

УДК 517.958:533.7; 532.517.4  
МРНТИ 27.35.17; 30.17.27

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-4-85-96>

<sup>1\*</sup>МАНАПОВА А.К., <sup>2</sup>БЕКЕТАЕВА А.О., <sup>3,4</sup>МАКАРОВ В.В.

<sup>1</sup>Академия гражданской авиации, 050039, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,  
050010, г.Алматы, Казахстан

<sup>3</sup>Институт проблем управления РАН, 117997, г. Москва, Россия

<sup>4</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
115409, г. Москва, Россия

\*E-mail: manapova.a.k.math@gmail.com

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУЩЕСТВЕННО ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

### Аннотация

Предлагается новый метод решения существенно дозвуковых течений, который представляет собой значительный шаг в области численного моделирования течений на основе системы уравнений Навье-Стокса. В методе используется ENO (Essentially Non-Oscillatory) схема третьего порядка точности, которая обеспечивает более высокую точность при расчетах течений с низкой скоростью звука. Одной из ключевых особенностей этого метода является введение параметров обезразмеривания. Эти параметры позволяют адаптировать уравнения Навье-Стокса к различным физическим условиям и избежать жесткости уравнений, что часто встречается в задачах численного моделирования. Это делает метод более гибким и применимым к разнообразным инженерным и физическим задачам. Для проверки и апробации данной методики проводятся вычисления для двух важных задач – течения внутри каверны и течения Пуазейля. Рассматривается значение числа Рейнольдса,  $Re=100$ , а также различные размеры вычислительных сеток. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными, и наблюдается высокая степень согласования между моделью и реальными явлениями. Это свидетельствует об эффективности и точности предложенного метода в решении сложных течений в различных инженерных и физических задачах.

**Ключевые слова:** сжимаемый газ, уравнения Навье-Стокса, обезразмеривание, каверна, течение Пуазейля, число Маха.

### Введение

В большинстве прикладных задач физические процессы проходят при малых числах Маха и теоретическое изучение дозвуковых турбулентных течений является существенно важным и актуальным при конструировании, например, энергетических установок и транспортных средств.

Методы решения уравнений сжимаемого газа, хорошо работающие при умеренно дозвуковых и сверхзвуковых скоростях потока, оказываются неэффективными и даже непригодными для расчета течений с числами Маха ниже 0.1–0.3. Это проявляется и выражается в ухудшении точности получаемых при  $M \ll 1$  стационарных решений.

При численном решении такого рода задач необходимо использование полных уравнений Навье-Стокса для течения сжимаемого вязкого газа с малыми числами Маха.

Собственные значения матрицы Якоби  $A$  уравнений Навье-Стокса имеют вид:  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u - c$ ,  $\lambda_3 = u + c$ . Здесь  $c = \sqrt{\gamma dp / d\rho}$  – скорость звука. После обезразмеривания к скорости звука получим  $\bar{\lambda}_1 = M$ ,  $\bar{\lambda}_{2,3} = M \pm 1$ , где  $M = u_0 / c$  – число Маха,  $u_0$  – характерная скорость течения,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Число обусловленности матрицы  $\Lambda$  определяется следующим образом  $r = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{M+1}{M} \rightarrow \infty$  при  $M \rightarrow 0$  и с уменьшением числа Маха может стать существенно больше единицы. Это обстоятельство определяется как жест-

кость исходных уравнений, что может приводить к некоторым проблемам, например, малое изменение исходных параметров будет кардинально сказываться на результатах численного решения уравнения. Также если рассмотреть условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ) для явных схем, которое определяется наибольшим собственным значением матрицы  $A \max_k |\lambda_k| \Delta t \leq \Delta x$ , то видно, что шаг интегрирования по времени должен определяться скоростью наиболее быстрой волны. В то же время для самой медленной волны имеет место  $\min_k |\lambda_k| \Delta t \leq \frac{\Delta x}{r}$  и слишком большое число обусловленности уменьшает эффективность распространения конвективных волн, что приводит к медленной сходимости численного решения. Таким образом, при стремлении числа Маха к нулю численное решение исходных уравнений для сжимаемого газа сопровождается определенными трудностями.

### Основные положения

На данный момент известны два численных подхода, позволяющих решать существенно дозвуковые течения. Традиционно эти подходы подразделяются на методы, основанные на преобразовании давления, и на методы, основанные на преобразовании плотности.

Метод, основанный на преобразовании давления (Pressure-based method), разрабатывался для решения уравнений Навье-Стокса, описывающих несжимаемые течения. Здесь вводилась так называемая искусственная сжимаемость, а для давления записывалось уравнение путем модификации уравнений неразрывности, импульса или энергии, и также вводилась переменная скорости звука. Из уравнения состояния определялись плотность или температура.

### Обзор литературы

При таком подходе изменение давления остается конечным независимо от числа Маха, что делает решение уравнений приемлемым для всего спектра чисел Маха [1]. Первая реализация метода, основанного на преобразовании давления, разработана в ранних работах Харлоу и Амсен [2, 3] на основе полуявного конечно-разностного алгоритма. Метод коррекции давления или проекционные методы с коррекцией для скорости и давления [4] были также использованы в работах [5]. Такие методы эффективно использовались в рамках метода конечных объемов и известны под названием семейства схем SIMPLE (Semi-Implicit Pressure Linked Equations) [6]. Карки и Патанкар [1] разработали метод SIMPLE для сжимаемых течений, применяемый для широкого диапазона скоростей рассматриваемого течения. Так, например, Мюнц и др. [7] применили SIMPLE для решения течения с малыми числами Маха с несколькими переменными давления, каждый из которых связан с различной физикой рассматриваемой задачи. Аналогичные процедуры были разработаны и другими авторами [8–10]. Проекционный метод применялся в конечно-разностной схеме со вторым порядком точности Ван Каном [11]. Кроме того, в рамках метода конечных элементов Донеа и др. [12] ввели проекционный метод с дробным шагом, разработанный с целью значительно снизить вычислительные расходы в переходных течениях несжимаемых вязких потоков.

Как уже было сказано, данный метод предназначен в основном для решения уравнений для динамически несжимаемой среды, что также позволяет производить расчет различных течений с малыми числами Маха, однако для течений с существенными эффектами сжимаемости данный подход неприемлем.

Методы, основанные на преобразовании плотности (Density-based method), представляют собой большой класс схем, разработанных для сжимаемых течений [13]. Здесь решаются полные уравнения для течения сжимаемого газа, что позволяет применять данный метод для решения задач как с малыми, так и с умеренными числами Маха. В рамках этого метода были предложены два подхода для решения уравнения Навье-Стокса при низких режимах числа Маха, которые позволяют устранить вышеописанные проблемы жесткости уравнений – это предобуславливание (preconditioning) и асимптотический метод. Оба метода направлены на достижение перемасштабирования числа обусловленности системы. Метод предобуславливания состоит в умножении производной по времени на матрицу предобуславливания, которая подбирается

так, чтобы скорости распространения возмущений имели один порядок при числе Маха, стремящемся к нулю [14].

В работе [15] авторы разработали оригинальные методы предобуславливания с низким числом Маха для схем распространения волн, которые представлены в работе [16] для модели двухфазного сжимаемого потока с жесткой релаксацией давления, где, расширяя метод Гийара–Виоза для однофазных уравнений Эйлера, были получены предобуславливатель типа Тюркеля для метода типа Роу для двухфазной системы. Анализ с помощью асимптотических разложений предобусловленных дискретных двухфазных уравнений Роу показал, что предобуславливание действует так же, как и в однофазном случае, а именно поправка на малое число Маха позволяет восстановить правильное масштабирование возмущений давления.

Работа [17] направлена на реализацию и исследование нового предобуславливания, который включает в себя две разные методологии, разработанные по [18, 19]. Авторами был разработан CFD код для численного расчета уравнений Эйлера и Навье-Стокса для стационарного режима на основе метода конечного объема с центром в ячейке с использованием усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Метод локального передобуславливания был реализован из-за его надежности при прогнозировании потоков с низким числом Маха в среде сжимаемого газа CFD.

Авторы работы [20] оценили комбинацию локального предобуславливания Вейсса-Смита и Чой-Меркла в сочетании с методом конечных элементов нелинейной многомасштабной вязкости на основе плотности для решения устойчивых сжимаемых течений при низких числах Маха. Формулировка авторов основана на стратегии разделения масштабов, в которой пространство подсеточного масштаба заполняется пузырьковыми функциями.

В работе [21] пространственная координата, время, плотность, энергия, давление, температура обезразмеривались к параметрам набегающего потока и глубине полости  $D$ , скорость обезразмеривалась к скорости звука. Было выявлено, что течение становится неустойчивым при увеличении числа Маха до  $M_\infty \approx 0,6$ . В [22] разработана программа Cascade Technologies, который используется для решения полных уравнений Навье-Стокса (NS) сжимаемых жидкостей и исследования течений в открытой полости, а параметры обезразмеривания принялись как в предыдущей работе.

Таким образом, исходя из вышеописанного обзора исследований, все еще сохраняется потребность в экономичном и универсальном численном методе, позволяющем рассчитывать движения сжимаемого вязкого газа в реальных аэродинамических установках в широком диапазоне характерного числа Маха потока. В данной работе предлагается эффективный метод решения уравнений Навье-Стокса на основе ENO схемы третьего порядка точности, который хорошо зарекомендовал себя для расчета течений при больших и умеренных числах Маха и позволит его применение на течение с  $M \ll 1$  при помощи введения новых параметров обезразмеривания. Для апробации метода рассматриваются задачи течение в каверне и течение Пуазейля.

## Материалы и методы

На стенках полости принимаются граничные условия прилипания и также считаются непроницаемыми. Теплопередача через стенки отсутствует, так как они адиабатичны. При постоянной температуре ( $T$ ), давлении ( $P$ ), плотности ( $\rho$ ) жидкости рассчитывают в каждый интервал времени по мере движения нижней стенки.

Граничные условия:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0, z = 0, 0 \leq x \leq 0.00051, y = 0, t > 0;$$

$$u = u_0, v = 0, w = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0, z = 0.00051, 0 \leq x \leq 0.00051, y = 0, t > 0;$$

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, x = 0, 0 \leq z \leq 0.00051, y = 0, t > 0;$$

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, x = 0.00051, 0 \leq z \leq 0.00051, y = 0, t > 0.$$

Параметры течения приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры расчета

Параметр	Единица измерения	Значение
Скорость, $u$	[м/с]	17.3205
Длина, $L$	[м]	0.00051
Высота, $H$	[м]	0.00051
Давление, $P$	[Па]	101325
Температура, $T$	[К]	300
Вязкость, $\mu$	[Н с/м <sup>2</sup> ]	0.000026112

Начальные условия:

$$u = 0, v = 0, w = 0, t = 0, 0 \leq x \leq L_1, 0 \leq z \leq L_2, 0 \leq y \leq L_3;$$

$$\left. \begin{aligned} T_i &= T_\infty \\ \rho_i &= \rho_\infty \\ P_i &= P_\infty \end{aligned} \right\}, t = 0, 0 \leq x \leq L_1, 0 \leq z \leq L_2, 0 \leq y \leq L_3;$$

Исходной является система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме.

В качестве определяющих принимаются параметры потока на входе  $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$ , давление и полная энергия отнесены к значению  $\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{M_\infty}$ , плотность к  $\frac{\rho_\infty}{M_\infty}$ , температура к температуре потока  $T_\infty$ , внутренняя энергия к  $u_\infty^2$ :

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}, \bar{w} = \frac{w}{u_\infty}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} M_\infty,$$

$$\bar{T} = \frac{T}{T_\infty}, \bar{e} = \frac{e}{u_\infty^2}, \bar{P} = \frac{P}{\rho_\infty u_\infty^2} M_\infty, \bar{c} = \frac{c}{u_\infty}, \bar{E}_t = \frac{E_t}{\rho_\infty u_\infty^2} M_\infty.$$

В этом случае система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{E} - \bar{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{F} - \bar{F}_v)}{\partial z} + \frac{\partial (\bar{G} - \bar{G}_v)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}u \\ \bar{\rho}v \\ \bar{\rho}w \\ \bar{E}_t \end{pmatrix}, \bar{E} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}u \\ \bar{\rho}u^2 + \bar{P} \\ \bar{\rho}uv \\ \bar{\rho}uw \\ (\bar{E}_t + \bar{P})\bar{u} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \bar{\rho}w \\ \bar{\rho}uw \\ \bar{\rho}vw \\ \bar{\rho}w^2 + \bar{P} \\ (\bar{E}_t + \bar{P})\bar{w} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \bar{\rho}v \\ \bar{\rho}uv \\ \bar{\rho}v^2 + \bar{P} \\ \bar{\rho}vw \\ (\bar{E}_t + \bar{P})\bar{v} \end{pmatrix},$$

а компоненты  $\bar{E}_v$ ,  $F_v$ ,  $\bar{G}_v$  связаны с вязкими напряжениями:

$$\begin{aligned} \bar{E}_v &= \left( 0, \bar{\tau}_{xx}, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{u}\bar{\tau}_{xx} + \bar{v}\bar{\tau}_{xy} + \bar{w}\bar{\tau}_{xz} - \bar{q}_x \right)^T, \\ \bar{F}_v &= \left( 0, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zz}, \bar{u}\bar{\tau}_{xz} + \bar{v}\bar{\tau}_{yz} + \bar{w}\bar{\tau}_{zz} - \bar{q}_z \right)^T, \\ \bar{G}_v &= \left( 0, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{u}\bar{\tau}_{xy} + \bar{v}\bar{\tau}_{yy} + \bar{w}\bar{\tau}_{yz} - \bar{q}_y \right)^T. \end{aligned}$$

Тензоры напряжений, потоки тепла и уравнение энергий в безразмерных переменных примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx} &= \frac{2\bar{\mu}}{3} \text{Re}M_\infty (2\bar{u}_x - \bar{w}_z - \bar{v}_y), \quad \bar{\tau}_{zz} = \frac{2\bar{\mu}}{3} \text{Re}M_\infty (2\bar{w}_z - \bar{u}_x - \bar{v}_y), \\ \bar{\tau}_{yy} &= \frac{2\bar{\mu}}{3} \text{Re}M_\infty (2\bar{v}_y - \bar{u}_x - \bar{w}_z), \\ \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx} &= \bar{\mu} \text{Re}M_\infty (\bar{u}_z + \bar{w}_x), \quad \bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = \bar{\mu} \text{Re}M_\infty (\bar{u}_y + \bar{v}_x), \\ \bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy} &= \bar{\mu} \text{Re}M_\infty (\bar{w}_y + \bar{v}_z), \\ \bar{q}_x &= \frac{\bar{\mu}}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{RePr}} \bar{T}_x, \quad \bar{q}_y = \frac{\bar{\mu}}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{RePr}} \bar{T}_y, \quad \bar{q}_z = \frac{\bar{\mu}}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{RePr}} \bar{T}_z, \\ \bar{E}_t &= \bar{\rho} \left( e + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$M_\infty$  – число Маха потока,  $\text{Re} = u_\infty L \rho / \mu$  – число Рейнольдса,  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Далее для удобства знак черты над параметрами опускается.

В безразмерном виде граничные условия приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Безразмерные величины параметров каверны

Параметры	$u$	$v$	$w$	$\rho$	$P$	$T$	$E_t$
Величины	1	0	0	0.05	14.4337741	1	36.1094352

В безразмерном виде начальные и граничные условия имеют вид:

$$u = 0, v = 0, w = 0, t = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1;$$

$$\left. \begin{aligned} T_i &= T_\infty \\ \rho_i &= \rho_\infty \\ P_i &= P_\infty \end{aligned} \right\}, t = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1;$$

$$u_1(0, y, z, t) = u_0 \left[ \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \right]^2,$$

$$u_2(0, y, z, t) = 0,$$

$$T(0, y, z, t) = T_\infty,$$

$$u_1(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p^{exact}}{\partial x} (l^2 - z^2),$$

$$T(x, y, z, t) - T_\infty = -\frac{\mu u_m^2}{\lambda} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (z/l)^4 - (z/l)^2 \right),$$

$$\frac{\partial p^{exact}}{\partial x} = -1.5\nu \frac{\rho_\infty \dot{m}_{inlet}}{l^3} = -1.5Re^{-1} \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{l},$$

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{c} = 0.1.$$

Уравнения будут решаться в новой системе координат, которая предполагает сгущение сетки вблизи стенки, если это необходимо. В данной работе новая система определяется в виде:

$$\xi = x, \quad \eta = z, \quad \zeta = y.$$

При этом система уравнений (1) в обобщенных координатах запишется в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}}{\partial \zeta} \quad (2)$$

где

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} U, \quad \tilde{E} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) E, \quad \tilde{F} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) F, \quad \tilde{E}_{v2} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) E_{v2}, \quad \tilde{E}_{vm} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) E_{vm},$$

$$\tilde{F}_{v2} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) F_{v2}, \quad \tilde{F}_{vm} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) F_{vm}, \quad \tilde{G}_{v2} = \left( \frac{\zeta_y}{J} \right) G_{v2}, \quad \tilde{G}_{vm} = \left( \frac{\zeta_y}{J} \right) G_{vm},$$

$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, z, y)}$  – якобиан преобразования,  $\tilde{E}_{vm}, \tilde{E}_{v2}$  – диффузионные члены, содержащие смешанные и вторые производные.

В соответствии с принципом построения ENO-схемы исходная система уравнений формально представляется следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial \mathbf{E}^m}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial \mathbf{F}^m}{\partial \eta} + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-) \frac{\partial \mathbf{G}^m}{\partial \zeta} -$$

$$\left[ \frac{\partial(\tilde{\mathbf{E}}_{v2} + \tilde{\mathbf{E}}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{F}}_{v2} + \tilde{\mathbf{F}}_{vm})}{\partial \eta} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{G}}_{v2} + \tilde{\mathbf{G}}_{vm})}{\partial \zeta} \right] = 0 \quad (3)$$

здесь  $\mathbf{E}^{n+1} \approx A^n \mathbf{U}^{n+1}$ ,  $\mathbf{F}^{n+1} \approx B^n \mathbf{U}^{n+1}$ ,  $\mathbf{G}^{n+1} \approx Q^n \mathbf{U}^{n+1}$ ,  $A = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial U}$ ,  $B = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial U}$ ,  $Q = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial U}$  – матрицы

Якоби,  $\hat{A}^\pm = R \hat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1}$ ,  $\hat{B}^\pm = T \hat{\Lambda}_\eta T^{-1} = T \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\eta)}{2} \right) T^{-1}$ ,

$$\hat{Q}^\pm = S \hat{\Lambda}_\zeta S^{-1} = S \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\zeta)}{2} \right) S^{-1}, \mathbf{E}^m = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}_i + \mathbf{D}_i, \mathbf{F}^m = \tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{E}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta,$$

$\mathbf{G}^m = \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{E}_\alpha + \mathbf{D}_\alpha$  – модифицированные потоки в узловых точках  $(i,j,k)$ , состоящие из исходных конвективных векторов  $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}})$  и добавочных членов высокого порядка точности  $(\mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{E}_\zeta, \mathbf{D}_\zeta, \mathbf{E}_\alpha, \mathbf{D}_\alpha)$ .

После факторизации одношаговой конечно-разностной схемы для интегрирования по времени уравнения (3) получается следующее равенство:

$$\left\{ I + \Delta t \left[ (\hat{A}^+ + \hat{A}^-)^n \frac{\partial}{\partial \xi} A_\xi^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\mu}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\tilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times$$

$$\left\{ I + \Delta t \left[ (\hat{B}^+ + \hat{B}^-)^n \frac{\partial}{\partial \eta} B_\eta^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\mu}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ I + \Delta t \left[ (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-)^n \frac{\partial}{\partial \zeta} Q_\zeta^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\mu}_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \tilde{U}^{n+1} =$$

$$= \tilde{U}^n + \Delta t \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_{v22}^n}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (2\tilde{\mathbf{E}}_{vm}^n - \tilde{\mathbf{E}}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2\tilde{\mathbf{F}}_{vm}^n - \tilde{\mathbf{F}}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (2\tilde{\mathbf{G}}_{vm}^n - \tilde{\mathbf{G}}_{vm}^{n-1}) \right] -$$

$$- \Delta t \left[ (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{E}_\xi + \mathbf{D}_\xi) + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{E}_\eta + \mathbf{D}_\eta) + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-) \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{E}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta) \right]^n \quad (4)$$

где  $A_\xi = \xi_x A$ ,  $B_\eta = \eta_z B$ ,  $Q_\zeta = \zeta_y Q$ , причем  $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$ ,  $I$  – единичная матрица,

$$\tilde{\mu}_\xi = \frac{\mu \xi_x^2}{\text{Re}J}, \tilde{\mu}_\eta = \frac{\mu \eta_z^2}{\text{Re}J}, \tilde{\mu}_\zeta = \frac{\mu \zeta_y^2}{\text{Re}J}.$$

Конвективные члены выделенной части (4) были аппроксимированы с использованием следующего оператора:

$$\left( A^- + A^+ \right) \frac{\partial}{\partial \xi} f \Big|_{ij} = \frac{A_{i+1/2j}^- (f_{i+1j} - f_{ij}) + A_{i-1/2j}^+ (f_{ij} - f_{i-1j})}{\Delta \xi} \quad (5)$$

Аппроксимации диффузионных слагаемых имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} f \Big|_{ij} = \frac{\varphi_{i+1j}(f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1}) - \varphi_{i-1j}(f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1})}{4\Delta\xi\Delta\eta} + O(\Delta\xi^2; \Delta\eta^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} f \Big|_{ij} = \left( \frac{(\varphi_{ij+1} + \varphi_{ij})(f_{ij+1} - f_{ij}) - (\varphi_{ij} + \varphi_{ij-1})(f_{ij} - f_{ij-1})}{2\Delta\eta^2} \right) + O(\frac{1}{2}\Delta\eta^2)$$

**Результаты и обсуждение**

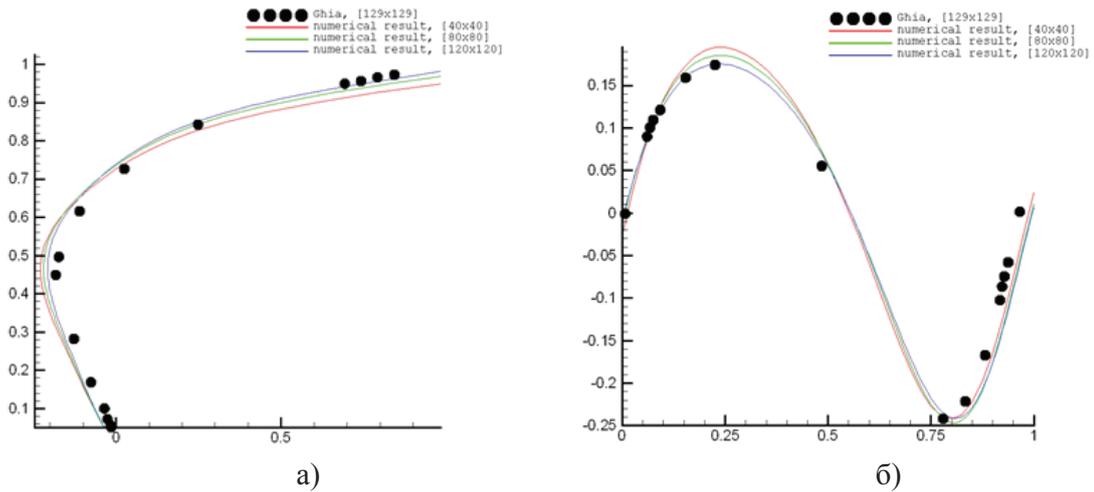


Рисунок 1 – Сравнение профиля скорости а) и б) v с экспериментом для сеток 40x40, 80x80, 120x120 при M=0.05 и Re=100.

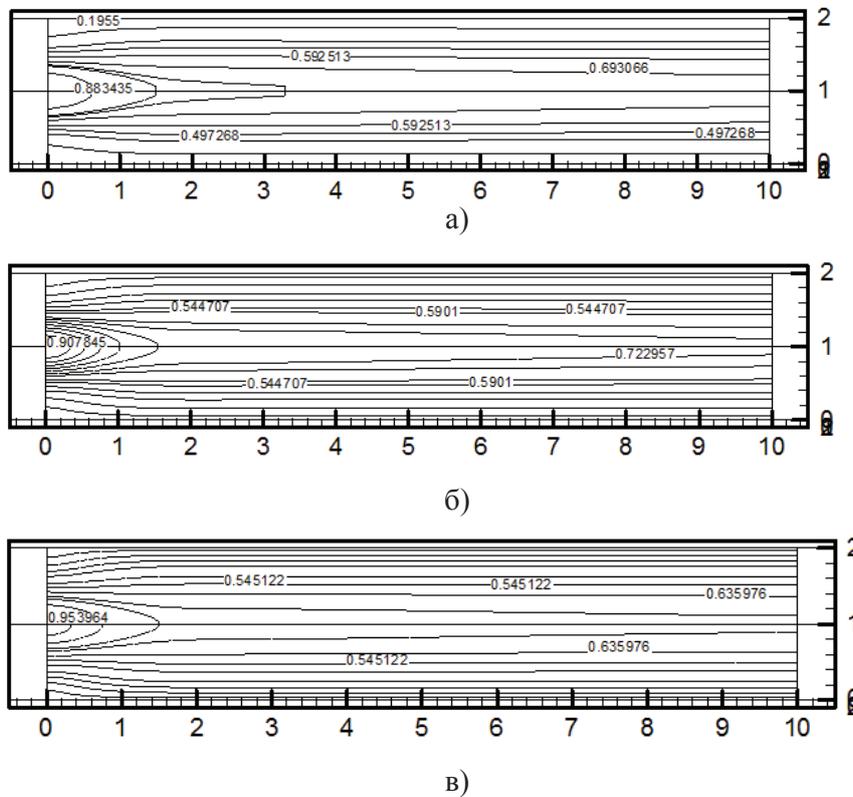


Рисунок 2 – Контуры скорости при сетках а) 60x30, б) 120x60, в) 180x90 при M=0.1 и Re=750.

Верхняя стенка движется с постоянной горизонтальной скоростью, а остальные стенки неподвижны, стороны полости равны 1.0. Начальное поле скоростей однородно во всей области. Число Маха находится в диапазоне  $0.005 \leq M \leq 0.05$ .

На рисунке 3 сравниваются профили продольной и поперечной скоростей с использованием трех разных сеток с экспериментов в работе [26], полученных на сетке 129x129 при  $M=0.05$ ,  $Re = 100$ . Решение для самой грубой 40x40 сетки показывают некоторые отличия от других более мелких сеток. Решения с использованием сеток 80x80 и 120x120 хорошо согласуются с решениями [26].

Результаты, полученные с помощью алгоритма решения Nav3D для стационарного течения в каверне с подвижной границей, свидетельствуют о хорошем согласии полученных результатов с эталонными решениями [26]. Были использованы три различные сетки: грубая – 40x40, средняя – 80x80, мелкая – 120x120. Шаг по времени для двумерного течения в каверне при различных числах Маха составляет 0.0001-0.0007.

Скорость сходимости представляется в виде логарифма от нормы невязки для плотности  $|\rho^{n+1} - \rho^n|$  в зависимости от итерационных шагов по времени. Скорость сходимости решения достаточно высокая.

Увеличение числа узлов расчетной сетки приводит к тому, что, начиная с числа узлов 80x80 и выше, решение сходилось немного быстрее. Как показано на этом графике, решение для мелкой сетки сходилось немного быстрее.

Как было сказано ранее, результаты почти не меняются и выбор сетки 80x80 – компромисс между грубой и мелкой сеткой. Таким образом, можно говорить о достаточной точности схемы для сеток с числовым узлом 80x80 и выше, что позволяет проводить расчет задачи на сетках этих размеров.

Таким образом, на данной тестовой задаче видно, что введение новых параметров обезразмеривания позволяет решающим образом улучшить работоспособность численного метода, а именно улучшает сходимость и точность получаемого стационарного решения. Скорость сходится лучше с уменьшением числа Маха.

При  $Re = 100$  образование вторичной циркуляции на дне каверны отсутствует, а имеет место только первичная циркуляция в направлении вверх каверны. Чем выше скорость крышки, тем быстрее происходит образование вторичной циркуляции. Повышение температуры и давления влияет на расположение и размер первичной и вторичной циркуляции.

Для настоящего исследования делается вывод, что метод решения подходит для текущей задачи с подвижной крышкой.

Для расчета используются параметры  $M=0.1$ ,  $Re=750$  и три различные сетки грубая – 60x30, средняя – 120x60, мелкая – 180x90.

Профили скоростей очень быстро сходятся к точному решению [27].

На рисунке 2 приводятся потоки скорости, где видно, что к концу канала скорость достигает значения  $\sim 0.5$ .

Вблизи истечения образуются сильные градиенты давления и температуры (рисунок 2). В поведении пограничного слоя, проявляющемся в контурах температуры вблизи выходного сечения, наблюдается небольшое возмущение профилей температуры вблизи выхода.

## Заключение

В настоящей работе исследованы существенно дозвуковые течения (задачи каверны и Пуазейля), где исходной является система трехмерных сжимаемых уравнений Навье-Стокса. Был предложен новый метод обезразмеривания, который позволил устранить жесткости в уравнениях. Система решена ENO схемой третьего порядка точности. Предложенные параметры обезразмеривания позволили сжимаемым уравнениям Навье-Стокса сходиться при диапазоне числа Маха  $0.0005 \leq M \leq 0.05$ . Полученные результаты показали хорошее согласие с экспериментальными данными.

В решении задачи каверны с увеличением скорости крышки образовались вторичные вихри на дне полости, на их расположения повлияли повышения температуры и давления. Для проведения расчетов была выбран вычислительная сетка 80x80.

В исследовании течения Пуазейля с числами  $Re=750$  и  $M=0.1$  изменения в вычислимой сетке (60x30, 120x60, 180x90) не повлияли на полученные результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Karki K., Patankar S. V. Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. *AIAA journal*, vol. 27, no. 9, pp. 1167–1174.
- 2 Harlow F.H., Amsden A. Numerical calculation of almost incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, vol. 3, pp. 80–93.
- 3 Harlow F.H., Amsden A. (1971) A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds, vol. 8, pp. 197–213.
- 4 Peyret R. and Taylor T.D. *Computational methods for fluid flow* Springer, Verlag, New York.
- 5 Temam R. (1969) Sur l'approximation de la solution de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. *Archiv. Ration. Mech. Anal*, vol. 32, pp. 377–385.
- 6 Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, New York.
- 7 Munz C.-D., Roller S., Klein R. and Geratz K.J. (2003) The extension of incompressible flow solvers to the weakly compressible regime. *Computers and Fluids*, vol. 32, no. 2, pp. 173–196.
- 8 Bijl H., Wesseling P. (1998) A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates. *J. Com. Phys.*, vol 141, no. 2, pp. 153–173.
- 9 Mary I., Sagaut P. and Deville M. (2000) An algorithm for low Mach number unsteady flows. *Computers and Fluids*, vol. 29, no. 2, pp. 119–147.
- 10 Roller S., Munz C.D. (2000) A low Mach number scheme based on multi-scale asymptotics. *Computing and Visualization in Science*, vol. 3, no. 1/2, pp. 85–91.
- 11 Van Kan J. (1986) A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 7, pp. 870–891.
- 12 Donea J., Giuliani S.L.H., Quartapelle L. (1982) Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by fractional step method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 30, pp. 53–73.
- 13 Zienkiewicz O.C., Nithiarasu P., Codina R., Vazquez M., Orti. P. (1999) The characteristic-based-split procedure: An efficient and accurate algorithm for fluid problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 31, pp. 359.
- 14 Zienkiewicz O.C., Codina R. (1995) A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I. The split characteristic-based scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, pp. 887–913.
- 15 Zienkiewicz O.C., Morgan K., Sataya Sal, B.V.K., Codin R., Vasquez M. (1995) A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part II. Test on the explicit form. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, pp. 887–913.
- 16 Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2000) *The finite element method, 3: fluid dynamics*, Butterworth and Heinemann.
- 17 Turkel E. (1997) Preconditioning – Square methods for multidimensional aerodynamics. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 2025, 856 p.
- 18 Pelanti M. (2017) Low Mach number preconditioning techniques for Roe-type and HLLC-type methods for a two-phase compressible flow model. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 310, pp. 112–133.
- 19 Pelanti M., Shyue K.M. (2014) A mixture-energy-consistent six-equation two-phase numerical model for fluids with interfaces, cavitation and evaporation wave. *J. Comput. Phys.*, vol. 259, pp. 331–357.
- 20 Maia A.A.G., Kapat J.S., Tomita J.T., Silva J.F., Bringhamti C., Cavalca D.F. (2020) Preconditioning methods for compressible flow CFD codes: Revisited. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 186.
- 21 Darmofal D.L., Siu K. (1999) A robust multigrid algorithm for the Euler equations with local preconditioning and semi-coarsening. *J. Compu. Phys.*, vol. 151, no. 2, pp. 728–756.
- 22 Turkel E., Vatsa V.N., Radaspiel R. (1996) Preconditioning methods for low-speed flows. *AIAA*, vol. 96.

<sup>1\*</sup>МАНАРОВА А., <sup>2</sup>БЕКЕТАЕВА А. <sup>3,4</sup>МАКАРОВ В.

<sup>1</sup>Civil Aviation Academy, 050039, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup>Institute of mathematics and mathematical modeling CS MES RK,  
050010, Almaty, Kazakhstan

<sup>3</sup>Institute of control sciences RAS, 117997, Moscow, Russia

<sup>4</sup>National research nuclear university «MEPhI», 115409, Moscow, Russia

\*E-mail: manapova.a.k.math@gmail.com\*

## NUMERICAL MODELING OF ESSENTIALLY SUBSONIC FLOWS OF COMPRESSIBLE GAS

### Abstract

A new method for solving essentially subsonic flows is proposed, which represents a significant step in the field of numerical modeling of flows based on the Navier-Stokes system of equations. The method uses an ENO (Essentially Non-Oscillatory) scheme of third order accuracy, which provides higher accuracy when calculating flows with low speed of sound. One of the key features of this method is the introduction of nondimensionalization parameters. These parameters make it possible to adapt the Navier-Stokes equations to different physical conditions and avoid the rigidity of the equations, which is often encountered in numerical modeling problems. This makes the method more flexible and applicable to a variety of engineering and physical problems. To check and appropiate this technique, calculations are carried out for two important problems - flow inside a cavern and Poiseuille flow. The value of the Reynolds number,  $Re=100$ , as well as various sizes of computational grids are considered. The obtained results are compared with experimental data, and a high degree of agreement between the model and real phenomena is observed. This indicates the effectiveness and accuracy of the proposed method in solving complex flows in various engineering and physical problems.

**Key words:** compressible gas, Navier-Stokes equations, dimensionlessness, cavity, Poiseuille flow, Mach number.

<sup>1\*</sup>МАНАПОВА А.Қ., <sup>2</sup>БЕКЕТАЕВА А.О., <sup>3,4</sup>МАКАРОВ В.В.

<sup>1</sup>Азаматтық авиация академиясы, 050039, Алматы қ., Қазақстан

<sup>2</sup>ҚР БҒМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты,  
050010, Алматы қ., Қазақстан

<sup>3</sup>РҒА Басқару мәселелері институты, 117997, Мәскеу қ., Ресей

<sup>4</sup>«МИФИ» Ұлттық ядролық зерттеу университеті 115409, Мәскеу қ., Ресей

\*E-mail: manapova.a.k.math@gmail.com\*

## СЫҒЫЛАТЫН ГАЗДЫҢ ДЫБЫС ЖЫЛДАМДЫҒЫНА ДЕЙІНГІ АҒЫНДАРЫН САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

### Аңдатпа

Навье-Стокс теңдеулер жүйесіне негізделген ағындарды сандық модельдеу саласындағы маңызды кадамды білдіретін, мәні бойынша дыбысқа дейінгі ағындарды шешудің жаңа әдісі ұсынылды. Әдісте дыбыстың төмен жылдамдығы бар ағындарды есептеу кезінде жоғары дәлдікті қамтамасыз ететін үшінші ретті дәлдіктің ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемасы қолданылады. Бұл әдістің негізгі ерекшеліктерінің бірі өлшемсіз параметрлерді енгізу. Бұл параметрлер Навье-Стокс теңдеулерін әртүрлі физикалық жағдайларға бейімдеуге мүмкіндік береді және сандық модельдеу есептерінде жиі кездесетін теңдеулердің қатаңдығын болдырмайды. Бұл әдісті икемді етеді және оны әртүрлі инженерлік, физикалық мәселелерге қолдануға болады. Бұл әдістемені тексеру және апробациялау үшін үңгір ішіндегі ағын және Пуазейль ағыны сияқты екі маңызды мәселе бойынша есептеулер жүргізіледі. Рейнольдс санының мәні,  $Re=100$ , сондай-ақ есептеу торларының әртүрлі өлшемдері қарастырылады. Алынған нәтижелер эксперименттік мәліметтермен салыстырылып, модель мен нақты құбылыстардың жоғары дәрежеде сәйкестігі байқалды. Бұл әртүрлі инженерлік және физикалық есептерде күрделі ағындарды шешуде ұсынылған әдістің тиімділігі мен дәлдігін көрсетеді.

**Тірек сөздер:** сығылатын газ, Навье-Стокс теңдеулері, өлшемсіздендіру, каверна, Пуазейль ағыны, Мах саны.

**Информация об авторах****Манапова Айну́р Қа́бдешқызы** (автор для корреспонденции)

Магистр прикладной математики и информатики, сениор-лектор Академии гражданской авиации, ул. Ахметова, 44, 050039, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID: 0000-0003-1548-7061

E-mail: manapova.a.k.math@gmail.com

**Бекетаева Асель Орозалиевна**

Доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования КН МОН РК, ул. Пушкина, 125, 050010, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID: 0000-0003-4360-3728

E-mail: azimaras10@gmail.com

**Макаров Вадим Владимирович**

Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН, ул. Профсоюзная, 65, 117997, г. Москва, Россия

ORCID ID: 0000-0003-4874-5418

E-mail: makfone@mail.ru

**Авторлар туралы мәліметтер****Манапова Айну́р Қа́бдешқызы** (корреспонденция авторы)

Қолданбалы математика және информатика магистрі, Азаматтық авиация академиясының сениор-лекторы, 050039, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0003-1548-7061

E-mail: manapova.a.k.math@gmail.com

**Бекетаева Асель Орозалиевна**

Физика-математика ғылымдарының докторы, ҚР БҒМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институтының бас ғылыми қызметкері, Пушкин к., 125, 050010, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0003-4360-3728

E-mail: azimaras10@gmail.com

**Макаров Вадим Владимирович**

Техника ғылымдарының кандидаты, РФА Басқару мәселелері институтының жетекші ғылыми қызметкері, Профсоюзная к., 65, 117997, Мәскеу қ., Ресей

ORCID ID: 0000-0003-4874-5418

E-mail: makfone@mail.ru

**Information on the authors****Manapova Ainur** (corresponding author)

Master of applied mathematics and computer science, Senior Lecturer of Civil Aviation Academy, 050039, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0003-1548-7061

E-mail: manapova.a.k.math@gmail.com

**Beketaeva Assel**

Доктор физико-математических наук, Главный научный сотрудник института математики и математического моделирования КН МОН РК, ул. Пушкина, 125, 050010, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0003-4360-3728

E-mail: azimaras10@gmail.com

**Makarov Vadim**

Кандидат технических наук, Ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН, ул. Профсоюзная, 65, 117997, Moscow, Russia

ORCID ID: 0000-0003-4874-5418

E-mail: [makfone@mail.ru](mailto:makfone@mail.ru)