic systems, as well as the closure under ultrapowers to complement the class. H.J. Keisler, however, does not give any algebraic characterization of the criterion for completeness of a class of algebraic systems. In this article, an algebraic characterization of the completeness criterion for a class of algebraic systems is obtained. For comparison, it is not possible to give an algebraic description of the criterion for the model completeness of a class, in terms used in the article. This shows that the algebraic nature of complete and model complete classes is somewhat different.

Key words: class of algebraic systems, elementary embedding, axiomatizability, partial order relation.

Введение

Свойства элементарного вложения алгебраических систем рассматривали А. Тарский, Воот [1], А. Робинсон [2]. Отношение подобия алгебраических систем (неотличимости) по элементарной вложимости приводится А.И. Мальцевым в [3].

Во многих источниках по теории моделей [4], [5], [13], [14] помимо доказанных свойств о классах алгебраических систем делаются попытки в алгебраических терминах охарактеризовать эти свойства, т.е. показать природу этих свойств в ракурсе универсальной алгебры. Например, класс квазимногообразий или многообразий определяют, используя теоретико-модельные понятия выполнения квазитожеств или тождеств и в алгебраических понятиях замкнутости относительно прямых произведений, ультрапроизведений, выполнения локальности, замкнутости относительно гомоморфизмов. Такие примеры приводятся и в некоторых других источниках.

В данной статье рассматривается абстрактный класс K_L , то есть замкнутый класс относительно изоморфизма, всех алгебраических систем счетного языка L первого порядка, T – теория языка L . Класс алгебраических систем называется аксиоматизируемым, если он совпадает с классом всех алгебраических систем некоторой теории T [10]. Класс алгебраических систем называется полным, если он совпадает с классом всех алгебраических систем некоторой полной теории T [11]. Класс алгебраических систем называется модельно полным, если он совпадает с классом всех алгебраических систем некоторой модельно полной теории T [4].

Х. Дж. Кейслер в [4], [5] приводит и доказывает алгебраическую характеристику критерия аксиоматизируемости класса. То есть класс алгебраических систем, аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда он замкнут относительно ультрапроизведений и изоморфизмов, а его дополнение замкнуто относительно ультрастепеней. Однако Х. Дж. Кейслер [4], [5] не приводит какую-либо алгебраическую характеристику критерия полноты класса алгебраических систем. Нет такого критерия и в [14].

Основные положения

Запись $A \leq B$ означает, что алгебраическая система A – элементарная подсистема алгебраической системы B . Алгебраическая система A элементарно вкладывается в алгебраическую систему B , если существует изоморфизм алгебраической системы A на элементарную подсистему системы B . Обозначаем через $A \leftrightarrow B$.

Конечно, если $A \leftrightarrow B$, то алгебраические системы A и B элементарно эквивалентны. Обратное может не выполняться.

Определение 1. Модели A и B называются подобными, если $A \leftrightarrow B$ и $B \leftrightarrow A$.

Понятно, что если алгебраические системы A и B изоморфны, то они подобны.

На классе K_L рассмотрим двуместное отношение подобия. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно [6], то есть является отношением эквивалентности, которое разбивает класс K_L этим отношением на непересекающиеся классы. Фактор-класс всех этих классов обозначим через $*K_L$. Если T – теория, то по отношению подобия получаем фактор-класс, который обозначим через $*K_{LT}$. Понятно, что если алгебраические системы A и B изоморфны и $A \in k_1$ и $B \in k_2$, где $k_1, k_2 \in K_L$, то $k_1 = k_2$, в этом случае классы называем изоморфными.

Материалы и методы

В работе использовались известные результаты относительно ультрапроизведений, элементарного вложения и элементарной эквивалентности алгебраических систем.

Результаты и обсуждение

На классе $*K_L$ введем двуместное отношение $\leq$.

Определение 2. Пусть классы $k_1, k_2 \in *K_L$. Тогда $k_1 \leq k_2$ означает, что алгебраические системы из класса k_1 элементарно вкладываются в алгебраические системы класса k_2 .

Предложение 1. Отношение $\leq$ на $*K_L$ является частичным порядком.

Доказательство. Отношение рефлексивно. Отношение $\leq$ антисимметрично, так как если $k_1 \leq k_2$ и $k_2 \leq k_1$, то за счет свойства элементарного вложения $k_1 = k_2$. Транзитивность отношения $\leq$ тоже выполняется.

На фактор-классе $*K_L$ введем определение ультрапроизведения и ультрастепени по ультрафильтру D . Пусть I – непустое множество, D – ультрафильтр над I , и пусть для каждого $i \in I$, $k_i \in *K_L$.

Определение 3. Ультрапроизведение $\prod_D k_i$ по ультрафильтру D – класс, в котором лежит ультрапроизведение по ультрафильтру D алгебраических систем A_i таких, что $A_i \in k_i$, $i \in I$. По аналогии определяется ультрастепень $\prod_D k$ по ультрафильтру D для $k \in *K_L$.

Предложение 2. Ультрапроизведение по ультрафильтру D и ультрастепень по ультрафильтру D определены корректно.

Доказательство. Проводится за счет свойств элементарного вложения.

Пусть K – некоторый класс алгебраических систем. С помощью введенного отношения подобия получим фактор-класс $*K$.

Теорема. Пусть K – некоторый класс алгебраических систем. Класс полный тогда и только тогда, когда K удовлетворяет всем нижеперечисленным свойствам:

1) замкнут относительно ультрапроизведений и изоморфизмов, и его дополнение замкнуто относительно ультрастепеней;

2) для каждого подмножества $H \subseteq *K$ существует верхняя граница в $*K$ относительно отношения $\leq$.

Доказательство. Пусть класс K полный. Из этого следует, что $*K \subseteq *K_L$. Из известного факта [15], что для любого семейства алгебраических систем полного класса существует модель, в которую все алгебраические системы этого семейства элементарно вкладываются, вытекает выполнение условия 2).

Пусть класс K удовлетворяет всем перечисленным условиям. Из первого вытекает, что класс K аксиоматизируемый. Значит, $*K \subseteq *K_L$. И вместе с выполнением условия 2) получаем, что класс K является полным.

Для сравнения: если рассматривать модельно полный класс алгебраических систем, то в терминах, используемых в статье, дать алгебраическую характеристику критерия модельной полноты класса не представляется возможным. Это показывает, что алгебраическая природа полного и модельно полного классов некоторым образом различается.

Замечание. С введением отношения подобия для полного класса K возникает естественное понятие спектральной функции $B_{*K}(\lambda)$ – количества этих классов в каждой конкретной мощности λ для полного класса K .

В [6], [7], [16] приводятся примеры, что для некоторого полного класса K спектральные функции $I_K(\lambda)$ [12] и $B_{*K}(\lambda)$ [8] могут быть различными, например, для $I_K(\omega)$ и $B_{*K}(\omega)$.

Если класс алгебраических систем K_T модельно полный и замкнут относительно произведения моделей, то можно ввести корректно операцию произведения классов на $*K_T$. [9]. То есть получать абелеву подполугруппу $*K_T$ абелевой полугруппы $*K_L$.

Заключение

Используя ультрапроизведения, отношения частичного порядка и верхней границы, дана алгебраическая характеристика критерия полноты класса алгебраических систем.

Информация о финансировании

Работа третьего из авторов выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Минобрнауки РК, грант № AP09259295.

Список литературы

- 1 Tarski A., Vaught R.L. Arithmetical extensions of relational systems. *Compositio math.* – 1957. – 13. – PP. 81–102.
- 2 Robinson A. *Complete Theories.* – Amsterdam, North-Holland, 1956.
- 3 Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
- 4 Кейслер Х.Дж., Чэн К.К. – Теория моделей. – М.: Мир, 1977
- 5 Keisler H.J. Ultraproducts and elementary classes. – *Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A*, 64 (*Indag. Math.* 23). – PP. 477–495.
- 6 Бекенов М.И. Некоторые свойства элементарной вложимости в теории моделей // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* – 2016. – С. 13–16; *J. Math. Sci.* – 2018. – С. 10–13.
- 7 Бекенов М. И. О спектре квазитрансцендентных теорий // *Алгебра и логика.* – 1982. – С. 3–12.
- 8 Бекенов М.И. – Классы подобия относительно элементарной вложимости моделей теории. – Кокшетау, КУАМ, 2010. – С. 174–176.
- 9 Бекенов М.И., Нуракунов А.М. Полугруппа теорий и ее решетка идемпотентных элементов // *Алгебра и логика.* – 2021. – С. 3–22; *Algebra and Logic.* – 2021. – С.1–14.
- 10 Sacks G. *Saturated Model Theory.* – N.Y. Benjamin, 1972.
- 11 Vaught R.L. Applications Lowenheim-Skolem theorem to problems of completeness and decidability // *Indag. Math.* – 1954 – PP. 467–472.
- 12 Morley M. Categoricity in power // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1965. – PP. 514–538.
- 13 Эклоф П. Теория ультрапроизведений для алгебраистов / *Справочная книга по математической логике.* – т.1. – гл.3.
- 14 Барвайс Дж. Теория моделей / *Справочная книга по математической логике.* – т.1. – М.: Наука, 1982.
- 15 Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории, УМН. – 1965. – С. 37–108.
- 16 Bekenov M.I. Properties of elementary embeddability in model theory // *Journal of Mathematical Sciences.* – Vol. 230. – Issue 1. – 2018. – P. 10–13.

References

- 1 Tarski A., Vaught R.L. (1957) Arithmetical extensions of relational systems. *Compositio math*, 13, pp. 81–102.
- 2 Robinson A. (1956) *Complete Theories.* Amsterdam, North-Holland.
- 3 Mal'cev A.I. (1970) *Algebraicheskie sistemy* (in Russian).
- 4 Kejsler H.Dzh., Chjen K.K. (1977) *Teoriya modelej* (in Russian).
- 5 Keisler H.J. Ultraproducts and elementary classes. *Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A*, 64, *Indag.Math.* 23, pp. 477–495.
- 6 Bekenov M.I. (2016) Nekotorye svojstva jelementarnoj vlozhimosti v teorii modelej, *Sib. zhurn. chist. i prikl. matem.*, 6:4, pp. 13–16 (in Russian); 2018 *J. Math. Sci.* 230:1, pp. 10–13.
- 7 Bekenov M.I. (1982) O spektre kvazitranscendentnyh teorij, *Algebra i logika*, 21:1, pp. 3–12 (in Russian).
- 8 Bekenov M.I. (2010) Klassy podobija otnositel'no jelementarnoj vlozhimosti modelej teorii, pp.174–176 (in Russian).
- 9 Bekenov M.I., Nurakunov A.M. (2021) Polugruppa teorij i ee reshetka idempotentnyh jelementov, *Algebra i*

logika, 60:1, pp. 3–22 (in Russian); Algebra and Logic, 2021, 60:1, pp. 1–14.

10 Sacks G. (1972) Saturated Model Theory, N.Y. Benjamin.

11 Vaught R.L. (1954) Applications Lowenheim-Skolem theorem to problems of completeness and decidability, Indag. Math., 16, pp. 467–472.

12 Morley M. (1965) Categoricity in power, Trans. Amer. Math. Soc., 114, pp. 514–538.

13 Jeklof P. Teorija ul'traproizvedenij dlja algebraistov, Spravochnaja kniga po matematicheskoj logike, vol.1, 1.3 (in Russian).

14. Barvajs Dzh. (1982) Teorija modelej, Spravochnaja kniga po matematicheskoj logike, vol. 1 (in Russian).

15. Ershov Ju.L., Lavrov I.A., Tajmanov A.D., Tajclin M.A. (1965) Jelementarnye teorii, UMN, 20:4 (124), pp. 37–108 (in Russian).

16. Bekenov M.I. (2018) Properties of elementary embeddability in model theory, Journal of Mathematical Sciences, vol. 230, issue 1, pp. 10–13.

Информация об авторах

Касатова Аида

Начальник отдела Карагандинского медицинского университета, ул. Гоголя, 40, 100000, г. Караганды, Қазақстан

ORCID ID: 0003-0014-6412-7128

E-mail: kassatova@kmu.kz

Қабиденов Ануар

PhD докторант Евразийского Национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, 100008, г. Астана, Казахстан

ORCID ID: 0005-0009-2319-1503

E-mail: kabiden@gmail.com

Бекенов Махсут Ескендірұлы

Профессор кафедры алгебры и геометрии Евразийского Национального университета имени Л.Н.Гумилева, ул. Кажымукана, 13, 010008, г. Астана, Қазақстан

ORCID: 0009-0007-4511-5476

E-mail: bekenov50@mail.ru

Авторлар туралы мәліметтер

Касатова Аида

Бөлім меңгерушісі, Қарағанды медицина университеті, Гоголь көш., 40, 100000, Қарағанды қ., Қазақстан

ORCID ID: 0003-0014-6412-7128

E-mail: kassatova@kmu.kz

Қабиденов Ануар

PhD докторант Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Кажымұқан көш., 010008, Астана қ., Қазақстан

ORCID ID: 0005-0009-2319-1503

E-mail: kabiden@gmail.com

Бекенов Махсут Ескендірұлы

Алгебра және геометрия кафедрасының профессоры, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Кажымұқан көш., 13, 010008, Астана қ., Қазақстан

ORCID: 0009-0007-4511-5476

E-mail: bekenov50@mail.ru

Information about authors

Kasatova Aida

Head of department of the Medical University of Karaganda, Gogol st., 40, 100000, Karagandy, Kazakhstan

ORCID ID: 0003-0014-6412-7128

E-mail: kassatova@kmu.kz

Kabidenov Anuar

PhD in L.N. Gumilyov Eurasian National University, st. Kazhymukan, 13, 010008, Astana, Kazakhstan

ORCID ID: 0005-0009-2319-1503

E-mail: kabiden@gmail.com

Bekenov Mahsut Iskanderuly

Professor of the Algebra and Geometry Department of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, st. Kazhymukan 13, 010008, Astana, Kazakhstan

ORCID: 0009-0007-4511-5476

E-mail: bekenov50@mail.ru

ӘОЖ 510.67

ГТАХР 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-49-56>**Кулпешов Б.Ш.**

Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан
 Математика және математикалық модельдеу институты, 050010, Алматы қ., Қазақстан
 E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАР МОДЕЛДЕРІНІҢ ГИПЕРГРАФТАРЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Андатпа. Бұл жұмыста біз әлсіз о-минималды теориялар модельдерінің гиперграфтар үшін салыстырмалы Н-еркіндік және салыстырмалы Н-тәуелсіздік ұғымдарын зерттейміз. Теорияның модельдердің гиперграфтары теориялардың өздері туралы да, соған байланысты семантикалық объектілер туралы да маңызды құрылымдық ақпаратты алуға мүмкіндік беретін туынды объектілер болып табылады. Еске салайық, гиперграф – кез келген жұп (X, Y) , мұндағы Y және X жиындары $P(X)$ булеанының кейбір ішкі жиыны. Бұл жағдайда X жиыны гиперграфтың (X, Y) негізгі жиын деп аталады. Ал Y -тің элементтері гиперграфтың (X, Y) қабырғалары деп аталады. Әлсіз о-минималдылықты бастапқыда Д. Макферсон, Д. Маркер және Ч. Стейнхорн терең зерттеген. Өткен ғасырдың тоқсаныншы жылдарында Қазақстан ғалымдары осы авторлар қойған бірқатар мәселелерді шеше отырып, бұл түсінікті зерттеуге сәтті қосылды. Бұл жұмыста біз әлсіз о-минималды құрылымдардың модельдік-теориялық қасиеттерін зерттеуді жалғастырамыз. Дөңестік рангісі бойынша омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардағы алгебралық емес 1-типті жүзеге асыру жиынының салыстырмалы Н-еркіндігінің критерийі алынған. Біз сондай-ақ 1-типтердің әлсіз ортогональдылығы тұрғысынан омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардағы екі алгебралық емес 1-типтерінің жүзеге асу жиындарының салыстырмалы Н-тәуелсіздігінің критерийін белгілейміз.

Тірек сөздер: сызықтық реттелген құрылым, гиперграф, әлсіз о-минималдылық, салыстырмалы еркіндік, салыстырмалы тәуелсіздік, омега-категориялыққа жуық.

Кулпешов Б.Ш.

Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан
 Институт математики и математического моделирования, 050010, г. Алматы, Казахстан
 E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz,

СВОЙСТВА ГИПЕРГРАФОВ МОДЕЛЕЙ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Аннотация. В настоящей статье исследуются понятия относительной Н-свободы и относительной Н-независимости для гиперграфов моделей слабо о-минимальных теорий. Гиперграфы моделей теории относятся к производным объектам, позволяющим получать существенную структурную информацию как о самих теориях, так и о сопутствующих семантических объектах. Вспомним, что гиперграфом называется любая пара множеств (X, Y) , где Y – некоторое подмножество булеана $P(X)$ множества X . При этом множество X называется носителем гиперграфа (X, Y) , а элементы из Y – ребрами гиперграфа (X, Y) . Слабая о-минимальность первоначально была глубоко исследована Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном. В девяностые годы прошлого столетия к исследованию данного понятия успешно подключились казахстанские ученые, решив ряд поставленных этими авторами проблем. В настоящей работе мы продолжаем исследование теоретико-модельных свойств слабо о-минимальных структур. Получен критерий относительной свободы множества реализаций неалгебраического 1-типа в почти омега-категоричных слабо о-минимальных теориях в терминах ранга выпуклости. Также установлен критерий относительной Н-независимости множеств реализаций двух неалгебраических 1-типов в почти омега-категоричных слабо о-минимальных теориях в терминах слабой ортогональности 1-типов.

Ключевые слова: линейно упорядоченная структура, гиперграф, слабая о-минимальность, относительная свобода, относительная независимость, почти омега-категоричность.

Kulpeshov B.Sh.

Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

PROPERTIES OF HYPERGRAPHS OF MODELS OF WEAKLY O-MINIMAL THEORIES

Abstract. In this paper, we study the notions of relative H-freeness and relative H-independence for hypergraphs of models of weakly o-minimal theories. Hypergraphs of models of a theory are derived objects that allow obtaining essential structural information both about the theories themselves and about related semantic objects. Recall that a hypergraph is any pair of sets (X, Y) , where Y is some subset of the Boolean $P(X)$ of a set X . In this case, the set X is called the support of the hypergraph (X, Y) , and elements from Y are called edges of the hypergraph (X, Y) . Weak o-minimality was originally deeply investigated by D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn. In the nineties of the last century, Kazakhstan scientists successfully joined the study of this concept, solving a number of problems posed by the authors. In this paper, we continue the study of model-theoretic properties of weakly o-minimal structures. A criterion for relative H-freeness of the set of realizations of non-algebraic 1-type in almost omega-categorical weakly o-minimal theories is obtained in terms of convexity rank. We also establish a criterion for relative H-independence of the sets of realizations of two non-algebraic 1-types in almost omega-categorical weakly o-minimal theories in terms of weak orthogonality of 1-types.

Key words: linearly ordered structure, 1-transitivity, weak o-minimality, relative freeness, relative independence, almost omega-categoricity.

Кіріспе

Бұл мақалада әлсіз о-минималды теориялар модельдерінің гиперграфтары үшін салыстырмалы еркіндік және салыстырмалы тәуелсіздік ұғымдарын зерттейміз.

Теорияның модельдердің гиперграфтары – теориялардың өздері туралы да, соған байланысты семантикалық объектілер туралы да маңызды құрылымдық ақпаратты алуға мүмкіндік беретін туынды объектілер болып табылады [1-7].

Еске салайық, гиперграф – кез келген жұп (X, Y) , мұндағы Y X жиыны $P(X)$ булеанының кейбір ішкі жиыны. Бұл жағдайда X жиыны гиперграфтың (X, Y) тірегі деп аталады, ал Y -тің элементтері гиперграфтың (X, Y) қабырғалары деп аталады.

M толық T теориясының кейбір моделі болсын. [1]-ге сәйкес, M моделінің N элементар ішкі модельдің негізгі жиыны болып табылатын M жүйесінің M тірегінің барлық ішкі жиындарының N жиынын $H(M)$ арқылы белгілейміз: $H(M) = \{N \mid N \prec M\}$. $(M, H(M))$ жұбы M моделінің элементар ішкі моделінің гиперграфы деп аталады және H деп белгіленеді.

L бірінші ретті саналымды тіл болсын. Осы мақалада біз L -құрылымдарды қарастырамыз және L құрамында бинарлық қатынас символы $<$ кіреді, бұл құрылымдарда сызықтық рет түсіндіріледі деп есептейміз. Бұл жұмыста бастапқыда [8] терең зерттелген әлсіз о-минималдылық түсінігі қарастырылады. Кез келген $a, b \in A$ және $c \in M$ кезінде $a < c < b$ бізде $c \in A$ болса, сызықты реттелген M құрылымының A ішкі жиыны дөңес деп аталады.

Әлсіз о-минималды құрылым – сызықты реттелген құрылым $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ осылайша M құрылымының кез келген анықталатын (параметрлері бар) ішкі жиыны M -дегі дөңес жиындардың шекті санының бірігуі болып табылады. Мұндай M құрылымы о-минималды деп аталады, егер M құрылымының әрбір анықталатын (параметрлері бар) ішкі жиыны M -дегі интервалдар мен нүктелердің шекті санының бірігуі болса. Осылайша, әлсіз о-минималдылық о-минималдылықтың жалпылама нұсқасы болып табылады. Меншікті дөңес бағалау сақинасы бар нақты жабық өрістер әлсіз о-минималды (о-минималды емес) құрылымдардың маңызды мысалын береді.

Анықтама 1.1 T – әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ алгебралық емес типтер болсын. Егер L_A -формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ және $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ бар болса, сонымен бірге келесі шарттар орындалса: $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ және $\beta_2 \in H(M, \alpha)$, сонда p типі q типіне әлсіз ортогональды емес деп айтамыз.

Басқаша айтқанда, $p(x) \cup q(y)$ L_A -формулалар жиыны толық 2-типке бірегей кеңейтімге ие болса,

p типі q типіне әлсіз ортогональды болады.

Лемма 1.2 [9] Егер T әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $A \subseteq M$ болса, сонда әлсіз емес ортогоналдылық қатынасы $S_1(A)$ бойынша эквиваленттік қатынас болады.

Анықтама 1.3 [10, 1] T – толық теория болсын және $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Егер $q(x_1, \dots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ және $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^n p_i(x_i)$ $q(x_1, \dots, x_n)$ $(p_1, \dots, p_n)$ -тип деп аталады. T теорияның барлық $(p_1, \dots, p_n)$ -типтердің жиыны $S_{p_1, \dots, p_n}(T)$ деп белгілейді. Кез келген $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ типтер үшін $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1, \dots, p_n}(T)$ тек қана шекті болса, саналымды теориясы T ω -категориялыққа жуық (омега-категориялыққа) деп аталады.

Омега-категориялыққа жуық түсінігі Эренфойхт теориясы деген түсінікпен тығыз байланысты. Сонымен, [10] жұмысында дәлелденді, егер $I(T, \omega) = 3$ шарты бар ω -категориялыққа жуық теория T болса, онда T теориясында тығыз сызықтық рет түсіндіріледі. Соған қарамастан, $I(T, \omega) = 3$ шарты бар, бірақ ω -категориялыққа жуық емес теорияның мысалы ([11]-де М.Г. Перетяткин құрастырған) бар.

[12] жұмысында Эренфойхттың әбден о-минималды теорияларының омега-категориялыққа жуықтығы және омега-категориялыққа жуық әбден о-минималды теориялар үшін алгебралық тұйықталуды ауыстыру принципінің негізділігі анықталды. [13] жұмысында жұптық әлсіз ортогональды алгебралық емес 1-типтердің кез келген жиынының бос жиынға ортогоналдылығы мұндай теориялар үшін және ω -категориялыққа жуық әбден о-минималды теориялардың бинарлығы дәлелденді. [14] жұмысында дөңестік рангісі 1 ω -категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теорияларының бинарлығы дәлелденді. [15] жұмысында саналымды модельдер саны аз дөңестік рангісі шекті әлсіз о-минималды теорияларының ω -категориялыққа жуықтығы дәлелденді. Соңында [16] жұмысында ω -категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардың бинарлық критерийі табылды.

Анықтама 1.4 [17] Σ_n , $n \in \omega$, жұптық ажыратылған предикатты сигнатуралары M_n жұптық ажыратылған құрылымдардың $\prod_{n \in \omega} M_n$ дизъюнктивтік (ажыратылған) бірігуі $\prod_{n \in \omega} M_n$, $P_n = M_n$, жиынымен және Σ_n -дан предикаттық символдардың интерпретацияларымен сәйкес келетін M_n , $n \in \omega$ құрылымдарында $\bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n \cup \{P_n^{(1)} \mid n \in \omega\}$ сигнатуралық құрылым деп аталады. Σ_n , $n \in \omega$, жұптық ажыратылған сигнатуралары T_n теорияларының дизъюнктивтік (ажыратылған) бірігуі $M_n \models T_n$, $n \in \omega$, орындалса, $\prod_{n \in \omega} T_n \models \text{Th}(\prod_{n \in \omega} M_n)$ теориясы деп аталады.

Назар аударыңыз, омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялар жалпы жағдайда Эренфойхт емес. Мұндай теорияның мысалы ретінде Эренфойхт мысалының ω типі бойынша реттелген үш саналымды модельдермен есептелетін көшірмелерінің дизъюнктивтік бірігуін алуға болады. Бұл теорияда бос жиынның үстінде әлсіз ортогональды окшауланбаған 1-типтердің есептелетін саны бар, сондықтан саналымды модельдері максималды саны бар.

Сондай-ақ, омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялар жалпы алғанда кіші емес екенін ескереміз. Мұндай теорияның мысалы ретінде $M = \langle \mathbb{Q}, <, q \rangle_{q \in \mathbb{Q}}$ құрылымын қарастыруға болады. Әлбетте, $\text{Th}(M)$ бос жиынның үстінде 1 типтері континуумға ие, яғни, бұл теориясы кіші емес болады.

Әдістері

Осы жобада XX ғасырдың 80-ші жылдары және кейінірек модельдер теориясында өз дамуын алынған тәсілдерді қолдауын ұсынады. Олардың арасында о-минималдық және оның түрлерін негізінде реттелген құрылымдардың зерттеу методологиясы белгілеп кетуге болады. Бұл жағдайда бір бос айнымалы шамасы бар формулалармен анықталатын жиындарға қатал шектер салуы типтілік болады. Шынында, о-минималды құрылым M L -құрылым деп қарастыруға болады, бұл жерде $L \supset L_0 = \{<\}$, $<$ – сызықтық рет M -де, және M -құрылымның кез келген анықталатын ішкі жиын кванторсыз L_0 -анықталатын болады. Бұл басқа түсініктерге нұсқау береді: L_0 -ді кейбір басқа белгілі тілге ауыстырамыз, сосын L_0 -азайтылуы келіскен типті болатын (мысалы, сызықтық рет) L -құрылымдарды қарастырамыз, және M -құрылымның кез келген анықталатын ішкі жиын кванторсыз L_0 -анықталатын болатындығын талап етеміз (осыны берілген теориясының модельдердің бәрінен талап етуге болады).

Нәтижелер

Назар аударыңыз, егер біз кез келген омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теорияда кез келген алгебралық емес оқшауланған $p \in S_1(\emptyset)$ типті қарастырсақ, онда кез келген $M \models T$ моделінде $p(M)$ жиыны Н-еркін болмайды. Өйткені егер біз A' жиыны ретінде кейбір тұйық интервалды $[a, b] \subset p(M)$ $a < b$ шарты орындалатын, алсақ, онда $A' = p(M) \cap M_1$ болатын ішкі моделі $M_1 \prec M$ болмайды. Н-еркіндігінің бұзылуының тағы бір себебі – тығыз емес шексіз $A' \subset p(M)$ жиынды алу мүмкіндігі, ал T теориясының модельдері үшін $A' \subset p(M)$ жиынтықтар тығыз болуы керек.

b элементі бар кез келген ашық интервал b элементінің көршілестігі деп аталады. Еске салайық, M сызықты реттелген құрылымның кез келген A ішкі жиыны, егер кез келген $b \in A$ үшін A құрамындағы b элементінің көршілестігі болса, ашық болады.

Анықтама 3.1 [7] T – әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типі болсын. Біз $p(M)$ жиынын салыстырмалы түрде Н-еркін, дөңес жиындарға қатысты Н-еркін немесе (H, cs) -еркін болады дейміз, егер кез келген ашық дөңес жиын $A' \subseteq p(M)$ үшін кейбір $M_1 \in H(M)$ үшін $A' = p(M) \cap M_1$ теңдік орындалса.

Назар аударыңыз, H гиперграфтары Н-еркін жиындардағы барлық шексіз ішкі жиындарды таңдауға мүмкіндік беруімен қатар, соңғы нүктелері жоқ дөңес жиындарға қосымша (H, cs) -еркін жиындар үшін сәйкес гиперграфтар соңғы нүктелері жоқ тығыз жиынтықтар таңдауға мүмкіндік береді. Мысалы, соңғы нүктелері жоқ тығыз сызықтық реттелген теориясы үшін соңғы нүктелері жоқ кез келген тығыз ішкі жиын осылай бөлектеледі.

Теорема 3.2 Егер T омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ алгебралық емес оқшауланған типі болса, сонда $p(M)$ жиыны салыстырмалы Н-еркін $\Leftrightarrow RC(p) = 1$.

Мысалы 3.3 $M = \langle Q, <, f^1 \rangle$ – сызықтық реттелген құрылым, Q – рационалды сандар жиыны, $f(x) = x + 1 - Q$ жиында унарлық функция болсын. Бұл M о-минималды құрылым екенін түсіну оңай, бірақ $Th(M)$ омега-категориялыққа жуық теория емес. Сондай-ақ, бұл $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$ алгебралық емес оқшауланған типі, $RC(p) = 1$, бірақ салыстырмалы түрде $p(M)$ жиыны Н-еркін емес екенін ескереміз.

Анықтама 3.4 [7] T – әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер, $RC(p) = RC(q) = 1$ болсын. Біз $p(M)$ және $q(M)$ салыстырмалы түрде Н-тәуелсіз, дөңес жиындарға қатысты Н-тәуелсіз немесе (H, cs) -тәуелсіз деп атаймыз, егер кез келген ашық дөңес жиындар $A' \subseteq p(M)$ және $B' \subseteq q(M)$ үшін $A' = p(M) \cap M_1$ және $B' = q(M) \cap M_1$ орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса.

Теорема 3.5 Егер T омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ алгебралық емес оқшауланған типтер, $RC(p) = RC(q) = 1$ болса, сонда $p(M)$ және $q(M)$ салыстырмалы түрде Н-тәуелсіз $\Leftrightarrow p$ және q әлсіз ортогоналды.

Салдар 3.6 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типі, $RC(p) = n$, мұнда $n > 1$, болсын. Шексіз дөңес класстардың шексіз санына $p(M)$ жиынды бөлінетін $E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$ $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынастар бар деп есептейік, сондықтан кез келген $a \in p(M)$ үшін $E_1(a, M) \subset E_2(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}(a, M)$ орындалсын. Сонда

- 1) Әрбір E_i -класс салыстырмалы түрде Н-еркін болады;
- 2) Кез келген екі E_i -класс салыстырмалы түрде Н-тәуелсіз болады;
- 3) Кез келген $2 \leq i \leq n-1$ үшін әрбір E_i -класс салыстырмалы түрде Н-еркін емес болады.

Мысалы 3.7 $M = \langle Q \times Q; <, E^2, f^1 \rangle$ – сызықтық реттелген құрылым, мұнда $Q \times Q$ – лексикографиялық реттелген жиын болсын. E символы келесідей анықталған бинарлық қатынас арқылы түсіндіріледі: кез келген $a = (n_1, m_1), b = (n_2, m_2) \in Q \times Q$ үшін $E(a, b) \Leftrightarrow n_1 = n_2$, f символы $(n, m) \in Q \times Q$ барлығына $f((n, m)) = (n + 1, m)$ теңдікпен анықталған унарлы функция арқылы түсіндіріледі.

Бұл $E(x, y)$ – шексіз дөңес класстардың шексіз санына M бөлетін эквиваленттік қатынас екені анық. $Th(M)$ ω -категориялыққа жуық емес әлсіз о-минималды теория екенін анықтауға болады. Назар аударыңыз, $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған тип, $RC(p) = 2$, әрбір E -класс салыстырмалы түрде Н-еркін болады, бірақ әрқайсысы $a \in M$ үшін $E(a, M)$ және $E(f(a), M)$ салыстырмалы түрде Н-тәуелсіз емес.

Анықтама 3.8 [7] T – әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типі, $E(x, y)$ – шексіз дөңес кластардың шексіз санына $p(M)$ жиынды бөлінетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Егер $A \subseteq p(M)$ онда A мен бос емес қиылысы бар E -кластар өкілдерінің A/E жиынымен белгілейміз. Егер кез келген дөңес $A' \subset p(M)$ үшін A' / E ашық жиын және кейбіреу $M_1 \in H(M)$ жиыны үшін $A' = p(M) \cap M_1$ теңдік орындалса, сонда $p(M)$ жиынды салыстырмалы түрде (H, E) -еркін деп айтамыз.

Соңғы анықтамада $p(M)$ тығыз реттелген жағдайда A' жиынтықтың дөңес болуы маңызды екенін ескеріңіз. Шынында да, $p(x) := \{U(x)\}$, $a_1, a_2 \in p(M)$ болсын және $M \models E(a_1, a_2) \wedge a_1 < a_2$ орындалсын. Келесі формуланы қарастырайық:

$$\varphi(x, a_1, a_2) := U(x) \wedge [x \leq a_1 \vee x \geq a_2]$$

$A' = \varphi(M, a_1, a_2)$ болсын. Онда $A' \subseteq p(M)$, A' дөңес емес, A' / E ашық дөңес жиын екені көрініп тұр, бірақ $A' = p(M) \cap M_1$ теңдеу орындалатын ондай ішкі модель $M_1 \prec M$ жоқ.

Теорема 3.9 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типі, $E(x, y)$ – шексіз дөңес кластардың шексіз санына $p(M)$ жиынды бөлінетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Сонда $p(M)$ жиыны салыстырмалы түрде (H, E) -еркін $\Leftrightarrow$ дөңес кластардың шексіз санына $p(M)$ жиынды бөлінетін кез келген $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынасы $E'(x, y)$ кейбір $a \in p(M)$ үшін $E'(a, M) \subseteq E(a, M)$ орындалады.

Мысалы 3.10 $M = \langle M, <, E_i^2 \rangle_{i \in \omega}$ – сызықтық реттелген құрылым болсын, әрбір $i \in \omega$ $E_i(x, y)$ дөңес кластардың шексіз санына M құрылымды бөлетін эквиваленттік қатынасты анықтайды, бұл ретте әрбір E_{i+1} -класс E_i -кластардың шексіз санына бөлінді, әрбір E_i -класс дөңес және ашық болады, сондықтан әрбір E_{i+1} -класстың ішкі E_i -кластары соңғы нүктелерсіз тығыз реттелген.

$Th(M)$ ω -категориялыққа жуық емес әлсіз о-минималды теория екенін анықтауға болады. M құрылым 1-айыруға болмайтыны анық, яғни $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$. Кез келген $i \in \omega$ үшін $p(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_i) -еркін емес нәрсені түсіну оңай.

Анықтама 3.11 [7] T – әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер болсын. Соның ішінде $E_1(x, y), E_2(x, y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_i(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_i) -еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_2) -еркін деп есептейік. Егер кез келген дөңес $A' \subseteq p_1(M)$ және $B' \subseteq p_2(M)$ A' / E_1 пен B' / E_2 ашық жиындар болса және $A' = p_1(M) \cap M_1$ пен $B' = p_2(M) \cap M_1$ орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса, сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1, E_2) -тәуелсіз деп айтамыз.

Теорема 3.12 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер болсын. Соның ішінде $E_1(x, y), E_2(x, y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_i(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_i) -еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_2) -еркін деп есептейік. Сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1, E_2) -тәуелсіз $\Leftrightarrow p_1$ және p_2 әлсіз ортогоналды.

Салдар 3.13 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер болсын, және $(\emptyset)$ -анықталатын биекция $f: p_1(M) \rightarrow p_2(M)$ бар деп есептейік. Соның ішінде $E_1(x, y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ бөлетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. $p_2(M)$ жиын бойынша $E_2(x, y)$ қатынасты былай анықтайық: кез келген $a, b \in p_2(M)$ үшін $E_2(a, b) \Leftrightarrow E_1(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$. Содан $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1) -еркін $\Leftrightarrow p_2(M)$ салыстырмалы (H, E_2) -еркін.

Әрі қарай, салыстырмалы H -еркіндік, салыстырмалы H -тәуелсіздік, салыстырмалы (H, E) -еркіндік және салыстырмалы (H, E_1, E_2) -тәуелсіздік анықтамаларын оқшауланбаған 1-типтерге кеңейтеміз.

Еске салайық, егер A – M сызықтық реттелген құрылымның кез келген ішкі жиыны болса, онда $A < b$ ($b < A$) шартымен қарастырылатын құрылым b элементтерінің жиынын A^+ (және сәйкесінше A^-) арқылы белгілейміз.

Анықтама 3.14 [9] M – әлсіз о-минималды құрылым, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – алгебралық емес типі болсын. Кез келген жеткілікті мазмұнды модель $N \succ M$ үшін $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$) шарты орындалатын дөңес L_A -формуласы $U_p(x) \in p$ бар болса, біз p типті оңға (солға) квазирационалды деп айтамыз. Оңға квазирационалды немесе солға квазирационалды болса, оқшауланбаған 1-типі квазирационалды деп аталады. Квазирационалды емес оқшауланбаған 1-типі иррационалды деп аталады.

Бір уақытта оңға квазирационалды және солға квазирационалды 1-типі оқшауланғаны анық.

A дөңес жиынды оңға (солға) ашық деп айтамыз, егер элемент $a \in A$ табылса келесі шартпен: кез келген $b > a$ ($b < a$) үшін A құрамындағы b элементтің көршілестігі бар болады. Егер кез келген жиын оңға да, солға да ашық болса, онда оның ашықтығы анық.

Анықтама 3.15 [7] T – әлсіз о-минималды құрылым, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типі, $RC(p) = 1$. Егер p – оңға (солға) квазирационалды болса, сонда кез келген оңға (солға) ашық дөңес $A' \subseteq p(M)$ үшін кейбіреу $M_1 \in H(M)$ үшін $A' = p(M) \cap M_1$ теңдік болса, $p(M)$ жиыны салыстырмалы түрде H -еркін деп айтамыз. Егер p иррационал болса, онда A' ретінде кез келген дөңес жиынды алуы жеткілікті.

Лемма 3.16 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типі болсын. Сонда $p(M)$ – салыстырмалы H -еркін $\Leftrightarrow RC(p) = 1$.

Анықтама 3.17 [7] T – әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типтері болсын, $RC(p) = RC(q) = 1$. Егер кез келген дөңес жиындар $A' \subseteq p(M)$ және $B' \subseteq q(M)$ үшін p және q типтерге сәйкес келетін (Анықтама 3.15 бойынша) $A' = p(M) \cap M_1$ және $B' = q(M) \cap M_1$ шарттар орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса, сонда $p(M)$ және $q(M)$ салыстырмалы түрде H -тәуелсіз деп айтамыз.

Лемма 3.18 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті қаныққан моделі, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типтері болсын, $RC(p) = RC(q) = 1$. Сонда $p(M)$ және $q(M)$ салыстырмалы түрде H -тәуелсіз $\Leftrightarrow p$ және q әлсіз ортогоналды.

Анықтама 3.19 [7] T – әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типі, $RC(p) = 1$. Егер p – оңға (солға) квазирационалды болса, сонда кез келген дөңес $A' \subseteq p(M)$ үшін A' / E оңға (солға) ашық болуы орындалса, $M_1 \in H(M)$ шарты орындалатын $A' = p(M) \cap M_1$ табылса, сонда $p(M)$ салыстырмалы түрде (H, E) -еркін деп айтамыз. Егер p иррационалды болса, онда A' ретінде A' / E жиынның түрін кез келген етіп қалдырып, $p(M)$ жиынның кез келген дөңес ішкі жиынды алуы жеткілікті.

Теорема 3.20 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типі, $E(x, y)$ – шексіз дөңес кластардың шексіз санына $p(M)$ жиынды бөлінетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Сонда $p(M)$ салыстырмалы түрде (H, E) -еркін $\Leftrightarrow E(x, y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p(M)$ жиынды бөлетін ең үлкен $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынас.

Анықтама 3.21 [7] T – әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типтері болсын. Соның ішінде $E_1(x, y), E_2(x, y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1) -еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_2) -еркін деп есептейік. Егер кез келген дөңес $A' \subseteq p_1(M)$ және $B' \subseteq p_2(M)$ p_1 және p_2 сәйкес келетін (Анықтама 3.19 бойынша), $A' = p_1(M) \cap M_1$ пен $B' = p_2(M) \cap M_1$ орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса, сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1, E_2) -тәуелсіз деп айтамыз.

Теорема 3.22 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ – оқшауланбаған типтері болсын. Соның ішінде $E_1(x, y), E_2(x, y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\emptyset)$ -анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1) -еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_2) -еркін деп есептейік. Сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1, E_2) -тәуелсіз $\Leftrightarrow p_1$ және p_2 әлсіз ортогоналды.

Қорытынды. Бұл жұмыста омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардағы салыстырмалы еркіндік пен салыстырмалы тәуелсіздік ұғымдары зерттелді. Алгебралық емес

1-типітi жүзеге асыру жиынының салыстырмалы еркіндігі және мұндай теориялардағы жиындардың салыстырмалы тәуелсіздігі үшін критерийлер алынады. Бұл омега-категориялыққа жуық әбден о-минималды теориялар үшін алынған ұқсас нәтижелерді жалпылайды.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеулерге Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант BR20281002).

Әдебиеттер тізімі

- 1 Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. – Part 1. – Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House, 2018. – 326 p. ISBN 978-5-7782-3527-4
- 2 Судоплатов С.В. Об ациклических гиперграфах минимальных простых моделей // Сибирский математический журнал. – Т. 42. – №6. – С. 1408–1412.
- 3 Судоплатов С.В. Гиперграфы простых моделей и распределения счетных моделей малых теорий // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15. – № 7. – С. 179–203.
- 4 Байкалова К.А. О некоторых гиперграфах простых моделей и порождаемых ими предельных моделях // Алгебра и теория моделей 7 : сб. науч. тр. / под. редакцией А.Г. Пинуса, К.Н. Пономарева, С.В. Судоплатова. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2009. – С. 6–17.
- 5 Sudoplatov S.V. On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». – 2016. – Т. 82. – №. 2. – С. 113–120.
- 6 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On relative separability in hypergraphs of models of theories // Eurasian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 9. – No. 4. – P. 68–78.
- 7 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On freedom and independence in hypergraphs of models of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 612–630.
- 8 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352. – No. 6. – P. 5435–5483.
- 9 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – Vol. 66. – P. 1382–1414.
- 10 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly. – 1998. – Vol. 44. – Issue 2. – P. 161–166.
- 11 Peretyatkin M.G. Theories with three countable models // Algebra and Logic. – 1980. – Vol. 19. – No. 2. – P. 224–235.
- 12 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Linearly ordered theories near to countably categorical // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101. – No. 3. – P. 413–424.
- 13 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. Binarity of almost ω -categorical quite o-minimal theories // Siberian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 61. – No. 3. – P. 484–498.
- 14 Kulpeshov B.Sh., Mustafin T.S. Almost ω -categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 62. – No. 1. – P. 65–81.
- 15 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – Vol. 18. – No. 1. – P. 247–254.
- 16 Kulpeshov B.Sh. A criterion for binarity of almost ω -categorical weakly o-minimal theories // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 62. – No. 6. – P. 1063–1075.
- 17 Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University. – 1976. – 99 p.

References

- 1 Sudoplatov S.V. (2018) Classification of countable models of complete theories, part 1. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House, 326 p. ISBN 978-5-7782-3527-4
- 2 Sudoplatov S.V. Ob aciklicheskih gipergrafah minimal'nyh prostykh modelej, Sibirskij matematicheskij zhurnal, vol. 42, no. 6, pp. 1408–1412.
- 3 Sudoplatov S.V. (2009) Gipergrafy prostykh modelej i raspredeleniya schetnykh modelej malyh teorij, Fundamental'naja i prikladnaja matematika, vol. 15, no. 7, pp. 179–203.
- 4 Bajkalova K.A. (2009) O nekotoryh gipergrafah prostykh modelej i porozhdaemyh imi predel'nyh modeljah, Algebra i teorija modelej 7 : sb. nauch. tr. / pod. redakciej A.G. Pinusa, K.N. Ponomareva, S.V. Sudoplatova. Novosibirsk: Izdatel'stvo NGTU, pp. 6–17.
- 5 Sudoplatov S.V. (2016) On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory, Vestnik Karagandinskogo universiteta, vol. 82, no. 2, pp. 113–120.
- 6 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2018) On relative separability in hypergraphs of models of theories, Eurasian Mathematical Journal, vol. 9, no. 4, pp. 68–78.

- 7 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2018) On freedom and independence in hypergraphs of models of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 15, pp. 612–630.
- 8 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. (2000) Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 352, no. 6, pp. 5435–5483.
- 9 Baizhanov B.S. (2001) Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 66, pp. 1382–1414.
- 10 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. (1998) On theories having three countable models, *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 44, issue 2, pp. 161–166.
- 11 Peretyatkin M.G. (1980) Theories with three countable models, *Algebra and Logic*, vol. 19, no. 2, pp. 224–235.
- 12 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2017) Linearly ordered theories near to countably categorical, *Mathematical Notes*, vol. 101, no. 3, pp. 413–424.
- 13 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. (2020) Binariness of almost ω -categorical quite o-minimal theories, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 61, no. 3, pp. 484–498.
- 14 Kulpeshov B.Sh., Mustafin T.S. (2021) Almost ω -categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 62, no. 1, pp. 65–81.
- 15 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. (2021) On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 18, no. 1, pp. 247–254.
- 16 Kulpeshov B.Sh. (2021) A criterion for binarity of almost ω -categorical weakly o-minimal theories, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 62, no. 6, pp. 1063–1075.
- 17 Woodrow R.E. (1976) Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University, 99 p.

Автор туралы мәлімет

Кулпешов Бейбіт Шайықұлы

Физика-математика ғылымының докторы, Қазақстан Республикасы Ұлттық Ғылымдар Академиясының корреспондент мүшесі, Қолданбалы математика мектебінің профессоры, Қазақстан-Британ техникалық университеті, Төле би көш., 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан; Математика және математикалық модельдеу институтының бас ғылыми қызметкері, Шевченко көш., 28, 050010, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0002-4242-0463

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Information on the author

Kulpeshov Beibut Shaiykovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan; Professor of School of Applied Mathematics, Kazakh-British Technical University, 59, Tole bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan; Chief Researcher of Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 28, Shevchenko street, Almaty, 050010, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0002-4242-0463

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Информация об авторе

Кулпешов Бейбут Шайықович

Доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН РК, профессор Школы прикладной математики, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан; главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования, ул. Шевченко, 28, 050010, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID: 0000-0002-4242-0463

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

UDK 512.544

IRSTI 27.17.23

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-57-66>**Mardanov N.A.**

Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan

Email: mardanov1602@gmail.com

TRIPLE TORTKEN IDENTITIES

Abstract. We define a triple Tortken product in Novikov algebras. Using computer algebra calculations, we give a list of polynomial identities up to degree 5 satisfied by Tortken triple product in every Novikov algebra. It has applications in theoretical physics, specifically in the field of quantum field theory and topological field theory. A Novikov algebra is defined as a vector space equipped with a binary operation called the Novikov bracket. The Jacobi identity ensures that the Novikov bracket behaves analogously to the commutator in Lie algebras. However, unlike Lie algebras, Novikov algebras are non-associative due to the presence of the Jacobi identity rather than the associativity condition. Novikov algebras find applications in theoretical physics, particularly in the study of topological field theories and quantum field theories on noncommutative spaces. They provide a framework for describing and analyzing certain algebraic structures that arise in these areas of physics. It's worth noting that Novikov algebras are a specific type of non-associative algebra, and there are various other types of non-associative algebras studied in mathematics and physics, each with its own defining properties and applications.

Key words: Novikov algebras, triple product, polynomial identities, Wolfram Mathematica.

Марданов Н.А.

Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

Email: mardanov1602@gmail.com

ТЕРНАРЛЫ ТӨРТКЕН СӘЙКЕСТЕРІ

Аңдатпа. Біз Новиков алгебрасында тернарлы Торткен көбейтіндісін анықтаймыз. Компьютерлік алгебра есептеулерін пайдалана отырып, біз әрбір Новиков алгебрасында Торткен тернарлы көбейтіндісін қанағаттандыратын 5-дәрежеге дейінгі көпмүшелік сәйкестіктердің тізімін береміз. Оның теориялық физикада, әсіресе кванттық өріс теориясы және топологиялық өріс теориясы саласында қолданбалары бар. Новиков алгебрасы Новиков жақшасы деп аталатын екілік операциямен жабдықталған векторлық кеңістік ретінде анықталады. Якоби сәйкестендіру Новиков жақшасының Ли алгебраларындағы коммутаторға ұқсас әрекет ететінін қамтамасыз етеді. Алайда, Ли алгебраларынан айырмашылығы, Новиков алгебралары ассоциативтілік шартынан гөрі Якоби сәйкестігінің болуына байланысты ассоциативті емес. Новиков алгебралары теориялық физикада, әсіресе топологиялық өріс теорияларын және коммутативті емес кеңістіктердегі кванттық өріс теорияларын зерттеуде қосымшаларды табады. Олар физиканың осы салаларында пайда болатын кейбір алгебралық құрылымдарды сипаттау және талдау үшін негіз береді. Айта кетейік, Новиков алгебралары ассоциативті емес алгебраның белгілі бір түрі болып табылады және математика мен физикада зерттелетін ассоциативтік емес алгебралардың басқа да әр түрлі түрлері бар, олардың әрқайсысының өзіндік анықтаушы қасиеттері мен қолданбалары бар.

Тірек сөздер: Новиков алгебрасы, тернарлы көбейтіндісі, көп мүшелік сәйкестіктері, Вольфрам Математика.

Марданов Н.А.

Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан

Email: mardanov1602@gmail.com

ТЕРНАРНЫЕ ТОЖДЕСТВА ТОРТКЕНА

Аннотация. Мы определяем тернарное произведение Торткена в алгебрах Новикова. Используя вычисления компьютерной алгебры, мы даем список полиномиальных тождеств до степени 5, которым удовлетворяет тернарное произведение Торткена в каждой алгебре Новикова. Он имеет приложения в теоретической физике, особенно в области квантовой теории поля и топологической теории поля. Алгебра Новикова определяется как векторное пространство, снабженное бинарной операцией, называемой скобкой Новикова. Тождество Якоби гарантирует, что скобка Новикова ведет себя аналогично коммутатору в алгебрах Ли. Однако в отличие от алгебр Ли алгебры Новикова неассоциативны из-за наличия тождества Якоби, а не условия ассоциативности. Алгебры Новикова находят применение в теоретической физике, в частности, при изучении топологических теорий поля и квантовых теорий поля на некоммутативных пространствах. Они обеспечивают основу для описания и анализа определенных алгебраических структур, возникающих в этих областях физики. Стоит отметить, что алгебры Новикова представляют собой особый тип неассоциативной алгебры и существуют различные другие типы неассоциативных алгебр, изучаемых в математике и физике, каждый со своими определяющими свойствами и приложениями.

Ключевые слова: алгебра Новикова, тройное произведение, полиномиальные тождества, Вольфрам математика.

Introduction

Let K be a field of characteristic zero. An algebra over K with identities

$$a(bc) = b(ac) \quad (1)$$

$$(a, b, c) = (a, c, b) \quad (2)$$

is called Novikov algebra, where $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ is the associator of elements a , b and c . The identity (1) is called left-commutative and the identity (2) is called right-symmetric. Novikov algebras first appeared in the paper by Gelfand and Dorfman [7] in the study of Hamiltonian operators and then in the paper by Balinskii and Novikov [1] in the study of the classification of linear Poisson brackets. A simple example of Novikov algebra is the following. Let $A = K[x]$ be a polynomial algebra with multiplication $a \circ b = \partial(a)b$, where $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ is partial derivation. Let Novikov be a variety of Novikov algebras. For Novikov algebra A we define $A^{(-\partial x)} = (A, [,])$ and $A^{(+)} = (A, \{, \})$, where $[a, b] = ab - ba$ is the commutator and $\{a, b\} = ab + ba$ is the anti-commutator on the space $A \in \text{Novikov}$. Every Novikov algebra is Lie-admissible, that is, $A^{(-)}$ satisfies Jacobi identity. In addition, the commutator algebra of any Novikov algebra satisfies the identity

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(3)}, [x_{\sigma(4)}, x_5]]]] = 0 \quad (3)$$

Dzhumadil'daev studied [3] Novikov algebras under anti-commutator and proved that every algebra in $A^{\{(+)\}}$ satisfies so-called Tortken-identity

$$\{\{a, b\}, \{c, d\} - \{a, d\}, \{c, b\}\} = \{(a, b, c), d\} - \{(a, d, c), b\} \quad (4)$$

where $(a, b, c) = \{a, \{b, c\}\} - \{\{a, b\}, c\}$ is the associator of elements a , b and c . Additionally, it was demonstrated that Tortken and commutative identities imply any identity with a degree of no more than four. In [3], some examples of algebras that satisfy Tortken identity are provided. The following is one of them. Consider the polynomial algebra $A = K[x]$ with multiplication $a \circ b = \partial(ab)$ and the partial derivation $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$. Then, at that point $(A, \circ)$ fulfills Tortken identity.

Main provisions

Tortken algebra is a commutative algebra that satisfies the Tortken identity. In the setting of Novikov algebras, these are the analogs of Jordan algebras. Any left-Zinbiel algebra is a Tortken algebra, as shown in [3]. An identity is called special for the anti-commutator product in a free Novikov algebra if it holds in all special Tortken algebras but does not hold in some Tortken algebras. It was shown in [4], there is an identity of degree 5 satisfied by algebras of $\mathcal{Novikov}^{(+)}$ in addition to commutativity and the Tortken identity so-called besken

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ \left\{ a, a \right\}, a \right\}, b \right\}, b \right\} + \left\{ \left\{ \left\{ a, b \right\}, b \right\}, a \right\}, a \right\} + 2 \left\{ \left\{ \left\{ a, a \right\}, b \right\}, b \right\}, a \right\} + 2 \left\{ \left\{ \left\{ a, b \right\}, a \right\}, a \right\}, b \right\} \\ & - 3 \left\{ \left\{ \left\{ a, a \right\}, b \right\}, a \right\}, b \right\} - 3 \left\{ \left\{ \left\{ a, b \right\}, a \right\}, b \right\}, a \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Moreover, Dzhumadil'daev [4] proved that commutative, Tortken and besken identities imply every identity of degree no more than seven satisfied by anti-commutator product in a free Novikov algebra. It remains an open problem to determine whether there are further new identities in degrees more than 7.

Methods

In this paper, we study special identities of Tortken algebras in the sense of ternary products. Define a triple Tortken product $\{, , \} : A \times A \times A \rightarrow A$ on a Novikov algebra A as follows

$$\{a, b, c\} = \{\{a, b\}, c\},$$

where $\{a, b\} = ab + ba$ for all $a, b, c \in A$. We prove that there is no identity of degree three satisfied by the triple Tortken product in every Novikov algebra. To calculate triple Tortken identities in degree 5, we write a code on the software program Wolfram Mathematics and using it we demonstrate a list of polynomial identities of degree five by the triple Tortken product in every Novikov algebra. Triple identities of algebras were considered for many well-known classes of algebras such as Jordan, Lie [8] and Zinbiel algebras [2]. In [2], M. Bremner by using computer algebra studied special identities in terms of Tortkara triple product $[a, b, c] = [[a, b], c]$ in a free Zinbiel algebra and discovered one identity in degree 5 and one identity in degree 7 which do not follow from the identities of lower degree. It remains an open problem to determine whether there are further new identities in degree 9.

Results and discussion

In this section, we define the relation of differential algebras with Novikov algebras and then with Tortken algebras. Let $k\{x_1, \dots, x_n\}$ be a differential polynomial algebra on variables $x_1, \dots, x_n$. For $f, g \in k\{x_1, \dots, x_n\}$ if $f \circ g = f'g$, then $(k\{x_1, \dots, x_n\}, \circ)$ is a Novikov algebra. Assume that $N < x_1, \dots, x_n >$ - subalgebra of $(k\{x_1, \dots, x_n\}, \circ)$ generated by $x_1, \dots, x_n$. Dzhumadil'daev and Löfwall (2002) proved that $N < x_1, \dots, x_n >$ is a free Novikov algebra over a field of characteristic zero and the set of all differential monomials $x_1^{(i_1)} x_2^{(i_2)} \dots x_n^{(i_n)}$ with $i_1 + \dots + i_n = n - 1$ forms a basis of $N < x_1, \dots, x_n >$.

Theorem 2.1. (Dzhumadil'daev,[5]) The multilinear dimension of free Novikov algebra in n variables is equal to $\binom{2(n-1)}{n-1}$.

Theorem 2.2. There is no identity of degree three satisfied by triple Tortken product in Novikov algebras over a field of characteristic zero.

Proof. Since we consider algebras over a field of characteristic zero, we can assume that all identities are multilinear, for details see [9, Chapter 1]. According to Theorem 2.1 in degree 3 there are $\binom{2(3-1)}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ multilinear Novikov basis monomials:

$$a''bc, ab''c, abc'', a'b'c, a'bc', ab'c'$$

In degree 3 there are the following multilinear spanning monomials in generators a, b, c :

$$e_1 = \{a, b, c\}, \quad e_2 = \{a, c, b\}, \quad e_3 = \{b, c, a\},$$

Any triple Tortken identity of degree 3 can be written as a linear combination of e_1, e_2, e_3 , that is,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \quad (6)$$

For some $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. Note that

$$\begin{aligned} \{a, b, c\} &= \{\{a, b\}, c\} = (ab)c + (ba)c + c(ab) + c(ba) = (a'b)'c + (ab')'c + a'bc' + ab'c' \\ &= a''bc + ab''c + 2a'b'c + a'bc' + ab'c', \end{aligned}$$

$$\{a, c, b\} = a''bc + abc'' + 2a'bc' + a'b'c + ab'c',$$

$$\{b, c, a\} = ab''c + abc'' + 2ab'c' + a'b'c + a'bc'.$$

From (6) we derive

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 &= a''bc(\lambda_1 + \lambda_2) + ab''c(\lambda_1 + \lambda_3) + abc''(\lambda_2 + \lambda_3) + a'b'c(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ &+ a'bc'(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) + ab'c'(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = 0. \end{aligned}$$

It leads to a system of linear equations

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

One can easily have that the system has only trivial solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. ■

Theorem 2.3. There exists a set of nontrivial polynomial identities of degree five by the triple Tortken product in every Novikov algebra over a field of characteristic zero.

Proof. According to Theorem 2.1 in degree 5 there are $\binom{2(5-1)}{5-1} = \binom{8}{4} = 70$ multilinear Novikov basis monomials

$$\begin{aligned} &a''''bcde, ab''''cde, abc''''de, abcd''''e, abcde''''', a'''b'cde, a'''bc'de, \\ &a'''bcd'e, a'''bcde', a''b''cde, a''bc''de, a''bcd''e, a''bcde'', a''b'c'de, \\ &a''b'cd'e, a''b'cde', a''bc'd'e, a''bc'de', a''bcd'e', a'b''c'de, a'b''cd'e, \\ &a'b''cde', ab''c'd'e, ab''c'de', ab''cd'e', a'b'c''de, a'bc''d'e, a'bc''de', \\ &ab'c''d'e, ab'c''de', abc''d'e', a'b'cd''e, a'bc'd''e, a'bcd''e', ab'c'd''e, \\ &ab'cd''e', abc'd''e', a'b'cde'', a'bc'de'', ab'c'de'', ab'cd'e'', abc'd'e'', \\ &ab''c''de, ab''cd''e, ab''cde'', abc''d''e, abc''de'', abcd''e'', a'b'''cde, \\ &ab'''c'de, ab'''cd'e, ab'''cde', a'bc'''de, ab'c'''de, abc'''d'e, abc'''de', \end{aligned}$$

$$a'bcd'''e, ab'cd'''e, abc'd'''e, abcd'''e', a'bcd e''', ab'cde''', abc'de''', \\ abcd'e''', a'b'c'd'e, a'b'c'de', a'b'cd'e', a'bc'd'e', ab'c'd'e', a'bcd'e''.$$

In degree 5 there are 90 multilinear spanning monomials in generators a,b,c,d,e:

- 60 monomials $\{a^\sigma, b^\sigma, c^\sigma, d^\sigma, e^\sigma\}$ where $a^\sigma < b^\sigma$ in lex order, and
- 30 monomials $\{a^\sigma, b^\sigma, \{c^\sigma, d^\sigma, e^\sigma\}\}$ where $a^\sigma < b^\sigma$ and $c^\sigma < d^\sigma$ in lex order

For simplicity we write $\{a, b, c, d, e\}$ for $\{\{a, b, c\}, d, e\}$ and $[a, b, c, d, e]$ for $\{a, b, \{c, d, e\}\}$. Then we have

$$\begin{aligned} e_1 &= \{a, b, c, d, e\}, e_2 = \{a, b, c, e, d\}, e_3 = \{a, b, d, c, e\}, e_4 = \{a, b, d, e, c\}, e_5 = \{a, b, e, c, d\}, \\ e_6 &= \{a, b, e, d, c\}, e_7 = \{a, c, b, d, e\}, e_8 = \{a, c, b, e, d\}, e_9 = \{a, c, d, b, e\}, e_{10} = \{a, c, d, e, b\}, \\ e_{11} &= \{a, c, e, b, d\}, e_{12} = \{a, c, e, d, b\}, e_{13} = \{a, d, b, c, e\}, e_{14} = \{a, d, b, e, c\}, e_{15} = \{a, d, c, b, e\}, \\ e_{16} &= \{a, d, c, e, b\}, e_{17} = \{a, d, e, b, c\}, e_{18} = \{a, d, e, c, b\}, e_{19} = \{a, e, b, c, d\}, e_{20} = \{a, e, b, d, c\}, \\ e_{21} &= \{a, e, c, b, d\}, e_{22} = \{a, e, c, d, b\}, e_{23} = \{a, e, d, b, c\}, e_{24} = \{a, e, d, c, b\}, e_{25} = \{b, c, a, d, e\}, \\ e_{26} &= \{b, c, a, e, d\}, e_{27} = \{b, c, d, a, e\}, e_{28} = \{b, c, d, e, a\}, e_{29} = \{b, c, e, a, d\}, e_{30} = \{b, c, e, d, a\}, \\ e_{31} &= \{b, d, a, c, e\}, e_{32} = \{b, d, a, e, c\}, e_{33} = \{b, d, c, a, e\}, e_{34} = \{b, d, c, e, a\}, e_{35} = \{b, d, e, a, c\}, \\ e_{36} &= \{b, d, e, c, a\}, e_{37} = \{b, e, a, c, d\}, e_{38} = \{b, e, a, d, c\}, e_{39} = \{b, e, c, a, d\}, e_{40} = \{b, e, c, d, a\}, \\ e_{41} &= \{b, e, d, a, c\}, e_{42} = \{b, e, d, c, a\}, e_{43} = \{c, d, a, b, e\}, e_{44} = \{c, d, a, e, b\}, e_{45} = \{c, d, b, a, e\}, \\ e_{46} &= \{c, d, b, e, a\}, e_{47} = \{c, d, e, a, b\}, e_{48} = \{c, d, e, b, a\}, e_{49} = \{c, e, a, b, d\}, e_{50} = \{c, e, a, d, b\}, \\ e_{51} &= \{c, e, b, a, d\}, e_{52} = \{c, e, b, d, a\}, e_{53} = \{c, e, d, a, b\}, e_{54} = \{c, e, d, b, a\}, e_{55} = \{d, e, a, b, c\}, \\ e_{56} &= \{d, e, a, c, b\}, e_{57} = \{d, e, b, a, c\}, e_{58} = \{d, e, b, c, a\}, e_{59} = \{d, e, c, a, b\}, e_{60} = \{d, e, c, b, a\}. \end{aligned}$$

Elements of the form $\{a, b, \{c, d, e\}\}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= [a, b, c, d, e], f_2 = [a, b, c, e, d], f_3 = [a, b, d, e, c], f_4 = [a, c, b, d, e], f_5 = [a, c, b, e, d], \\ f_6 &= [a, c, d, e, b], f_7 = [a, d, b, c, e], f_8 = [a, d, b, e, c], f_9 = [a, d, c, e, b], f_{10} = [a, e, b, c, d], \\ f_{11} &= [a, e, b, d, c], f_{12} = [a, e, c, d, b], f_{13} = [b, c, a, d, e], f_{14} = [b, c, a, e, d], f_{15} = [b, c, d, e, a], \\ f_{16} &= [b, d, a, c, e], f_{17} = [b, d, a, e, c], f_{18} = [b, d, c, e, a], f_{19} = [b, e, a, c, d], f_{20} = [b, e, a, d, c], \\ f_{21} &= [b, e, c, d, a], f_{22} = [c, d, a, b, e], f_{23} = [c, d, a, e, b], f_{24} = [c, d, b, e, a], f_{25} = [c, e, a, b, d], \\ f_{26} &= [c, e, a, d, b], f_{27} = [c, e, b, d, a], f_{28} = [d, e, a, b, c], f_{29} = [d, e, a, c, b], f_{30} = [d, e, b, c, a]. \end{aligned}$$

Every triple Tortken identity of degree 5 can be written as a linear combination of 60 and 30 multilinear monomials, that is:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{60} e_{60} = 0$$

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_{30} f_{30} = 0$$

We express every e_i and f_i in free Novikov algebra in terms of differential monomials and solve the system with respect to λ_i and μ_i . From solving these systems, we get an infinite set of solutions for λ_i and μ_i . We perform all our calculations using the software Wolfram Mathematica.

First we consider the first linear combination above. We will have 34 free unknowns. We fix a free unknown and substitute 1 for it and zero for the rest of the free unknowns. Then we calculate corresponding values of all other unknowns. That solution gives us a one polynomial triple identity in free Novikov algebra. We continue this procedure for all other free unknowns. We first exclude polynomial identities which are equivalent to others and have the following identities.

$$\lambda_1 = 1:$$

$$\begin{aligned} &\{a, b, c, d, e\} - \{a, b, e, d, c\} - 2\{b, c, d, a, e\} - \{b, c, e, a, d\} + 3\{b, c, e, d, a\} - \{b, d, c, a, e\} \\ &+ \{b, d, e, a, c\} + \{b, e, c, a, d\} + 2\{b, e, d, a, c\} - 3\{b, e, d, c, a\} - 2\{c, d, a, e, b\} \\ &+ 2\{c, d, b, a, e\} + 2\{c, d, b, e, a\} + 4\{c, d, e, a, b\} - 6\{c, d, e, b, a\} \\ &- 3\{c, e, b, d, a\} + 3\{c, e, d, b, a\} + 2\{d, e, a, c, b\} - 2\{d, e, b, a, c\} \\ &+ \{d, e, b, c, a\} - 4\{d, e, c, a, b\} + 3\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 1:$$

$$\begin{aligned} &\{a, b, c, e, d\} - \{a, b, e, d, c\} - \{b, c, d, a, e\} - 2\{b, c, e, a, d\} + 3\{b, c, e, d, a\} + \{b, d, e, a, c\} \\ &- \{b, d, e, c, a\} + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} \\ &+ 2\{c, d, e, a, b\} - 2\{c, d, e, b, a\} - \{c, e, a, d, b\} + \{c, e, b, a, d\} - \{c, e, b, d, a\} \\ &+ 2\{c, e, d, a, b\} - \{c, e, d, b, a\} + 2\{d, e, a, c, b\} - 2\{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} \\ &- 4\{d, e, c, a, b\} + 3\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = 1:$$

$$\begin{aligned} &\{a, b, d, c, e\} - \{a, b, e, d, c\} - \{b, c, d, a, e\} + \{b, c, e, d, a\} - 2\{b, d, c, a, e\} + 2\{b, d, e, c, a\} \\ &+ \{b, e, c, a, d\} + 2\{b, e, d, a, c\} - 3\{b, e, d, c, a\} - 2\{c, d, a, e, b\} \\ &+ 2\{c, d, b, a, e\} + 2\{c, d, b, e, a\} + 4\{c, d, e, a, b\} - 6\{c, d, e, b, a\} \\ &+ \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - \{c, e, b, d, a\} - 2\{c, e, d, a, b\} + 3\{c, e, d, b, a\} \\ &+ \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} - \{d, e, b, c, a\} - 2\{d, e, c, a, b\} + 3\{d, e, c, b, a\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = 1:$$

$$\begin{aligned} &\{a, b, d, e, c\} - \{a, b, e, d, c\} - \{b, d, c, a, e\} - \{b, d, e, a, c\} + 2\{b, d, e, c, a\} + \{b, e, c, a, d\} \\ &+ \{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} + 2\{c, d, e, a, b\} \\ &- 2\{c, d, e, b, a\} + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - 2\{c, e, d, a, b\} + 2\{c, e, d, b, a\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_5 = 1:$$

$$\begin{aligned} &\{a, b, e, c, d\} - \{a, b, e, d, c\} - \{b, c, e, a, d\} + \{b, c, e, d, a\} + \{b, d, e, a, c\} - \{b, d, e, c, a\} \\ &- \{b, e, c, a, d\} + \{b, e, d, a, c\} - \{c, e, a, d, b\} + \{c, e, b, a, d\} + \{c, e, b, d, a\} \\ &+ 2\{c, e, d, a, b\} - 3\{c, e, d, b, a\} + \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} - \{d, e, b, c, a\} \\ &- 2\{d, e, c, a, b\} + 3\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_7 = 1:$$

$$\begin{aligned} &\{a, c, b, d, e\} - \{a, c, e, d, b\} - 2\{b, c, d, a, e\} - \{b, c, e, a, d\} + 3\{b, c, e, d, a\} \\ &- 2\{b, e, a, d, c\} + 2\{b, e, c, a, d\} + 4\{b, e, d, a, c\} - 4\{b, e, d, c, a\} \\ &- 2\{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} + 2\{c, d, b, e, a\} + 5\{c, d, e, a, b\} \\ &- 6\{c, d, e, b, a\} + 2\{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - 3\{c, e, b, d, a\} \\ &- 2\{c, e, d, a, b\} + 4\{c, e, d, b, a\} + 2\{d, e, a, c, b\} - 2\{d, e, b, a, c\} \\ &+ 2\{d, e, b, c, a\} - 4\{d, e, c, a, b\} + 2\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_8 = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{a, c, b, e, d\} - \{a, c, e, d, b\} - \{b, c, d, a, e\} - 2\{b, c, e, a, d\} + 3\{b, c, e, d, a\} \\ & - 2\{b, e, a, d, c\} + 2\{b, e, c, a, d\} + 4\{b, e, d, a, c\} - 4\{b, e, d, c, a\} \\ & - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} + 3\{c, d, e, a, b\} - 3\{c, d, e, b, a\} \\ & + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - \{c, e, b, d, a\} + \{c, e, d, b, a\} + 2\{d, e, a, c, b\} \\ & - 2\{d, e, b, a, c\} + 2\{d, e, b, c, a\} - 4\{d, e, c, a, b\} + 2\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_9 = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, c, d, b, e\} - \{a, c, e, d, b\} - \{b, c, d, a, e\} + \{b, c, e, d, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - 2\{c, d, a, e, b\} + 2\{c, d, b, e, a\} \\ & + 4\{c, d, e, a, b\} - 4\{c, d, e, b, a\} + 2\{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} \\ & - \{c, e, b, d, a\} - 2\{c, e, d, a, b\} + 2\{c, e, d, b, a\} + \{d, e, a, c, b\} \\ & - \{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} - 2\{d, e, c, a, b\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{10} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, c, d, e, b\} - \{a, c, e, d, b\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, e, a, b\} + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, d, a, b\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{11} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, c, e, b, d\} - \{a, c, e, d, b\} - \{b, c, e, a, d\} + \{b, c, e, d, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} + \{c, d, e, a, b\} - \{c, d, e, b, a\} \\ & - \{c, e, b, a, d\} + \{c, e, b, d, a\} + \{c, e, d, a, b\} - \{c, e, d, b, a\} + \{d, e, a, c, b\} \\ & - \{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} - 2\{d, e, c, a, b\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{13} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, d, b, c, e\} - \{a, d, e, c, b\} - 2\{b, d, c, a, e\} - \{b, d, e, a, c\} + 3\{b, d, e, c, a\} - 2\{b, e, a, d, c\} \\ & + 2\{b, e, c, a, d\} + 4\{b, e, d, a, c\} - 4\{b, e, d, c, a\} - 2\{c, d, a, e, b\} \\ & + \{c, d, b, a, e\} + 2\{c, d, b, e, a\} + 5\{c, d, e, a, b\} - 6\{c, d, e, b, a\} \\ & + 2\{c, e, a, d, b\} - 2\{c, e, b, a, d\} - 4\{c, e, d, a, b\} + 4\{c, e, d, b, a\} \\ & + 2\{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} - \{d, e, b, c, a\} - 2\{d, e, c, a, b\} \\ & + 2\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{14} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, d, b, e, c\} - \{a, d, e, c, b\} - \{b, d, c, a, e\} - 2\{b, d, e, a, c\} + 3\{b, d, e, c, a\} \\ & - 2\{b, e, a, d, c\} + 2\{b, e, c, a, d\} + 4\{b, e, d, a, c\} - 4\{b, e, d, c, a\} \\ & - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} + 3\{c, d, e, a, b\} - 3\{c, d, e, b, a\} \\ & + 2\{c, e, a, d, b\} - 2\{c, e, b, a, d\} - 4\{c, e, d, a, b\} + 4\{c, e, d, b, a\} \\ & + \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} - \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{15} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, d, c, b, e\} - \{a, d, e, c, b\} - \{b, d, c, a, e\} + \{b, d, e, c, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - 2\{c, d, a, e, b\} + 2\{c, d, b, e, a\} \\ & + 4\{c, d, e, a, b\} - 4\{c, d, e, b, a\} + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} \\ & - 2\{c, e, d, a, b\} + 2\{c, e, d, b, a\} + 2\{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} \\ & - 2\{d, e, c, a, b\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{16} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, d, c, e, b\} - \{a, d, e, c, b\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, e, a, b\} + \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, c, a, b\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_{17} = 1$:

$$\begin{aligned} & \{a, d, e, b, c\} - \{a, d, e, c, b\} - \{b, d, e, a, c\} + \{b, d, e, c, a\} - \{b, e, a, d, c\} \\ & + \{b, e, c, a, d\} + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} + \{c, d, e, a, b\} - \{c, d, e, b, a\} \\ & + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - 2\{c, e, d, a, b\} + 2\{c, e, d, b, a\} \end{aligned}$$

$$- \{d, e, b, a, c\} + 2\{d, e, b, c, a\} + \{d, e, c, a, b\} - 2\{d, e, c, b, a\} = 0$$

$$\lambda_{19} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{a, e, b, c, d\} - \{a, e, d, c, b\} - 2\{b, e, a, d, c\} + 3\{b, e, d, a, c\} - \{b, e, d, c, a\} - \{c, e, b, a, d\} \\ & + 2\{c, e, b, d, a\} + \{c, e, d, a, b\} - 2\{c, e, d, b, a\} + 2\{d, e, a, c, b\} \\ & - \{d, e, b, a, c\} - \{d, e, b, c, a\} - 2\{d, e, c, a, b\} + 2\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{20} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{a, e, b, d, c\} - \{a, e, d, c, b\} - 2\{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} + 2\{b, e, d, a, c\} - \{b, e, d, c, a\} \\ & + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - \{c, e, d, a, b\} + \{c, e, d, b, a\} + \{d, e, a, c, b\} \\ & - \{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} - \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{21} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{a, e, c, b, d\} - \{a, e, d, c, b\} - \{b, e, a, d, c\} + 2\{b, e, d, a, c\} - \{b, e, d, c, a\} - \{c, e, a, d, b\} \\ & - \{c, e, b, a, d\} + 2\{c, e, b, d, a\} + 2\{c, e, d, a, b\} - 2\{c, e, d, b, a\} \\ & + 2\{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} - 2\{d, e, c, a, b\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{22} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{a, e, c, d, b\} - \{a, e, d, c, b\} - \{c, e, a, d, b\} + \{c, e, d, a, b\} + \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, c, a, b\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{23} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{a, e, d, b, c\} - \{a, e, d, c, b\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} + \{b, e, d, a, c\} - \{b, e, d, c, a\} \\ & + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} - \{c, e, d, a, b\} + \{c, e, d, b, a\} - \{d, e, b, a, c\} \\ & + 2\{d, e, b, c, a\} + \{d, e, c, a, b\} - 2\{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{25} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{b, c, a, d, e\} - 2\{b, c, d, a, e\} - \{b, c, e, a, d\} + 2\{b, c, e, d, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} \\ & + \{c, d, b, e, a\} + 2\{c, d, e, a, b\} - 3\{c, d, e, b, a\} - 2\{c, e, b, d, a\} \\ & + 2\{c, e, d, b, a\} + \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} \\ & - 2\{d, e, c, a, b\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{26} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{b, c, a, e, d\} - \{b, c, d, a, e\} - 2\{b, c, e, a, d\} + 2\{b, c, e, d, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} \\ & + 2\{c, d, e, a, b\} - 2\{c, d, e, b, a\} - \{c, e, b, d, a\} + \{c, e, d, b, a\} \\ & + \{d, e, a, c, b\} - \{d, e, b, a, c\} + \{d, e, b, c, a\} - 2\{d, e, c, a, b\} + \{d, e, c, b, a\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{28} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{b, c, d, e, a\} - \{b, c, e, d, a\} - \{c, d, b, e, a\} + \{c, d, e, b, a\} + \{c, e, b, d, a\} - \{c, e, d, b, a\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{31} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{b, d, a, c, e\} - 2\{b, d, c, a, e\} - \{b, d, e, a, c\} + 2\{b, d, e, c, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} + \{c, d, b, e, a\} \\ & + 2\{c, d, e, a, b\} - 3\{c, d, e, b, a\} + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} \\ & - 2\{c, e, d, a, b\} + 2\{c, e, d, b, a\} - \{d, e, b, c, a\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{32} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{b, d, a, e, c\} - \{b, d, c, a, e\} - 2\{b, d, e, a, c\} + 2\{b, d, e, c, a\} - \{b, e, a, d, c\} + \{b, e, c, a, d\} \\ & + 2\{b, e, d, a, c\} - 2\{b, e, d, c, a\} - \{c, d, a, e, b\} + \{c, d, b, a, e\} \\ & + 2\{c, d, e, a, b\} - 2\{c, d, e, b, a\} + \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} \\ & - 2\{c, e, d, a, b\} + 2\{c, e, d, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{37} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{b, e, a, c, d\} - \{b, e, a, d, c\} - \{b, e, c, a, d\} + \{b, e, d, a, c\} + \{c, e, b, d, a\} - \{c, e, d, b, a\} \\ & - \{d, e, b, c, a\} + \{d, e, c, b, a\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{43} = 1:$$

$$\begin{aligned} & \{c, e, a, b, d\} - \{c, e, a, d, b\} - \{c, e, b, a, d\} + \{c, e, b, d, a\} + \{c, e, d, a, b\} - \{c, e, d, b, a\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Here we have all the identities coming from the second linear combination involving the second type of bracketing:

$$\mu_1 = 1:$$

$$\begin{aligned} & [a, c, b, d, e] - [a, c, d, e, b] - [a, d, b, c, e] + [a, d, c, e, b] - 1/2 [a, e, b, c, d] \\ & + 1/2 [a, e, b, d, c] - [b, c, a, d, e] + [b, c, d, e, a] + [b, d, a, c, e] \\ & - [b, d, c, e, a] + 1/2 [b, e, a, c, d] - 1/2 [b, e, a, d, c] + 1/2 [c, e, a, d, b] \\ & - 1/2 [c, e, b, d, a] - 1/2 [d, e, a, c, b] + 1/2 [d, e, b, c, a] = 0 \end{aligned}$$

$$\mu_2 = 1:$$

$$\begin{aligned} & [a, c, b, e, d] - [a, c, d, e, b] - 3/2 [a, e, b, c, d] + 1/2 [a, e, b, d, c] + [a, e, c, d, b] \\ & - [b, c, a, e, d] + [b, c, d, e, a] + 3/2 [b, e, a, c, d] - 1/2 [b, e, a, d, c] \\ & - [b, e, c, d, a] + [c, d, a, e, b] - [c, d, b, e, a] - 1/2 [c, e, a, d, b] \\ & + 1/2 [c, e, b, d, a] - 1/2 [d, e, a, c, b] + 1/2 [d, e, b, c, a] = 0 \end{aligned}$$

$$\mu_4 = 1:$$

$$\begin{aligned} & [a, d, b, e, c] - [a, d, c, e, b] - [a, e, b, d, c] + [a, e, c, d, b] - [b, d, a, e, c] + [b, d, c, e, a] \\ & + [b, e, a, d, c] - [b, e, c, d, a] + [c, d, a, e, b] - [c, d, b, e, a] - [c, e, a, d, b] \\ & + [c, e, b, d, a] = 0 \end{aligned}$$

$$\mu_5 = 1:$$

$$\begin{aligned} & [a, b, c, d, e] - [a, b, d, e, c] - [a, d, b, c, e] + [a, d, c, e, b] - 1/2 [a, e, b, c, d] \\ & + 3/2 [a, e, b, d, c] - [a, e, c, d, b] - [b, c, a, d, e] + [b, c, d, e, a] \\ & + 1/3 [b, d, a, c, e] + 4/3 [b, d, a, e, c] - 5/3 [b, d, c, e, a] + 1/6 [b, e, a, c, d] \\ & - 5/6 [b, e, a, d, c] + 2/3 [b, e, c, d, a] + 2/3 [c, d, a, b, e] - 4/3 [c, d, a, e, b] \\ & + 2/3 [c, d, b, e, a] + 1/3 [c, e, a, b, d] + 5/6 [c, e, a, d, b] - 7/6 [c, e, b, d, a] \\ & - [d, e, a, b, c] + 1/2 [d, e, a, c, b] + 1/2 [d, e, b, c, a] = 0 \end{aligned}$$

$$\mu_8 = 1:$$

$$\begin{aligned} & [a, b, c, e, d] - [a, b, d, e, c] - 3/2 [a, e, b, c, d] + 3/2 [a, e, b, d, c] - [b, c, a, e, d] + \\ & [b, c, d, e, a] + [b, d, a, e, c] - [b, d, c, e, a] + 1/2 [b, e, a, c, d] - 1/2 [b, e, a, d, c] + \\ & [c, e, a, b, d] - 1/2 [c, e, a, d, b] - 1/2 [c, e, b, d, a] - [d, e, a, b, c] + 1/2 [d, e, a, c, b] + \\ & 1/2 [d, e, b, c, a] = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Conclusion. This paper defines a triple Tortken product in Novikov algebras and gives a list of polynomial identities up to degree 5 satisfied by Tortken triple product in every Novikov algebra. We conclude that there

is no identities of degree 3 and a list of identities of degree 5 given above satisfied by triple Tortken product in Novikov algebras over a field of characteristic zero.

Acknowledgments. The author gratefully acknowledges the many helpful suggestions of Professor N.A. Ismailov during the preparation of the paper.

References

- 1 Balinskii A.A., Novikov S.P. (1985) Poisson bracket of hamiltonian type, Frobenius algebras and Lie algebras, Doklady AN SSSR, v. 283(5), pp.1036–1039.
- 2 Bremner M. (2018) On tortkara triple systems, Comm. Algebra, v. 46(6), pp. 2396–2404.
- 3 Dzhumadil'daev A.S. (2002) Novikov-Jordan algebras, Comm. Algebra, v. 30(11), pp. 5205–5240.
- 4 Dzhumadil'daev A.S. (2005) Special identity for Novikov-Jordan algebras Comm. Algebra, v. 33(5), pp. 1279–1287.
- 5 Dzhumadil'daev A.S. (2011) Codimension Growth and Non-Koszulity of Novikov Operad, Comm. Algebra, v. 39(8), pp. 2943–2952.
- 6 Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C. (2002) Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Appl., 4, no.2(1), pp.165–190.
- 7 Gelfand I.M., Dorfman I.Ya. (1979) Hamiltonian operators and related algebraic structures, Func. Anal. Prilozhen, 13(4), pp. 13–30.
- 8 Jacobson N. (1949) Lie and Jordan triple systems, Amer. J. Math., 71, pp. 149–170.
- 9 Zhevlakov K.A., Slinko A.M., Shestakov I.P., Shirshov A.I. (1982) Rings That Are Nearly Associative, Academic Press, New York.

Information on the author

Mardanov Nurlybek Amangeldyuly

Master student, Kazakh-British Technical University, Tole bi str., 59, 050000, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID: 0009-0002-5754-4212

E-mail: mardanov1602@gmail.com

Автор туралы мәлімет

Марданов Нұрлыбек Амангелдіұлы

Магистрант, Қазақстан-Британ техникалық университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Қазақстан

ORCID ID: 0009-0002-5754-4212

Email: mardanov1602@gmail.com

Информация об авторе

Марданов Нурлыбек Амангельдиевич

Магистрант, Казастанско-Британский технический университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID: 0009-0002-5754-4212

Email: mardanov1602@gmail.com

UDC 510.67

IRSTI 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-67-72>**Markhabatov N.D.**

Eurasian National University. L.N. Gumilyov, 010008, Astana, Kazakhstan

email: nur_24.08.93@mail.ru

**APPROXIMATIONS OF THE THEORIES OF STRUCTURES WITH
ONE EQUIVALENCE RELATION**

Abstract. Recently, various methods similar to the “transfer principle” have been rapidly developing, where one property of a structure or pieces of this structure is satisfied in all infinite structures or in another algebraic structure. Such methods include smoothly approximable structures, holographic structures, almost sure theories, and pseudofinite structures approximable by finite structures. Pseudofinite structures are mathematical structures that resemble finite structures but are not actually finite. They are important in various areas of mathematics, including model theory and algebraic geometry. Pseudofinite structures are a fascinating area of mathematical logic that bridge the gap between finite and infinite structures. They allow studying infinite structures in ways that resemble finite structures, and they provide a connection to various other concepts in model theory. Further studying pseudofinite structures will continue to reveal new insights and applications in mathematics and beyond. Pseudofinite theory is a branch of mathematical logic that studies structures that are similar in some ways to finite structures, but can be infinitely large in other ways. It is an area of research that lies at the intersection of model theory and number theory and deals with infinite structures that share some properties with finite structures, such as having only finitely many elements up to isomorphism. A. Lachlan introduced the concept of smoothly approximable structures in order to change the direction of analysis from finite to infinite, that is, to classify large finite structures that seem to be smooth approximations to an infinite limit. The theory of pseudofinite structures is particularly relevant for studying equivalence relations. In this paper, we study the model-theoretic property of the theory of equivalence relations, in particular, the property of smooth approximability. Let $L = \{E\}$, where E is an equivalence relation. We prove that an any ω -categorical L -structure M is smoothly approximable. We also prove that any infinite L -structure M is pseudofinite.

Key words: pseudofinite structure, pseudofinite theory, equivalence relation, approximation, approximation of theory, smoothly approximable structure.

Мархабатов Н.Д.

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, 010008, Астана қ., Қазақстан

email: nur_24.08.93@mail.ru

**БІР ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСЫ БАР ҚҰРЫЛЫМ ТЕОРИЯЛАРЫНЫҢ
АППРОКСИМАЦИЯЛАРЫ**

Аңдатпа. Соңғы уақытта құрылымның бір қасиеті немесе осы құрылымның бөліктері барлық шексіз құрылымдарда немесе басқа алгебралық құрылымда қанағаттандырылатындай «тасымалдау принципіне» ұқсас әртүрлі әдістер қарқынды дамып келеді. Мұндай әдістерге біркелкі жуықталатын құрылымдар, голографиялық құрылымдар, сенімді дерлік теориялар және ақырлы құрылымдармен жуықталатын псевдоақырлы құрылымдар жатады. Псевдоақырлы құрылымдар - ақырлы құрылымдарға ұқсайтын, бірақ шын мәнінде ақырлы емес математикалық құрылымдар. Олар математиканың әртүрлі салаларында, соның ішінде модельдер теориясы мен алгебралық геометрияда маңызды. Псевдоақырлы құрылымдар - бұл ақырлы және шексіз құрылымдар арасындағы алшақтықты өтейтін математикалық логиканың қызықты саласы. Олар шексіз құрылымдарды ақырлы құрылымдарды еске түсіретін тәсілдермен зерттеуге мүмкіндік береді және әртүрлі басқа теориялық модельдік тұжырымдамаларына сілтемелер береді. Псевдоақырлы құрылымдарды одан әрі зерттеу математикада және одан тыс жерлерде жаңа идеялар мен қолданбаларды ашуды жалғастырады. Псевдоақырлы теориялар – кейбір жағынан шекті құрылымдарға ұқсас, бірақ басқа аспектілері бойынша шексіз үлкен болуы мүмкін құрылымдарды зерттейтін математикалық логиканың бөлімі. Бұл модельдер теориясы мен сандар теориясының қиылысында

орналасқан және изоморфизмге дейінгі элементтердің шектеулі саны сияқты шекті құрылымдармен ортақ қасиеттері бар шексіз құрылымдармен айналысатын зерттеу саласы. А. Лахлан талдаудың бағытын ақырлыдан шексізге өзгерту, яғни шексіз шекке тегіс аппроксимациялау болып көрінетін үлкен шекті құрылымдарды жіктеу үшін құрылымдардың біркелкі аппроксимациялау түсінігін енгізді. Псевдоақырлы құрылымдар теориясы эквиваленттік қатынастарды зерттеу үшін ерекше өзекті болып табылады. Бұл жұмыста біз эквиваленттік қатынастар теориясының модельдік-теориялық қасиетін, атап айтқанда, тегіс аппроксимациялану қасиетін зерттейміз. Егер $L = \{E\}$ және E – L -құрылымда эквиваленттік қатынас болса, онда кез келген ω -категориялық L -құрылым M тегіс аппроксимацияланатыны дәлелденді. Сонымен қатар, кез келген шексіз L -құрылым M псевдоақырлы болып табылады.

Тірек сөздер: псевдоақырлы құрылым, псевдоақырлы теория, эквиваленттік қатынас, аппроксимация, теория аппроксимациясы, тегіс аппроксимацияланатын құрылым.

Мархабатов Н.Д.

Евразийский Национальный университет им. Л.Н.Гумилева, 010008, г. Астана, Казахстан

email: nur_24.08.93@mail.ru

АППРОКСИМАЦИИ ТЕОРИЙ СТРУКТУР С ОДНИМ ОТНОШЕНИЕМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Аннотация: В последнее время бурно развиваются различные методы, схожие к «принципу переноса», когда одно свойство структуры или частей этой структуры выполняется во всех бесконечных структурах или в другой алгебраической структуре. К таким методам относятся гладко аппроксимируемые структуры, голографические структуры, почти надежные теории и псевдоконечные структуры, аппроксимируемые конечными структурами. Псевдоконечные структуры — это математические структуры, которые напоминают конечные структуры, но на самом деле не являются конечными. Они важны в различных областях математики, включая теорию моделей и алгебраическую геометрию. Псевдоконечные структуры — это увлекательная область математической логики, которая устраняет разрыв между конечными и бесконечными структурами. Они позволяют изучать бесконечные структуры способами, напоминающими конечные структуры, и обеспечивают связь с различными другими концепциями теории моделей. Дальнейшее изучение псевдоконечных структур будет продолжать открывать новые идеи и приложения в математике и за ее пределами. Псевдоконечные теории — это раздел математической логики, изучающий структуры, которые в чем-то похожи на конечные структуры, но могут быть бесконечно большими в других отношениях. Это область исследований, которая находится на пересечении теории моделей и теории чисел и имеет дело с бесконечными структурами, которые имеют некоторые общие свойства с конечными структурами, например, имеют только конечное число элементов с точностью до изоморфизма. А. Лахлан ввел понятие гладко аппроксимируемых структур, чтобы изменить направление анализа с конечного на бесконечное, т. е. классифицировать большие конечные структуры, которые кажутся гладкими приближениями к бесконечному пределу. Теория псевдоконечных структур особенно актуальна для изучения отношений эквивалентности. В данной работе исследуется теоретико-модельное свойство теории отношений эквивалентности, в частности, свойство псевдоконечности. Пусть $L = \{E\}$, где E — отношение эквивалентности на L -структуре. Доказано, что любая ω -категоричная L -структура M гладко аппроксимируема. Также доказано, что любая бесконечная L -структура M является псевдоконечной.

Ключевые слова: псевдоконечная структура, псевдоконечная теория, отношение эквивалентности, аппроксимация, аппроксимация теории, гладко аппроксимируемая структура.

Introduction

Approximations for permutation theory by theories of finite structures were studied in [1], for locally free algebras in [2], for ordered theories in [3], for Abelian groups in terms of Szemielew invariants in [4,5], for regular graphs studied in [6].

We denote by $\mathcal{T}_L$ the family of all theories of the language L . It should be noted that in [14] the rank for families of theories was introduced similarly to the Morley rank. And in [13], the following proposition was proved

Proposition 1. *If L is a language containing an m -ary predicate symbol, for $m \geq 2$, or an n -ary functional symbol, for $n \geq 1$, then $RS(\mathcal{T}_L) = \infty$.*

In paper [7] isomorphisms and algorithmic properties of structures with two equivalences are considered based on methods developed by D.A. Tusupov for graph definability in a bipartite graph and in a structure with two equivalences, which preserve the algorithmic and syntactic properties of the original structure.

Definition 1. [8] An infinite structure M is *pseudofinite* if for any sentence φ with $M \models \varphi$, there exists a finite model M_0 with $M_0 \models \varphi$.

Definition 2. Let M and N be L -structures. N is a *homogeneous substructure* of M , notationally $N \leq_{hom} M$, if $N \leq M$ and for every positive natural k and every pair $\bar{a}, \bar{b} \in N^k$, $\bar{a}$ and $\bar{b}$ lie in the same $Aut(M)$ -orbit if and only if $\bar{a}$ and $\bar{b}$ lie in the same $Aut_{\{N\}}(M)$ -orbit, where $Aut_{\{N\}}(M) := \{\sigma \in Aut(M) : \sigma(N) = N\}$.

Definition 3. An ω -categorical structure ω is called *smoothly approximable* if it is the union of an ω -chain of finite homogeneous substructures; or, that is the same, if any proposition $\varphi \in Th(M)$ is true for some finite homogeneous substructure N of the structure M .

Smoothly approximable structures were first considered in general form in [9], then in [10]. The theory of models of smoothly approximable structures was further developed in the works by G. Cherlin and E. Hrushovskii [11,12]. The class of smoothly approximable structures is the class of omega-categorical supersimple structures of finite rank, which properly contains the class of omega-categorical omega-stable structures (in particular, totally categorical structures).

Remark 1. [15] Any smoothly approximated structure is pseudofinite, the converse is not always true.

Example 1. Random graph is ω -categorical, homogeneous, pseudofinite, but not smoothly approximable.

Main provisions

We are dealing with (complete) theories of equivalence relations. We fix a language $L = \{E\}$ and a L -structure M , where E is interpreted in M as an equivalence relation.

Let the set $\{\kappa_i | i \in \omega\}$ be the set of cardinalities of E -classes of the L -structure M . To describe the smooth approximability of L -structure M , we use the following invariants. Consider the pair $(\kappa_i, \lambda(\kappa_i))$ where κ_i is the cardinality of the i -th E -class, and $\lambda(\kappa_i)$ is the number of cardinality classes of κ_i , $\lambda(\kappa_i) \in \omega \cup \{\infty\}$. Therefore, we also consider the indicator $\varepsilon \in \{0,1\}$ indicating the absence or presence of an infinite E -class. Also, we often use the following well-known

Fact: An L -theory T is ω -categorical iff the set $\{\kappa_i | i \in \omega\}$ is finite and all models have the same invariants $(\kappa_i, \lambda(\kappa_i))$.

If M is countably categorical, there may be classes of infinite cardinality among the E -classes, that is, in the set $\{\kappa_i | i \in \omega\}$ there is at least one infinite cardinality κ_i .

Proposition 2. Any an ω -categorical L -structure M is smoothly approximable.

The following theorem says that any L -structure M is approximated by finite structures.

Theorem 3. Any infinite L -structure M is pseudofinite.

Materials and Methods

We know several ways to show that a theory T is pseudofinite [8], that is, approximated by theories of finite structures.

We have the following methods (tools) for examining algebraic structures for pseudofiniteness:

- Probabilistic argument [15,16];
- Ultraproduct Construction [8,17];
- Approximations of the theory of algebraic structures by theories of finite structures [18];
- Fraisse limit.
- Smoothly Approximability [9]

Some of the above model-theoretic methods are also actively used for applied research. For example, the *Probabilistic method* is widely used in data analysis and can provide valuable information about relationships between variables in a dataset. However, it is important to select the appropriate method for a particular research question and carefully evaluate the assumptions underlying the model.

Results and Discussion

Proof of the **Proposition 2:** Let M be countably categorical and $\varepsilon = 0$. Then either all E -classes have

the same cardinality i.e. for any E -class there is an infinite number of isomorphic E -classes (1), or some finite number of E -classes have the same cardinality (2). Since all elements of each E -class are equivalent, there is an automorphism mapping this class onto itself. This means that each equivalence class can be considered as a finitely homogeneous substructure. Therefore, (1) if for all i and j , $\kappa_i = \kappa_j$, then M is a unique up to isomorphism and $M = \bigcup_{i \in \omega} M_i$, where $M_i = \prod_{i \in \omega} N_i$ and N_i are E -classes.

(2) Let the set of cardinalities of E -classes be finite in M , that is, $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$. For finite natural l and m , with $1 \leq l \leq m$ and $0 < p < n - 1$ denote by A a finite substructure consisting of $\lambda(\kappa_p) = l$ E -classes. This substructure is finitely homogeneous and can be represented as a disjoint union of a finite number of E -classes. Now we denote by B a substructure that for any $p < t \leq n - 1$, $\lambda(\kappa_t) = \infty$. Then $B = \prod_{i \in \omega} (N_i^1 \sqcup N_i^2 \sqcup \dots \sqcup N_i^t)$. Generally, $M = \bigcup_{i \in \omega} M_i$, where $M_i = A \sqcup B$.

Let M be countably categorical and $\varepsilon = 1$. This means that among $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ only one indicates infinite cardinality. Let's say it κ_0 . And all other $\{\kappa_i | 1 \leq i \leq n - 1\}$ indicates finite cardinalities. Let us denote the substructure with finite cardinalities as in the previous case by A . All possible cases for A are considered in the previous part of the proof.

And the substructure consisting of infinite classes will be denoted by B . If $\lambda(\kappa_0)$ is finite, let's say $\lambda(\kappa_0) = s$, for finite natural s , then $B = \bigcup_{i \in \omega} (N_i^1 \sqcup N_i^2 \sqcup \dots \sqcup N_i^s)$ at that $N_j^s \subset N_i^s$, for $j < i$. If $\lambda(\kappa_0)$ is infinite, then $B = \prod_{i \in \omega} C_i$, where $C_i = \bigcup_{i \in \omega} (N_i^1 \sqcup N_i^2 \sqcup \dots \sqcup N_i^s)$.

Generally, $M = \bigcup_{i \in \omega} M_i$, where $M_i = A \sqcup B$.

Proof of the Theorem 3: The proof of pseudofiniteness is in some sense easier than smooth approximability, because smooth approximability is a stronger condition including countably categorical and finitely homogeneity substructures. Therefore, we consider only the non-countably categorical case, if the structure M is countably categorical, then we refer to the smooth approximability. Table 1 below shows the proof.

Table 1 – All possible approximations by finite structures of L -structure M .

		The number of equivalence classes	
		$\lambda(\kappa_i)$ is finite	$\lambda(\kappa_i)$ is infinite
k_i is finite	$\kappa_i < n$	not infinite	1) If the cardinality set is finite, then M is smoothly approximable, hence pseudofinite. Let the set of cardinalities infinite. Then $M = \prod_{i \in \omega} M_i$ and M_i are E -classes.
	$\kappa_i = \kappa_j, i \neq j$	not infinite	2) The structure M is smoothly approximable by the first case of the proof of Proposition 2.
k_i is infinite	Only some classes have infinite cardinality	3) L -structure M represented as $M = M_0 \sqcup M_1$, where M_0 is a substructure of finite cardinality E -classes, M_0 is a substructure of finite cardinality E -class. All possible cases were considered earlier. If it is countably categorical then it is smoothly approximable by Proposition 2. If not, then case 1) of this table. For M_1 we refer to Proposition 2	4) Similarly, by Proposition 2 and case 1) of this table.
	All equivalence classes have infinite cardinality;	5) Smoothly approximable, hence pseudofinite	6) Smoothly approximable, hence pseudofinite

Example. Let M be a countably infinite set and $L = \{=\}$. List M as $\{a_i : i \in \omega\}$, and $M_i = \{a_0, \dots, a_i\}$. Then M is smoothly approximable, and $M = \bigcup_{i \in \omega} M_i$.

Conclusion

Pseudofinite structures are a fascinating area of mathematical logic that bridge the gap between finite and infinite structures. They allow for the study of infinite structures in ways that resemble finite structures, and they provide a connection to various other concepts in model theory. Further study of pseudofinite structures will continue to reveal new insights and applications in mathematics and beyond. The theory of pseudofinite structures is particularly relevant for studying equivalence relations. This article examines the model-theoretic property of the theory of equivalence relations, in particular, the property of smoothly approximability. We prove that any ω -categorical L -structure M is smoothly approximable. We also prove that any infinite L -structure M is pseudofinite.

Information on funding

The study was partially supported by the Scientific Committee for Education and Science of the Republic of Kazakhstan (AP19674850, AP19677451).

References

- 1 Markhabatov N.D. (2019) Ranks for Families of Permutation Theories, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 28, pp.85–94. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.85>
- 2 Markhabatov N.D. (2019) Pseudofiniteness of locally free algebras, *Algebra and Model Theory 12*, Collection of papers, eds. A.G. Pinus, E.N. Poroshenko, S.V. Sudoplatov. Novosibirsk: NSTU, pp. 41–46.
- 3 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2019) Ranks and approximations for families of ordered theories, *Algebra and Model Theory 12*, Collection of papers, eds. A.G. Pinus, E.N. Poroshenko, S.V. Sudoplatov. Novosibirsk: NSTU, pp. 32–40.
- 4 Pavlyuk I.I. (2020) Approximations for Theories of Abelian Groups, eds. I.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *Mathematics and Statistics*, vol. 8, no. 2, pp. 220–224. <https://doi.org/10.13189/ms.2020.080218>
- 5 Pavlyuk I.I., Sudoplatov S.V. (2019) Ranks for families of theories of abelian groups, *The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics*, vol., 28, pp. 95–112. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.95>
- 6 Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. (2022) Approximations Of Regular Graphs, *Herald of the Kazakh-British Technical University*, 19:1, pp. 44–49 <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2022-19-1-44-49>
- 7 Tussupov D.A. (2016) Isomorphisms and Algorithmic Properties of Structures with Two Equivalences, *Algebra Logic* **55**, pp. 50–57. <https://doi.org/10.1007/s10469-016-9375-8>
- 8 Ax J. (1968) The Elementary Theory of Finite Fields, *Annals of Mathematics*, vol. 88, no. 2, *Annals of Mathematics*, pp. 239–71. <https://doi.org/10.2307/1970573>
- 9 Kantor W.M., Liebeck M.W. and Macpherson H.D. (1989) N_0 -categorical structures smoothly approximated by finite substructures, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 59, pp. 439–463. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-59.3.439>
- 10 Macpherson D. (1997). Homogeneous and Smoothly Approximated Structures. In: Hart, B.T., Lachlan, A.H., Valeriote, M.A. (eds) *Algebraic Model Theory*. NATO ASI Series, vol 496. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8923-9_7
- 11 Cherlin G., and E. Hrushovski (2003) *Finite Structures with Few Types*, vol. 152, *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, Princeton.
- 12 Hrushovski E. (1993) *Finite Structures with Few Types*. In: Sauer N.W., Woodrow R.E., Sands B. (eds) *Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic*. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), vol 411. Springer, Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2080-7>
- 13 Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. (2021) Ranks for families of all theories of given languages, *Eurasian Math. J.*, 12:2, pp. 52–58. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-2-52-58>
- 14 Sudoplatov S.V. (2021) Ranks for families of theories and their spectra~/ S.~V.~Sudoplatov// *Lobachevskii J. Math* 42, pp. 2959–2968. <https://doi.org/10.1134/S1995080221120313>
- 15 Gaifman H. (1964) Concerning measures in first-order calculi, *Israel J. Math.* 2, pp. 1–18. <https://doi.org/10.1007/BF02759729>
- 16 Lynch J. (1980) Almost sure theories, *Annals of Mathematical Logic*, 18, pp. 91–135. [https://doi.org/10.1016/0003-4843\(80\)90014-5](https://doi.org/10.1016/0003-4843(80)90014-5)
- 17 Ax J., Kochen S. (1965) Diophantine problems over local fields I. *Amer. J. Math.* 87, pp. 605–630. <https://doi.org/10.2307/2373065>
- 18 Sudoplatov S.V. (2020) Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 17, pp. 715–725. <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049>

Information about author

Markhabatov Nurlan Darkhanuly

Department of Algebra and Geometry, L.N. Gumilyov Eurasian National University, st. Kazhymukan 13, Almaty district, 010000, Astana, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0002-5088-0208

E-mail: nur_24.08.93@mail.ru

Автор туралы мәлімет

Мархабатов Нұрлан Дарханұлы

Л.Н. Гумилев ат. Еуразия ұлттық университетінің алгебра және геометрия кафедрасы, Қажымұқан көш., 13, Алматы ауданы, 010000, Астана қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0002-5088-0208

E-mail: nur_24.08.93@mail.ru

Информация об авторе

Мархабатов Нурлан Дарханулы

Кафедра алгебры и геометрии Евразийского Национального университета им. Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Алматинский район, 010000, г. Астана, Казахстан

ORCID ID: 0000-0002-5088-0208

E-mail: nur_24.08.93@mail.ru

UDC 004.942

IRSTI 28.17.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-73-91>**Sagandyk A.T.^{1*}, Issakhov A.A.^{1,2}**¹Kazakh-British technical university, 050000, Almaty, Kazakhstan²Al-Farabi Kazakh national university, 050038, Almaty, Kazakhstan*E-mail: ¹sgnkaru@gmail.com,**MATHEMATICAL MODELING OF SARS-COV-2 PARTICLES' PROPAGATION DURING HUMAN REFLEXES**

Abstract. An unknown virus, which was detected in Wuhan city in 2019, had changed fate of the world immediately causing an economic loss, decrease in total population and etc. A penetration of coronavirus contaminated particles to a human cell is able to cause an overproduction of cytokines and antibodies. This process gives a rise to fatal cases. Hence, because of SARS-CoV-2's pathogenicity, severity and unexpectedness, effective safety measures should be implemented. Along with safe social distancing and wearing a mask, a presence of air conditioning, ventilation system and open windows can reduce the coronavirus propagation in enclosed spaces. The present article focuses on the modeling of coronavirus particles' propagation during human respiratory reflexes within a constructed three-dimensional confined space with inlet and outlet boundary conditions. Momentum and continuity equations, k- ϵ turbulence model and Lagrangian dispersion model were utilized to solve the problem. SIMPLE is a main method to solve all governing equations. The primary objectives of this work are to demonstrate the efficiency of air conditioning and open windows in preventing the spread of viruses and to examine particle behavior in the computational domain.

Key words: SARS-CoV-2, SARS-CoV-2 particles' transmission, coronavirus particles and aerosols, CFD (computational fluid dynamics), modeling, office room, air conditioning, open window.

Сағандық А.Т.^{1*}, Исахов А.А.^{1,2}¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, 050038, Алматы қ., Қазақстан*E-mail: ¹sgnkaru@gmail.com,**АДАМ РЕФЛЕКСТЕРІ КЕЗІНДЕГІ SARS-COV-2 БӨЛШЕКТЕРІНІҢ ТАРАЛУЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ**

Аңдатпа. 2019 жылы Ухань қаласында анықталған белгісіз вирус әлемнің тағдырын бірден өзгертіп, экономикалық шығынға, жалпы халық санының азаюына және т.б. тудырды. Коронавируспен ластанған бөлшектердің адам жасушасына енуі цитокиндер мен антиденелердің шамадан тыс өндірісін тудырады. Бұл процесс өлімге дейін апарады. Демек, SARS-CoV-2-нің патогенділігіне, ауырлығына және тосындығына байланысты тиімді қауіпсіздік шараларын қолданылуы қажет. Қауіпсіз әлеуметтік қашықтық пен бетперде киюмен қатар, ауаны тазарту, желдету жүйесі және ашық терезелердің болуы жабық кеңістіктерде коронавирустың таралуын едәуір тоқтауы мүмкін. Бұл мақала кіріс және шығыс шекаралары бар үш өлшемді жабық кеңістікте адамның тыныс алу жүйесіндегі рефлексі кезінде коронавирус бөлшектерінің таралуын модельдеуге бағытталған. Есепті шешу үшін импульс және үздіксіздік теңдеулері, k- ϵ турбуленттік моделі және Лагранж дисперсиялық моделі қолданылды. SIMPLE әдісі – процессті сипаттайтын барлық теңдеулерді шешудің негізгі әдісі. Бұл жұмыстың негізгі мақсаты вирустардың таралуын шектеу үшін ауаны кондиционерлеудің және ашық терезелердің тиімділігін көрсету және есептеу аймағындағы бөлшектердің қозғалысын зерттеу болып табылады.

Тірек сөздер: SARS-CoV-2, SARS-CoV-2 бөлшектерінің таралуы, коронавирус бөлшектері мен аэрозольдар, есептеу гидродинамикасы, модельдеу, кеңсе бөлмесі, ауаны кондициялау, ашық терезе.

Сагандык А.Т.^{1*}, Исахов А.А.^{1,2}¹Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан²Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, 050038, г. Алматы, Казахстан

*E-mail: sgnkaru@gmail.com,

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЧАСТИЦ SARS-COV-2 ПРИ РЕФЛЕКСАХ ЧЕЛОВЕКА

Аннотация. Неизвестный вирус, обнаруженный в городе Ухань в 2019 г., изменил судьбу мира, вызвав экономический ущерб, сокращение общей численности населения и т.д. Проникновение зараженных коронавирусом частиц в клетку человека способно вызвать перепроизводство цитокинов и антител. Этот процесс приводит к летальному исходу. Следовательно, из-за патогенности, серьезности и неожиданности SARS-CoV-2 необходимо принять эффективные меры безопасности. Наряду с безопасным социальным дистанцированием и ношением маски наличие кондиционера, системы вентиляции и открытых окон может снизить распространение коронавируса в закрытых помещениях. Данная статья посвящена моделированию распространения частиц коронавируса при дыхательных рефlekсах человека в трехмерном ограниченном пространстве с входными и выходными граничными условиями. Для решения задачи использовались уравнения импульса и неразрывности, к-ε модель турбулентности и модель дисперсии Лагранжа. SIMPLE – это основной метод решения всех основных уравнений. Основные цели этой работы – продемонстрировать эффективность кондиционирования воздуха и открытых окон в предотвращении распространения вирусов и изучить движение частиц в вычислительной области.

Ключевые слова: SARS-CoV-2, распространение частиц SARS-CoV-2, частицы и аэрозоли коронавируса, вычислительная гидродинамика, моделирование, офисное помещение, кондиционирование воздуха, открытое окно.

Introduction

In the world's history, one of the phenomena, which caused enormous damage to various aspects of life, including the economy, number of total populations etc., was coronavirus or SARS-CoV-2. Because of coronavirus's pathogenicity, severeness and unexpectedness various important mitigation strategies, which can stop its propagation, are still carrying out. Numerous preventive measures, including quarantine, lockdown, wearing medical masks and gloves, avoiding close contact with infected people, mouthwash, hand hygiene, and others, were researched and realized to stop and limit the spread of the disease.

Despite of some uncertainties, it is investigated, coronavirus particles can propagate through air via sneezing, coughing, talking and even by breathing [1]. Additionally, asymptomatic individuals tend to contaminate an environment with virus particles, which gives a rise to spread of coronavirus. Virus aerosols are prone to linger in the air for a long time and move to long-term distances [2]. It was detected that SARS-CoV-1 and SARS-CoV-2 drops and droplets linger in air and are exposed to intrabuilding movement. V. Stadnytskyi, C.E. Bax, A. Bax and P. Anfinrud utilized a laser-light scattering technique to identify the time, in which virus contaminated aerosols suspend in air [3]. These aerosols can remain in air longer than ten minutes. Vuorinen *et al.* defined the difference between aerosols, droplet nuclei and droplets [4]. Researchers indicated, aerosols and droplet nuclei can be accepted as residuals from a water evaporation, which contain coronavirus. They suspend in air for hours and spread through air. Small droplets are able to turn into aerosols and droplet nuclei. In addition, diameters for large droplets can be more than 200 μm. Aerosols, tiny particles and droplet nuclei have sizes less than 10 μm [7]. Medium diameter sizes for drops and droplets are in an interval of 10–100 μm. According to an investigation, a man exhales 100 to 1000 particles when coughing and 1000 to 10,000 particles when sneezing within 1 s [5].

One of the vast measures can be a fixed ventilation system in enclosed spaces, where an infection is detected. Many researchers observed a propagation of virus's particles within different spaces. Majority of observations showed that the ventilation system plays significant role in controlling of coronavirus's distribution. The authors of one of these studies are Armand and Tache [5]. Current work focuses on the particle distribution after the events such as continuous breathing and coughing. The model of a carriage, that contains three partitions, was utilized. In model, passengers occupied the first and the third parts, and the second part connects two divisions. An airflow comes from outside the first and third divisions and escapes from the top of

the train. In this study, an airflow and trajectory of particles were simulated via a turbulent k- ϵ model and two dispersion models (Eulerian and Lagrangian), respectively. The results for simulation of particles' distribution are the same for both approaches. Results show, due to the continuity of breathing droplets tend to capture whole carriage. Initially, contaminated droplets reach passengers sitting next to an infected person, and then they continue to move to opposite side of an infected passenger.

In the study of Mariam *et al.* diluted particle propagation is examined in a standard office room for events such as sneezing, coughing etc. [6]. In the physical model, two human models, one of them is an infected person and another one is a healthy receiver, keep recommended distance for prevention from catching infection. Authors considered two cases of human models' positions, namely, sitting and standing opposite to each other positions. In each case two different locations of inlet-outlet boundary conditions were under the observation. In the first arrangement of inlet-outlet boundary conditions, inlet and one of the two outlets are at a ceiling and another outlet is placed at wall, while the second one offers inlet and outlets to be at the ceiling. The airflow was simulated using turbulent k- ϵ model. The received results show that the most optimal location for inlet and outlets should be as in the first arrangement. Because of the barrier generated by the airflow emitted particles cannot cross the barrier and the receiver. However, there were detected particles of both small and large sizes near the receiver in coughing and loud talking events. Authors deduced, keeping recommended distance as safety measures cannot prevent from infection fully. On the other hand, their study indicates that the ventilation system is one of the effective ways to control virus's dissemination. Precise location of inlet-outlet boundary conditions for venting system can enhance air purification from contaminated droplets.

Mirzaie *et al.* observed coronavirus particles' spread inside a class, where an infected teacher stands in front of the class [7]. CFD simulation was implemented for airflow generated by venting system and Lagrangian dispersion model was applied for motion of particles emitted by teacher's coughing. There were suggested two versions of the physical model. The first case consists of the standard classroom with ventilation system and student desks, while in the second one there are supplementary barriers for each desk. The results conclude that airflow from venting system can expel contaminated particles completely at precise velocity and time. Moreover, constructed barriers for each desk can be considered as one of the effective and supplementary precautionary measures. Another observation about modeling of virus propagation inside the classroom with air conditioning was conducted by Abuhegazy *et al.* [8]. It was studied that particles of small sizes, namely less than 15 μm , tend to float in the air for some time and then exit the classroom, while large, diluted drops settle on the surfaces. In addition, particle percentage was examined for each student desk after ejection. Researchers concluded that appropriate positions for healthy students can protect them from infection. They also deduced, presence of open windows as outlets reduces coronavirus contamination. Narayanan and Yang investigated an airflow generated by air purifiers and transmission of coronavirus particles in a music class [9]. Several scenarios of simulation were under observation, when a student is exhaling contaminated particles by playing on brass instrument and piano, the student is wearing a mask for safety measurements. Received result indicates, determined location for air purifier can effectively cut the number of particles. Ahmadzadeh *et al.* studied an efficiency of a ventilation system and open windows as outlet during virus propagation during talking and coughing [10]. Ventilation system and open windows can essentially manage the transmission of contaminants. It was concluded, a right location for the ventilation is close to the infected individual. In the work of Liu *et al.*, a real documented case of COVID-19 infection in one of the restaurants in China is described [11]. Authors studied the dissemination of coronavirus particles exhaled by an asymptomatic individual. Advanced CFD solver was implemented. It was concluded, a temperature of human body and environment can change direction of airflow produced by air conditioning and create vortexes that worsen the situation.

In the study of Mathai *et al.*, an indoor environment and injected coronavirus transmission inside a moving vehicle were examined [12]. Researchers studied two scenarios of virus emitter. In first case, emitter is a driver, in second one, a passenger infects the interior of the car. The best findings indicate that the concentration of particles is reduced when all windows are open. In contrast, particles capture interior of the automobile with closed windows and supplied air conditioning. Jayaweera, Perera, Gunawardana and Manatunge analyzed the virus propagation in several confined spaces [13]. Particle movement inside an aircraft was simulated considering precise environmental conditions such as humidity, temperature and air exchange rate. Low temperature and humidity increase the lingering time of aerosols in the air. An observation conducted by Issakhov *et al.* consists of the simulation of virus dissemination in an enclosed space during different respiratory

events [14]. They concluded, a distance travelled by particles during breathing is much shorter than the case of sneezing and coughing. It was suggested, keeping a safety distance at 5 m during human reflexes reduces infection cases. Authors deduced that a recommended distance of 2 m by World Health Organization (WHO) is not sufficient when the infected person coughs or sneezes. Busco *et al.* considered a sneezing with upward head movement in a precise angle [15]. A real-life experiment was conducted to find out duration of sneeze and the angle, in which head moves in upward direction during respiratory reflex. Authors studied behavior of virus-diluted particles in high temperature and found high sedimentation tendency of particles on surfaces. Mortazavi *et al.* modeled the propagation of coronavirus droplets within a respiratory system and analyzed the most contaminated zones by virus in the system [16]. They considered virus droplets with diameter of 1 μm , 5 μm and 10 μm . For each dimension, three flow rates were considered. Researchers identified that lungs can easily become contaminated with aerosols, while larger particles deposit instantly in an oral cavity. Another observation of coronavirus particle propagation was studied by Guan, Ramesh and Memarzadeh [17]. Their research focuses on the transmission of particles during human movement. Several cases of human's speed and particle diameter were examined. The findings show that despite of the human's speed magnitude particles tend to distribute identically in all observed zones. Additionally, there were identified particles at the back of human model after its movement at precise time. Wang, Li, Liu and Cao conducted a CFD simulation to observe virus contaminated particles transmission from a urinal flushing [18]. Authors indicated, coronavirus aerosols released from flushing can reach up to a height of human model's knees. Based on the results, researchers emphasized the importance of preventive measures, namely wearing safety masks, in crowded public restrooms to control coronavirus transmission.

Based on the mentioned observations, the venting system, air conditioning, presence of open windows can substantially control the transmission of coronavirus aerosols and droplets in enclosed spaces. The goal of this study is to model an airflow generated by ventilation system in an office room, where infected person emits coronavirus's particles.

Main provisions

The main objective of this work is to simulate the particle injection from an infected person in an enclosed space during sneezing and coughing, and analyze the behavior of exhaled aerosols, droplets and drops. Additionally, this work considers a supplied air conditioning system and open window as one of the key preventive measures to control COVID-19 propagation. In addition to it, a safety distance of over two meters were examined in order to investigate its effectiveness.

Figure 1 demonstrates a geometry of the main problem, where there are three constructed human models, namely, one standing and two sitting human models. The standing human model was assumed to be the infected individual, who emits aerosols and particles with diameters in a range of 1.5–100 μm during expiratory events (sneezing and coughing).

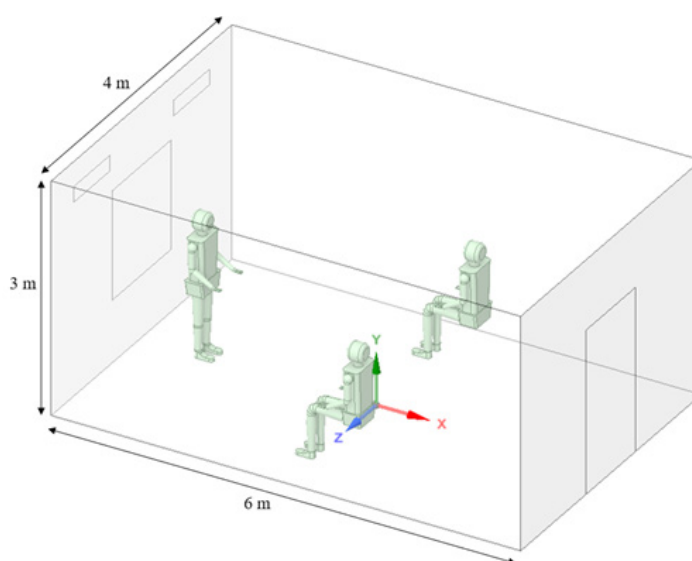


Figure 1 – Three-dimensional office room

All geometries were constructed in Ansys SpaceClaim. The confined space has dimensions of $6 \times 4 \times 3$ m ($L \times W \times H$). A height of standing human model is approximately 1.85 m. Two inlets for air conditioning have 0.8×0.2 m² of area equally, while the dimension of window is 1.3×1.4 m². The area of outlet is 1.1×2.1 m².

Figure 2 shows the human model and the mouth. The mouth has a 0.0012 m² surface area. Inlet-outlet boundary conditions for this problem are displayed in Figure 3. A grid for above geometry was created using Ansys Fluent Meshing. Minimum and maximum cell sizes are chosen to be 0.002 m and 0.036 m, respectively. A local sizing was implemented near the model's mouth with cell size of 0.002 m. The grid of the computational domain is illustrated in Figure 4. A total number of cells is 3886310.

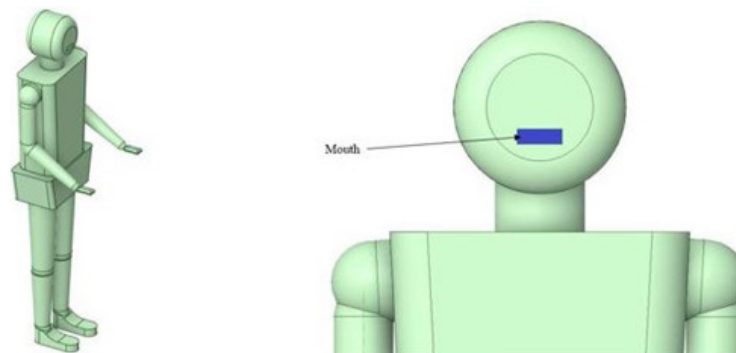
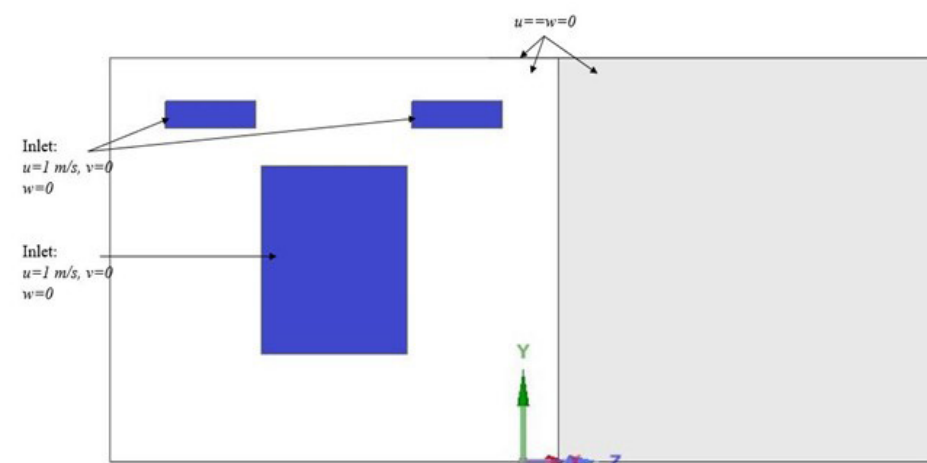
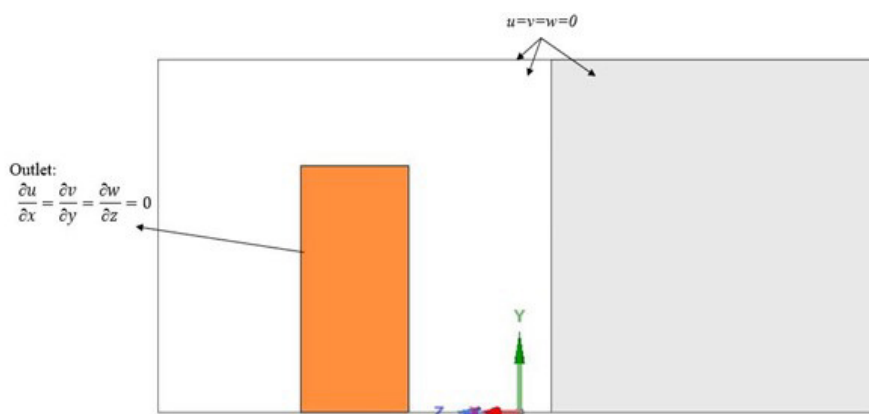


Figure 2 – Three-dimensional human model



a)



b)

Figure 3 – a) Inlet and b) outlet boundary conditions

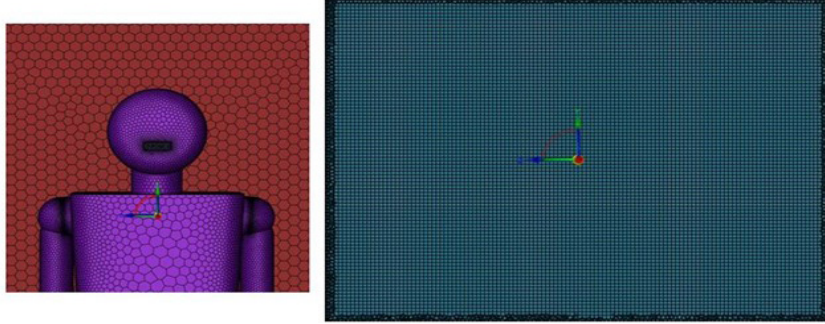


Figure 4 – The grid of the geometry

Materials and Methods

For the airflow from air conditioning system and window k-ε turbulence model was utilized [5]. Additionally, the mathematical model contains Reynolds Averaged Navier-Stokes equations. The system of equations is as follows:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (3)$$

where $\bar{u}_i$ is the averaged velocities for velocity components (u , v and w) and $\overline{u'_i u'_j}$ stands for the Reynolds stress. ρ , p , μ represent the density, pressure and viscosity, respectively. In turbulence model, k is the turbulent kinetic energy, ε is the dissipation rate. μ_T represents the turbulent viscosity, G_k and G_b are the turbulent kinetic energy produced from mean gradients of velocities and buoyancy, respectively. σ_ε and σ_k are the Prandtl numbers; $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$ and $C_{3\varepsilon}$ are constants.

The Lagrangian approach was applied for particle tracking [7]:

$$\frac{dV_d}{dt} = \frac{18\mu}{d^2 \rho_d C_c} (\vec{V} - \vec{V}_d) + \frac{\vec{g}(\rho_d - \rho)}{\rho_d} + F_L + F_B, \quad (4)$$

where V_d is a particle velocity, F_L represents a lift force of Saffman and F_B is a Brownian force. C_c is a Cunningham coefficient:

$$C_c = 1 + \frac{2K}{d} \left(1.257 + 0.4e^{-\left(\frac{1.1d}{2K}\right)} \right), \quad (5)$$

where d is a particle diameter and K is an average molecular distance.

In the present study, Discrete Phase Model (DPM) was applied to consider the particle injection from the infected individual. Ansys software suggests phase coupled SIMPLE method to solve the mathematical model. In addition to it, SIMPLE method solves the momentum equations, continuity equation and the turbulent model for the airflow produced by air conditioning (or ventilation system) and open window.

Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, or SIMPLE, was developed in 1972 by Patankar and Spalding [19]. The algorithm for SIMPLE method is as follows:

1) Pressure p^* is guessed;

2) By substituting p^* into momentum equations, u^* , v^* and w^* are found. The correction equations for u' , v' and w' can be identified by subtracting momentum equations for u^* , v^* and w^* from equations for u , v and w , respectively;

3) By using FVM and substituting velocity corrections, p' is found;

4) Corrections are conducted for p , u , v and w :

$$\begin{aligned} p &= p^* + p', \\ u &= u^* + u', \\ v &= v^* + v', \\ w &= w^* + w'; \end{aligned}$$

5) Solving other transport equations, for instance, for k and ε .

6) By setting $p^* = p$, $u^* = u$, $v^* = v$ and $w^* = w$, go to the 1st step and solve the equations until the convergence.

Results and Discussion

An observation of Deng, Wang, Tang and Gao was taken as the testing problem [20]. Authors simulated an airflow, which comes from a diffuser, within a three-dimensional confined space. The inlet-outlet of the geometry and geometry itself are demonstrated in Figure 5.

The velocity of 1.1 m/s and angle of 40° are used to drive the airflow upward. The data was taken from the literature. The areas of the inlet and outlet are 0.1207 m^2 and 0.06 m^2 , respectively. Using two different step sizes in the x direction of the first cell next to the diffuser, researchers compared the findings of total-flux and convective-flux approaches. It was identified, the optimal size of the first cell is in the interval of 0.005-0.02 m. In this work, $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ was taken as the size of the first cell near to the diffuser. Figure 6 shows a grid for geometry.

The mathematical model of testing problem consists of the momentum and continuity equations. Additionally, a standard k - ε turbulence model was applied to describe turbulence of the airflow inside the computational domain. The comparison of the findings from the aforementioned research with the current investigation is shown in Figures 7–9. It is shown, the results of this study are consistent with results of the study of Deng, Wang, Tang and Gao. Received results for the velocity repeat the tendency of experimental velocity profiles. Authors conducted the simulation of the airflow using two approaches such as total-flux and convective-flux methods. For each method they utilized two different step sizes in x direction to minimize the error and compared received results. The findings for both methods considering two different very first cell sizes close to the inlet were deduced to be acceptable by researchers. However, they emphasized that a combination of $\Delta x = 0.0005 \text{ m}$ and total-flux method had given desirable outcomes and conform to the experimental data, while using $\Delta x = 0.005 \text{ m}$ cell size resulted in big difference with research findings.

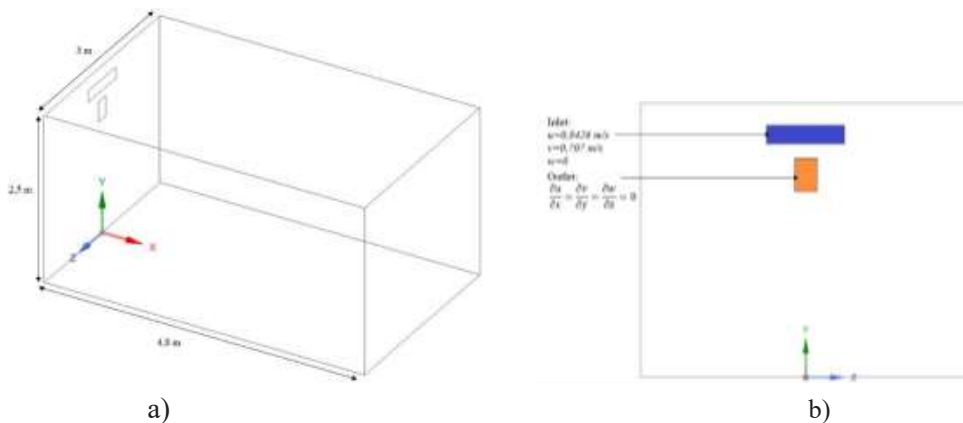


Figure 5 – a) Diffuser geometry and b) boundary conditions

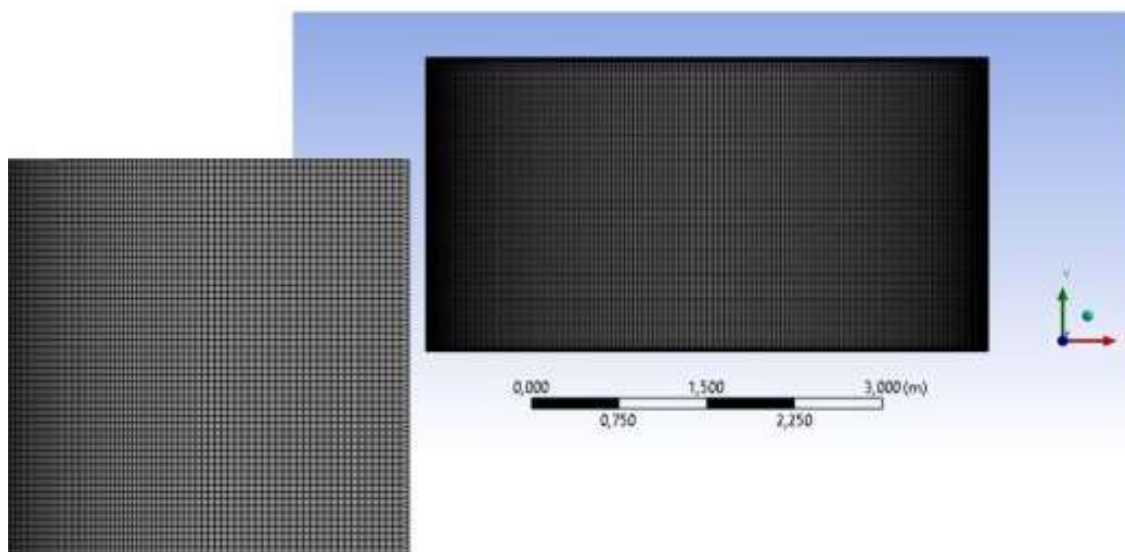


Figure 6 – Grid of the three-dimensional confined space

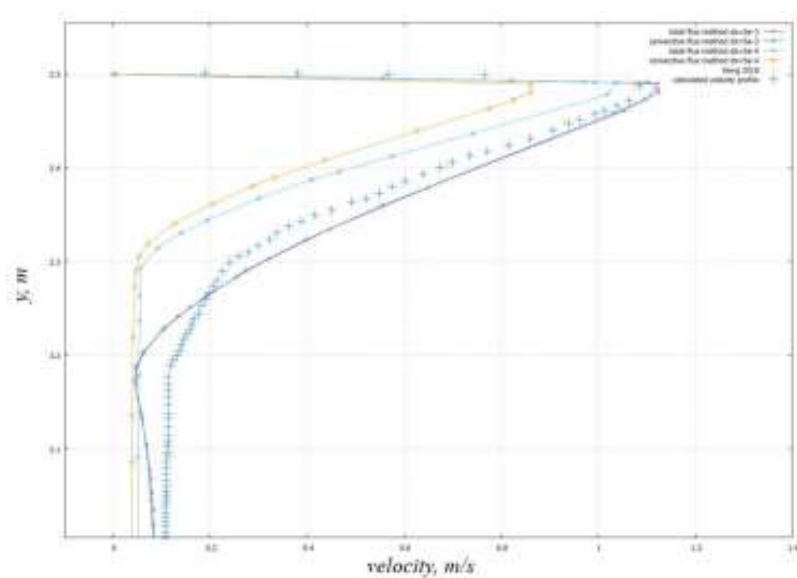


Figure 7 –Velocity at $x=1$ and $z=0$

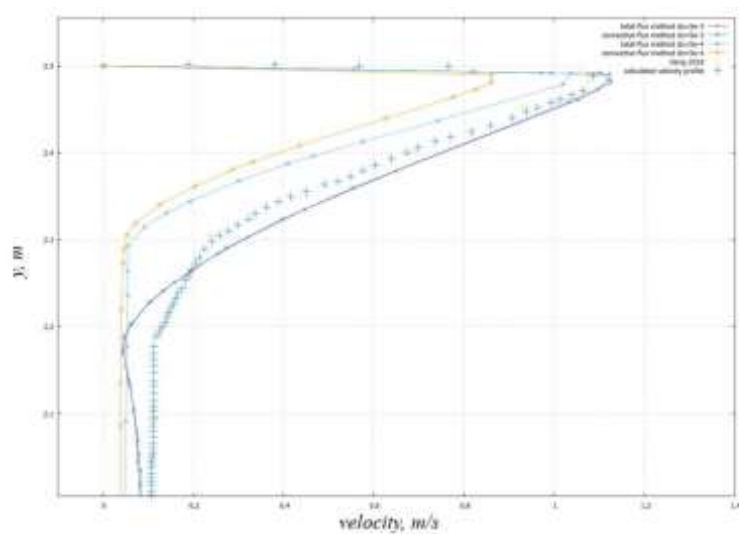
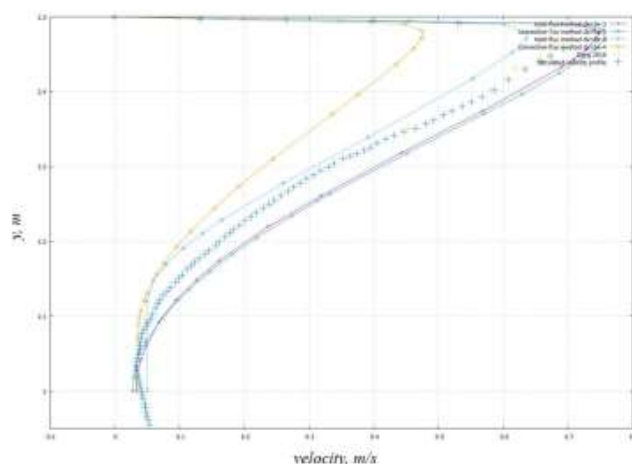


Figure 8 – Velocity at $x=1$ and $z=0.5$

Figure 9 – Velocity at $x=2.2$ and $z=0$

In this study, the airflow established by two air conditioning systems and window, the motion and transmission of SARS-CoV-2 containing particles and aerosols, and their behavior in the computational domain were examined.

The supply air's velocity is between 2.54 m/s and 7.62 m/s, referring to the American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers (ASHRAE) [7]. The velocity of 1 m/s was under the observation for venting systems and window in given study. The airstream enters and flows within the domain. Figures 10-12 demonstrate the airflow from the first and second inlets for venting system and open window, respectively. The airstream flows for 30 seconds for both cases of respiratory events. As it is shown, recirculation zones created by air conditions can be seen in the front and at the back of two sitting human models. At the same time, the airstream from window flows around the standing human model and tends to remove the aerosols at precise time, however, there is a recirculation zone between the infected person and the outlet. This recirculation zone enables medium and large particles to move back towards the emitter.

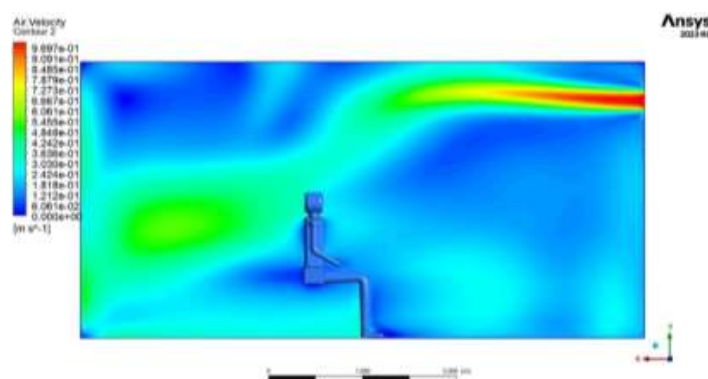


Figure 10 – Airstream from inlet 1

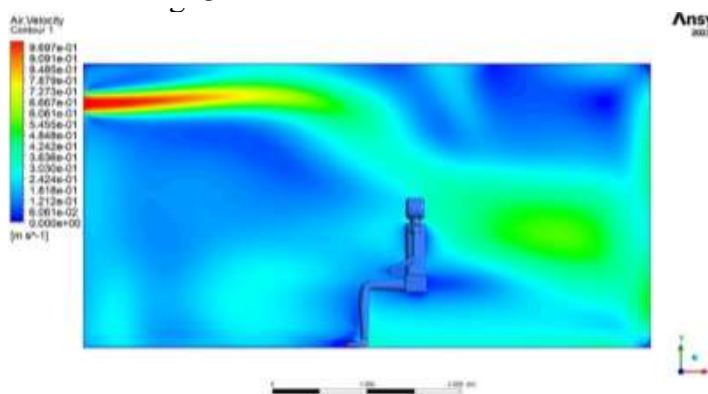


Figure 11 – Airstream from inlet 2

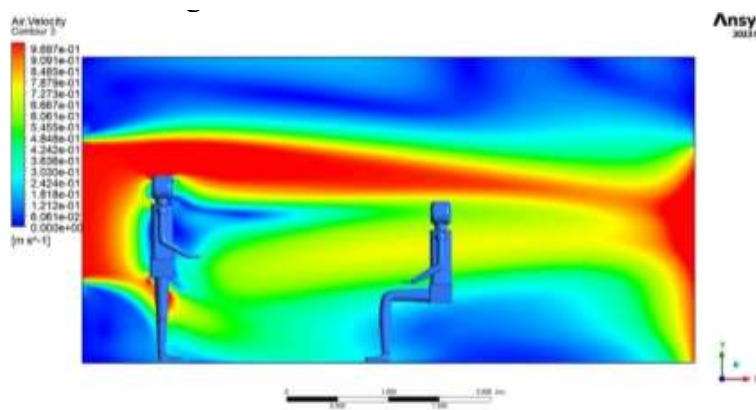


Figure 12 – Airstream from open window

Initially, the coronavirus contaminated particles' transmission during a sneeze was observed. Exhaled particles have diameters in the interval of 1.5–100 μm . In the simulation, the infected person is assumed to sneeze from 0 s to 0.5 s of flow time. An initial ejection starts at 0th second and a final one happens at 0.4th second, which means that there is no ejection at 0.5th second. In addition to emitted particles, an airflow from the human model's mouth was studied at the same time of emission. Table 1 shows a detailed information about particle injection when sneezing.

Table 1 – Data for particle injection during the sneeze

Injection type	Group
Number of particles	4940
Velocity of particles	30 m/s
Start time	0
Stop time	0.5
Minimum diameter	1.5e-6
Maximum diameter	0.0001
Mean diameter	3.53e-5

As it is displayed, group injection type was chosen to model the dissemination of coronavirus. The precise number of contaminants is 4940. The velocity of particles is 30 m/s. To accomplish the simulation of the airstream from the mouth, a time dependent user defined function (UDF) was utilized. Figure 13 shows the airstream from mouth at 0.1-0.5 s.

Figure 14 illustrates the dissemination of coronavirus diluted particles. These visualizations show particle's behaviour at different times. Figure 14a shows overall exhaled aerosols, drops and droplets, having different diameter size in the interval of 1.5-95 μm , after the emission process or, namely, at 0.5 s. Large and medium contaminants flow more than 2 m within 3 s, whereas aerosols are able to travel approximately 2.65 m at the same period of time (Figure 14b). Figure 14c displays that particles with diameter of 95 μm fall on the ground at 6.1 s leaving over 2 m behind, while tiny particles tend to follow the airflow produced by open window and air conditioning. It is shown from Figure 14d, aerosols in the range of 1.5-10 μm commence to leave the computational domain at 8.9 s and traverse more than 5.02 m maintaining the height at about 1.68 m, at which emission happened. After two seconds, a small fraction of particles with diameter sizes of 30-60 μm starts to leave the office room (Figure 14e). Close to the end of total flow time, larger contaminants, which have dimensions of 40-95 μm , move back towards the infected person due to the recirculation zone created by the airstream, while particles with size of 7 μm start to go up, which means that they might follow the airflow and also leave the domain (Figure 14f).

A change of total number of tracked particles within 28.5 s is displayed in Figure 15. Initial number of tracked particles is 4940. Then number of drops and droplets starts to decrease substantially from 8.9 s to 10.8 s

containing 3413 particles in the office room. Another sharp decline can be seen in the time interval of 14.2-17.1 s. At this period, number of contaminants reduces from 2989 to 1984. Finally, a gradual decrease happens at 17.2 s until the end of total flow time. A remained number of particles is 1656. With the help of air conditioning system and open window, total number of particles was cut by approximately three times.

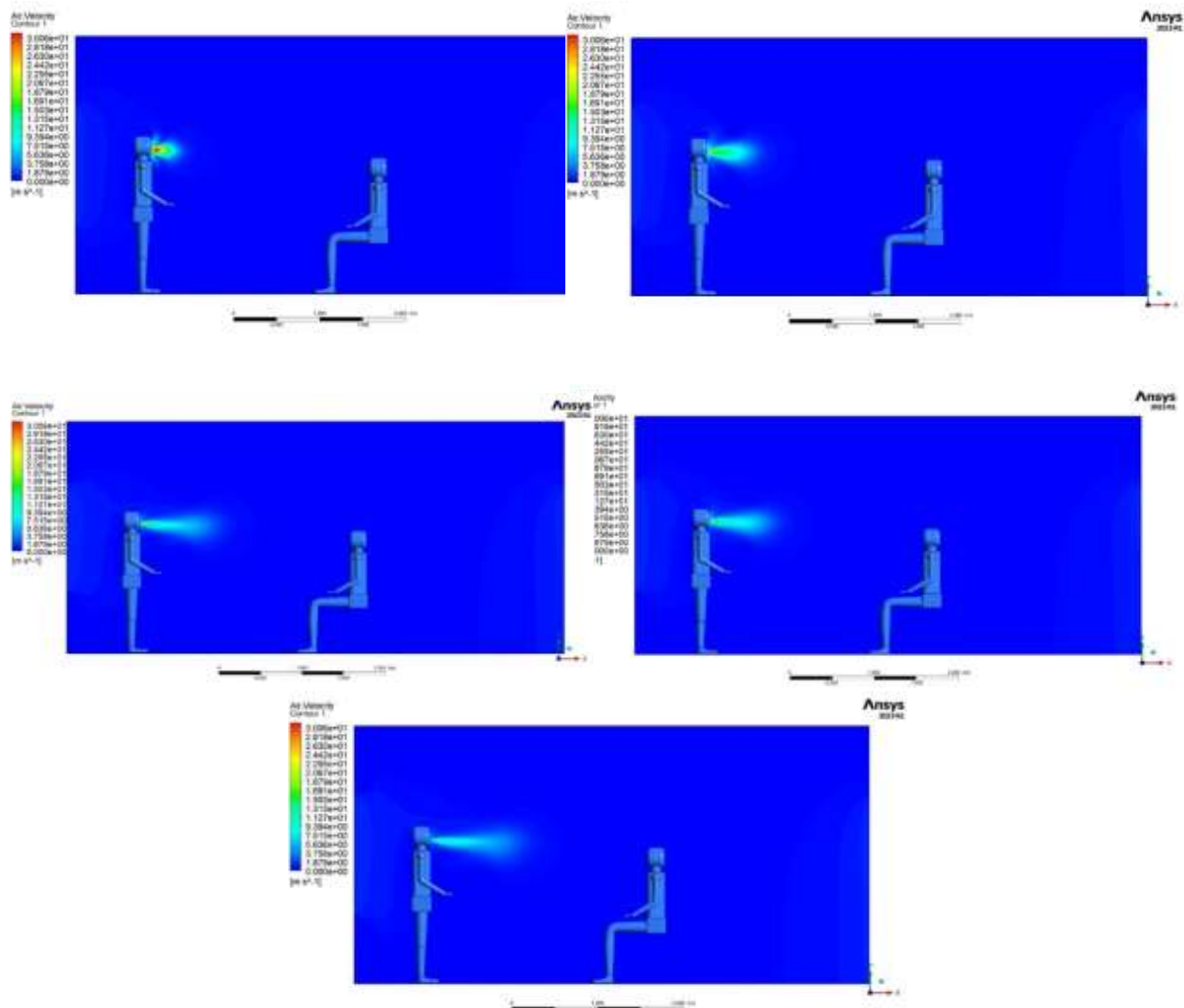
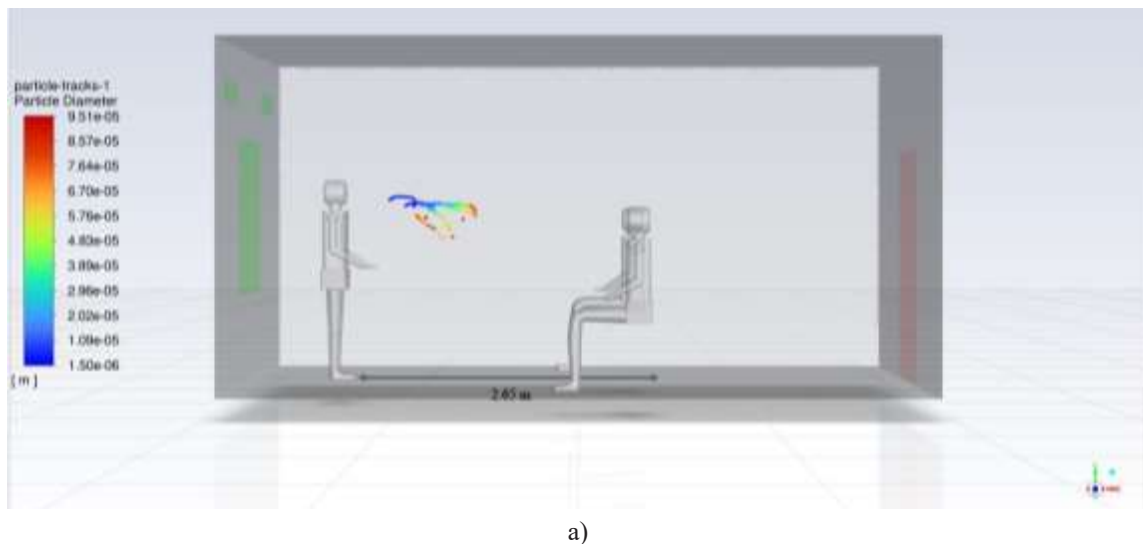
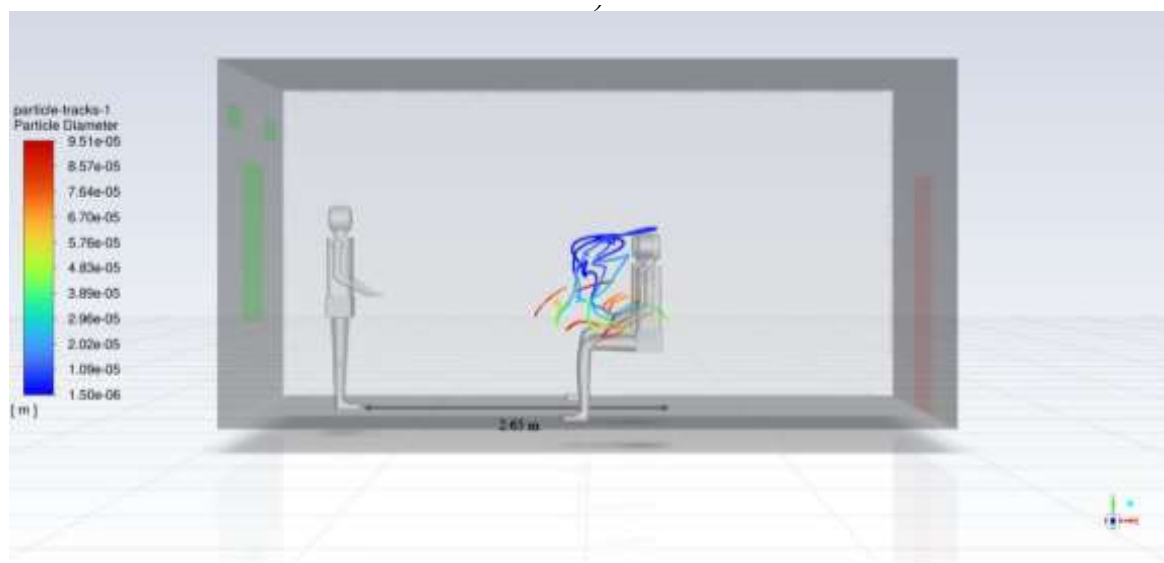


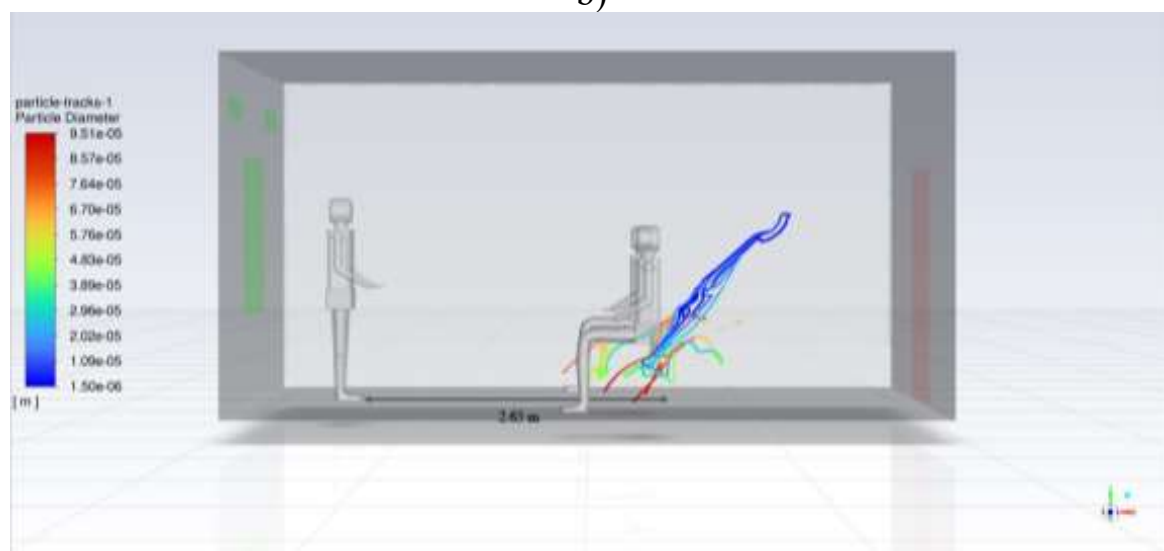
Figure 13 – Airflow from mouth at a) 0.1 s, b) 0.2 s, c) 0.3 s, d) 0.4 s and e) 0.5s



a)



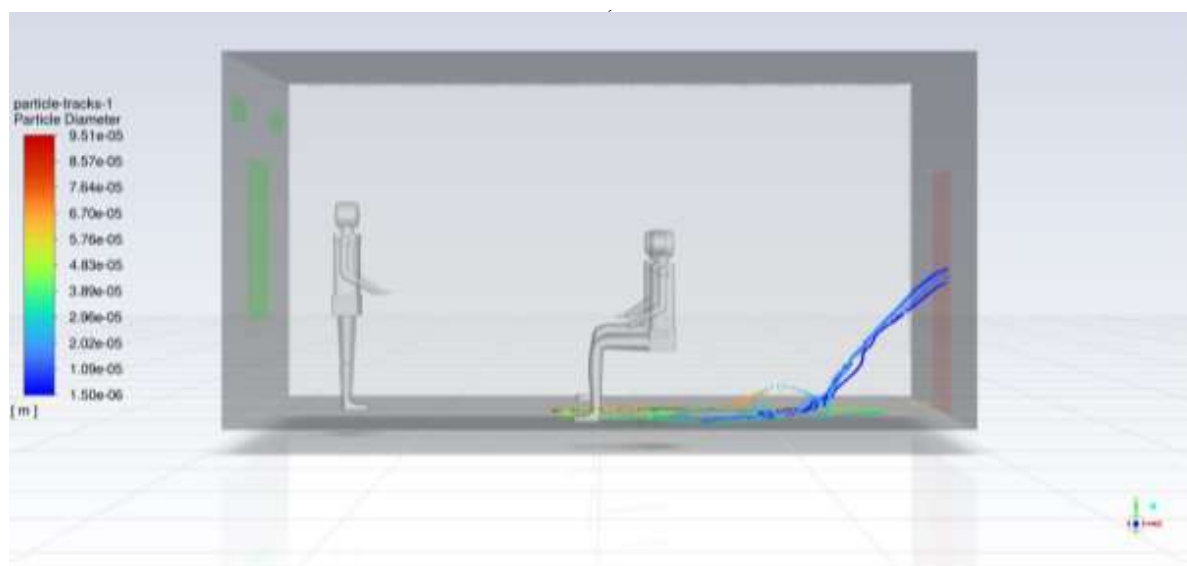
b)



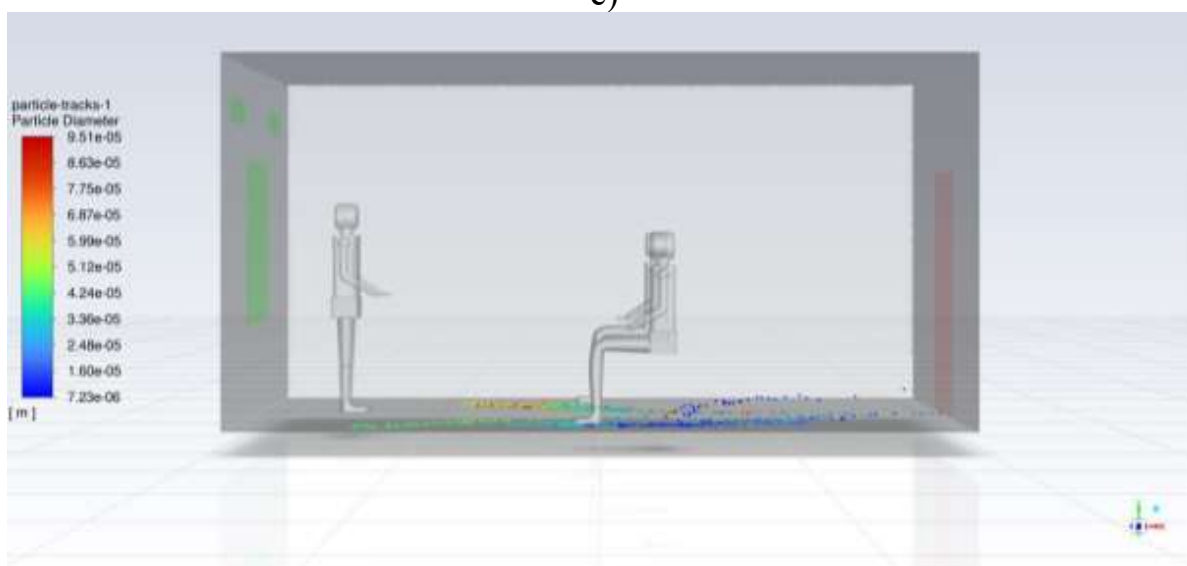
c)



d)



e)



f)

Figure 14 – Particle propagation at a) 0.5 s, b) 3.6 s, c) 6.1 s, d) 8.9 s, e) 10.9 s and f) 28.4 s

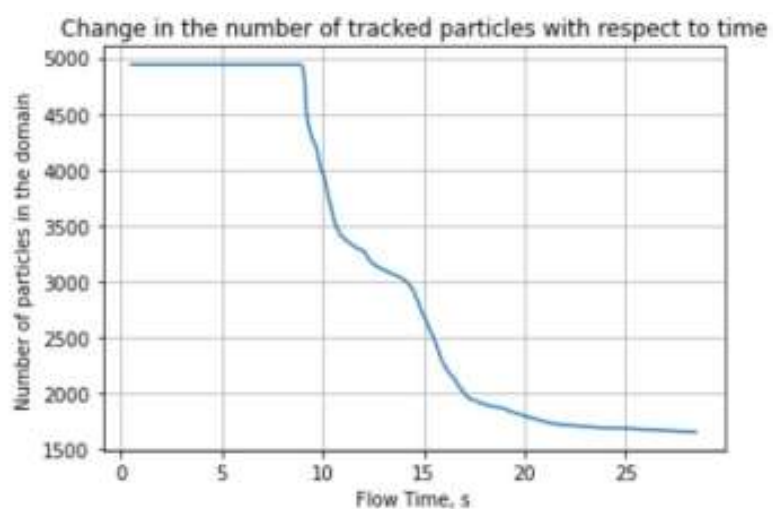


Figure 15 – Decline in the number of particles with respect to time (sneezing case)

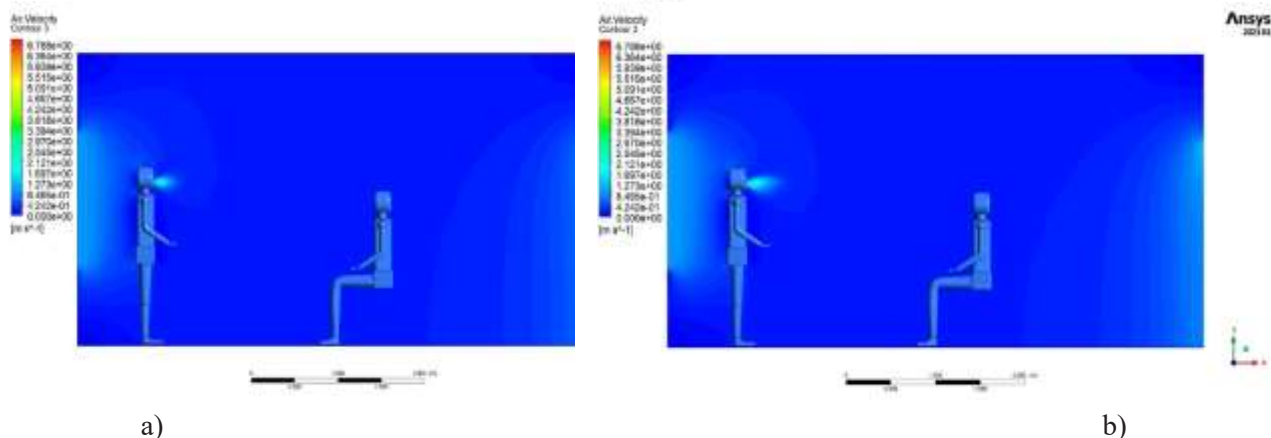
After the observation of sneezing event, which is the one of the main ways of coronavirus propagation, a coughing event was also examined as human reflex. In the simulation, the infected individual exhales contaminated aerosols, drops and droplets from 0 s to 0.5 s of flow time. Table 2 illustrates a detailed data about ejection of particles during a cough.

Table 2 – Data for particle ejection during the coughing

Ejection type	Group
Number of particles	990
Velocity of particles	7
Start time	0
Stop time	0.5
Minimum diameter	1.5e-6
Maximum diameter	0.0001
Mean diameter	3.53e-5

Total number of particles tracked in the enclosed space is 990. Minimum and maximum diameters of contaminants are in the range of 1.5-100 μm and a mean diameter is 35 μm . A velocity for coughing case is set to 7 m/s. Moreover, to simulate the airflow from the mouth time dependent UDF was applied. Figure 16 shows the airflow produced via coughing at 0.1-0.5 s. Figure 17 demonstrates the dissemination and the behavior of coronavirus contained particles during the cough. Figure 17a shows emitted particles after the emission at 0.5 s. It is seen that after the coughing large particles start to fall immediately, while aerosols and tiny droplets can traverse for more than 2 m within 5.3 s (Figure 17b). Therefore, contaminated drops with diameter of 95 μm settle on the floor at 5.8 s. Moreover, a part of particles with dimensions of 40-50 μm falls to the ground at 7 s, whereas aerosols in the interval of 1.5-10 μm leave 2.65 behind (Figure 17c). It is worth noting that light particles start to approach the floor after 7 s of flow time traveling 5.02 m. It is illustrated in Figure 17d, due to the recirculation zone close to the infected individual a fraction of medium drops (58-60 μm) is prone to go up and follow the airflow in x direction. At the same period, aerosols commence to escape the confined space. Figure 17e demonstrates the fraction of droplets with diameters of 58-60 μm leaving the computational domain at 20.5 s. In the end of flow time, particles with dimensions of 11-95 μm direct towards the emitter because of the recirculation and settle on the floor (Figure 17f).

Figure 18 demonstrates a decline in the number of particles within 30 s during the coughing. Total number of contaminants remains the same from 0.5 s to 14.2 s. Further, there happens a dramatic decrease in the number of tracked particles. Namely, number of droplets is reduced from 990 to 598 in the period of 14.3-17 s. Finally, a progressive reduction of contaminated particles can be examined from 17.1 s to 30 s. 450 coronavirus contained droplets settle on the floor of office room. It is worth to note that the supplied airflow from ventilation system and open window can control coronavirus transmission reducing number of particles by two times.



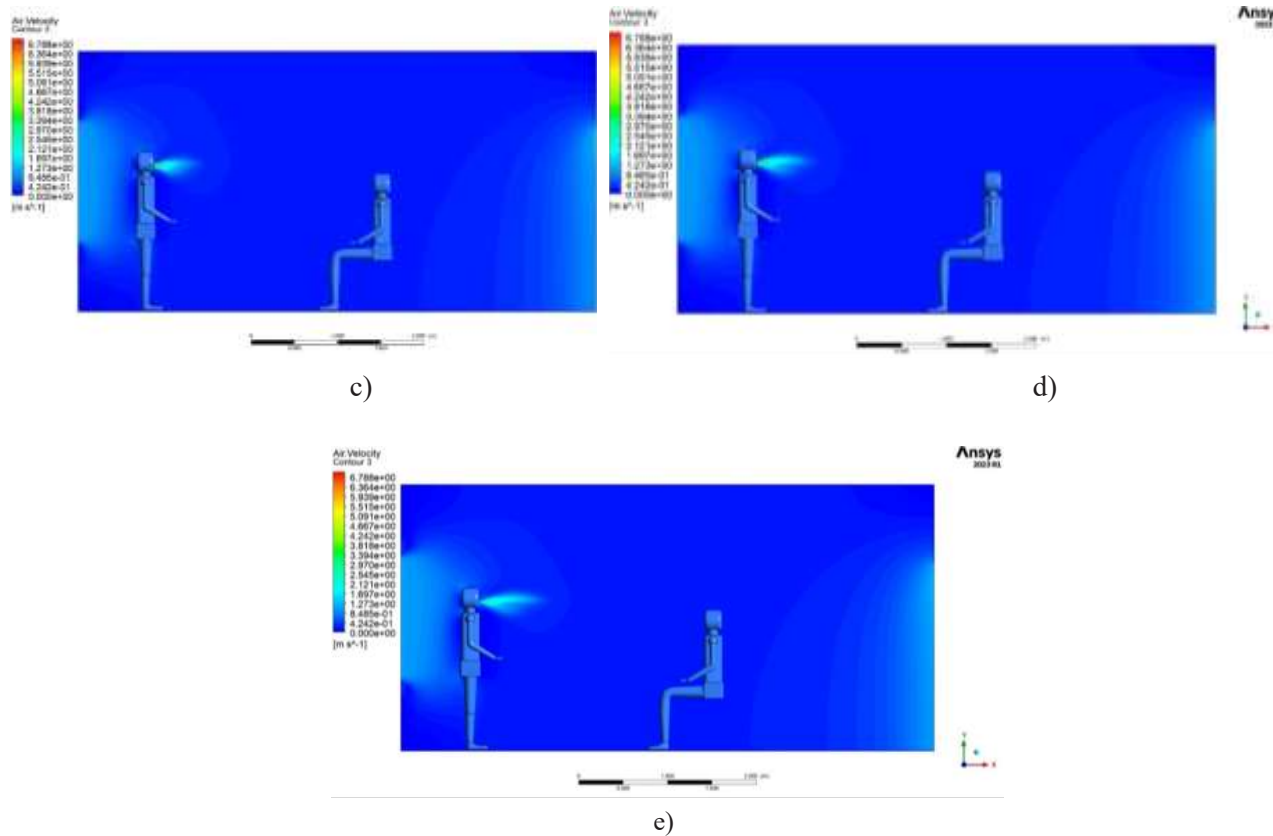
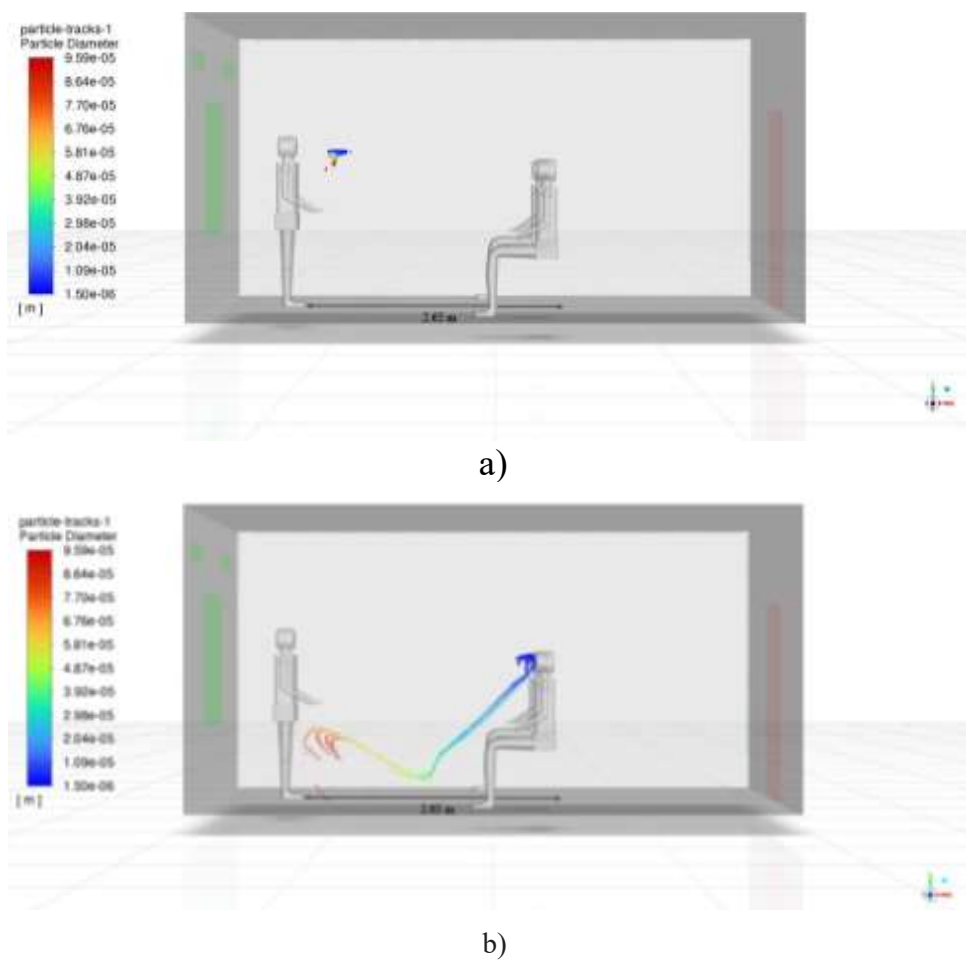
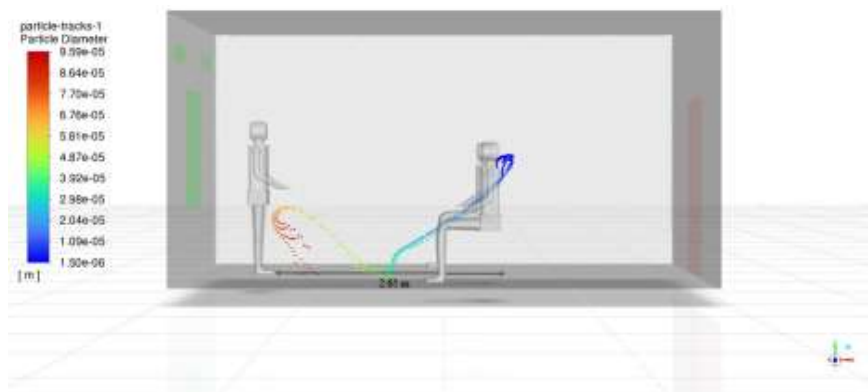
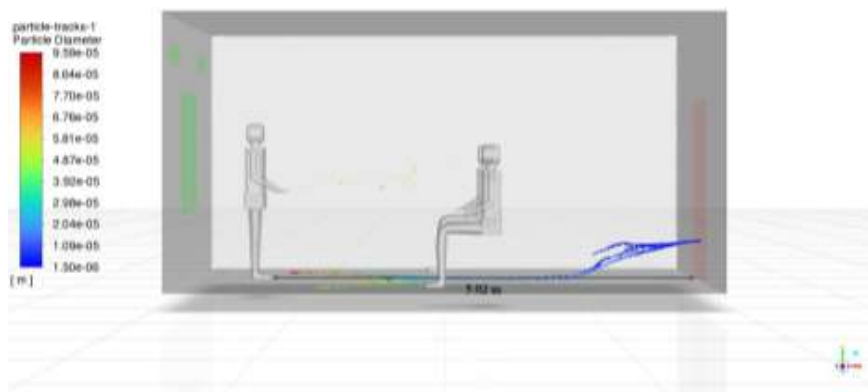


Figure 16 – Airstream coming from the mouth at a) 0.1 s, b) 0.2 s, c) 0.3 s, d) 0.4 s and e) 0.5 s

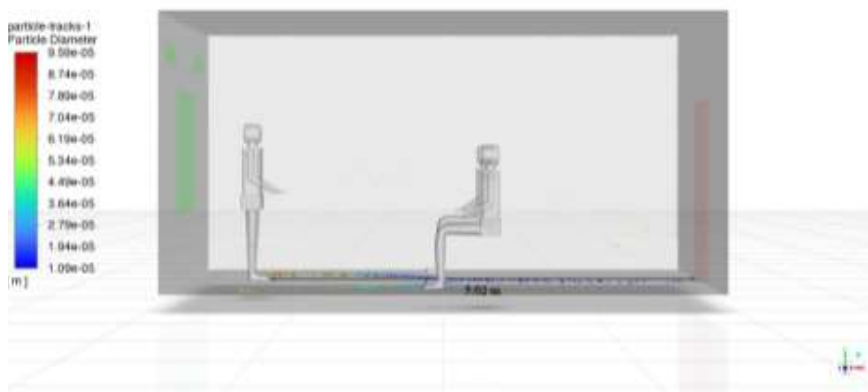




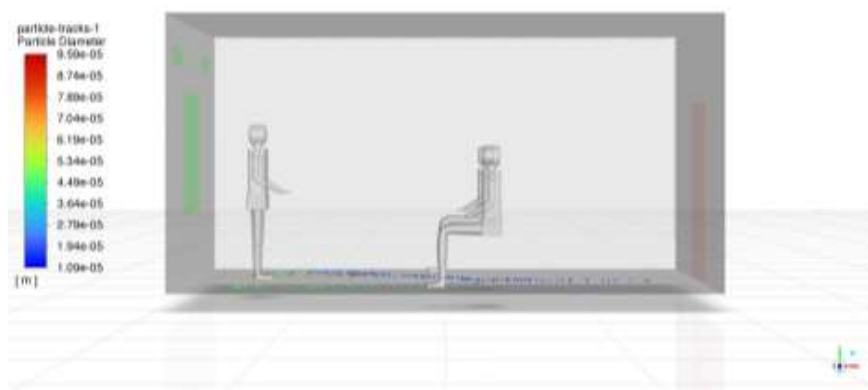
c)



d)



e)



f)

Figure 17 – Particle propagation at a) 0.5 s, b) 5.8 s, c) 7 s, d) 14.3 s, e) 20.5 s and f) 30 s

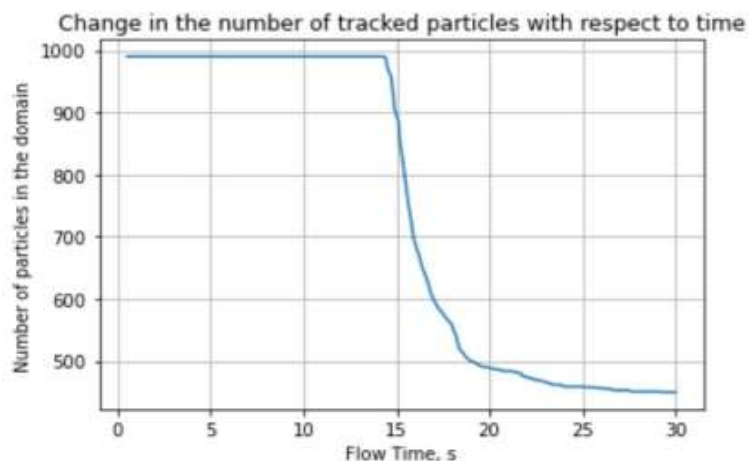


Figure 18 – Change in the number of particles with respect to time (coughing case)

Conclusion

COVID-19 pandemic, which was initially detected in Wuhan city in 2019, caused harmful consequences globally including the economic loss, total population, etc. To stop and control its propagation a myriad of preventive measures was investigated and implemented such as quarantine, lockdown, wearing medical masks and gloves, social distancing, mouthwash, hand hygiene and so on. In addition, many researchers studied the effectiveness of ventilation system and open windows. The findings showed that the airstream produced by air conditioning and a presence of open window as inlet or outlet can significantly manage virus transmission in enclosed spaces. Therefore, the main objectives of this work consist of the simulation of SARS-CoV-2 diluted particles' transmission in the confined space, observing the behavior of exhaled aerosols, drops and droplets and examining the efficiency of air conditioning and open window.

Two human reflexes were under the observation such as sneezing and coughing. As it was mentioned, viruses are prone to transmit airborne via breathing, talking, singing, sneezing and coughing. Propagation of virus particles depends on the diameter size and ejection velocity. It was examined in given study, after sneezing emitted particles can traverse for more than 5 m. To be precise, aerosols ($1.5\text{--}10\text{ }\mu\text{m}$) maintain the height of 1.68 m travelling more than 5 m and start to leave the computational domain at 8.9 s. Large particles commence to settle on the floor at 6.1 s of flow time leaving about 2.65 m behind.

In coughing case, light particles ($1.5\text{--}10\text{ }\mu\text{m}$) also travel more than 5 m, however, comparing to the sneezing event, the height maintained by particles gradually declines within 13.8 seconds. After the reflex, large contaminants ($95\text{ }\mu\text{m}$) are prone to settle on the floor immediately next to the infected individual.

In both cases, there is a tendency for tiny particles to traverse for more than 5 m, but it can be seen in coughing event, they approach the floor of the office room close to the outlet. After sneezing, aerosols escape the domain at 8.9 s; while in coughing case, tiny contaminants leave at 14.3 s. Further fate of particles in the domain for each case can be deduced as follows: due to the recirculation created by venting system and window large and medium sized droplets tend to direct towards the standing human model and settle on the ground. On the other hand, the effectiveness of the airstream generated by air conditioning system and open window is noticeable. The airflow allows aerosols with dimensions of $1.5\text{--}10\text{ }\mu\text{m}$ to leave at 8.9 s and 14.3 s for sneezing and coughing cases, respectively. The analysis of tracked particles during whole flow time shows that total number of coronavirus particles is cut by almost three times in sneezing case, while amount of tracked particles is reduced by two times in coughing case. Therefore, it is essential to have air conditioning system and open window as inlet for airflow in confined spaces during an epidemic or pandemic since they are able to manage virus transmission. Based on the findings of current paper, along with presence of ventilation system and open window, wearing medical masks and gloves, hand hygiene should be considered to avoid the cases of infection.

Acknowledgements

This work is supported by the grant from the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (AP09259783).

References

- 1 Asadi S., Bouvier N., Wexler A.S. & Ristenpart W.D. (2020) The coronavirus pandemic and aerosols: Does COVID-19 transmit via expiratory particles? *Aerosol Science and Technology*, 54:6, pp. 635–638. <https://doi.org/10.1080/02786826.2020.1749229>
- 2 Anderson E.L., Turnham P., Griffin J.R. & Clarke C.C. (2020) Consideration of the Aerosol Transmission for COVID-19 and Public Health, *Society for Risk Analysis*, 40:5, pp. 902–907. <https://doi.org/10.1111/risa.13500>
- 3 Stadnytskyi V., Bax C.E., Bax A. & Anfinrud P. (2020) The airborne lifetime of small speech droplets and their potential importance in SARS-CoV-2 transmission. *PNAS*, 117:22, pp. 11875–11877. <https://doi.org/10.1073/pnas.2006874117>
- 4 Vuorinen V., Aarnio M., et al (2020) Modelling aerosol transport and virus exposure with numerical simulations in relation to SARS-CoV-2 transmission by inhalation indoors, *Safety Science*, 130. <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104866>
- 5 Armand P., & Tâche, J. (2022, March 7) 3D modelling and simulation of the dispersion of droplets and drops carrying the SARS-CoV-2 virus in a railway transport coach, *Scientific Reports*, 12(1). <https://doi.org/10.1038/s41598-022-08067-6>
- 6 Mariam, Magar A., Joshi M., Rajagopal P.S., Khan A., Rao M.M. & Sapra B.K. (2021, June 23) CFD Simulation of the Airborne Transmission of COVID-19 Vectors Emitted during Respiratory Mechanisms: Revisiting the Concept of Safe Distance, *ACS Omega*, 6(26), 16876–16889. <https://doi.org/10.1021/acsomega.1c01489>
- 7 Mirzaie, M., Lakzian, E., Khan, A., Warkiani, M. E., Mahian, O., & Ahmadi, G. (2021, October) COVID-19 spread in a classroom equipped with partition – A CFD approach, *Journal of Hazardous Materials*, 420, 126587. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2021.126587>
- 8 Abuhegazy M., Talaat K., Anderoglu O. & Poroseva S. V. (2020, October 1). Numerical investigation of aerosol transport in a classroom with relevance to COVID-19, *Physics of Fluids*, 32(10), 103311. <https://doi.org/10.1063/5.0029118>
- 9 Narayanan S.R. & Yang S. (2021, March 1) Airborne transmission of virus-laden aerosols inside a music classroom: Effects of portable purifiers and aerosol injection rates, *Physics of Fluids*, 33(3), 033307. <https://doi.org/10.1063/5.0042474>
- 10 Ahmadzadeh M., Farokhi E. & Shams M. (2021, September) Investigating the effect of air conditioning on the distribution and transmission of COVID-19 virus particles, *Journal of Cleaner Production*, 316, 128147. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.128147>
- 11 Liu H., He S., Shen L. & Hong J. (2021, February 1) Simulation-based study of COVID-19 outbreak associated with air-conditioning in a restaurant, *Physics of Fluids*, 33(2), 023301. <https://doi.org/10.1063/5.0040188>
- 12 Mathai V., Das A., Bailey J.A. & Breuer K. (2021, January). Airflows inside passenger cars and implications for airborne disease transmission, *Science Advances*, 7(1). <https://doi.org/10.1126/sciadv.abe0166>
- 13 Jayaweera M., Perera H., Gunawardana B. & Manatunge J. (2020, September). Transmission of COVID-19 virus by droplets and aerosols: A critical review on the unresolved dichotomy, *Environmental Research*, 188, 109819. <https://doi.org/10.1016/j.envres.2020.109819>
- 14 Issakhov A., Zhandaulet Y., Omarova P., Alimbek A., Borsikbayeva A., & Mustafayeva A. (2021, May 3). A numerical assessment of social distancing of preventing airborne transmission of COVID-19 during different breathing and coughing processes, *Scientific Reports*, 11(1). <https://doi.org/10.1038/s41598-021-88645-2>
- 15 Busco G., Yang S.R., Seo J. & Hassan Y.A. (2020, July 1) Sneezing and asymptomatic virus transmission, *Physics of Fluids*, 32(7), 073309. <https://doi.org/10.1063/5.0019090>
- 16 Mortazavi H., Beni H.M., Aghaei F. & Sajadian S.H. (2021, March) SARS-CoV-2 droplet deposition path and its effects on the human upper airway in the oral inhalation, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 200, 105843. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105843>
- 17 Guan Y.D., Ramesh A. & Memarzadeh F. (2014, December). The Effects of Patient Movement on Particles Dispersed by Coughing in an Indoor Environment. *Applied Biosafety*, 19(4), 172–183. <https://doi.org/10.1177/153567601401900401>
- 18 Wang J.X., Li Y.Y., Liu X. D. & Cao X. (2020, August 1) Virus transmission from urinals, *Physics of Fluids*, 32(8), 081703. <https://doi.org/10.1063/5.0021450>
- 19 Versteeg H. & Malalasekera W. (2007, February 6) An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. <https://doi.org/10.1604/9780131274983>
- 20 Deng B., Wang J., Tang J. & Gao J. (2018, August). Improvement of the momentum method as the diffuser boundary condition in CFD simulation of indoor airflow: Discretization viewpoint, *Building and Environment*, 141, 55–60. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2018.05.050>

Information about authors**Sagandyk Aruzhan Talgatkyzy** (corresponding author)

Master Student, School of applied mathematics, Kazakh-British technical university, Tole bi 59, 050000, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID 0009-0009-5848-5964

E-mail: sgnkaru@gmail.com

Issakhov Alibek A.

PhD, Professor, Kazakh-British technical university, Tole bi 59, 050000, Almaty, Kazakhstan; al-Farabi Kazakh national university, st. al-Farabi, 71, 050038, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID 0000-0002-1937-8615

E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Авторлар туралы мәліметтер**Сағандық Аружан Талғатқызы** (корреспонденция авторы)

Магистрант, Қолданбалы математика мектебі, Қазақстан-Британ техникалық университеті, Төле би 59, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID 0009-0009-5848-5964

E-mail: sgnkaru@gmail.com

Исахов Алибек Абдиашимович

PhD, профессор, Қазақстан-Британ техникалық университеті, ул. Төле би, 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан; әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ул. аль-Фараби, 71, 050038, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID 0000-0002-1937-8615

E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Информация об авторах**Сагандык Аружан Талгаткызы** (автор для корреспонденции)

Магистрант, Школа прикладной математики, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0009-0009-5848-5964

E-mail: sgnkaru@gmail.com

Исахов Алибек Абдиашимович

PhD, профессор, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан; Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, ул. Аль-Фараби, 71, 050038, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0000-0002-1937-8615

E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

UDC 004.048

IRSTI 28.23.25

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-92-102>

ALITURLIYEVA A.E

Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan

E-mail: a_aliturliyeva@kbtu.kz

LINK PREDICTION USING TENSOR DECOMPOSITION

Abstract. In recent years, tensor decomposition has gained increasing interest in the field of link prediction, which aims to estimate the likelihood of new connections forming between nodes in a network. This study highlights the potential of the Canonical Polyadic tensor decomposition in enhancing link prediction in complex networks. It suggests effective tensor decomposition algorithms that not only take into account the structural characteristics of the network but also its temporal evolution. During the process of tensor decomposition, the initial tensor is decomposed into two-way tensors, also known as factor matrices, representing different modes of the data. These factor matrices capture the underlying patterns or relationships within the network, providing insights into the structure and dynamics of the network. For evaluation, we examine a dataset derived from the WSDM. After preprocessing, the data is represented as a multi-way tensor, with each mode representing different aspects such as users, items, and time. Our primary objective is to make precise predictions about the links between users and items within specific time periods. The experimental results demonstrate that our approach significantly improves prediction accuracy for evolving networks, as measured by the AUC.

Key words: link prediction, CP decomposition, Jennrich's algorithm, ALS algorithm, exponential smoothing, BiLSTM.

АЛИТУРЛИЕВА А.Е

Қазақстан-Британ техникалық университет, 050000, Алматы қ., Қазақстан

E-mail: a_aliturliyeva@kbtu.kz

ТЕНЗОРЛЫҚ ҮДЫРАУ АРҚЫЛЫ БАЙЛАНЫСТЫ БОЛЖАУ

Аңдатпа. Қазіргі уақытта тензордың ыдырауы желідегі түйіндер арасында жаңа қосылыстардың пайда болу ықтималдығын бағалауға бағытталған байланыстарды болжау саласында қызығушылықты арттыруда. Бұл зерттеу күрделі желілердегі байланыстарды болжауды жақсарту үшін Канондық Полиадикалық тензор ыдырауының қолданысын көрсетеді. Сонымен қатар желінің құрылымдық сипаттамаларын ғана емес, оның уақытша эволюциясын да ескеретін тиімді тензорлық ыдырау алгоритмдері ұсынылған. Тензордың ыдырау процесі кезінде бастапқы тензор деректердің әртүрлі режимдерін білдіретін факторлық матрицалар деп те аталатын екі өлшемді тензорларға ыдырайды. Бұл фактор матрицалары желінің құрылымы мен динамикасы туралы түсініктерді қамтамасыз ете отырып, желі ішіндегі негізгі заңдылықтарды немесе қатынастарды көрсетеді. Модельді бағалау үшін біз WSDM-ден алынған мәліметтер жиынтығын қарастырдық. Алдын ала өңдеуден кейін деректер көп деңгейлі тензор ретінде ұсынылды, әр режим пайдаланушылар, элементтер және уақыт сияқты әртүрлі аспектілерді білдіреді. Біздің басты мақсатымыз-белгілі бір уақыт аралығында пайдаланушылар мен элементтер арасындағы байланыстарға қатысты нақты болжамдар жасау. Эксперименттік нәтижелер біздің тәсіліміздің AUC арқылы өлшенетін уақыт бойынша өзгертін желілерді болжау дәлдігін айтарлықтай жақсартатынын көрсетеді.

Тірек сөздер: байланысты болжау, CP-декомпозиция, Генрих алгоритм, ALS алгоритм, экспоненциалды тегістеу, BiLSTM.

АЛИТУРЛИЕВА А.Е

Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан

E-mail: a_aliturliyeva@kbtu.kz

ПРОГНОЗ СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЗОРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Аннотация. В последние годы тензорная декомпозиция вызывает все больший интерес в области прогнозирования связей, целью которого является оценка вероятности образования новых соединений между узлами в сети. Это исследование подчеркивает потенциал Канонической Полиадической тензорной декомпозиции для улучшения предсказания связей в сложных сетях. В процессе тензорной декомпозиции исходный тензор разлагается на двумерные тензоры, также известные как матрицы факторов, представляющие различные режимы данных. Эти факторные матрицы фиксируют базовые закономерности или отношения внутри сети, обеспечивая понимание структуры и динамики сети. В нем предлагаются эффективные алгоритмы тензорной декомпозиции, которые учитывают не только структурные характеристики сети, но и ее временную эволюцию. Для оценки мы изучаем набор данных, полученный на WSDM. После предварительной обработки данные представляются в виде многоуровневого тензора, причем каждый режим представляет различные аспекты, такие как пользователи, элементы и время. Наша основная цель – сделать точные прогнозы относительно связей между пользователями и товарами в течение определенных периодов времени. Экспериментальные результаты демонстрируют, что наш подход значительно повышает точность прогнозирования для развивающихся сетей, измеряемую AUC.

Ключевые слова: предсказание связи, CP-декомпозиция, алгоритм Генриха, алгоритм ALS, экспоненциальное сглаживание, BiLSTM.

Introduction

“Tensor” was first introduced in 1927 [1], and the idea of using more than two matrices in factor analysis has been widely accepted since the 1960s in various domains [2]. Complex interactions among input features can be captured using a tensor form, which is impossible with flattened data. However, any analysis on a full tensorial representation is often accompanied by a so-called curse-of-dimensionality challenge, with the complexity increasing exponentially with the tensor order. This is where tensor decompositions play a crucial role, allowing for lessening the data representation's complexity without significantly affecting its ability to capture correlations in the data. Similar to their matrix counterpart, tensor decompositions break down high-dimensional tensors into a sum of lower-dimensional factors. In addition to their direct use in processing multi-way input data, tensors are frequently used as a core component of machine learning models. In later years, tensor decomposition has gained increasing interest in various fields, including computer vision and social network analysis [3].

Some existing studies compared tensor decomposition-based link prediction methods with other popular graph-based link prediction methods in multi-relational data. For analysis of temporal multi-relational data, Bader et al. [7] employ a decomposition method called ASALSAN related to RESCAL. As noted by Nickel et al. [8], this decomposition method has shown suboptimal performance on previous benchmarks. Ma et al. [9] proposed another generalization of RESCAL called the ConT decomposition method for temporal link prediction. The core tensor indices are contracted in this method, lowering the computational complexity. Evrim et al. [10] explore various matrix and tensor decomposition methods for solving link prediction problems. They consider author-conference relationships in bibliometric data called DBLP and propose an extension of the matrix-based Katz method, which employs truncated SVD for approximation. However, the authors conclude that the tensor-based decomposition methods are much better than matrix-based decomposition methods. Because temporal latent trends are not entirely derived via matrix-based decomposition from evolving data.

Lin et al. [11] offer a decomposition approach for community extraction on multi-relational and multi-dimensional social data. Their coupled factorization method includes CANDECOMP and PARAFAC decomposition methods and divergence-based cost function. Furthermore, Narita et al. propose a joint factorization method based on Tucker and CP decomposition methods and utilize a Euclidian distance-based loss function. Finally, Liang et al. [12] implement the Bayesian Probabilistic Tensor Factorization (BPTF) algorithm for temporal relational data. BPTF can capture the overall evolution of latent features by imposing a smoothness constraint on those features and incorporating additional time features. Sheng et al. [13] proposed a new method called Link Pattern Prediction Tensor (LPPT) based on Tucker Decomposition, which captures

interaction patterns in multi-relational networks. Chi and Kolda [14] presented the CP Alternating Poisson Regression (CP-APR), suitable for handling weighted time-evolving networks because it is made for sparse count data. The primary concept of the TensorCast method proposed by Araujo et al. [15] is using non-negative coupled tensor decomposition and standard models to forecast the time component.

Main provisions

Several popular tensor decomposition methods, including Canonical Polyadic (CP) and Tucker decomposition, decompose tensor-formed multidimensional data into low-order tensors and identify underlying trends of decomposed tensors. Tucker decomposition aims to decompose a tensor into a core tensor with the same order and low-order factor tensors [4]. In contrast, the CP decomposition represents an observed tensor as a sum of rank-one tensors. The CP decomposition methods first found applications in psychometrics [5] and linguistics [6], where they were referred to as Canonical Decomposition and Parallel Factor models, respectively. In this study, we use CP decomposition algorithms to recover the factor matrices model to make predictions about potential edge connections within a given network. Furthermore, our approach captures temporal trends within a tensor, where time is treated as a separate dimension.

Tensor decomposition has drawn more interest recently in link prediction, which estimates the possibility of new connections forming between network nodes. Numerous research has concentrated on the static features of single graph snapshots, which do not reveal the behavior of networks. Tracking patterns over time that are impacted by adding and deleting nodes to forecast links is essential. The topic of collaborative filtering, which aims to recommend new things to a user, is closely connected to link prediction. In this problem, the input is a partially observed matrix of (user, item) preference scores. In collaborative filtering, users and items are represented by nodes, and edges pairing nodes are weighted by the preference score. The dataset we examine is derived from Amazon, which was published in WSDM 2022 Cup. After preprocessing, it is represented as a multi-way tensor where each mode corresponds to different aspects of the data, such as users, items, and time. Our main objective is to make accurate predictions about the links between users and items in specific time periods. The results show that our approach yields significant improvements in prediction accuracy for evolutionary networks, as measured by AUC. Overall, this research demonstrates the potential of the CP decomposition method in improving link prediction in complex networks. This paper suggests effective tensor decomposition methods for temporal link prediction for large-scale, complicated networks considering temporal data.

Materials and Methods

A tensor is a generalization of multi-way arrays. The number of dimensions determines a tensor order. The order of a tensor is an important property, as it determines how it behaves under several types of transformations. For convenience, we use a three-dimensional tensor as an example throughout this paper, but the notation can extend to tensors of higher dimensions in most cases. The notation is primarily based on the reviews by Kolda et al. [3] In this paper higher-order tensors are denoted by underlined uppercase letters, e.g., $\underline{X} \in R^{(i_1 \times \dots \times i_n)}$, $n \geq 3$. For convenience, we use lower case letters to denote vectors $\mathbf{x} \in R^i$ and upper case to matrices $\mathbf{X} \in R^{(i \times j)}$. The Π stand for the number certain of elements in each dimension. To better understand the structure of tensors, we can look at their subfields such as fibers and slices. Fibers defined by fixing all but one index and given as $\underline{X}_{ij:}$, $\underline{X}_{j:k}$, $\underline{X}_{:jk}$

Vectorization is the process of transforming a given matrix into a vector by vertically stacking the columns of matrix $\mathbf{X} \in R^{(i \times j)}$. The final vector contains every component of the initial matrix; therefore, its dimension will be $(i \times j, 1)$. It can be helpful when we need to restructure the data for specific mathematical operations or algorithms that demand vector inputs. The vectorization of a matrix $\mathbf{X}$ is represented as $vec(\mathbf{X})$:

$$vec(\mathbf{X}) = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{ij})^T \quad (1)$$

Matricization is the process of rearranging an N-order tensor into a matrix. Analogous to vectorization, matricization is useful when working with algorithms that need matrix inputs. The mode-n matricization of a tensor, also known as unfolding or flattening, is indicated as $\underline{X}(n)$. In this process, the mode-n fibers of $\underline{X}$ are converted into the columns of $\underline{X}(n)$.

Rank – one tensor. When a higher-order tensor $\underline{X} \in R^{(i_1 \times \dots \times i_n)}$ can be represented as outer product of N vectors, it means that it is a rank-one tensor. The 3-order $\underline{X} \in R^{(i \times j \times k)}$ rank-one tensor can be expressed as follows:

$$\underline{X} = u \circ v \circ w \quad (2)$$

In this context, the outer vector product is denoted as the symbol " $\circ$ ". Figure 1 shows a visual illustration of the rank-one idea. By extending this concept to the general n -order tensor:

$$\underline{X} = u^{(1)} \circ u^{(2)} \circ \dots \circ u^{(n)}, \text{ with } x_{j_1 j_2 \dots j_n} = u_{j_1}^{(1)} u_{j_2}^{(2)} u_{j_3}^{(3)} \dots u_{j_n}^{(n)} \quad (3)$$

This represents that the corresponding elements from the related vectors are multiplied to create each tensor component.

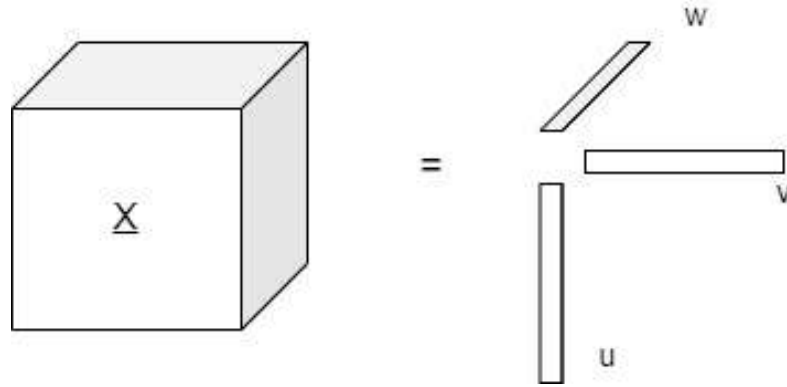


Figure 1 – Rank-one 3-order tensor.

Tensor rank. Tensor rank is the least number of rank-one tensors needed to produce X through their summation, given as $r = \text{rank}(\underline{X})$. Therefore, a 3-order rank- r tensor can be written as:

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \circ v_i \circ w_i = [\lambda; U, V, W] \quad (4)$$

The general n -order form is provided as follows:

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i^{(1)} \circ u_i^{(2)} \circ \dots \circ u_i^{(n)} = [\lambda; U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}, \dots, U^{(n)}] \quad (5)$$

The factor matrices in tensor decomposition are constructed by placing the combinations of vectors from the rank-one components as columns. Therefore, the factor matrices $U^j, j = 1, \dots, n$ takes the shape:

$$U = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_r] \quad (6)$$

Matrix operations. To comprehend the ideas and calculations of tensor decomposition, it is essential to grasp these matrix operations:

1. *Kronecker product.* The Kronecker product expands the concept of the vector outer product to matrices. This operation between two matrices $U \in R^{(i \times j)}$ and $V \in R^{(k \times l)}$ can be described as follows:

$$\begin{aligned}
 U \otimes V &= \begin{bmatrix} u_{11}V & u_{12}V & \cdots & u_{1J}V \\ u_{21}V & u_{22}V & \cdots & u_{2J}V \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{I1}V & u_{I2}V & \cdots & u_{IJ}V \end{bmatrix} \\
 &= [u_1 \otimes v_1 \quad u_1 \otimes v_2 \quad \cdots \quad u_j \otimes v_{L-1} \quad u_j \otimes v_L]
 \end{aligned} \tag{7}$$

1. *Khatri-Rao product*. The outcome of the Khatri-Rao product of two matrices $U \in R^{(i*j)}$ and $V \in R^{(k*j)}$ is a matrix with the size $(i * k, j)$. It is defined by:

$$U \odot V = [u_1 \otimes v_1 \quad u_1 \otimes v_2 \quad \cdots \quad u_k \otimes v_k] \tag{8}$$

3. *Hadamard product*. A elementwise product of two same-sized matrices is known as the Hadamard product. Given two matrices $U \in R^{(i*j)}$ and $V \in R^{(i*j)}$ is of size (i, j) , their Hadamard product is represented by $U * V$. The result is also matrix with the same size (i, j) and defined by:

$$U * V := \begin{bmatrix} u_{11}v_{11} & u_{12}v_{12} & \cdots & u_{1J}v_{1J} \\ u_{21}v_{21} & u_{22}v_{22} & \cdots & u_{2J}v_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{I1}v_{I1} & u_{I2}v_{I2} & \cdots & u_{IJ}v_{IJ} \end{bmatrix} \tag{9}$$

The approach used in this work significantly differs from standard link prediction methods that proceed without dimensionality reduction: we use tensor decomposition to map 3-order tensor to several 2-order tensors and then apply time-series forecasting methods to solve the task. The main idea of this approach is based on the work of Acar et al. [16] and was extended with CP decomposition algorithms. Firstly, we capture temporal trends present in the data using time factor W derived from CP decomposition. Two alternative algorithms are used for CP decomposition: Jennrich's algorithm and ALS. Then we employ time-series forecasting methods to the temporal factor matrix W to predict future points in time while node factors U and V remain unchanged. Time-series forecasting was done using exponential smoothing and Long Short-Term Memory (LSTM), which has been gaining popularity in making forecasts in recent years. Finally, we can reconstruct the tensor with predicted links in the following T time instants by extracted factors U , V , and extrapolated factor W . Figure 2 shows the link prediction proposed approach's block diagram.

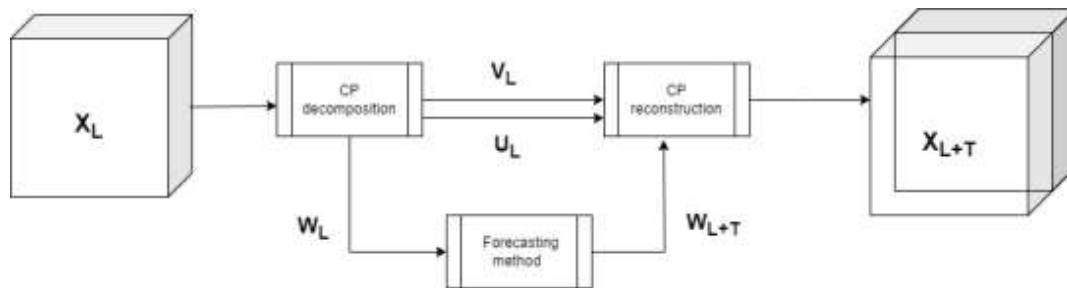


Figure 2 – The proposed approach's block diagram

Canonical Polyadic Decomposition. CP decomposition was first proposed by Hitchcock [1] in 1927. The fundamental idea of CP decomposition is to represent a tensor as a sum of rank-one tensors, where each rank-one tensor corresponds to a latent factor. The 3-order CP decomposition case is formalized as follows:

$$\min \|\underline{X} - \hat{\underline{X}}\|, \text{ where } \underline{X} \in R^{(i \times j \times k)} \text{ and}$$

$$\hat{\underline{X}} = \sum_{i=1}^r u_i \circ v_i \circ w_i = \llbracket U, V, W \rrbracket$$

This concept is illustrated in Figure 4.

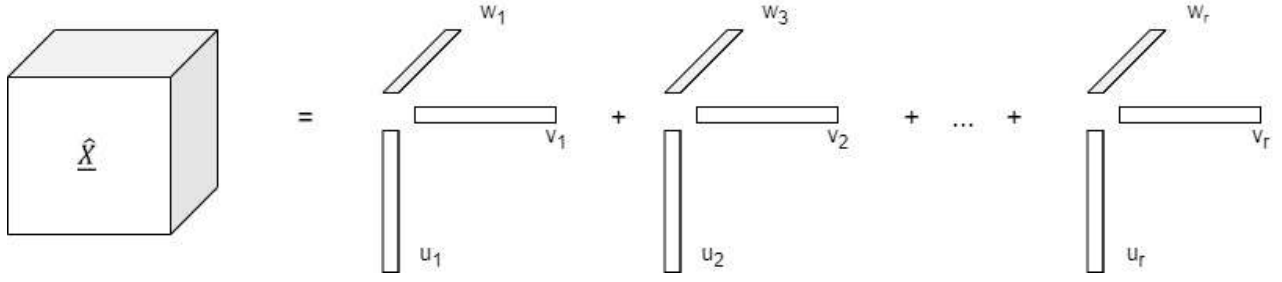


Figure 3 – Canonical Polyadic Decomposition (CP).

The factor matrices in CP decomposition are composed of the merged vectors derived from the rank-one tensors. The matricized versions of (10) are:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{X}}_{(1)} &= (W \odot V)U^T \\ \hat{\underline{X}}_{(2)} &= (W \odot V)V^T \\ \hat{\underline{X}}_{(3)} &= (W \odot V)W^T\end{aligned}\tag{11}$$

In general case:

$$\hat{\underline{X}}_{(k)} = \Lambda(U^{(n)} \odot \dots \odot U^{(k+1)} \odot U^{(k-1)} \odot \dots \odot U^{(1)})U^{(k)T}\tag{12}$$

where: $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$

The CP decomposition can be computed using a variety of algorithms. Here, we concentrate on the Alternating Least Squares (ALS) and Jennrich's algorithm.

Jennrich's Algorithm. Using Jennrich's algorithm, we can recover the factor matrices U, V, and W in (10). This straightforward approach was first disclosed in a paper by Harshman [6], with the author crediting Dr. Robert Jennrich. When the tensor components are guaranteed to be orthogonal, this algorithm stays effective.

1. $\underline{X} \in R^{m \times n \times p}$, choose a random unit-length (or Gaussian) $a, b \in R^p$ and get $\underline{X}_a, \underline{X}_b$:

$$\underline{X}_a = \sum_{i=1}^p a_i \underline{X}(:, :, i)\tag{14}$$

Where $\underline{X}_a$ and $\underline{X}_b$ can be formulated as follows:

$$\underline{X}_a = \sum_{i=1}^r (u_i \circ v_i) \langle w_i, a \rangle\tag{15}$$

$$\underline{X}_b = \sum_{i=1}^r (u_i \circ v_i) \langle w_i, b \rangle\tag{16}$$

1. Compute the eigen-decomposition of $\underline{X}_a(\underline{X}_b)^\dagger$ and $\underline{X}_b(\underline{X}_a)^\dagger$. Where $\underline{X}_a = UD_aV^T$ and $\underline{X}_b = UD_bV^T$, $D_a = \text{diag}(\{\langle w_i, a \rangle\}_i)$, $D_b = \text{diag}(\{\langle w_i, b \rangle\}_i)$ and we can get:

$$\underline{X}_a(\underline{X}_b)^\dagger = UD_aV^T(V^T)^\dagger D_b^\dagger U^\dagger = UD_aD_b^\dagger\tag{17}$$

$$\underline{X}_b(\underline{X}_a)^\dagger = V^T D_b U U^\dagger D_a^\dagger (V^T)^\dagger = V^T D_b D_a^\dagger (V^T)^\dagger \quad (18)$$

where the columns of U and V are u_i and v_i respectively.

2. Given u_i and v_p , we can solve the linear system of equations to find w_i and finally get the tensor factor matrices U, V, W .

Alternating Least Squares Algorithm. The ALS algorithm is an efficient approach to computing CP decomposition. The main idea of this algorithm is to fix all factor matrices aside from one and then optimize the non-fixed factor matrix. Each factor matrix goes through this process repeatedly until a stopping criterion is satisfied, signifying convergence or obtaining the required level of approximation. The steps of the ALS algorithm for 3-order tensor:

$$\begin{aligned} U &\leftarrow \underset{U}{\operatorname{argmin}} \|\underline{X}_{(1)} - (W \odot V)U^T\| \\ V &\leftarrow \underset{V}{\operatorname{argmin}} \|\underline{X}_{(2)} - (W \odot U)V^T\| \\ W &\leftarrow \underset{W}{\operatorname{argmin}} \|\underline{X}_{(3)} - (V \odot U)W^T\| \end{aligned} \quad (19)$$

The optimal solution for the minimization is obtained by:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \underline{X}_{(1)}[(W \odot V)^T]^\dagger = \underline{X}_{(1)}(W \odot V)(W^T W * V^T V)^\dagger \\ \hat{V} &= \underline{X}_{(2)}[(W \odot U)^T]^\dagger = \underline{X}_{(2)}(W \odot U)(W^T W * U^T U)^\dagger \\ \hat{W} &= \underline{X}_{(3)}[(V \odot U)^T]^\dagger = \underline{X}_{(3)}(V \odot U)(V^T V * U^T U)^\dagger \end{aligned} \quad (20)$$

Exponential smoothing. An exponential smoothing time series forecasting method uses weighted averages of previous observations. Recent data points are given more weight while the significance of earlier observations is gradually reduced. An exponential decay factor is used to produce this weighting technique, assigning more weight to recent observations. The formula for exponential smoothing is as follows:

$$s_t = \beta x_t + (1 - \alpha)s_{t-1} \quad (21)$$

where β - smoothing parameter, s_t - smoothed value, x_t - observed value

In our approach for link prediction, we use simple exponential smoothing to predict future values of the temporal factor matrix W of decomposed tensor. The formula of exponential smoothing for factor matrix W can be expressed as:

$$\begin{aligned} W_{t+1,i} &= \beta W_{t,i} + \beta(1 - \beta)W_{t-1,i} + \\ &\beta(1 - \beta)^2 W_{t-2,i} + \dots + \beta(1 - \beta)^3 W_{t-3,i} + \\ &\dots + (1 - \beta)^i W_{1,i} \end{aligned} \quad (22)$$

Where: $i = 1, \dots, R$ and $0 < \beta < 1$, $t = 1, \dots, L + T$, T - time period to predict

By utilizing the extrapolated factor matrix W , we can reconstruct the observed tensor by estimating the potential links that may be formed within L timestamps, as indicated by formula (23):

$$\hat{\underline{X}}_{L+T} = \sum_{i=1}^r u_i \circ v_i \circ w_i = \llbracket U_L, V_L, W_{L+T} \rrbracket \quad (23)$$

Bidirectional Long Short-Term Memory. LSTM is an effective and versatile tool for learning activity patterns. It has three layers: an input layer, a hidden layer, and an output layer, just like other neural network

designs. In our study, we use Bidirectional LSTM(BiLSTM) as a forecasting method for temporal factor matrix W retrieved from CP decomposition. BiLSTM analyzes the historical context of the time series by performing a forward pass on the historical observations. By examining the future observations made through the backward pass, it also takes the future context into account. BiLSTM can offer a more thorough insight into the temporal patterns and trends in the data by merging these two information streams. To maximize prediction accuracy by reducing the difference between the expected values and the actual observations, the model learns to modify its parameters throughout training. The backward pass aids in learning long-term dependencies and identifying future trends while also providing helpful information for gradient computing. The employed architecture has two hidden BiLSTM layers, and the number of epochs is 300 with the ADAM optimizer. The algorithm of temporal link prediction via tensor decomposition with BiLSTM:

1. CP decomposition of observed data with rank- R
2. Get factor matrices $[[U_L, V_L, W_L]]$
3. Train each column of the temporal factor W_L with BiLSTM and predict W_{L+t} , where $t=1, \dots, T$
4. Concatenate W_L and W_{L+t}
5. Reconstruct CP decomposition with formula (23)

Results and Discussion

The dataset we examine for temporal link prediction is downloaded from WSDM 2022 Cup. This dataset represents a user-item time-evolving network of Amazon. After the preprocessing stage, the data is represented as a 3-order tensor. The first dimension (i) corresponds to the user node, the second dimension (j) represents the item node, and the third dimension (k) captures the date of interaction. For evaluation, we split the data into a training set and a test set, with 80% of the data allocated for training and 20% for testing.

We use the area under the receiver operating characteristic curve (AUC) as a metric to evaluate the performance of our methods in temporal link prediction. AUC is selected due to its robustness in handling imbalanced data, which is crucial in our case as the training dataset contains a small fraction (less than 0.5%) of actual links compared to all possible links. Firstly, in order to assess the performance of tensor decomposition and its reconstruction, only the CP decomposition part of the model was evaluated.

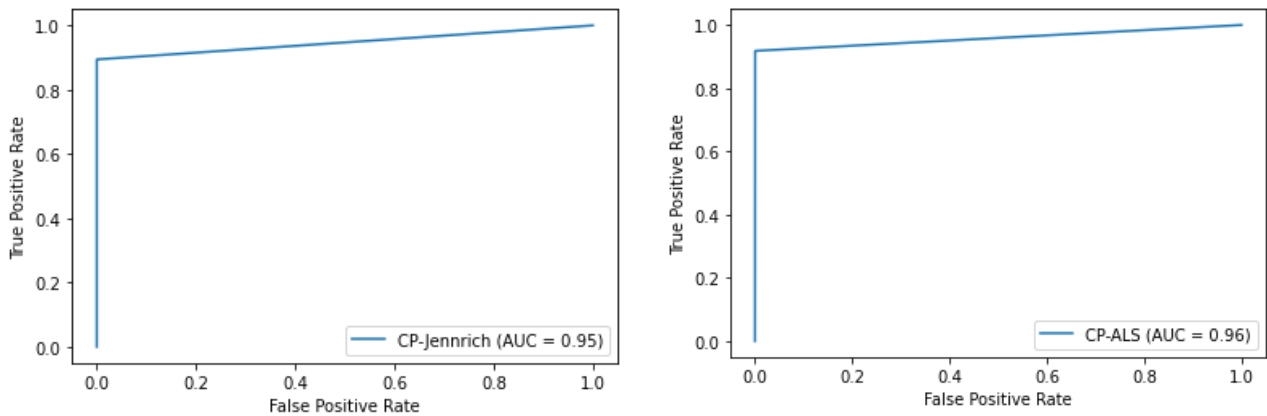


Figure 4 – AUC and ROC of the CP decomposition algorithms

Figure 4 displays the ROC curves, which provide a comprehensive view of the tensor decomposition performance. It can be seen that Jennrich's algorithm demonstrates slightly lower performance than the ALS algorithm for 0.01 (0.95 vs. 0.96).

In Figure 5, the bar chart provides valuable insights into the link prediction performance using AUC as the evaluation metric. Among all the methods, Jennrich's CP decomposition algorithm with BiLSTM algorithm achieves the highest AUC score (0.95). However, the ALS algorithm with the same forecasting model yields the lowest AUC score (0.83). The ROC of these models is presented in Figure 8. But with exponential smoothing in the prediction part, the AUC score of the method increases by 0.5 (0.88). With two alternative forecasting methods in the prediction part, Jennrich's algorithm performs exceptionally well in link prediction with the time-evolving dataset. It can be assumed that.

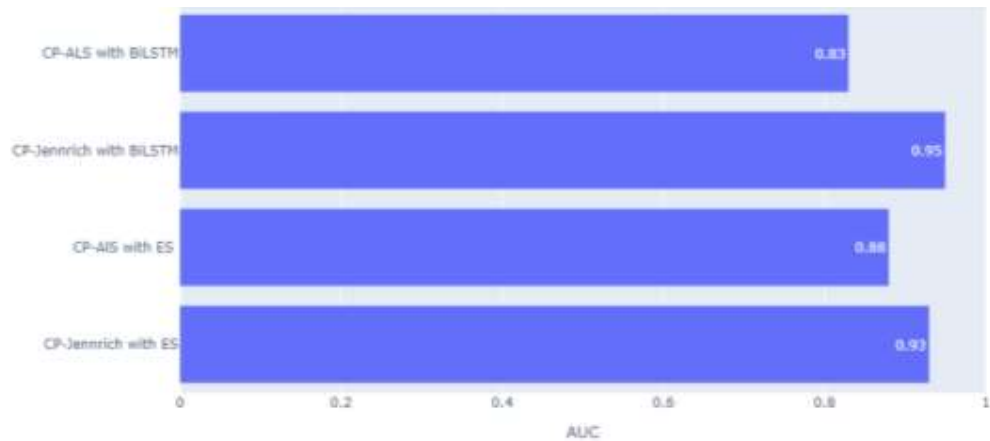
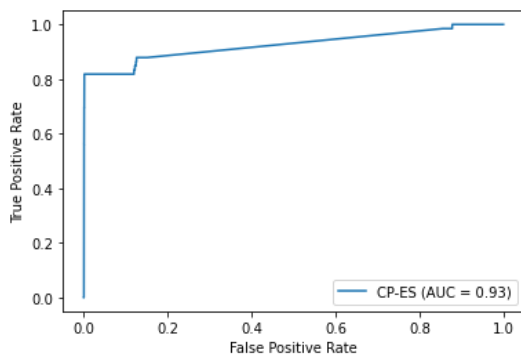
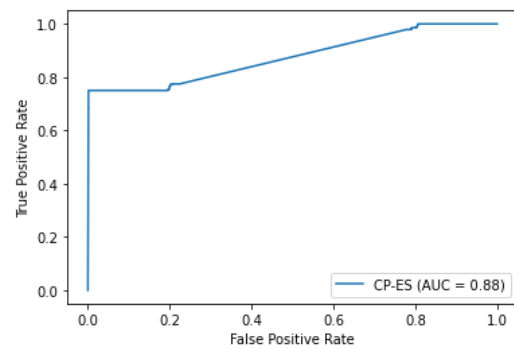


Figure 5 – AUC of link prediction models

Jennrich's CP decomposition effectively retrieves latent temporal trends from an observed tensor to the temporal factor matrix of the CP decomposition where the prediction part is held.



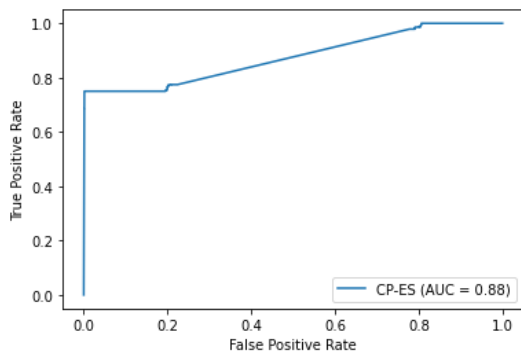
(a) $T = 1$



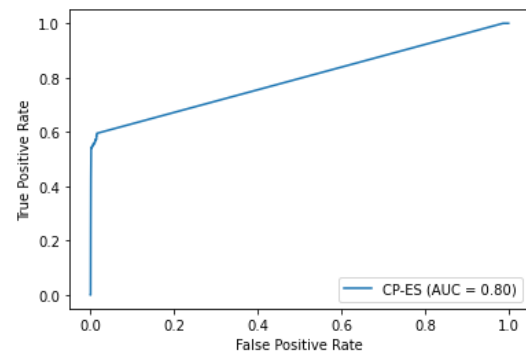
(b) $T = 30$

Figure 6 – AUC and ROC of the Jennrich's algorithm with exponential smoothing

The impact of increasing T on the change in AUC is illustrated in separate graphics, as shown in Figure 6-7. The outcomes measured by ROC and AUC of Jennrich's algorithm with exponential smoothing are depicted in Figure 6. The AUC of this model decreases from 0.93 to 0.88 when T is increased from 1 to 30, indicating a relatively lower performance as the time period increases. In Figure 7, a similar assumption can be applied to the results of the ALS decomposition with a simple exponential smoothing as a forecasting method.

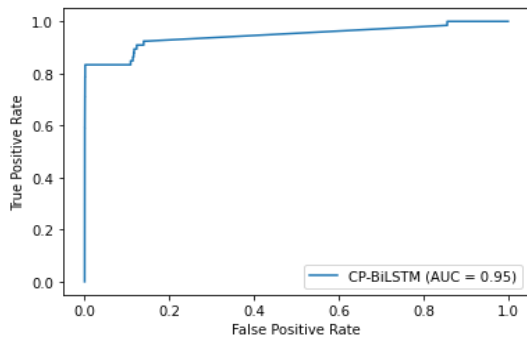


(a) $T = 1$

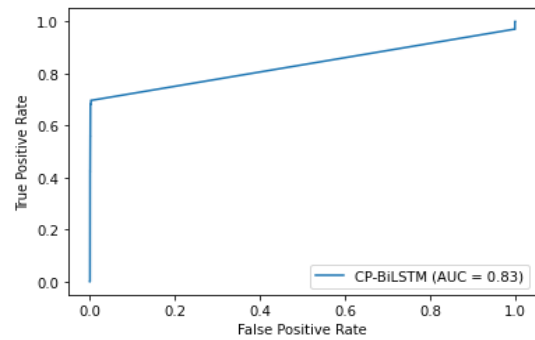


(b) $T = 30$

Figure 7 – The ALS algorithm with exponential smoothing (AUC and ROC)



(a) Jennrich's algorithm



(b) ALS algorithm

Figure 8 – The CP algorithms with BiLSTM (AUC and ROC)

Conclusion

In this work, we present a method for link prediction in large-scale time-evolving networks, which completely differs from standard graph-based methods. This method is a combination of tensor decomposition and time-series forecasting. The dataset that we used to evaluate our approach is derived from WSDM. In data preprocessing, the dataset is converted to a three-way tensor. In the tensor decomposition part, the observed tensor is decomposed to two-way tensors, which are factor matrices of each mode that give a relative pattern of the network. As a tensor decomposition model, we used two alternative algorithms of CP decomposition such as Jennrich's algorithm and the ALS algorithm. The results show that Jennrich's algorithm is more efficient in problems considering the temporal trend. In forecasting, we utilized the third mode factor matrix of decomposed tensor and predicted new links via BiLSTM and exponential smoothing. By comparing the AUC of each method, we conclude that the combination of the Jennrich algorithm and BiLSTM shows the best performance. In future work, we aim to investigate other decomposition algorithms in link prediction, such as Tucker and Tensor Train decomposition methods with a dataset presented as a multi-way tensor.

References

- 1 Hitchcock Frank L. (1927) The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products, *Journal of Mathematics and Physics*, 6.1-4, pp. 164–189.
- 2 Sidiropoulos Nicholas D. et al. (2017) Tensor decomposition for signal processing and machine learning, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65.13, pp. 3551–3582.
- 3 Kolda Tamara G. and Brett W. Bader (2009) Tensor decompositions and applications, *SIAM review*, 51.3, pp. 455–500.
- 4 Tucker, Ledyard R. (1966) Some mathematical notes on three-mode factor analysis, *Psychometrika*, 31.3: 279–311.
- 5 Carroll, J. Douglas and Jih-Jie Chang (1970) Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of “Eckart-Young” decomposition, *Psychometrika* 35.3, pp. 283–319.
- 6 Harshman, Richard A. (1970) Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an “explanatory” multimodal factor analysis, pp. 1–84.
- 7 Bader, Brett W., Richard A. Harshman and Tamara G. Kolda. Temporal analysis of semantic graphs using ASALSAN, *Seventh IEEE international conference on data mining (ICDM 2007)*.
- 8 Nickel, Maximilian, Lorenzo Rosasco and Tomaso Poggio. (2016) Holographic embeddings of knowledge graphs, *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, vol. 30, no. 1.
- 9 Ma, Yunpu, Volker Tresp and Erik A. Daxberger. (2019) Embedding models for episodic knowledge graphs, *Journal of Web Semantics* 59: 100490.
- 10 Acar E., Dunlavy D.M., Kolda T.G. (2009) Link prediction on evolving data using matrix and tensor factorizations, *IEEE International conference on data mining workshops*, pp. 262–269.
- 11 Ermiş, Beyza, Evrim Acar and A. Taylan Cemgil. (2015) Link prediction in heterogeneous data via generalized coupled tensor factorization, *Data Mining and Knowledge Discovery*, 29, pp. 203–236.
- 12 Xiong, Liang et al. (2010) Temporal collaborative filtering with Bayesian probabilistic tensor factorization, *Proceedings of the 2010 SIAM international conference on data mining*, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- 13 Gao S., Denoyer L., Gallinari P. (2010) Tensor decomposition model for link prediction in multi-relational networks, *2nd IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content*, IEEE, pp. 298–302.

14 Chi, Eric C. and Tamara G. Kolda. (2012) On tensors, sparsity, and nonnegative factorizations, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 33.4, pp. 1272–1299.

15 de Araujo, Miguel Ramos, Pedro Manuel Pinto Ribeiro and Christos Faloutsos. Tensorcast: Forecasting with context using coupled tensors (best paper award), 2017 IEEE International Conference on Data Mining (ICDM).

Information about author

Aliturliyeva Albina Erbolatovna

Master's student in Data Science, Kazakh-British Technical University, 59, Tole bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan

ORCID ID 0009-0002-6758-5608

E-mail: a_aliturliyeva@kbtu.kz

Автор туралы мәлімет

Алитурлиева Альбина Ерболатовна

Деректер ғылымының магистранты, Қазақстан-Британ техникалық университеті, Төле би көш., 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID 0009-0002-6758-5608

E-mail: a_aliturliyeva@kbtu.kz

Информация об авторе

Алитурлиева Альбина Ерболатовна

Магистр наук о данных, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0009-0002-6758-5608

E-mail: a_aliturliyeva@kbtu.kz

UDK 004.8

IRSTI 27.43.17

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-103-114>**Knaytov Ye. N.^{*1}, Akzhalova A. Zh.¹, Sadok Ben Yahia²**¹Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan²Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia,

*E-mail: y_knaytov@kbtu.kz

TIME SERIES-BASED APPROACHES FOR IMPROVING WIND POWER GENERATION FORECAST ACCURACY

Abstracts. This study provides a detailed analysis and prediction of power generation at wind farms in Germany using Lasso, LightGBM, and CatBoost machine learning models. Feature Engineering was used on the data, which allowed the extraction of more detailed data, which was used to improve the quality of the models. Through Extensive Data Analysis (EDA), the authors identify and develop lagged and moving features from the energy production time series, under the assumption that accurate predictions can significantly improve the stability of energy systems, especially in the context of increasing dependence on renewable energy sources. The performance of each model is evaluated based on the Mean Absolute Error(MAE), Mean Squared Error(MSE), and Root Mean Squared Error(RMSE) metrics, with CatBoost exhibiting the highest accuracy. In conclude, pointing to opportunities for further research aimed at optimizing these models and adapting them to other regions, emphasizing the comprehensive and long-term potential of this study in the context of energy field.

Key words: wind energy, forecasting, time series, Lasso, LightGBM, CatBoost.

Қнаяттов Е.Н.^{*1}, Акжалова А.Ж.¹, Садок Бен Яхия²¹ Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан²Таллин технологиялық университеті, Таллин қ., Эстония

*E-mail: y_knaytov@kbtu.kz

ЖЕЛ ЭНЕРГИЯСЫНЫҢ ӨНДІРІСІН БОЛЖАУДАҒЫ ДӘЛДІКТІ ЖАҚСARTУ ҮШІН УАҚЫТ ҚАТАРЛАРЫ НЕГІЗІНДЕГІ ТӘСІЛДЕР

Аңдатпа. Бұл зерттеуде біз Lasso, LightGBM және CatBoost машиналық оқыту моделдерін пайдалана отырып, Германиядағы жел электр станцияларында электр энергиясын өндіруді егжей-тегжейлі талдау мен болжауды ұсындық. Деректерді өңдеу үшін модельдердің сапасын жақсарту мақсатында пайдаланылған ендік және уақыттық ақпарат арқылы егжей-тегжейлі деректерді алуға мүмкіндік беретін Feature Engineering әдісі қолданып, жаңа дерекпен толтырылды. Жетілдірілген деректерді талдау (Extensive data Analysis, EDA) арқылы біз дәл болжамдардың сапасын нақтырақ энергетикалық жүйелердің тұрақтылығын, әсіресе жаңартылатын энергия көздеріне тәуелділіктің артуы жағдайында айтарлықтай жақсарту алатындығына сүйеніп отырып, энергия өндірудің уақыт сериясынан кешігу және жылжымалы белгілерді анықтадық және моделдердің сапа көрсеткішін жақсарттық. Әрбір моделдің өнімділігі орташа абсолютті қате (MAE), орташа квадраттық қате (MSE) және түбір асты орташа квадраттық қате (RMSE) статистикалық көрсеткіштері негізінде бағаланады. Осы модельдердің ішінде CatBoost барлық көрсеткіштер бойынша ең жоғары дәлдікті көрсетеді. Қорытындыда осы модельдерді оңтайландыруға және оларды басқа аймақтарға бейімдеуге бағытталған әрі қарайғы зерттеулердің мүмкіндіктері көрсетіледі, энергетикалық сала контекстінде осы зерттеудің кешенді және ұзақ мерзімді әлеуеті атап өтіледі.

Тірек сөздер: жел энергиясы, болжау, уақыт қатарлары, соңғы, LightGBM, CatBoost.

Княтов Е.Н.*¹, Акжалова А.Ж.¹, Садок Бен Яхия²¹Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан²Таллинский университет технологий, г. Таллин, Эстония

*E-mail: y_knayatov@kbtu.kz

ПОДХОДЫ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗА ВЕТРОЭНЕРГЕТИКИ

Аннотация. В данном исследовании мы представили подробный анализ и прогнозирование выработки электроэнергии на ветряных электростанциях в Германии с использованием моделей машинного обучения Lasso, LightGBM и CatBoost. Для обработки данных использовался метод Feature Engineering, который позволил извлечь более подробные данные с дат, использованные для улучшения качества моделей. С помощью расширенного анализа данных (Extensive Data Analysis, EDA) мы определяем и разрабатываем запаздывающие и скользящие признаки из временного ряда производства энергии, исходя из того, что точные прогнозы могут значительно повысить стабильность энергетических систем, особенно в контексте растущей зависимости от возобновляемых источников энергии. Производительность каждой модели оценивается на основе показателей средней абсолютной ошибки (MAE), средней квадратичной ошибки (MSE) и корневой средней квадратичной ошибки (RMSE), при этом среди этих моделей CatBoost демонстрирует самую высокую точность по всем показателям. В заключение указываются возможности для дальнейших исследований, направленных на оптимизацию этих моделей и их адаптацию к другим регионам, подчеркивается комплексный и долгосрочный потенциал данного исследования в контексте энергетической сферы.

Ключевые слова: энергия ветра, прогнозирование, временные ряды, Lasso, LightGBM, CatBoost.

Introduction

Renewable energy, especially wind power, has become a significant source of energy in the modern world. Countries around the world are actively investing in the development of wind power, as it offers a clean and sustainable source of energy, contributing to the reduction of greenhouse gas emissions. In this study, we focus on wind power in Germany, one of the leading countries in this field. Our goal is to develop a model for predicting electricity generation from wind farms in Germany. To achieve this goal, we will use a dataset containing information on power generation capacity and associated time stamps.

We will analyze the data to understand temporal trend patterns and identify possible outliers or anomalies in power generation. In addition, we will develop new features based on lags and autocorrelation that can help improve the quality of forecasting. We will consider several machine learning models as prediction methods, including Lasso[1], LightGBM[2], and CatBoost[3]. We will evaluate the performance of each model using different metrics and select the most effective model for our forecasting purposes. The results of this study can be useful to energy companies and regulators in helping them make informed decisions about planning and optimizing wind energy generation. More accurate forecasts will enable better management of energy production and ensure the stability of the energy system. In the following sections, we present details of the data analysis, a description of the methods and models used, forecasting results, and a discussion of the results.

Literature review

In this part of the study, a review of scientific papers devoted to time series forecasting was conducted. Scientific articles and publications devoted to methods and models of time series forecasting were studied. One of the significant studies in this field is the work of Tibshirani [1]. In his work, the author presents the Lasso (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) method, which allows reducing the dimensionality of the feature space and selecting the most important features for prediction. The author describes the properties and advantages of the Lasso method as well as its applicability in the context of time series forecasting. Another important study in this area was performed by Ke et al. [2]. In their work, they considered the application of the LightGBM model, which is a highly efficient gradient-based solver tree boosting. The authors describe the working principle of the LightGBM model, its advantages and potential in time series forecasting. Also an important study is the work of Prokhorenkova et al. [3]. In their work the authors present the CatBoost model, which has a unique ability to process categorical features without preprocessing. The authors investigate the properties of the CatBoost model and demonstrate its application to various tasks, including time series

forecasting. These studies represent important contributions to the field of time series forecasting and will be used in this study to develop predictive models and evaluate their performance.

Tibshirani [1] identified the problems associated with the application of the Lasso method for time series prediction, including the choice of the optimal value of the regularization parameter and the stability of the model to the presence of strongly correlated predictors. The paper by Ke, G. et al. [2] notes the need for proper selection of the LightGBM model hyperparameters to achieve optimal performance, which may require significant computational resources. Prokhorenkova et al. [3] point out that using CatBoost to predict time series with categorical features requires careful adjustment of the learning rate and number of iterations, and may also require large amounts of memory and computing resources.

Data

In this study, we used an extensive dataset of wind energy generation that includes more than 380,000 records. This amount of data provides sufficient statistical significance and allows for a more accurate analysis and prediction of the energy generation process. The data is demonstrated in **Figure 1** set consists of two columns. The first column contains timestamps that indicate the date and time of each record. The second column contains wind power generation capacity values in megawatts (MW).

	dt	MW
0	2011-01-01 00:00:00	3416.0
1	2011-01-01 00:15:00	4755.0
2	2011-01-01 00:30:00	4939.0
3	2011-01-01 00:45:00	4939.0
4	2011-01-01 01:00:00	4998.0

Figure 1 – The wind power producing data

Both columns are important variables for studying and analyzing the energy generation process. The data collection frequency is 15 minutes, which means that measurements were taken every 15 minutes. This allows us to account for changes in energy generation over short time intervals and identify temporal patterns. This extensive data set provides us with an opportunity to perform a deeper and more comprehensive analysis of the wind energy generation process and develop effective predictive models. This will help to optimize the energy production process, improve its stability and ensure more efficient use of wind resources.

Main provisions. Methods and materials

In this section, a exploratory data analysis[14] of the wind energy data was performed using various methods and visualizations. Having large data, we divided them into columns for analysis to make it easier to highlight parameters. We divided the data by hours, then days, days of the week by another year, which allowed us to graph and analyze. This analysis allowed us to gain valuable insights and discover patterns related to wind energy generation.

In analyzing the annual generation capacity data, it was found that there was a significant increase in energy generation by the hour in 2017 and 2019, which is given in Figure 2[13]. This may indicate special events or factors that influenced the increase in energy production during these periods.

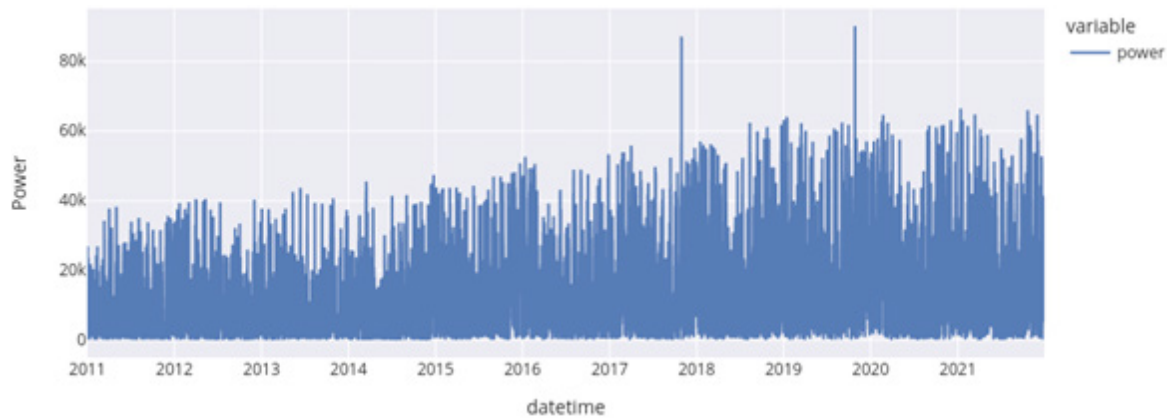


Figure 2 – Discretization of power generation up to 1 hour

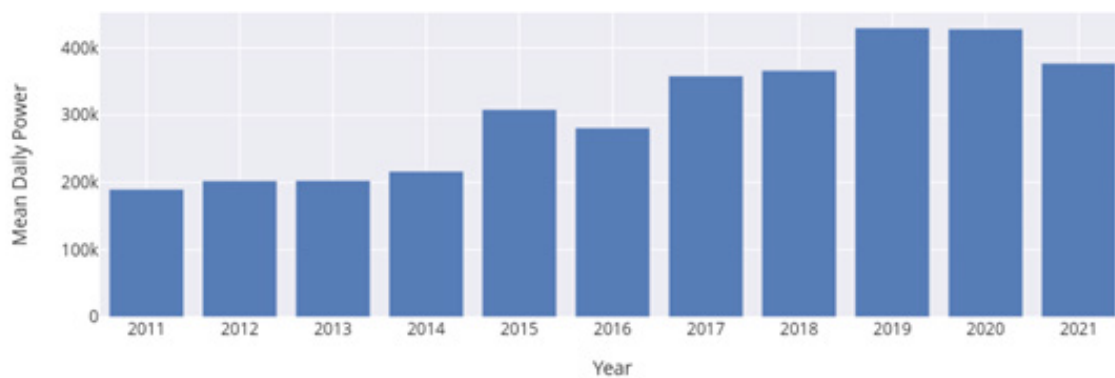


Figure 3 – Power generation trend across years

We also analyzed annual generation capacity data and found that 2019 and 2020 had the highest capacity. This may indicate increased wind farm activity and other factors contributing to increased power generation during these periods see Figure 3.

In Figure 4 we can observe that the total energy generation on Tuesday, Thursday, Friday, and Saturday was higher in 2021, while the total generation on Monday and Sunday was higher in 2019, which can be seen in. This may indicate differences in energy demand on different days of the week and the corresponding impact on wind generation.

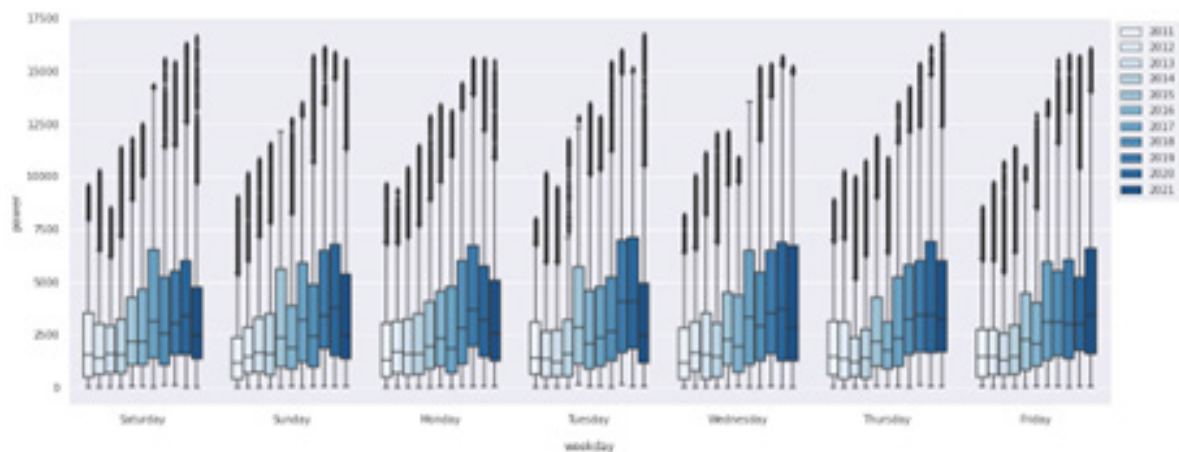


Figure 4 – Trends of week across years.

An analysis of the percentage growth of energy generation plotted that 2015 and 2017 saw the largest increase in generation from the previous year by 35%. This may indicate a significant change in the development of wind energy and its contribution to total energy generation can be seen in Figure 5[12].

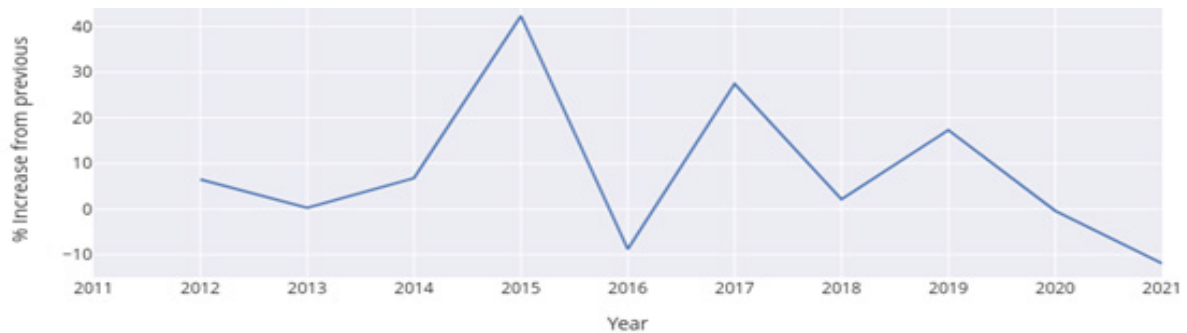


Figure 5 – Annual growth in electricity production

In addition, emissions in the data were evaluated and it was found that power values above 10,000 MW were emissions. These emissions could be the result of anomalous situations or errors in the data, one might consider.

We conducted a process of feature engineering[6][7] to improve the data set. Feature engineering is the creation of new features from existing data, in order to expand the information and capture important patterns and dependencies. Using datetime information we extracted several parameters described in Figure 6 such as the order of the month, time of day divided into categories, which describes that it is night, afternoon, sunset, morning, dawn.

	datetime	power	tb	weekday	month	year	hour	IQR_OUTLIER_FLAG	monthOrder	isNight	isDawn	isMorning	isAfternoon
0	2011-01-01 00:00:00	3416.0	1	Saturday	January	2011	00	False	1	0	1	0	0
1	2011-01-01 00:15:00	4755.0	2	Saturday	January	2011	00	False	1	0	1	0	0
2	2011-01-01 00:30:00	4939.0	3	Saturday	January	2011	00	False	1	0	1	0	0
3	2011-01-01 00:45:00	4939.0	4	Saturday	January	2011	00	False	1	0	1	0	0
4	2011-01-01 01:00:00	4998.0	5	Saturday	January	2011	01	False	1	0	1	0	0

Figure 6 – New features extraction

One of the main aspects of feature engineering in this paper is the creation of lagged features[8]. Lagged features allow us to account for consistent dependence and cyclicity in the time series. In this case, lagged features were created with lags of 1, 12, 24, 48, and 72 time blocks in the "power" variable. This allows the model to account for the influence of previous periods on the current power value. Additionally, rolling features, such as the rolling average, were selected. Rolling features are a power average over a certain time window. In this case, rolling averages with a window of 4 and 24 time blocks were chosen. These signs help to average temporal fluctuations and reveal general trends in the data. After feature engineering, a correlation analysis was performed, which allowed us to identify the most strongly associated features with the "power" variable. In particular, the attributes "lagged_power_1", "lagged_power_12", "rolling_4_power_mean" and "rolling_24_power_mean" connect high correlation with power. This indicates a significant influence of previous periods and averaged values on current wind power generation, observed in Figure 7.

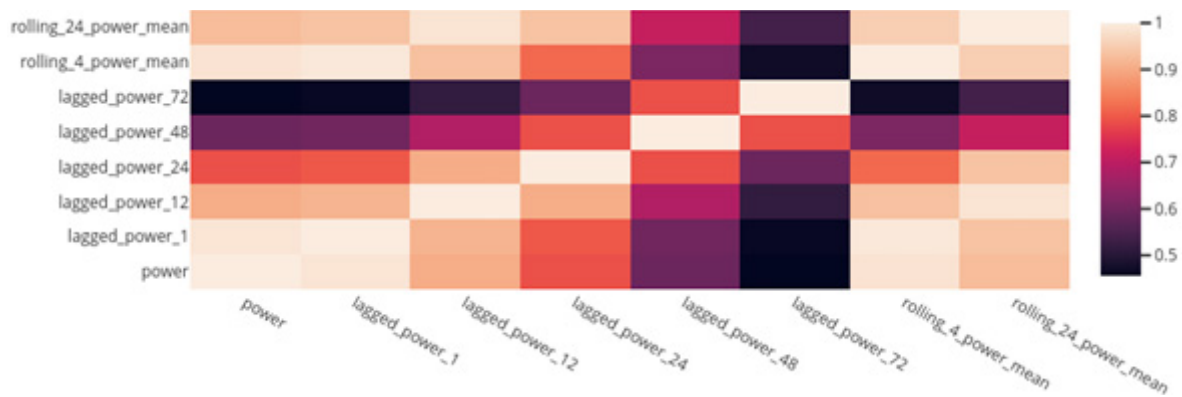


Figure 7 – Correlation(Heat) map

Thus, the process of feature engineering has expanded and enriched the original data set to include additional features that capture temporal dependencies and cyclicity in the time series. This allows the model to more accurately predict wind energy generation given the important characteristics and patterns highlighted in the data. For example, lagged features help account for the influence of previous periods on current wind generation. This is especially useful for analyzing time dependencies and cyclicity in the data. Creating lagged features with different lags, such as 1, 12, 24, 48 and 72 time blocks, allows the model to account for the influence of previous periods on the current generation capacity. In addition, additional rolling features, such as a rolling average, have been selected. Rolling features are averages of power values over a certain time window. In this case, we chose a rolling average with a window of 4 and 24 time blocks. These signs allow you to capture general trends and smooth out temporal fluctuations in the data. A correlation analysis was performed to assess the relationship between the signs and the "power" variable. The results observes that the traits "lagged_power_1", "lagged_power_12", "rolling_4_power_mean" and "rolling_24_power_mean" are highly correlated with power. This suggests that previous power values and averages play an important role in predicting current wind power generation. We have included the significant data in Table Figure 8.

lagged_power_1	lagged_power_12	lagged_power_24	lagged_power_48	lagged_power_72	rolling_4_power_mean	rolling_24_power_mean
5438.0	3416.0	3416.0	3416.0	3416.0	5240.25	4876.250000
5509.0	3416.0	3416.0	3416.0	3416.0	5368.00	4946.555556
5638.0	3416.0	3416.0	3416.0	3416.0	5481.50	5015.700000
5582.0	3416.0	3416.0	3416.0	3416.0	5541.75	5067.181818
5792.0	3416.0	3416.0	3416.0	3416.0	5630.25	5127.583333

Figure 8 – Added Lagged features

Finally, the process of feature engineering has enriched the original data set with new features that account for temporal dependencies and cyclicity in the time series. his allows the model to better understand and predict wind energy generation by accounting for important characteristics and patterns identified in the data.

```
def regression_metrics(y_test,y_pred):
    print("MAE:\t",round(mean_absolute_error(y_test,y_pred),4))
    print("MSE:\t",round(mean_squared_error(y_test,y_pred),4))
    print("RMSE:\t",round(np.sqrt(mean_squared_error(y_test,y_pred)),4))
```

Figure 9 – Metrics of evaluation models

Various metrics are used to evaluate the performance of predictive models, including mean absolute error (MAE)[10], root mean square error (MSE), and root mean square error (RMSE)[11] observe in Figure 9. MAE measures the average absolute deviation between predicted and actual values and provides an estimate of the mean of the prediction error. MSE measures the root mean square deviation and pays more attention to large deviations. RMSE is the root of MSE and allows you to compare model performance on the raw data scale. The smaller the MAE, MSE, and RMSE values, the better the performance of the models in predicting power generation.

The Least Absolute Shrinkage and Selection Operator is a regression method used in statistics and machine learning to predict data. The main feature of Lasso is the use of L1-regularization, which helps to reduce the number of features in the model by zeroing out the weights of some features. This feature makes Lasso very useful when there are a large number of features and there is a need for feature selection. Lasso regression is formulated as follows:

For the data (X, y) where X - input data matrix of size (n, p) (n - the number of examples, p - number of features), and y - is a vector of output data of dimension $(n, 1)$, the Lasso regression problem is to minimize the following loss function:

$$Loss = minimize \left\| \frac{1}{2n} y - X\beta \right\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_1$$

Where:

- $\|\cdot\|_2$ denotes the Euclidean norm (L2-norm),
- $\|\cdot\|_1$ denotes the L1-norm,
- β - vector of regression coefficients of dimension $(p, 1)$,
- λ - is a non-negative regularization parameter.

The second term in this function is the L1-regulator, which is controlled by the parameter λ . It penalizes large values of the coefficients β , which leads to their reduction or even zeroing. This ensures the selection of features in the Lasso-regression. Because of this property, Lasso-regression is often used when working with data with a large number of features, when it is necessary to simplify the model and make it interpretable.

Light Gradient Boosting Machine (LightGBM)[2] is a machine learning algorithm based on the method of gradient boosting. This algorithm was developed and introduced by Microsoft Research in 2017. The model differs from most other boosting algorithms in that it uses a "leaf-wise" learning strategy instead of the usual "level-wise" learning strategy, which allows it to achieve higher efficiency while maintaining model accuracy. The gradient-busting algorithm on which LightGBM is based can usually be described as follows:

Given:

- Learning sample $\{(x)_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$,
- Loss function $L(y, F)$,
- number of iterations M .

For $m = 1$ to M :

1. Calculate pseudo-residuals:

$$r_{im} = - \left[\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)} \right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}$$

$$r_{im} = - \left[\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)} \right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}$$

In the context of LightGBM, each $h_m(x)$ - is a decision tree, and these trees are built using a "leaf-wise" strategy. Instead of developing the tree level by level (level-wise), LightGBM chooses the leaf with the maximum loss to split and continues to split it, allowing more tree depth and providing more accuracy, while controlling overlearning. However, the "leaf-wise" strategy can lead to overtraining with a large number of

leaves, so it is important to apply regularization by adding a summand to the loss function that increases with the number of leaves. In LightGBM this is achieved using the following condition for splitting:

$$Gain = \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_i G_i^2}{\{\sum_i H_i + \lambda\}} - \frac{\{\sum_i G_i + G_{new}\}^2}{\{\sum_i H_i + H_{new} + \lambda\}} - \frac{\{G_{new}^2\}}{\{H_{new} + \lambda\}} \right] - \gamma$$

Where:

- G_i и H_i - gradients and hessians of the loss function,
- G_{new} и H_{new} - gradients and hessians added by the new sheet,
- λ is a regularization parameter controlling the magnitude of the penalty for increasing the number of leaves,
- γ - additional regularization parameter, which adds a fixed penalty for each new splitting.

Thus, LightGBM strikes a balance between the speed of learning and the accuracy of predictions, allowing efficient models to be built even on large data sets.

CatBoost is a machine learning algorithm designed to handle categorical features efficiently. It uses gradient-based boosting and is based on decision tree learning. CatBoost[3] applies an ordered-target learning technique, which significantly improves the learning process compared to standard categorical feature learning approaches. Let us give you the formulas used in this algorithm. The basic equation for the gradient boosting model:

$$F_M(x) = \sum_{m=1}^M \rho_m h_m(x)$$

- $F_M(x)$ - is the prediction of the model after M iterations,
- $h_m(x)$ - the base algorithm (in our case a decision tree),
- ρ_m - the coefficient determining the contribution of each decision tree.

However, CatBoost uses a slightly modified version of the gradient-busting algorithm, which uses learning with ordered targets. When the tree is trained on a dataset, it treats objects in random order. When an object is predicted, it uses the average of its previous values to encode categorical variables. This is done to avoid leakage of target values, which is often the case when processing categorical features. As with most other boosting algorithms,

CatBoost uses a loss function that is minimized at each iteration. The loss function is chosen depending on the problem. For example, Logloss is often used for classification and RMSE for regression. CatBoost uses common regularization approaches, similar to those used in other gradient-busting algorithms, to avoid overtraining the model.

Results and discussion

In the research paper, we calculated the results of the forecast models for the target variable - electricity power with a forecast for 8 time blocks ahead. The Lasso, LightGBM, and CatBoost models resulted in predictions for each of the Figure 10, Figure 11, and Figure 12 models.

```
param_grid = {'learning_rate':[0.1], 'num_iterations': [10000], 'n_estimators': [25], 'num_leaves': [40], 'verbose': [-1], 'colsample_bytree':[0.4], 'subsample': [0.4], 'max_depth': [9]}
lgb_model = lgr()

model_lgb = model_validate(lgb_model, param_grid, x_train, y_train, x_test, y_test, 'LGBM', fit_parameters={'eval_set':[(x_val, y_val)], 'eval_metric':'rmse'})

[9998] valid_0's rmse: 1356.27 valid_0's l2: 1.83946e+06
[9999] valid_0's rmse: 1356.3 valid_0's l2: 1.83955e+06
[10000] valid_0's rmse: 1356.33 valid_0's l2: 1.83964e+06
Mean Squared Error = 131349.50940637384
Training metrics:
MAE: 224.4069
MSE: 131349.5094
RMSE: 362.4217
```

Figure 10 – Indicators of the Lasso model metrics

```
lasso = Lasso(alpha =0.0005, random_state=20)
param_grid = [{'alpha':[0.0005,0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.03, 0.1, 0.5, 1]}]

lasso_model = model_validate(lasso, param_grid, x_train, y_train, x_test, y_test, 'Lasso',k_folds=5)
```

Mean Squared Error = 982546.0166047069

Training metrics:

MAE: 572.5387

MSE: 982546.0166

RMSE: 991.2346

Figure 11 – Indicators of the LightGBM model metrics

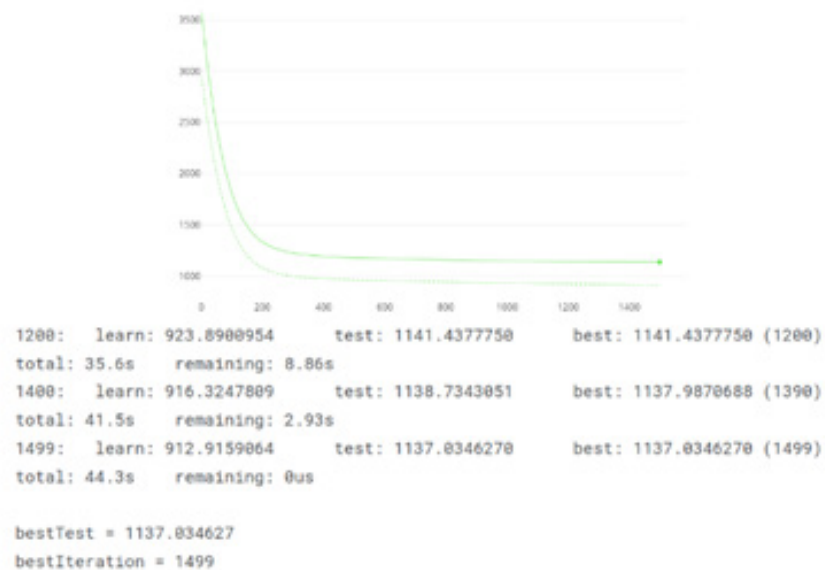


Figure 12 – Catboost model metrics

Comparing the models, we can note that all three models observe different prediction accuracy. LightGBM demonstrates the best accuracy with the lowest MAE, MSE and RMSE, which indicates a lower prediction error compared to the other models. Lasso also presents itself as a quite reliable model with acceptable MAE and RMSE values. CatBoost, even though it has the highest RMSE value, still performed good performance and can be a useful forecasting tool. Figure 13 compares the results of the test and model values. In addition, consider Figure 14 demonstrated a time interval of 2 hours.

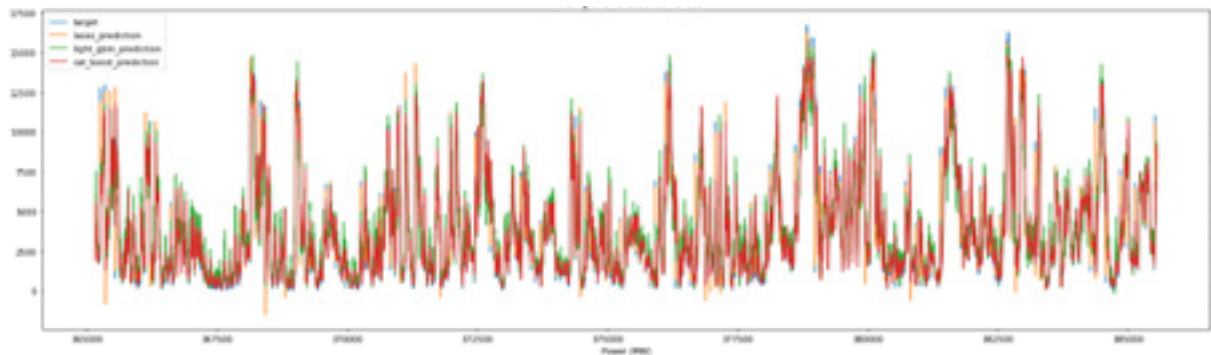


Figure 13 – Comparison plot of target values and models predicted values

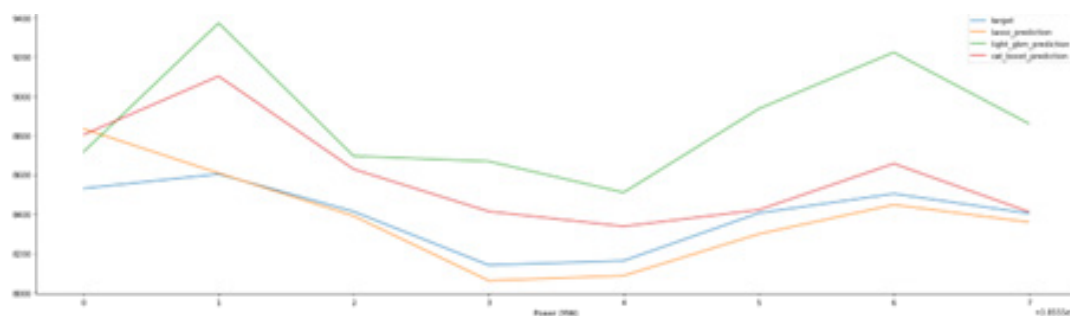


Figure 14 – Two hours interval prediction comparison

Discrepancies and variations between models may be due to different approaches and peculiarities of each algorithm. For example, the CatBoost model has the ability to process categorical features without preprocessing, which can be useful when working with electricity data. At the same time, the LightGBM model has high speed and works effectively with sparse data.

Conclusion

In this study, modeling was performed to predict electricity generation based on weather and timing data. Three machine learning models were used: Lasso, LightGBM, and CatBoost. Each model demonstrated its own characteristics and advantages in forecasting. As a result of the simulations performed, the predicted values for the target variable (power) with a prediction for 8 time blocks ahead were obtained. Analysis of the results illustrated that all three models demonstrated good performance in forecasting power generation. The Lasso model calculated a mean square error (MSE) of 982546 and a mean absolute error (MAE) of 572. The LightGBM model performed an MSE of 131349 and an MAE of 224. The CatBoost model demonstrated an MSE of 1137. When comparing these models, it can be noted that they all achieved good results in prediction, although with some discrepancies. Thus, the results of this study confirm the potential of machine learning models in predicting electricity generation. Further research and improvement of the models can lead to even more accurate predictions, which in turn can be useful for optimizing the planning and management of electricity generation.

References

- 1 Tibshirani R. (1996) Regression Shrinkage and Selection via the Lasso, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 58 (1), pp. 267–288.
- 2 Ke G., Meng Q., Finley T., Wang T., Chen W., Ma W., Ye Q. & Liu T. (2017) LightGBM: A Highly Efficient Gradient Boosting Decision Tree, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30, pp. 3146–3154.
- 3 Prokhorenkova L., Gusev G., Vorobev A., Dorogush A. & Gulin A. (2018) CatBoost: unbiased boosting with categorical features, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31, pp. 6638–6648.
- 4 Pereira F., Portela F. & Neves J. (2021) Fraud detection in digital payments: A CatBoost approach, *Journal of Computational Science*, 53, 101344.
- 5 Ye M., Li X., Shao M., Li Y. & Liu X. (2021) An ensemble machine learning framework for custom.
- 6 García S., Luengo J., Herrera F. (2015) *Data Preprocessing in Data Mining*. Springer.
- 7 Wang L., Li L. & Khedr A.M. (2019) Feature Engineering and Selection for Time Series Forecasting: A Review, *ACM Computing Surveys*, 52(5), pp.1–37.
- 8 Godahewa R. & Samaraweera L. (2019) Time Series Feature Engineering: A Systematic Review, In *International Conference on Advances in Computing and Data Sciences*, pp. 571–581.
- 9 Hyndman R.J. & Athanasopoulos G. (2018) *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
- 10 Chai T. & Draxler R.R. (2014) Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? – Arguments against avoiding RMSE in the literature, *Geoscientific Model Development*, 7(3), pp.1247–1250.
- 11 Aldrin M. & Holden M. (2019) On the use of RMSE and MAE in model evaluation, *Ocean Dynamics*, 69(7), pp. 925–933.
- 12 VanderPlas J.T. (2016) *Python Data Science Handbook: Essential Tools for Working with Data*, O'Reilly Media.
- 13 Van den Bossche J. (2017) Interactive Data Visualization in Python With Plotly, *Journal of Open Source Education*, 20(2), 43.
- 14 Suresh H.P. & Mohan C.K. (2018) A Comprehensive Review of Predictive Data Mining Techniques for Credit Scoring in Banking Sector, *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 30(3), pp. 360–374.

Information on the authors**Knaytov Yernar Nurlanuly** (corresponding author)

Master student, Kazakh-British Technical University, 59, Tole bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan

ORCID ID <https://orcid.org/0009-0005-0003-669X>

E-mail: y_knayatov@kbtu.kz

Akzhalova Assel Zholdasovna

Dr. Kazakh-British Technical University, Head of International project groups, Coordinator of SDG center, Professor of IT Faculty, PhD in Math.Modelling (RK), PhD in Computer Science (King's College London, UK), Kazakh-British Technical University, 59, Tole bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan

ORCID ID 0000-0002-1141-7595

E-mail: a.akzhalova@kbtu.kz

Sadok Ben Yahia

Professor, Tallinn Univeristy of Technology, Tallinn, Estonia

ORCID ID: 0000-0001-8939-8948

E-mail: sadok.ben@taltech.e

Авторлар туралы мәліметтер**Қнаятов Ернар Нұрланұлы** (корреспонденция авторы)

Қазақстан-Британ техникалық университеті, Магистратура студенті, Төле би көш., 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID <https://orcid.org/0009-0005-0003-669X>

E-mail: y_knayatov@kbtu.kz

Акжалова Асель Жолдасовна

Қазақстан-Британ техникалық университетінің докторы, Халықаралық жобалық топтардың жетекшісі, SDG орталығының үйлестірушісі, Ақпараттық технологиялар факультетінің профессоры, математикалық модельдеу бойынша PhD (ҚР), компьютерлік ғылымдар бойынша PhD (Лондон Корольдік колледжі, Ұлыбритания), Қазақстан-Британ техникалық университеті, Төле би көш., 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID 0000-0002-1141-7595

E-mail: a.akzhalova@kbtu.kz

Садок Бен Яхиа

Профессор, Таллин технологиялық университеті, Таллин қ., Эстония

ORCID ID: 0000-0001-8939-8948

E-mail: sadok.ben@taltech.ee

Информация об авторах**Қнаятов Ернар Нұрланұлы** (автор для корреспонденции)

Магистрант, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Төле би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID <https://orcid.org/0009-0005-0003-669X>

E-mail: y_knayatov@kbtu.kz

Акжалова Асель Жолдасовна

Доктор Казахстанско-Британского технического университета, руководитель международных проектных групп, координатор центра SDG, профессор факультета информационных технологий, PhD по математическому моделированию (ПК), PhD по компьютерным наукам (Королевский колледж Лондона, Великобритания), Казахстанско-Британский технический университет, ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0000-0002-1141-7595

E-mail: a.akzhalova@kbtu.kz

Садок Бен Яхиа

Профессор, Таллинский университет технологий, г. Таллин, Эстония

ORCID ID: 0000-0001-8939-8948

E-mail: sadok.ben@taltech.ee

ӘОЖ 004.8

ГТАХР 28.23.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-115-124>

Құланбай Ш.Б.*, Бекетова Г.С., Тулегенова Э.Н.
 Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, 120000,
 Қызылорда қ., Қазақстан
 *E-mail: shkulanbay@mail.ru

БИОМЕТРИЯЛЫҚ ӘДІСТЕРДІ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ӨНДЕУ

Андатпа. Сәйкестендіру жүйелері қазіргі қоғамда өте маңызды рөл атқарады. Күрделі қауіпсіздік талаптары сарапшыларды пайдаланушының жеке басын анықтау үшін биометрияны пайдалану жолдарын зерттеуге итермеледі. Бұл мақалада биометрия түсінігі, биометриялық деректер және оның түрлері қарастырылады. Мақаланың мақсаты – сәйкестендіру процесін зерттеу, оның жетілдірілген нұсқасын шығару және инновацияларды енгізу. Осылайша, зерттеу әдісі ретінде келесі нүктелер қызмет етті:

- Инициализация.
- Фитнес функциялары.
- Анық емес кластерлеу тәсілі.

Нәтижелер биометриялық жүйелер мен биометриялық датчиктердің ілгерілеуі жеке куәлікті жақсартуға ықпал ететінін және басқалардың жеке басын теріс пайдалануына жол бермейтінін көрсетті, өйткені биометриялық технологиялар жүйенің қауіпсіздігі мен дәлдігін жақсарту үшін үлкен әлеуетке ие. Биометриялық жүйелер пайдаланушылардың қауіпсіздігін арттырады, сонымен қатар жеке тұлғаны анықтауда әлдеқайда дәлдікті қамтамасыз етеді. Осылайша, ұсынылған тәсілдің дәлдігі төрт заманауи тәсілмен салыстырылады. Салыстыру көрсеткендей, ұсынылған тәсіл шамамен 99,89% жоғары дәлдікті және 0,18%-ға тең төмен қателік деңгейін қамтамасыз етеді. Көптеген субъектілерде саусақ іздері мен көз ирисін анықтау биометриясы үшін алынған тиісті бағалау бұл интеграцияның нақты әлеуеті бар екенін көрсетеді.

Тірек сөздер: биометрия, биометриялық деректер, көздің ирисі, саусақ ізі, генетикалық алгоритм, өңдеу, зерттеу.

Kulanbay Sh.B.*, Beketova G.S., Tulegenova E.N.
¹Kyzylorda University named after Korkyt ata, 120000,
 Kyzylorda, Kazakhstan
 *E-mail: shkulanbay@mail.ru

RESEARCH AND DEVELOPMENT OF BIOMETRIC METHODS

Abstract. Identification systems play a very important role in today's society. Complex security requirements have prompted experts to explore ways in which biometrics can be used to identify customers. In this article, the concept of biometrics, biometric data and its variants are considered. The purpose of the article is to study the process of identification, to produce its improved version and introduce innovation. Thus, the following points served as a research method:

- Initialization.
- Fitness functions.
- Unclear clusterleu method.

The results showed that the advancement of biometric systems and biometric sensors can improve the identity and prevent others from using the identity, the system has great potential to improve the security and accuracy of the biometric technology system. Biometric systems increase the security of users, as well as ensure accuracy in the identification of personal identity. Thus, the accuracy of the proposed method is compared with four modern methods. The comparison shows that the proposed approach provided a high accuracy of about 99.89% and a low error rate of 0.18%. It turns out that there is real potential for the integration of fingerprints and iris biometrics in many subjects with the appropriate assessment.

Key words: biometrics, biometric data, iris, fingerprint, genetic algorithm, Tensing, research.

Куланбай Ш.Б.*, Бекетова Г.С., Тулегенова Э.Н.

Кызылординский университет имени Коркыт ата,
120000, г. Кызылорда, Казахстан

*E-mail: shkulanbay@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА БИОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Аннотация. Системы идентификации играют очень важную роль в современном обществе. Сложные требования безопасности побудили экспертов изучить способы использования биометрии для идентификации клиентов.

В данной статье рассмотрено понятие биометрии, биометрических данных и его вариантов. Цель статьи – изучить процесс идентификации, разработать его усовершенствованный вариант и внедрить новшество. Таким образом, в качестве метода исследования послужили следующие пункты:

- Инициализация.
- Фитнес-функции.
- Непонятный кластерный метод.

Результаты показали, что развитие биометрических систем и биометрических датчиков может улучшить идентичность и предотвратить использование идентичности другими, система имеет большой потенциал для повышения безопасности и точности системы биометрических технологий. Биометрические системы повышают безопасность пользователей, а также обеспечивают точность идентификации личности.

Таким образом, точность предлагаемого метода сравнивается с четырьмя современными методами. Сравнение показывает, что предложенный подход обеспечивает высокую точность около 99,89% и низкую частоту ошибок – 0,18%. Оказывается, существует реальный потенциал интеграции биометрии отпечатков пальцев и радужной оболочки глаза у многих субъектов при соответствующей оценке.

Ключевые слова: биометрия, биометрические данные, радужка, отпечатки пальцев, генетический алгоритм, натяжение, исследования.

Кіріспе. Еліміздің қауіпсіздігінің болашағы мультимодальды биометрияға негізделген. Биометриялық жүйе – бұл адамды мінез-құлық немесе физиологиялық сипаттамалары бойынша танытын автоматтандырылған жүйе және ол бақылау, сәйкестендіру, қол жеткізуді басқару және қорғау сияқты әртүрлі қолданбаларда айтарлықтай прогреске қол жеткізді. Бұл жүйені тексеру мақсатында бет сипаттамалары, торлы қабықтың сипаттамалары, тамыр үлгілері, сөйлеу үлгілері, пернелерді басу динамикасы, тырнақ төсегі, құлақ дизайны, саусақ іздері және басқа да биологиялық белгілер зерттелді. Осы әртүрлі белгілердің ішінде саусақ іздері кеңінен қолданылатын биометриялық қасиет болып көрінеді. Сонымен қатар, көздің ирисі ең дәл биометриялық болып табылады, өйткені ол ерекше және уақыт бойынша тұрақты болып қарастырылады [1].

Жалпы, бір модульді аутентификация технологиялары дәлірек болғанымен, олар жалғандыққа төзімділік және жақсы құпиялылық сияқты бірнеше мәселелерді шешеді. Шектеулі үлгі өлшемі және шуды бақылау құрылғылары сияқты жеке және биологиялық мәселелер бір модальды биометриялық жүйелердің дәлдік деңгейіне айтарлықтай әсер етеді. Аутентификацияны жеңілдету мақсатында, керекті деректерді тексеру үшін мультимодальды биометрия қолданылады. Бұл мәселелерді шешу үшін мультимодальды биометриялық жүйелер біртіндеп енгізілуде [2]. Әр түрлі модальділіктерден алынған қосымша белгілер мультимодальды биометриялық жүйелерде қолданылады. Мультимодальды биометриялық сәйкестендіру жүйелері бір модульді биометриялық қауіпсіздік жүйелерінен контрафактілікке төзімділік пен жақсартылған мүмкіндіктер тұрғысынан асып түседі [3].

Мақаланың мақсаты – биометриялық әдістерді зерттеп, оның жақсартылған нұсқасын шығару және жаңашылдықтарды енгізу процесі.

Негізгі бөлім. Биометрия – адамның физиологиялық немесе мінез-құлық сипаттамаларына негізделген сәйкестендіруді білдіреді. Физиологиялық сипаттамаларға қолдың немесе саусақтың суреттері, беттің сипаттамаларын тану жатады. Мінез-құлық сипаттамаларына сіңірілетін немесе алынатын қасиеттер жатады. Ал динамикалық қолтаңбаны тексеру, дауысты есту арқылы тексеру және пернелерді басу динамикасы арқылы жүргізіледі. Жалпы, барлық қажеттіліктерге сәйкес келетін мінсіз биометриялық әдісі қазіргі таңда жоқ [4]. Барлық биометриялық жүйелердің артықшылықтары мен кемшіліктері бар. Дегенмен, биометриялық жүйені пайдалану үшін қажет кейбір жалпы сипаттамалар

бар. Біріншіден, биометрия ерекшеленетін белгіге негізделуі керек. «Екі саусақ ізі бірдей емес» деген идеяны қолдайтын көптеген ғылыми дәлелдер бар. «Қол геометриясы» сияқты технологиялар көптеген жылдар бойы қолданылып келеді және бетті немесе көздің ирисі арқылы тану технологиялары кеңінен қолданыла бастады. Кейбір жаңа биометриялық әдістер дәл болуы мүмкін, бірақ олардың бірегейлігін анықтау үшін қосымша зерттеулер қажет [5].

Осы тұрғыда, тағы бір қарастыратын маңызды аспект – ол жүйенің пайдаланушыға қаншалықты ыңғайлы екендігін қарастыру. Негізі биометриялық процесс жылдам және оңай болуы керек, мысалы, бейнекамерамен суретке түсіру, микрофонмен сөйлесу немесе саусақ ізі сканерін түрту [6].

Көбінесе жүйелік әкімшілендіру мен тіркеу операторын қамтамасыз етуге байланысты өмірлік циклді қолдау шығындары биометриялық жабдықтың бастапқы құнынан асып кетуі мүмкін. Биометриялық аутентификацияның артықшылығы – пайдаланушыларға қосымша талаптар туралы алаңдамау үшін аутентификацияның көбірек даналарын осындай жылдам және қарапайым түрде талап ету мүмкіндігі [7]. Биометриялық технологиялар дамып, оларды коммерциялық мақсатта кеңінен қолдана отырып, бірнеше аутентификация деңгейлерімен немесе бірнеше аутентификация даналарымен жұмыс істеу пайдаланушылар үшін ауыртпалықсыз болады [8].

Биометрия – қылмыскерлерді анықтау және түрмелерді қорғау сияқты сот-медициналық қосымшаларда кеңінен қолданылады. Биометриялық технология қарқынды дамып келеді және электрондық банкінг, электрондық коммерция және қол жеткізуді басқару сияқты азаматтық қолданбаларда кеңінен қолдану үшін өте үлкен әлеуетке ие.

Электрондық транзакциялардың саны мен қолданылуының тез өсуіне байланысты электрондық банкінг және электрондық коммерция биометрияның маңызды жаңа қосымшаларының біріне айналууда. Бұл қосымшаларға несиелік карталар мен смарт-карталарды қорғау, банкомат қауіпсіздігі, чектер мен ақша аударымдары, онлайн транзакциялар және интернетке кіру кіреді. Биометриялық технологияның дамуымен бұл қосымшалар аутентификация үшін биометрияны көбірек қолданады [9].

Биометриялық аутентификация тіркелген немесе тіркелген биометриялық үлгіні (биометриялық үлгі немесе идентификатор) жаңадан алынған биометриялық үлгімен (мысалы, кіру кезінде алынған саусақ ізі) салыстыруды талап етеді [10]. Тіркеу кезінде биометриялық белгінің үлгісі жазылады, компьютермен өңделеді және кейінірек салыстыру үшін сақталады. Биометриялық тану сәйкестендіру режимінде биометриялық жүйе тек биометриялық мәліметтер негізінде мәліметтер базасында сәйкестікті іздеу арқылы бүкіл тіркелген популяциядан адамды анықтаған кезде қолданыла алады. Жүйені верификация режимінде де қолдануға болады, мұнда биометриялық жүйе, адамның бұрын тіркелген шаблон бойынша мәлімделген жеке басының түпнұсқалығын тексереді [11].

Зерттеу материалдары мен әдістер

Биометриялық әдістерді оңтайландыру келесі әдістермен қарастырылады:

- Инициализация.
- Фитнес функциясы.
- Анық емес кластерлеу тәсілі.

Нәтижелер мен талқылау

Ұсынылған зерттеудің негізгі нәтижелері келесідей болуы мүмкін:

- Жақсартылған мультимодальды биометриялық синтез үшін оңтайландырылған бұлыңғыр генетикалық алгоритмді әзірлеу және ақылды қалалар үшін тиімді мультимодальды биометриялық тану жүйесін әзірлеу;
- Басқа жұмсақ есептеу тәсілдерімен салыстырғанда рейтингті оңтайландыруға қол жеткізу үшін;
- Ұсынылған әдістеменің тиімділігін дәлелдеу үшін ұсынылған тәсіл қолданыстағы заманауи тәсілдермен салыстырылады.

Зерттеушілер кейбір машиналық оқыту алгоритмдерін қолдана отырып, ақпаратты мультимодальды қабылдауға назар аударды. Эксперимент нәтижелері ұсынылған тану әдістері мен тәсілдерінің тиімді және мүмкін екенін көрсетті [12].

Мультимодальды биометриялық құрылғыны жасау кезінде қабылданған біріктіру әдістемесі оның тиімділігіне айтарлықтай әсер етеді. Функция деңгейіндегі біріктіру әртүрлі біріктіру әдістерінің ішіндегі ең тұрақтысы болып табылады. Көптеген биометриялық сипаттамалардан алынған және

мультимодальды құрылғыларды жобалау үшін қолданылатын функциялар жиынтығы сәйкес келмеуі мүмкін [13].

Сәйкес келетін ұпайлар заңды жағдайларды алаяқтықтан ажырату үшін жеткілікті мәліметтерді береді және олар оңай қол жетімді. Сондықтан балл деңгейіндегі біріктіру мультимодальды биометриялық жүйелерде кеңінен қолданылады. Әр құрылғының сипаттамаларын алу және сәйкестендірудің негізгі алгоритмдерін білмей - ақ, бірнеше биометриялық жүйелердің көмегімен алдын-ала анықталған пайдаланушылар саны үшін тиісті бағаларды алуға болады [14].

Ұсынылған әдістеме оңтайландырылған бұлыңғыр генетикалық алгоритмге негізделген балл деңгейіндегі біріктіру әдісін қолданады. Бастапқыда пайдаланушының саусағы мен ирисінің биометриялық деректері алынады және алдын ала өңделеді. Алдын ала өңдеу кезеңінде алынған белгі дерекқорда сақталған биометриялық деректермен салыстырылады. Ұпайларды біріктіру оңтайландырылған бұлыңғыр генетикалық алгоритм арқылы жүзеге асырылады [15]. Ұсынылған тәсілдің схемасы 1 кестеде көрсетілген.

Кесте 1 – Биометрия әдісін өңдеу әдістері

Көздің ирисін өңдеу	Уайлдс көз ирисін локализациялау	Габор сүзгі функциясы	
Шешім	Оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритм	Бағалау деңгейлерін біріктіру	
Саусақ ізін бағалау	Габор сүзгісі арқылы кескінді жақсарту	Негізгі қызығушылық аймағы нүктелерін таңдау	Жолдарға негізделген мүмкіндіктерді шығарып алу

Көздің ирисін өңдеу

Көз биометриясының бөлігі болып табылатын ирис – бұл ересек жаста тұрақты болып қалатын ерекше эпигенетикалық үлгісі бар сыртқа көрінетін, бірақ қауіпсіз орган. Нәтижесінде, бұл қасиет биометриялық сәйкестендіру құралы ретінде пайдаланудың маңызды әдістемесі болып табылады. Егер адам көздің ирисін тану жүйесінің оны интеллектуалды ортада тануын қаласа, алдымен оның көздері зерттеледі, содан кейін прототип жасалады. Содан кейін бұл үлгі сәйкестік табылғанға дейін немесе ол белгісіз болып қалғанға дейін дерекқордағы басқа үлгілермен салыстырылады. Көздің ирисін алдын ала өңдеу қадамдары иристі локализациялауды, иристі қалыпқа келтіруді және белгілерді алуды қамтиды. Ұсынылған схема «Уайлдстың ирисін локализациялау» стратегиясын қолданады. Бұл тәсілдің ерекшелігі ирис пен қарашық шекараларын локализациялау үшін Хаф түрлендіруі мен жиек картасының үйлесімі болып табылады [16]. Ол алдымен ирис кескінінен жиек картасын шығарып, сурет қарқындылығы градиентін келесідей пайдаланады (1):

$$\Delta g(s, t) * i(x, y) \quad (1)$$

мұндағы $\Delta g(s, t)$ S, t орталықтандырылған 2D Гаусс сүзгісін білдіреді, ал $i(x, y)$ X және y орналасулары бар ирис кескінін білдіреді.

Зерттелетін адам лимбиялық шекараны локализациялау үшін тігінен және қабақтың локализациясы үшін көлденең бағытта болды, бұл зерттелушінің басының тұрақты қалыпта екенін болжайды. Шеткі картаны шығарғаннан кейін қарашық пен лимбиялық шекаралардан шекаралар алынады. Ортасы (x, y) және r радиусы бар ирис кескінін локализациялау үшін Хаф түрлендіру функциясы (2) ретінде анықталады:

$$H(x, y, r) = \sum i = \ln(p, q, x, y, r) \quad (2)$$

мұндағы (p, q) – пикселдердің орналасуы.

Ұсынылған тәсілде қолданылатын нормалау әдістемесі Даугманның резеңке парақ үлгісі болып табылады. Декарттықтан полярлық координаттарға дейінгі пикселдер келесідей құрастырылған:

$$I(u(r, \theta), v(r, \theta)) = I(r, \theta) \quad (3)$$

$$u(r, \theta) = (1 - r)xp(\theta) \quad (4)$$

$$v(r, \theta) = (1 - r)yp(\theta) \quad (5)$$

Осы ұсынылған тәсілде пайдаланылған ирис ерекшелігін алу журнал Габор сүзгі әдісі болып табылады. Функцияларды шығарудағы сүзгілердің әдеттегі таңдауы қалыпты Габор сүзгілері болып табылады. Әдетте, олар екі негізгі кемшіліктен зардап шегеді: олардың максималды өткізу қабілеттілігі шамамен бір октавамен шектеледі және олар максималды кеңістіктік локализациямен кең ауқымды мазмұнды алу үшін өте қолайлы емес. Осылайша, қалыпты Габор фильтріне балама ретінде лог-Габор сүзгісі деп аталатын логарифмдік Габор сүзгісі енгізілген [17]. Бұл лог-Габор сүзгісі логарифмдік жиілік шкаласында қараған кезде табиғи кескіндерді Гаусс тасымалдау функциясы бар сүзгілер арқылы жақсырақ кодтауға болатындығына негізделген. Сызықтық масштабта талданған кезде Габор функциялары Гаусс ядросының функциясына ие. Лог-Габор сүзгісінің жиілік жауабын (6) былай жазуға болады:

$$G(s) = \exp \left\{ -0.5 \times \frac{\log \left(\frac{s}{s_0} \right)^2}{\log \left(\frac{\sigma}{s_0} \right)^2} \right\} \quad (6)$$

Саусақ ізін өңдеу

Саусақ ізін алдын ала өңдеу үш кезеңнен тұрады: кескінді жақсарту, қызығушылық аймағын таңдау және нысандарды шығару. Графикалық файл кескінді кіріс ретінде оқу үшін қолданылады. Кескінді нормаға айналдыру немесе тұрақты масштабты қабылдау үшін екі сызықты интерполяция қолданылады. Қызығушылық саласы қалыпқа келтіру әдісі арқылы анықталады. Бастапқыда кіріс кескіні әр түрлі $n \times n$ блоктарына бөлінеді және стандартты ауытқуды $std(i)$ түрінде алуға болады. Егер алынған стандартты ауытқу мәні белгіленген шектен асып кетсе, кескін саусақ ізінің бөлігі ретінде белгіленуі мүмкін. Қалыпқа келтірілген сурет келесі түрде беріледі:

$$i(x, y) = i(x, y) - mean(i) \quad (7)$$

$$i(x, y) = i(x, y) / std(i) \quad (8)$$

$$i_m(x, y) = rm + i(x, y) \times sqrt(rv) \quad (9)$$

мұндағы: rm қажетті орташа мәнді білдіреді, rv қажетті дисперсияны білдіреді, ал $sqrt$ квадрат түбір функциясын білдіреді.

Кескінді жақсарту үшін жоғарыда көрсетілген критерийлерге қосымша Габор сүзгі әдістері қолданылады. Нормалау, жоталар аймағын сегменттеу, ұсақ артефактілерді морфологиялық жою және саусақ ізіндегі жоталардың жергілікті бағдарын жақындату – барлығы оңтайландыру кезеңінің бөлігі болып табылады. Жиналған екілік кескінге жұқарту қолданылады [18].

Қызығушылық тудыратын аймақ таңдау жақсартылған кескіннен негізгі нүктелерді анықтауды қамтиды. Қызықты аймақты алу үшін негізгі нүктенің айналасындағы n пиксель таңдалады. n мәнін 100-ден 200 ұпайға дейін таңдаған дұрыс, сондықтан өзек айналасындағы барабар қызығушылық тудыратын аймақ ретінде қарастырылады [19].

Саусақ ізінен мінсіз мүмкіндікті алу үшін сызыққа негізделген алу алгоритмі пайдаланылады. Барлық пикселдерге қатысты барлық байланысты сызық сегменттері адаптивті шекті талдау және жоталарды бақылау әдісі арқылы есептеледі. Минутияларды алу блокты экстракция арқылы жүзеге асырылады.

Оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритмге негізделген балл деңгейіндегі синтез.

Ұсынылған техника смарт қалалар үшін мультимодальды биометриялық тану тәсілінде саусақ іздері мен ирис биометрикасын тануды жақсарту үшін оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритм пайдаланады. Саусақ пен ирис биометрикасының жоғары морфологиялық ерекшеліктері биометриялық бағалау үшін пайдаланылады. Бұл тәсілде қолданылатын сәйкестік жылдамдығы келесідей анықталады (10 және 11):

$$MR_f = w_f m_f \quad (10)$$

$$MR_i = w_i m_i \quad (11)$$

мұндағы MR_f және MR_i саусақ ізі мен иристің сәйкес жылдамдығын білдіреді, w_f және w_i саусақ ізі мен ирис салмағын білдіреді, мұнда m_f және m_i сәйкесінше саусақ ізі мен иристің сәйкес ұпайларын білдіреді.

Біріктірудің әртүрлі ережелерінің ішінде өлшенген сома ережесі жақсы өнімділікке қол жеткізу үшін әртүрлі әдістерден сәйкес ставкаларды біріктірудің көптеген тамаша тәсілдері ретінде қабылданады. Біріктіру ережесі мұнда (12) теңдеуде келтірілген айнымалының сызықтық тіркесімі ретінде белгіленеді:

$$M_s = w_i m_i + w_f m_f \quad (12)$$

Оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритм әдісі – популяция эволюциясының белгілі бір нүктесінде генетикалық операциялармен біріктірілген мүмкіндіктерді іздейтін бірнеше параллельдерге негізделген стохастикалық оңтайландыру әдісі. Оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритм әдісі конвергенцияны азайту үшін мутация мен кроссовер біріктірілген анық емес тәсіл мен генетикалық алгоритмнің үйлесімі болып табылады. Осы ұсынылған оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритмнің мақсаты теңдеуде келтірілген салмақтарды азайту болып табылады (13):

$$obj(Z) = \underset{w}{Min}(w_i, w_f) \quad (13)$$

Мұндағы $obj(Z)$ – w салмақ векторын минимизациялаумен Z мүмкіндігінің мақсаттық функциясы.

Жалпы өнімділікке қол жеткізудің ең жақсы жолы - тең қателік жылдамдығын (EER) азайту. Генетикалық алгоритмге қатысты қадамдар келесідей болуы мүмкін:

- (и) Инициализация
- (ф) Фитнес функциясы
- (т) Таңдау
- (б) Будандастыру және мутация.

Инициализация

Генетикалық алгоритм ұсынылған оңтайландыру алгоритмінің ең бірінші қадамы ретінде бастапқы популяцияны рандомизациялауды жүзеге асырады. Кездейсоқ іріктеу жиынындағы әрбір функция толығымен векторға негізделген және барлық әдістерді көрсетеді. Бұл әдісте популяцияның ұзақтығы тұрақты сақталады.

Фитнес функциясы

Бұл ұсынылған тәсілде тең қателік деңгей және дәлдік фитнес функциясы болып саналады. Дәлдіктің жоғары мәні және төмен тең қателік деңгей биометриялық танудың жақсарғанын білдіреді. Халықтың әрбір мүшесіне фитнес функциясымен неғұрлым тығыз байланысты фитнес мәні тағайындалады. Нәтижесінде жарамдылық мәні әрбір функцияның маңыздылығын көрсетеді және миссияның соңында жаһандық мәннің жақындауына ықпал етеді.

Анық емес кластерлеу тәсілі

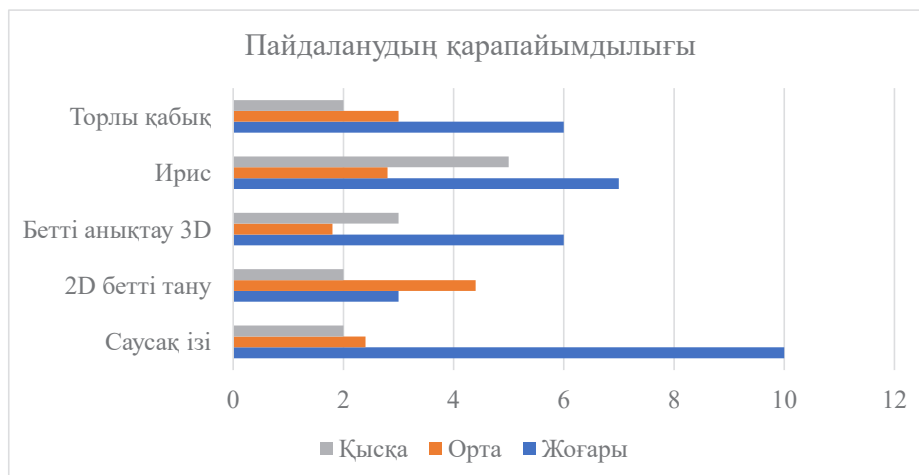
Анық емес кластерлеу – әрбір деректер нүктесін бірнеше кластерге бөлуге болатын кластерлеу түрі. Популяцияны таңдау оңтайландырылған бұлыңғыр генетикалық алгоритмімен белгіленеді, мұнда әрбір популяция үшін $y=(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, ол деректерді әртүрлі кластерлерге бөлу ережелерін анықтайды $C=(c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$ деректерді беру функциясын азайту үшін O_x , мұнда бұлыңғырлық x факторымен шектеледі. Бөлу матрицасы $W = w_{ij}$ арқылы белгіленеді, ол y_i элементінің C_j (14)-ке жататынын көрсетеді:

$$\arg_{-c} \min = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} |y_i - c_j|^2 \quad (14)$$

мұнда:

$$w_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \left(\frac{|y_i - c_j|}{|y_i - c_k|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (15)$$

Ақпаратты қорғау жүйесін таңдаудағы пайдаланушылардың психологиялық ыңғайлылығы да өте өзекті көрсеткіш болып табылады [19]. Егер бұл екі өлшемді бетті немесе иристі тану жағдайында байқалмаса, торлы қабықты сканерлеу өте жағымсыз процесс. Саусақ ізін анықтау жағымсыз болса да, сот сараптамасы әдістерімен теріс корреляцияға әкелуі мүмкін.



Сурет 1 – Пайдаланушының психологиялық ыңғайлылығы үшін биометриялық әдістерді салыстыру

Келесі онжылдықта ең жоғары жарамдылық мәндері бар субъектілер кластері қарастырылады. Орташа мәні ең төмен кластер ең нашар болуы керек және ол келесі ұрпақ кезінде алынып тасталады. Бұл кереметтің мүмкіндіктері жылдам іздеу және іздеу бөлмесіндегі ашу процесін кеңейту үшін тиімді. Бұл агенттік кейбір пайдалану және барлау үшін өтпелі аймақ ретінде қызмет ете алады. Жақсырақ баламаларды іздеу үшін оларға елеулі өзгерістер енгізілгенімен, төмен мақсатты функциясы бар функция жойылмайды [20].

Кроссовер және мутация хромосомаларды әртараптандыруда өте маңызды параметрлер болып табылады. Содан кейін, p_c және p_m сәйкесінше кроссовер және мутация ықтималдығын білдіреді. Күшейтілген шешімді алу үшін фазадағы p_c және p_m маңыздылығы конвергенцияның өсу қарқынын түбегейлі өзгертуі мүмкін. Жаһандық шешімге кроссовер және мутация операторларының сәйкес корреляциялары мен ықтималдықтары қолданылады. Шешім төменгі формулада көрсетілген (16):

$$p_i^j = y_i^{j-1} \times \text{rand} \left(y_i^{j-1} - x_i^{j-1} \right) \quad (16)$$

мұндағы: p_i^j $i=c$ кезінде кроссовер ықтималдығын және $i=m$ кезінде мутация ықтималдығын білдіреді; (x_i^j, y_i^j) p_c және p_m кездейсоқ таңдауларының жасалу дәрежесін білдіреді. Кроссовер және мутация аралықтары сәйкесінше $[0,1][0,1]$ және $[0,0,1]$ болады.

Қорытынды. Ұсынылған тәсілдер саусақ ізі мен көз ирисінің биометриялық белгілерін пайдаланатын жаңа мультимодальды биометрияны пайдалану болып табылады. Бұл әдістің негізгі мақсаты – айқын емес модельдермен және жұмсақ есептеу тәсілдерімен біріктірілген күшейтілген біріктіру әдістерін қосу болып табылады. Мультимодальдық биометрия тиімді біріктіру стратегиясы мен дәл биометриялық тану үшін оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритмді пайдаланады. Бастапқыда алдын ала өңдеу саусақ ізі мен көз ирисі әдістері үшін орындалады. Функцияларды шығару механизмінен алынған тиімді мүмкіндіктер балл деңгейіндегі біріктіру қадамында кіріс ретінде беріледі.

Оңтайландырылған анық емес генетикалық алгоритм жоғары дәлдік, жоғары шынайы оң жылдамдық, жоғары шынайы теріс жылдамдық, төмен жалған қабылдау жылдамдығы, төмен жалған қабылдау жылдамдығы және төмен тең қателік деңгейі тұрғысынан жақсартылған өнімділікті қамтамасыз етеді. Ұсынылған тәсілдің дәлдігі қазіргі төрт заманауи тәсілмен салыстырылады. Салыстыру ұсынылып отырған тәсіл шамамен 99,89% жоғары дәлдікті және шамамен 0,18% тең қателік деңгейінің төмендігін қамтамасыз ететінін көрсетуде. Көптеген субъектілерде саусақ ізі мен ирис биометриясы үшін алынған сәйкес ұпай бұл интеграцияның нақты әлеуеті бар екенін көрсетеді. Бұл әдіс қауіпсіздікті жақсарту үшін тиімді, себебі ол еліміздің жалпы тиімділік пен биометрияның негізгі тірілік мәнін жақсартады. Болашақта смарт орталарды жақсарту үшін саусақ іздері мен иристерге қосымша биометриялық әдістер енгізіледі. Сонымен қатар, дәлдікті арттыру үшін жетілдірілген жіктеу алгоритмі пайдаланылады.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Aas K.F. (2006) The body does not lie : Identity, risk and trust in technoculture, *Crime, Media, Culture*, 2(2), pp. 143–158. <https://doi.org/10.1177/1741659006065401>.
- 2 Abdurrahim S.H., Samad S.A. and Huddin A.B. (2017) Review on the effects of age, gender, and race demographics on automatic face recognition, *The Visual Computer*. <https://doi.org/10.1007/s00371-017-1428-z>.
- Akrich M. (1992) The de-scription of technical objects, in: W. Bijker and J. Law (Eds) *Shaping Technology/Building Society. Studies in Sociotechnical Change*, pp. 205–224 (Cambridge: MIT Press), [Google Scholar]
- Amoore L. (2006) Biometric borders: Governing mobilities in the war on terror, *Political Geography*, 25(3), pp. 336–351. <https://doi.org/10.1016/j.polgeo.2006.02.001> [Crossref], [Web of Science ®], [Google Scholar]
- Beveridge J.R., Givens G.H., Phillips P.J. and Draper B.A. (2009) Factors that influence algorithm performance in the face recognition grand challenge, *Computer Vision and Image Understanding*, 113(6), pp. 750–762. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2008.12.007> [Crossref], [Web of Science ®], [Google Scholar]
- Bowyer K.W., Hollingsworth K. and Flynn P.J. (2008) Image understanding for iris biometrics: A survey, *Computer Vision and Image Understanding*, 110(2), pp. 281–307. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2007.08.005> [Crossref], [Web of Science ®], [Google Scholar]
- Breckenridge K. (2005) The biometric state: The promise and peril of digital government in the new South Africa, *Journal of Southern African Studies*, 31(2), pp. 267–282. <https://doi.org/10.1080/03057070500109458> [Taylor & Francis Online], [Web of Science ®], [Google Scholar]
- Callon M. (1984) Some elements of a sociology of translation: domestication of the scallops and the fishermen of St Brieuc Bay, *The Sociological Review*, 32(1_suppl), pp. 196–233. [Google Scholar]
- De Marsico M., Nappi M., Riccio D. and Wechsler H. (2013) Demographics versus biometric automatic interoperability, in: *International Conference on Image Analysis and Processing*, pp. 472–481 (Berlin: Springer), [Google Scholar]
- Gelb A. and Clark J. (2013) Identification for development: The biometrics revolution. CGD Working Paper 315 (Washington DC: Center for Global Development), [Google Scholar]
- Grommé F. (2015) Turning aggression into an object of intervention: Tinkering in a Crime Control Pilot Study, *Science as Culture* 24(2), pp. 227–247. <https://doi.org/10.1080/09505431.2014.992331> [Taylor & Francis Online], [Web of Science ®], [Google Scholar]
- Howard J.J. and Etter D. (2013) The effect of ethnicity, gender, eye color and wavelength on the biometric menagerie, 2013 IEEE International Conference on Technologies for Homeland Security (HST), IEEE. [Google Scholar]
- Introna L. (2005) Disclosive ethics and information technology: Disclosing facial recognition systems, *Ethics and Information Technology*, 7(2), pp. 75–86. <https://doi.org/10.1007/s10676-005-4583-2> [Crossref], [Google Scholar]
- Introna L. and Nissenbaum H. (2010) *Facial Recognition Technology: A Survey of Policy and Implementation Issues* (New York: Center for Catastrophe Preparedness and Response, New York University). [Google Scholar]

Introna L. and Wood D. (2004) Picturing algorithmic surveillance: The politics of facial recognition systems, *Surveillance & Society*, 2(2/3), pp. 177–198. [Google Scholar]

Jacobsen E. K. U. (2012) Unique Identification: Inclusion and Surveillance in the Indian biometric assemblage, *Security Dialogue*, 43(5), pp. 457–474. <https://doi.org/10.1177/0967010612458336> [Crossref], [Web of Science ®], [Google Scholar]

3 Tong Z., Ye F., Yan M., Liu H. & Basodi S. (2021) A survey on algorithms for intelligent computing and smart city applications. *Big Data Min. Anal.* 4(3), pp. 155–172. <https://doi.org/10.26599/BDMA.2020.9020029>.

4 Huang H. et al. (2020) Machine learning-based multi-modal information perception for soft robotic hands. *Tsinghua Sci. Technol.* 25(2), pp. 255–269. <https://doi.org/10.26599/TST.2019.9010009>.

5 Pang J., Huang Y., Xie Z., Li J. & Cai Z. (2021) Collaborative city digital twin for the COVID-19 pandemic: a federated learning solution. *Tsinghua Sci. Technol.* 26(5), pp. 759–771. <https://doi.org/10.26599/TST.2021.9010026>.

6 Mabrouki J., Azrou M., Fattah G., Dhiba D. & Hajjaji S.E. (2021) Intelligent monitoring system for biogas detection based on the Internet of Things: Mohammedia, Morocco city landfill case. *Big Data Min. Anal.* 4(1), pp. 10–17.

Авторлар туралы мәліметтер

Құлғанбай Шолпан Бахытқызы (корреспонденция авторы)

Магистрант, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Абай даң., 66, 120000, Қызылорда қ., Қазақстан

ORCID ID: 0009-0006-8556-8851

E-mail: shkulanbay@mail.ru

Бекетова Гүлжанат Сахитжанқызы

PhD, аға-оқытушы, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Абай даң., 66, 120000, Қызылорда қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0002-9496-2387, Scopus Author ID: 57189902182

E-mail: beketova_gs@mail.ru

Төлегенова Эльмира Нұрланқызы

Қауымдастырылған профессор, экономика ғылымдарының кандидаты, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті, Абай даң., 66, 120000, Қызылорда қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0003-4501-7343, Scopus Author ID: 57212769313

E-mail: etulegenova80@mail.ru

Information on the authors

Kulanbay Sholpan Bakhytkyzy (corresponding author)

Master student, Kyzylorda University named after Korkyt ata, 66 Abai Ave., 120000, Kyzylorda, Kazakhstan

ORCID ID: 0009-0006-8556-8851

E-mail: shkulanbay@mail.ru

Beketova Gulzhanat Sakhitzhankyzy

PhD, Senior Lecturer, Kyzylorda University named after Korkyt ata, 66 Abai Ave., 120000, Kyzylorda, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0002-9496-2387, Scopus Author ID: 57189902182

E-mail: beketova_gs@mail.ru

Tolegenova Elmira Nurlankyzy

Associate Professor, PhD in Economics, Kyzylorda University named after Korkyt ata, 66 Abai Ave., 120000, Kyzylorda, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0003-4501-7343, Scopus Author ID: 57212769313

E-mail: etulegenova80@mail.ru

Информация об авторах

Куланбай Шолпан Бахыткызы (автор для корреспонденции)

Магистрант, Кызылординский университет им. Коркыт ата, пр. Абая, 66, 120000, г. Кызылорда, Казахстан

ORCID ID: 0009-0006-8556-8851

E-mail: shkulanbay@mail.ru

Бекетова Гулжанат Сахитжанкызы

PhD, старший преподаватель, Кызылординский университет им. Коркыт ата, пр. Абая, 66, 120000, г. Кызылорда, Казахстан

ORCID ID: 0000-0002-9496-2387, Scopus Author ID: 57189902182

E-mail: beketova_gs@mail.ru

Толегенова Эльмира Нурланкызы

Ассоциированный профессор, кандидат экономических наук, Кызылординский университет им. Коркыт ата, пр. Абая, 66, 120000, г. Кызылорда, Казахстан

ORCID ID: 0000-0003-4501-7343, Scopus Author ID: 57212769313

E-mail: etulegenova80@mail.ru

UDC 004.41
IRSTI 81.93.29
<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-125-136>

Samburskaya S.A.

International information technology university 050040, Almaty, Kazakhstan
E-mail: sofiya.samburskaya@gmail.com

DEVELOPMENT OF A SECURE LOGGING AND MANAGEMENT SYSTEM FOR PENETRATION TESTING

Abstract. The sphere of information security in Kazakhstan affects an increasing number of industries every year, and penetration testing is also gaining popularity, as it is one of the key methods for assessing the security and risks of a company. This article is devoted to the research and development of a web application to provide full control over the penetration testing process: monitoring the implementation of tasks and projects, reporting on all processes, dividing tasks between employees. The management system automatically selects recommendations for eliminating vulnerabilities and generates reports on penetration testing. As a classification algorithm, a decision tree is used. Differentiation of users by access levels, structured data storage, automatic recording of test results, generation of reports and selection of recommendations for eliminating vulnerabilities make the web application more perfect and convenient compared to similar systems. The importance of this study lies in the simplification of the implementation of penetration testing and the development of this service in Kazakhstan, which will improve the level of information security in enterprises of all industries.

Key words: web application, management system, html, css, postgresql, penetration test, django.

Самбурская С.А.

Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті 050040, Алматы қ., Қазақстан
E-mail: sofiya.samburskaya@gmail.com

ҚАУІПСІЗ КАРОТАЖ ЖӘНЕ БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІН ДАМУ ЕНУ СЫНАҒЫ ҮШІН

Андатпа. Қазақстандағы ақпараттық қауіпсіздік саласы жыл сайын өнеркәсіптердің көбеюіне әсер етеді және енуді тестілеу де танымал болуда, өйткені ол компанияның қауіпсіздігі мен тәуекелдерін бағалаудың негізгі әдістерінің бірі болып табылады.

Бұл мақала ену тестілеу процесін толық бақылауды қамтамасыз ету үшін веб-қосымшаны зерттеуге және әзірлеуге арналған: тапсырмалар мен жобалардың орындалуын бақылау, барлық процестер туралы есеп беру, қызметкерлер арасында тапсырмаларды бөлу. Басқару жүйесі осалдықтарды жою бойынша ұсыныстарды автоматты түрде таңдайды және енуді тексеру туралы есептерді жасайды. Жіктеу алгоритмі ретінде шешім ағашы қолданылады. Қолдану деңгейлері бойынша пайдаланушыларды саралау, құрылымдық деректерді сақтау, сынақ нәтижелерін автоматты түрде жазу, есептерді құру және осалдықтарды жою бойынша ұсыныстарды таңдау ұқсас жүйелермен салыстырғанда веб-қосымшаны мінсіз және ыңғайлы етеді.

Бұл зерттеудің маңыздылығы еніп кетуді тестілеуді енгізуді жеңілдетуде және Қазақстанда осы қызметті дамытуда, бұл барлық сала кәсіпорындарында ақпараттық қауіпсіздік деңгейін арттыруға мүмкіндік береді.

Тірек сөздер: web-қолданбалар, басқару жүйесі, html, css, postgresql, ену сынағы, django.

Самбурская С.А.

Международный университет информационных технологий, 050040, г. Алматы, Казахстан

E-mail: sofya.samburskaya@gmail.com

**РАЗРАБОТКА БЕЗОПАСНОЙ СИСТЕМЫ ЛОГИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ НА ПРОНИКНОВЕНИЕ**

Аннотация. Сфера информационной безопасности в Казахстане с каждым годом затрагивает все большее количество отраслей, и тестирование на проникновение также набирает популярность, так как является одним из ключевых методов оценки безопасности и рисков компании. Данная статья посвящена исследованию и разработке веб-приложения для обеспечения полного контроля над процессом тестирования на проникновение: мониторинг выполнения задач и проектов, ведение отчетов по всем процессам, разделение задач между сотрудниками. Система менеджмента автоматически осуществляет подбор рекомендаций по устранению уязвимостей и генерирует отчеты о проведенном тестировании на проникновение. Как алгоритм классификации используется дерево решений. Разграничение пользователей по уровням доступа, структурированное хранение данных, автоматическая фиксация результатов тестирования, генерация отчетов и подбор рекомендаций по устранению уязвимостей делают веб-приложение более совершенным и удобным на фоне аналогичных систем. Важность этого исследования заключается в упрощении осуществления тестирования на проникновение и развития этой услуги в Казахстане, что позволит усилить уровень информационной безопасности на предприятиях всех отраслей.

Ключевые слова: веб-приложение, система управления, html, css, postgresql, тест на проникновение, django.

Introduction

The first mention of the creation of a team for penetration testing dates back to the 1970s. It can be argued this area is still young and developing.

Penetration testing is now offered as an IT service, and any IT service can be considered a project. In order to facilitate and systematize project management, it is proposed to create a web application, taking into account the peculiarities of penetration testing.

The results of the study showed that in most companies it is possible to access resources on the local network. This proves the development potential of the Offensive Security area.

Developing a web-based management system for penetration testing with logging abilities will help ensure complete control over the penetration testing process: monitoring tasks execution, keeping reports of all processes, division of tasks between employees.

The goal of this article is to develop a secure logging and management system for penetration testing and validate its effectiveness in a simulated penetration test.

To achieve the set goal, it is necessary to focus on the following research tasks:

- develop a web application for the management of penetration testing;
- develop module for web application for logging functionalities;
- create module for secure connection to database.

Main provisions

Penetration test is an authorized simulated cyberattack on a computer system, performed to evaluate the security of the system.

The penetration testing service is divided into several types:

- network service tests;
- web application tests;
- client-side tests;
- wireless network tests;
- social engineering tests.

Network service test is the widest direction of penetration testing. It aims to discover vulnerabilities and attack vectors inside the client's company infrastructure. It can be subdivided into external and internal, and methods for these subdivisions differ as well. The network of the client can be tested from outside, simulating outer threat actor, and from inside, simulating insider threat.

Web Application Test is a project of discovering vulnerabilities in the web application itself, their plug-ins, applets, Content Management System (CMS), web-server, database and etc. Sometimes, it also includes an analysis of the source code of web application. In the context of web application security, penetration testing is commonly used to improve the web application firewall (WAF).

Client-side penetration testing is the act of exploiting vulnerabilities in client applications such as email clients, web browsers, office applications, and others. It is also called internal testing. The purpose of these tests is to identify security threats that arise locally.

A wireless penetration test emulates an attacker trying to gain access to the internal network through the wireless network. It is conducted to assess the adequacy of a variety of security measures designed to protect against unauthorized access to wireless services.

Social Engineering Penetration Testing is an attempt to gain some level of access using social engineering on company employees to determine the level of awareness of the organization's employees.

A client can reach out for several types of penetration testing or only one depends on the needs and level of the IT infrastructure of their company.

At the end of any penetration testing project, report is submitted and presented to the client.

A study in the field of financial losses of companies as a result of information attacks showed that, on average, one company loses up to \$ 1 million due to cyber-attacks. Such a blow to the company's budget leads to consequences in the form of a drop in the value of the company's shares by an average of 7.27%.

In addition, a comparative analysis of the cost of conducting penetration testing was carried out. During the analysis, it was found that the average cost of a pentest service is from 10 to 30 thousand dollars.

Based on these data, it is concluded that pentesting is a very profitable investment for companies. Such an investment will allow not only to detect possible threats to the company's information resources, but also to avoid the likely large financial losses that often accompany cyber-attacks.

Materials and methods

Penetration testing is now offered as an IT service, and any IT service can be considered a project. To facilitate and systematize project management, a web application was proposed to be created, considering the peculiarities of penetration testing.

The main features of the developed system are presented below at the Figure 1.

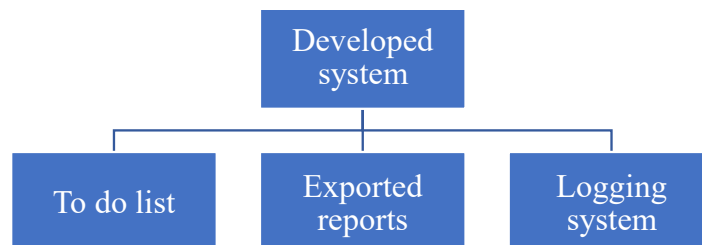


Figure 1 – Main features of developed system

The developed system will assist in the management of penetration testing projects by presenting an opportunity for the project manager or team leader to create new projects and subdivide them into tasks and then assign these tasks to pentesters, who will be also users of this web-application.

The process of generating reports will be automated and based on analytics and pieces of evidence, which will be added by pentesters during testing will be parsed from tasks.

For easier capturing the shreds of evidence logging script is presented, which will be launched on pentesters workstation and will collect data in the console.

The following software will be used to develop web application and logging system: Python, Django Framework, PostgreSQL Database. Python will be used to build the registration system.

Django is a high-level Python web framework that promotes fast development and clean, pragmatic design. Django makes it easy to build better web applications quickly and with less code.

Django provides a bridge between the data model and the database engine, and supports a wide range of database systems, including PostgreSQL.

PostgreSQL is not just a relational, but an object-relational DBMS. This gives it some advantages over other open-source SQL databases such as MySQL, MariaDB and Firebird.

Django and PostgreSQL will be used to build a web application. This software was chosen because Django, as a framework designed specifically for web development, is secure and has all the features and libraries needed to fulfill the goals of this project.

In addition, Django is SQL injection-proof and the combination of Django and PostgreSQL in web development is considered the best tandem.

Also, Django has feature that will help expand functionality of the developed web application in the future. Django's work structure makes it easy to embed new feature branches into the finished application without any complications.

Flowchart of web application operation is presented on the Figure 2.

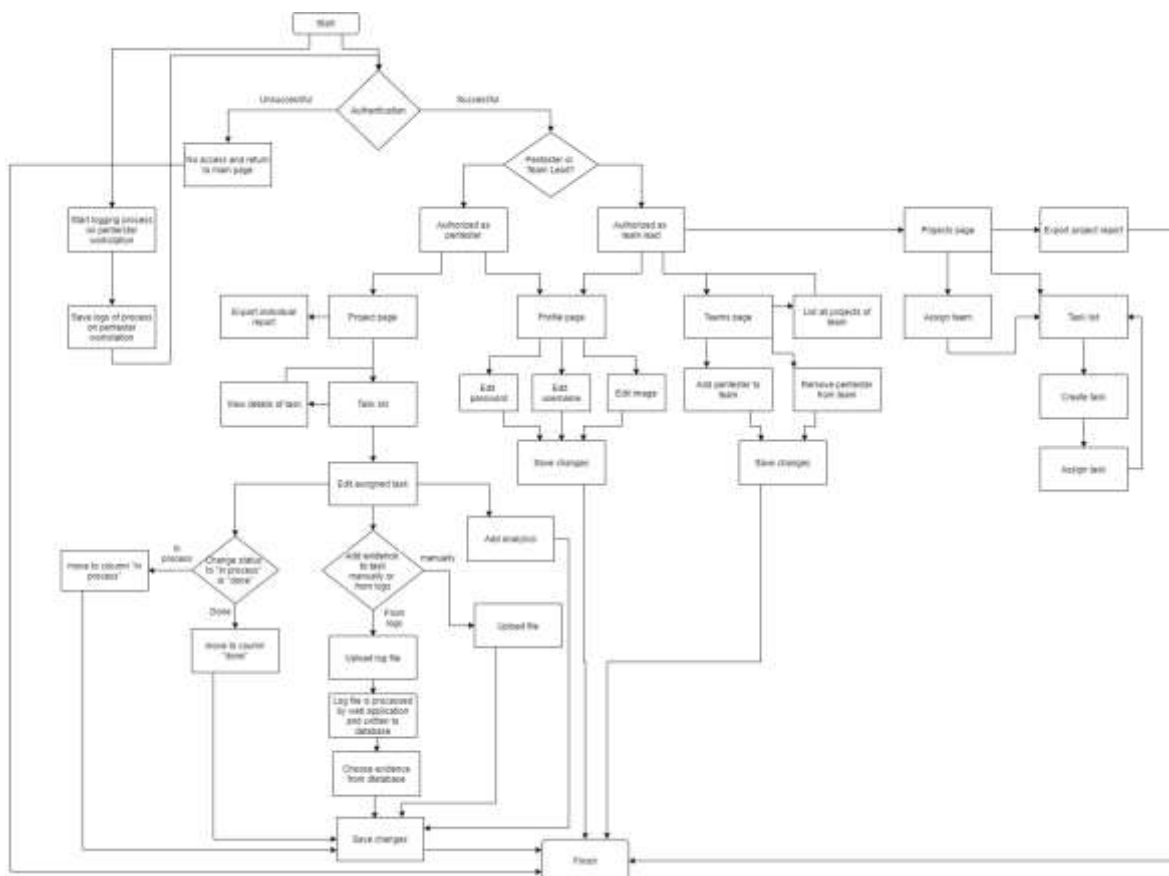


Figure 2 – Flowchart

The flowchart can be divided into several main functions of web-application:

- authentication;
- authorization;
- viewing and editing profile page;
- viewing, creating, and editing teams;
- viewing, creating, and editing projects;
- viewing, creating, and editing tasks of the project;
- work of logging script;
- process of exporting of individual and/or project report.

The flowchart also reflects the differences in the access of the pentester and the team lead.

Scenario of work of the system depends on the role of the user. User can be assigned as team lead of the project or as pentester. User can perform task, which needs to be performed in series, or individual tasks as well in the system. Use case diagram is presented on the Figure 3.

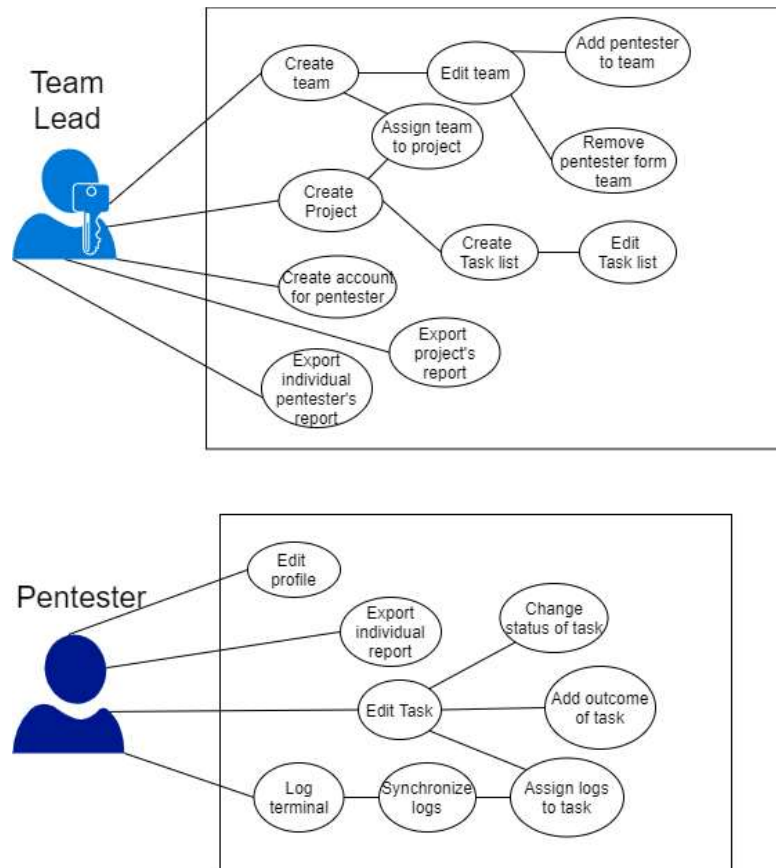


Figure 3 – Use Case diagram

This diagram represents a set of activities possible in the system based on the role of the user.

In the case of team lead, the user can perform management functions. The team lead can form a team of penetration testers for the project and, if necessary, can edit the existing team by removing or adding pentester.

Next user can start the process of creating a new project, which includes assigning a team of pentesters and creating a task list.

As the system will be presented as a platform and will be distributed as a subscription, the team lead will register their new pentester inside the system.

At any time, user can export a report of work of individual pentester for tracking the results.

At the end of the project, the team lead can export the whole project's report in form of a pdf file.

In the case of pentester, the user can work on an assigned task and as the result, change the status of the task to “done” or “in-process”, add analytics of the results of performed tasks and add evidence of existing vulnerabilities.

Besides, the user can launch script, which will collect logs from pentester's terminal.

Also, pentester can export a report of their individual work.

User can edit their personal data in the profile.

This UML diagram shows the step-by-step interaction between a user, a web application, and a database. The diagram shows the sequence of all activities over time.

Processing sequence is illustrated below on the Figure 4.

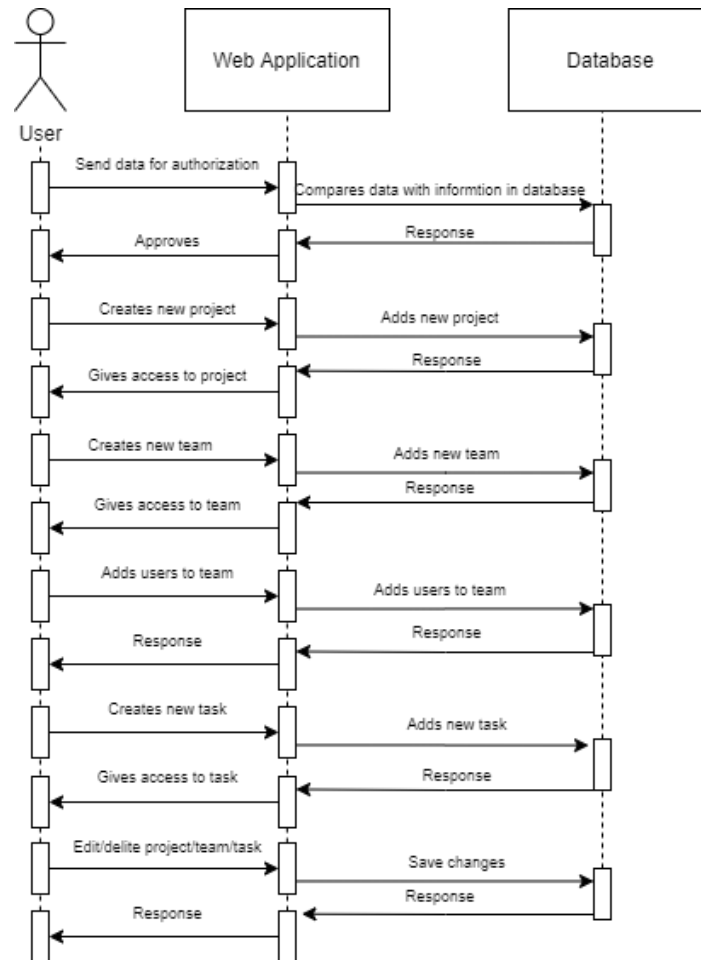


Figure 4 – UML diagram

First, the user connects to the web application and enters his credentials. The application sends a query to the database to compare the information entered by the user with the information stored in the database. The database gives a response to the application, the application allows the user to access the application's functionality. After authorization, the user can create projects, teams, and add users to teams. To carry out these actions, the user enters the necessary information, the application sends a request to the database to save the information. The information is stored in a database.

The diagram of database structure is presented on the Figure 5.

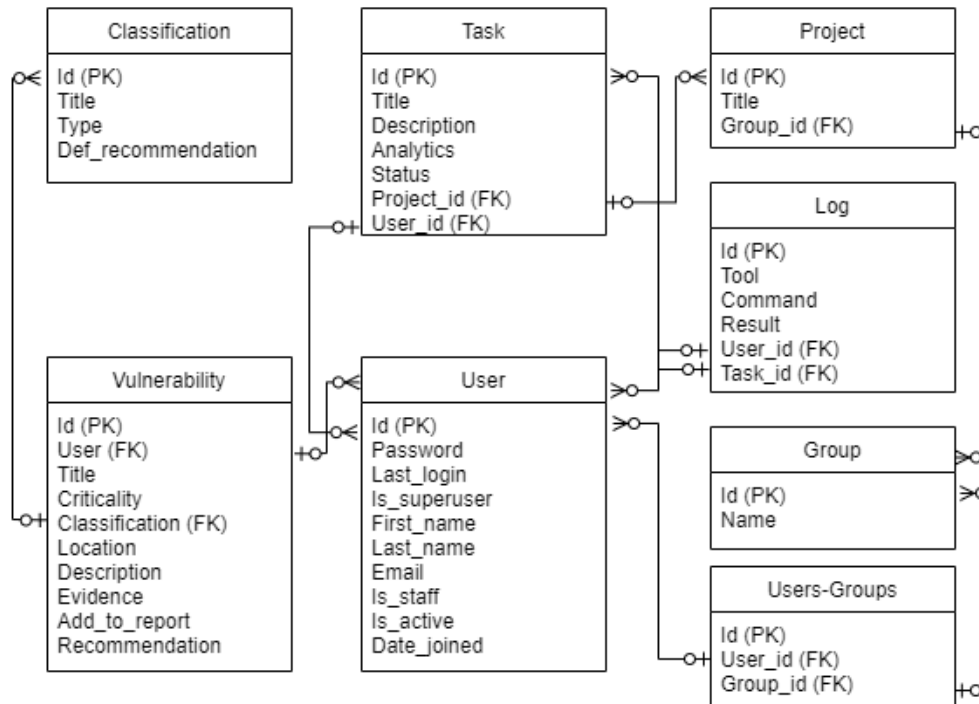


Figure 5 – Database structure

This diagram shows the structure of the web application database. The database includes the following tables: user, group, user-groups, project, task, classification, vulnerability, log. All tables are linked by a one-to-many relationship. The relationship between tables is carried out utilizing a foreign key.

The User table stores data about all users of the web application, from this table the user id is transferred to other tables, where the user is specified as a foreign key.

The Group table includes information about all groups exist in the web application.

The User-Groups table is the link between tables User and Group. All data from this tables (user id, group id) is passed as a foreign key.

The Project table stores information about all projects that are in the web application. A group is attached to the project, which is assigned to these projects. This is done by passing the group id from the "Group" table as a foreign key.

The Task table contains the following information for the task: title, project to which the task belongs, task status, description, analytics, and the user who is assigned responsibility for this task. All data from other tables (user id, project id) is passed as a foreign key.

The Classification table stores data about vulnerabilities' classification: title, type, recommendation.

The Vulnerability table stores data about all founded vulnerabilities. All data from other tables (user id, classification id) is passed as a foreign key.

The Log table include following columns: tool, command, result, user id, task id. All data from other tables (user id, task id) is passed as a foreign key.

The system architecture is presented below on the Figure 6.

This diagram depicts the architecture of the system and shows the protocols and ports through which communication is carried out between the end user's computer and the server that stores the web application and database.

The end user's computer communicates with the server that hosts the web application and database over TCP over port 443.

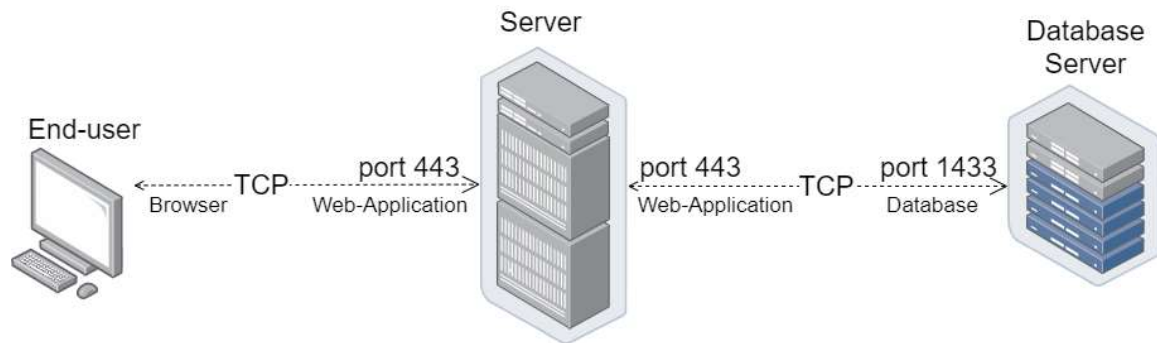


Figure 6 – System architecture

Through this protocol, the end user interacts with the server throughout the functionality of the web application. The server sends a response to requests in the same way. This interaction makes the user work correctly with the web application. The login script runs on the end user's computer. After completing all tasks, the collected information is saved and sent to the database via TCP on port 1433 and saved in the database.

Results and discussion

Before proceeding with the development, it was necessary to select the optimal tools for its implementation. When choosing the tools, the relevance, work skills, compatibility of tools with each other were considered, since the project includes integration between a database, a script for collecting logs, backend and frontend parts of the program.

Below is a list of all the programs that were used in the development of project:

- PostgreSQL is SQL based object-relational DBMS;
- pgAdmin is an administration and development platform for PostgreSQL and related database management systems. The platform supports all PostgreSQL features. The convenient and simple interface of the platform made it possible to work on the project in terms of the database quickly and efficiently;
- Visual Studio Code a source code editor that is supported on Windows, Linux and macOS operating systems. It is a code editor for cross-platform web and cloud application development. Includes a debugger, syntax highlighting, and other benefits that were useful during project development;
- Kali Linux is a Debian-derived Linux distribution designed for digital forensics and penetration testing, used by professionals worldwide due to a large collection of tools. Kali Linux was used as an example of the working environment of a penetration tester.

Presented web-application is created and deployed using several files:

- settings.py is created by Django framework and consists of main settings of web-application, including credentials and connection details to the database, declaration of global variables and IP address of web-application;
- urls.py is presented as a mapping between URL path expressions to views functions;
- models.py is a collection of Python objects, which are used for easier access and managing during work of web-application. Models set the structure of stored data, including the field types;
- views.py is used for creating Python functions for processing a web request and returning a web response;
- forms.py is used to create HTML forms and declare their work and appearance;
- template is a collection of HTML pages that will be returned as a response to the web-application.

HTML and CSS were used to develop the frontend. Since the end user of the web application will interact with him precisely through the frontend, it was necessary to make it convenient and understandable for users.

Also, during the development of the frontend part, it was considered that the users will work with the web application on various devices, so the front-end of the project is made adaptive for desktop version, mobile phones, and tablets. Due to adaptivity of front-end part it will be comfortable for user to work with web application from any device during assignment.

Since the pentest management system is positioned in the future as a paid platform, the user cannot register in the system on his own. For initial use, the end user must already have an account for authorization.

The Django model is a built-in function that Django uses to create tables, their fields, and various constraints, simplify tasks, and organize tables in a model. Each model is mapped to one database table.

The first model created for the web-application was the Project model. This model will be used as a structure for the creation of future penetration testing projects. It can be created by filling with information fields as:

- Title is displayed the name of the penetration testing project, which will be used in menus and will be written in the generated report;
- Team is presented as a foreign key to the table of a team of penetration testers. This field will be used for future authorization checks.

The next is a Task model, which is used for the creation of duties' subdivision in penetration test project. The structure of this model is presented as such fields as:

- Title displays the name of the task;
- Description is a short declaration of needed work and expected results, written by team lead or project manager;

- User is a foreign key to the users' table and is used to specify who is responsible pentester for this task;
- Analytics is a short description of the results of the task for future use during the project;
- Status defines if the task is on a to-do list, in-process list, done list.

Based on the object created with vulnerability model report for the project is generated. The creation of this object is carried out by filling such fields:

- Project is a foreign key for determining to which project belongs this vulnerability;
- User is a foreign key for determining the user who added this vulnerability to the database;
- Title displays the name of vulnerability;
- Criticality determine to which levels this vulnerability belongs: low, medium, or high;
- Classification is text strings for adding a note about the classification of vulnerability based on standards, for example, OWASP Top-10;
- Location determines the place where this vulnerability exists;
- Description is a declaration of what this vulnerability represents, how it was found, and possible threats of this vulnerability;
- Evidence is a file that can prove the existence of this vulnerability;
- Add to report is a checkbox to determine whether vulnerability will be included in the report;
- Recommendation is a declaration on how to eliminate this vulnerability.

The next is a Classification model, which is used for simplified vulnerability report. The creation of this object is carried out by filling such fields:

- Title displays the name of classification;
- Type - selected from the list of existing classifications of vulnerabilities: web, network, mobile, physical or configuration;
- Recommendation is text strings for adding a recommendation for eliminating vulnerabilities.

The next is a Log model, which is used for storing logs from the terminals of pentesters, which were recorded during the work on the project. The creation of this object is carried out by filling such fields:

- Tool displays the name of used tool;
- Command displays the full command that the pentester introduced during the work on the project;
- Result displays full output of used command;
- User is a foreign key for determining the user who added this log to the database;
- Task is a foreign key for determining the task in the performance of which was recorded by the log.

The first page of the web application that the user comes to after registration is my profile. The functionality that is available to the user in the personal account differs depending on the access level.

The primary information that the user sees in a profile - a username, email address, access level, and projects assigned to the user's team.

Functionality that is available to the user after authorization:

- team leader - creating projects, creating teams, creating accounts for pentesters, adding pentesters to a team, editing tasks, adding vulnerabilities, generating a report;
- pentester - editing tasks, adding vulnerabilities, generating a report.

Scenario of work of the system depends on the role of the user. User can be assigned as team lead of

the project or as pentester. The user of the web application with the status of team leader has access to the functionality of creating accounts for pentesters. This functionality provides the team leader's control over employees, the ability to grant or deny a certain user access to the web application.

Functionality of creating a team and adding pentesters to it provides control over the work on the project, distribution of workload and responsibilities between employees. After successfully creating a team, it is necessary to add users to it. In addition, the distribution of pentesters into teams makes it possible to control employee access to projects and prevent employees who do not take part in the implementation of a specific project from accessing projects.

The user of the web application with the status of team leader has access to the project creation functionality. When adding a new project, its name is indicated and a team of pentesters is attached, which will be responsible for the implementation of the project.

The functionality of creating the task is implemented using the Django form and using the Django view. The form on the web-page is generated with fields of `add_task` form. Then data is sent using POST and processed with `add_task` view. In case when all fields are valid, a new task of the project is added to the database.

The functionality of adding a task is implemented as a form on the web page.

During the project, an authorized user can see a list of current tasks divided into three categories based on their status: to do, in-process, and done. To see details of each task user should click on the card of the needed task.

After accessing a page of the task, the authorized user can see details about this vulnerability and there is an update button if this task belongs to this user or this user is the project manager.

If the user is authorized to edit this task, the web application responds with a form.

If the user is a team-lead or project manager of the project, then they can add new tasks and update existing ones during the penetration testing project.

If the user is authorized to access the project by belonging to the owner-team, then they can view the list and view details of existing tasks of the project, also they can update tasks assigned to them.

If the user is authorized to access the project by belonging to the owner-team, then they can add, view the list, and view details of vulnerabilities discovered during the penetration testing project.

The functionality of creating of record about vulnerability is implemented using Django form and using the Django view. The form on the web-page is generated with fields of `add_vulnerability` form. Then data is sent using POST and processed with `add_vulnerability` view. In case when all fields are valid, a new record about vulnerability is added to the database.

Functionality is presented in simple form on the web-page.

After filling in the basic information about the vulnerability, the user will be redirected to the form for recommendations about the elimination of this vulnerability. If a default recommendation was written during adding a classification, it will automatically fill in the generated form field for the current vulnerability with the ability to edit. This will facilitate the process of writing the report.

During the project, an authorized user can see a list of currently found vulnerabilities divided into three categories based on their criticality: low, medium, and high. To see details of each vulnerability user should click on the card of needed vulnerability.

After accessing a page of vulnerability, the authorized user can see details about this vulnerability and download a file, which is served as evidence.

After accessing the web-page dedicated to the generation of the report and choosing a needed project, the user clicks on the button "Generate". This will lead to the generation of the report with random names and availability to download this report to the user's workstation.

The report is presented as a HTML file.

Generation of reports is implemented using download report view, which firstly writes all details of vulnerabilities to the file and then responds to the user with file's content.

If the user is a project manager or team-lead, they can access the functionality of the report generation for their penetration testing projects.

To simplify the presentation and exchange of the results of task execution, the logging functionality is presented, which is a Python script. Before starting the task, the pentester launches a script that creates a folder for the current project and launches the Linux system command "script" to record input and output terminal

data. After finishing work on the task, the pentester enters the "exit" command, ending the script execution. The data file will be stored in the current project folder.

Next, the pentester can attach a file with logs to the completed task through the form.

After adding the file, the system processes the logs using the view. The system first checks if the task belongs to the current user as part of the access controls. If successful, the web application checks if the file is a text file that is expected as a result of the script. After all checks, the web application saves the file with a random name and processes it for further parsing.

Parsing is carried out by terminal key symbols and words, and the parsing results are saved to an array. Then the contents of the array are saved as instances of the Log model.

Conclusion

As a result of study, a web application for secure logging and a management system for penetration testing was developed. This system helps ensure complete control of the process of penetration testing: monitoring tasks execution, keeping reports of all processes, division of tasks between employees.

The functionality of the web application was specially designed to be suitable for the needs of penetration testers and project managers.

During the development were faced and executed work with international classification of vulnerabilities, encryption of personal data, work with the database, and development the web application and logging script.

Currently, requests for penetration testing are coming from companies in the following industries: finance, information technology, government, energy and fuel, medicine, entertainment, telecommunications, and industry. The number of requests from companies in the financial sector for penetration testing service is the highest.

Web application and logging script were implemented in the Python programming language. The virtual machine with Kali Linux running as a server for system was used, which is used by professionals to perform penetration testing, so it is close to real project conditions. The front-end was made using CSS and HTML. The Back-end part was written in Django. Also, PostgreSQL was used as a database.

Effectivity of the usage of the web application was proved during the simulation of a penetration testing project using vulnerable virtual machines. During this simulation work of the team of three professionals was organized, execution of task was logged, and the report was generated based on entered into web application entries about vulnerabilities.

There is still a space for improvement for the current project, such as introduction of different language versions or generation of reports in different formats, but work on the development will be proceeded, which will lead to updating the current version or the creation of different versions.

References

- 1 Canadian Centre for Cyber Security, Cyber Threat and Cyber Threat Actors [online]. ISBN 978-0-660-45950-9. <https://www.cyber.gc.ca/sites/default/files/ncta-2022-intro-e.pdf> (2020).
- 2 Verizon, 2019 Data Breach Investigations Report [online]. <https://www.nist.gov/system/files/documents/2019/10/16/1-2-dbir-widup.pdf> (2019).
- 3 Bischoff P. (2020) How data breaches affect stock market share prices.
- 4 Aileen G. Bacudio, Xiaohong Yuan, Bei-Tseng Bill Chu, Monique Jones (2011) An Overview Of Penetration Testing, International Journal of Network Security & Its Applications, vol.3, no.6.
- 5 Positive Technologies, External pentests results – 2020, Penetration testing of corporate information systems (2020).
- 6 Hessa Mohammed Zaher Al Shebli, Babak D. Beheshti, A study on penetration testing process and tools, IEEE Long Island Systems, Applications and Technology Conference. <https://doi.org/10.1109/LISAT.2018.8378035>.
- 7 Chiem Trieu Phong, Wei Qi Yan, An Overview of Penetration Testing, International Journal of Digital Crime and Forensics, 25. <https://doi.org/10.4018/ijdcf.2014100104>.

Information on the author

Samburskaya Sofiya Alexandrovna

Master student of the Computer Engineering Department, Tutor of the Cybersecurity Department of the International information technology university, Manas st., 34, 050040, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0003-1257-6368

E-mail: sofya.samburskaya@gmail.com.

Автор туралы мәлімет

Самбурская София Александровна

«Компьютерлік инженерия» кафедрасының магистранты, Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің киберқауіпсіздік кафедрасының тәлімгері, Манас, 34, 050040, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0003-1257-6368

E-mail: sofya.samburskaya@gmail.com.

Информация об авторе

Самбурская София Александровна

Магистрант кафедры «Компьютерная инженерия», тьютор кафедры «Кибербезопасность» Международного университета информационных технологий, ул. Манаса, 34, 050040, Алматы, Казахстан

ORCID ID: 0000-0003-1257-6368

E-mail: sofya.samburskaya@gmail.com.

ҚАЗАҚСТАН-БРИТАН ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ

HERALD
OF THE KAZAKH-BRITISH TECHNICAL UNIVERSITY

ВЕСТНИК
КАЗАХСТАНСКО-БРИТАНСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ответственный за выпуск

Алагузов Рашид Жуманович

Редакторы

Скуратова Ирина Михайловна
Султангазиев Нурболат Абаевич

Компьютерный дизайн и верстка

Жадыранова Гульнур Даутбековна

Подписано в печать 30.06.2023 г.
Тираж 300 экз. Формат 60x84 $\frac{1}{16}$.
Бумага тип. Уч.-изд.л. 3,5 Заказ №191

Редакция журнала «Вестник КБТУ» не несет ответственность за содержание публикуемых статей. Содержания статей целиком принадлежат авторам, и размещаются в журнале исключительно под их ответственность.