УДК 510.67, 519.76
МРНТИ 27.03.66, 28.25.19 DOI 10.55452/1998-6688-2021-18-2-73-78

О ЗАПРОСАХ БАЗ ДАННЫХ НАД ПОЧТИ ОМЕГА-КАТЕГОРИЧНОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ

КУЛПЕШОВ Б. Ш., МУСТАФИН Т. С.
Казахстанско-Британский технический университет, 050000, Алматы, Казахстан

Аннотация. *Мы исследуем реляционные базы данных над упорядоченной областью определения с некоторыми дополнительными отношениями – типичным примером является упорядоченное множество рациональных чисел с операцией сложения. В фокусе наших исследований запросы первого порядка, инвариантные относительно перестановок, сохраняющих порядок, – такие запросы называются порядково-генерическими. Установлено, что для некоторых областей порядково-генерические запросы первого порядка сводятся к запросам чистого порядка. Здесь мы доказываем теорему сводимости над почти омега-категоричной слабо о-минимальной областью определения, имеющей ранг выпуклости 1.*

Ключевые слова: *упорядоченная структура, слабая о-минимальность, состояние базы данных, запрос баз данных, почти омега-категоричность, ранг выпуклости.*

ОМЕГА-КАТЕГОРИЯ АЯСЫНДА РЕТТЕЛГЕН МӘЛІМЕТТЕР БАЗАСЫНЫҢ СҰРАУЛАРЫ ТУРАЛЫ

КУЛПЕШОВ Б. Ш., МУСТАФИН Т. С.
Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы, Қазақстан

Аңдатпа. *Біз реляциялық мәліметтер базасын қосымша қатынастармен реттелген аңықтау облысы бойынша зерттейміз – типикалық мысалы қосу операциямен рационалдық сандар реттелген жиыны болады. Біздің зерттеуіміз бірінші ретті сұраныстарға бағытталған, олар ретті сақтайтын ауыстыруға қатысты инвариантты болады – мұндай сұраныстар рет-генерикалық деп аталады. Кейбір облыстар үшін бірінші ретті рет-генерикалық сұраныстар таза реттік сұраныстарға дейін азайтылатыны аньқталды. Мұнда біз дөңестік рангісі 1 омега-категориялық дерлік әлсіз о-минималды анықтау аясында редукция теоремасын дәлелдейміз.*

Түйінді сөздер: *реттелген құрылым, әлсіз о-минималдық, мәлімет базасының күйі, мәлімет базасының сұранысы, омега-категориялық дерлік, дөңестік рангісі.*

ON DATABASE QUERIES OVER ALMOST OMEGA-CATEGORICAL ORDERED DOMAIN

KULPESHOV B.SH., MUSTAFIN T.S.
Kazakh-British technical university, 050000, Almaty, Kazakhstan

Abstract. *We consider relational databases organized over an ordered domain with some additional relations – a typical example is the ordered domain of rational numbers together with the operation of addition. In the focus of our study are the first-order (FO) queries that are invariant under order-preserving permutations – such queries are called order-generic. It was discovered that for some domains order-generic FO queries fail to express more than pure order queries. Here we prove the collapse result theorem over an almost omega-categorical weakly o-minimal domain having convexity rank 1.*

Keywords: *ordered structure, weak o-minimality, database state, database query, almost omega-categoricity, convexity rank.*

Введение

В реляционной модели баз данных, введенной Э.Ф. Коддом [1–2], состояние базы данных понимается как конечная совокупность отношений между элементами. Имена отношений и их арности (местности) фиксируются и называются *схемой базы данных.* Отдельная информация, хранимая в отношениях данной схемы, называется *состоянием базы данных.* Хотя реляционные базы данных были придуманы для конечных совокупностей данных, часто удобно предполагать, что существует бесконечная *область определения* – например, целые или рациональные числа, – так что элементы данных выбираются из этой области. Функции и отношения, определенные на всей области определения (например, < и +), могут быть также использованы при запрашивании. Например, если в качестве языка запросов используется язык логики предикатов первого порядка, то запросы могут использовать как отношения базы данных, так и отношения области определения, при этом переменные изменяются на всей области определения. Выразительная сила запросов баз данных исследовалась в работах [3–10].

Формальная постановка

Пусть M – бесконечная структура сигнатуры L. Здесь мы рассматриваем упорядоченные структуры. Это означает, что L включает бинарный реляционный символ <, интерпретация которого в M удовлетворяет аксиомам линейного порядка. Мы фиксируем схему базы данных SC и вводим следующие обозначения:

$$L_0 = \{<\},\quad L` = L_0 \cup SC,\quad L`` = L \cup SC.$$

Запрос базы данных может быть формально определен как отображение, которое принимает состояние базы данных и производит новое отношение фиксированной арности над M. Мы рассматриваем два языка для запрашивания. Запросы первого языка есть формулы сигнатуры L` – мы называем их *ограниченными.* Запросы второго языка есть формулы сигнатуры L`` – мы называем их *расширенными*.

Итак, базы данных предназначены для хранения текущей информации о как-то структурированной предметной области. В каждый момент времени эта информация является *конечной* и представляет собой *конечный* набор *конечных* таблиц. Обычно число таблиц и устройство каждой таблицы не меняются с течением времени, но меняются строки таблиц. Могут добавляться новые строки и удаляться некоторые старые. Строки хранящихся таблиц представляют собой конечные последовательности элементов. Число элементов каждой последовательности фиксировано для фиксированной таблицы. Устройство таблицы практически и есть число элементов в каждой строке этой таблицы. Более формально каждая таблица – это конечно местное конечное отношение, а сама база данных – это конечный набор конечно местных конечных отношений. Для удобства разговора о базе данных каждому ее отношению приписывают некоторое имя с указанием числа аргументов (или местности) этого имени отношения. *Схема* (или сигнатура) базы данных и есть конечная последовательность этих имен отношений с указанием местности каждого имени. В каждый момент времени именам отношений из этой схемы присвоены некоторые отношения соответствующих местностей. Это *состояние* базы данных в данный момент.

Состояние называется конечным, если все его отношения конечны. Иногда удобно рассматривать не произвольные состояния базы данных, а ограниченные какими-то условиями. Типичным ограничением является условие, что элементы всех строк всех таблиц выбраны из фиксированного подмножества I универсума. Другими словами, каждому имени отношения из рассматриваемой схемы базы данных поставлено в соответствие отношение той же местности на множестве I. В этом случае говорят, что рассматриваемое состояние базы данных является состоянием над I.

Мы будем рассматривать *локально генерические запросы*, которые являются инвариантами при любых сохраняющих линейное упорядочение отображениях конечных подмножеств универсума в универсум. Грубо говоря, ответ на такой запрос основывается на хранящейся информации, но не зависит от способа кодировки этой информации при хранении.

– Определение 1. Будем говорить что k–арный запрос Θ является *локально генерическим над конечными состояниями*, если $\bar{a} \in \Theta$ тогда и только тогда когда $\phi(\bar{a}) \in \Theta(\phi(s))$ для любого частичного <-изоморфизма φ : X –> M, где X ⊆ M для любого конечного состояния s над X и для любого k-кортежа $\overline{a}$ в X.

Состояние S обогащает универсум M сигнатуры L до L''-структуры, которую мы будем обозначать как (M, s).

Определение 2. ρ-состояние s для L -структуры W называется *псевдоконечным* в W, если (W, s) есть модель L'' - теории первого порядка всех структур (W, r), где W – конечное состояние над W.

Псевдо-конечное множество – это частный случай псевдоконечного состояния. Имеется в виду сигнатура, состоящая из одного одноместного отношения и некоторых других отношений. Рассматриваются такие системы этой сигнатуры, на которых выполняются все замкнутые формулы логики предикатов, истинные на всех конечных системах этой сигнатуры. Тогда интерпретация этого одноместного отношения в такой системе называется псевдоконечным множеством.

Определение 3. Будем говорить что полная теория T имеет *Свойство Изоляции,* если существует кардинал λ такой, что для любого псевдоконечного множества A и для любого элемента a модели теории T существует $A_0 \subseteq A$ такое, что $|A_0| < \lambda$ и tp(a/A_0) изолирует tp(a/A).

Для произвольных подмножеств A, B структуры M пишут A < B, если a < b всякий раз, когда a ∈ A и b ∈ B. Если A ⊂ M и x ∈ M, то пишут A < x, если A < {x}. Для произвольного полного 1-типа p через p(M) обозначают множество реализаций типа p в M. *Открытым интервалом* I в структуре M называется параметрически определимое подмножество структуры M вида I = {c ∈ M: M | = a < c < b} для некоторых a, b ∈ M ∪ {– ∞, ∞}, где a < b. Аналогично можно определить *замкнутые, полуоткрытые-полузамкнутые* и т.п. интервалы в M, так что, например, произвольная точка структуры M является сама (тривиальным) замкнутым интервалом. Подмножество A структуры M называется *выпуклым*, если для любых a, b ∈ A и c ∈ M всякий раз, когда a < c < b следует, что c ∈ A.

Данная статья касается понятия *слабой о-минимальности,* первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стайнхорном в [11]. *Слабо о-минимальная структура* есть линейно упорядоченная структура M = (M, =, <, …) такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной,* если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [12].

Определение 4. [12] Пусть M – линейно упорядоченная структура, ϕ(x) – M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости* формулы ϕ (RC(ϕ (x))) определяется следующим образом:

1) RC(ϕ(x)) ≥ 1, если ϕ (M) бесконечно

2) RC(ϕ(x)) ≥ α + 1, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности E(x, y), такое что существуют b_i, i ∈ ω, которые удовлетворяют следующим условиям:

– ---> Для любых i, j ∈ ω, всякий раз когда i ≠ j, тогда M |=¬ E(b_i, b_j)

– ---> Для любого i ∈ ω, RC(E(x, b_i)) ≥ α

– ---> Для любого i ∈ ω, E(M, b_i) выпукло и E(M, b_i) ⊂ ϕ (M)

3. RC(ϕ x)) ≥ δ, если RC(ϕ (x)) ≥ α для всех α ≥ δ, (δ предельный ординал). Если RC(ϕ (x)) = α для некоторого α, мы говорим что RC(ϕ (x)) ≥ α для всех α) мы полагаем RC(ϕ (x)) = ∞.

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов. Очевидно, что о-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1.

Определение 5. [13] Пусть M – слабо о-минимальная структура, A, B ⊆ M, M – $|A|^+$-насыщенна, p, q ∈ $S_1(A)$ – неалгебраические. Будем говорить, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют A-определимая формула H(x, y), α ∈ p(M) и β_1, β_2 ∈ q(M) такие что β_1∈ H(M, α) и $\beta_2 \notin$ H(M, α)

Определение 6. [14, 15] Пусть T – полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ называется $(p_1, \ldots, p_n)$-*типом*, если $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \cup_{i=1}^n p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T обозначается через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти омега-категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.

Почти омега-категоричность тесно связана с понятием эренфойхтовости теории. Так, в работе [14] доказано, что если T почти омега-категоричная теория, имеющая ровно три счетные попарно неизоморфные модели, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок. Тем не менее существует пример (построенный Перетятькиным М.Г. в [16]) теории, имеющей ровно три счетные попарно неизоморфные модели, но не являющейся почти омега-категоричной.

В работе [17] установлены почти омега-категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий и выполнимость принципа замены для алгебраического замыкания для почти омега-категоричных вполне о-минимальных теорий. Недавно были доказаны ортогональность любого семейства попарно слабо ортогональных неалгебраических 1-типов над пустым множеством для таких теорий и бинарность почти омега-категоричных вполне о-минимальных теорий [18] и почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 [19].

В настоящей работе исследуется проблема выразимости расширенных запросов через ограниченные над почти омега-категоричной слабо о-минимальной областью определения баз данных, имеющей ранг выпуклости 1. Мы доказываем, что почти омега-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1 имеет свойство Изоляции. В качестве следствия мы получаем сводимость расширенных запросов к ограниченным над почти омега-категоричной слабо о-минимальной областью определения.

Результаты.

Теорема 7. [19] Любая почти омега-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1 является бинарной.

Теорема 8. [3] Предположим, что теория первого порядка структуры M имеет Свойство Изоляции. Пусть расширенный запрос φ является локально генерическим над конечными состояниями. Тогда φ эквивалентен над конечными состояниями ограниченному запросу.

Теорема 9. Пусть T – почти омега-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда T имеет Свойство Изоляции.

Доказательство теоремы 9. Пусть M – достаточно насыщенная модель теории T. Возьмем произвольные элемент $a \in M$ и бесконечное множество $A \subseteq M$ и рассмотрим $p(x) := tp(a/A)$. В силу слабой о-минимальности p(M) выпукло и, следовательно, тип p(x) определяется выпуклыми формулами.

Случай 1. p(x) – изолированный. Тогда существует формула $\phi(x, \bar{b})$, где $\bar{b} \in A$, такая, что $\phi(M, \bar{b})$ выпукло и $p(M) = \phi(M, \bar{b})$. Таким образом, в качестве A_0 можем взять множество элементов из кортежа $\bar{b}$.

Случай 2. p(x) – квазирациональный. Не умаляя общности, предположим, что p(x) – квазирациональный вправо. Тогда существует выпуклая формула $U(x, \bar{b})$ для некоторого $\bar{b} \in A$, так что $p(M) \subseteq U(M, \bar{b})$ и $U(M, \bar{b})^+ = p(M)^+$. В силу бинарности T для любой выпуклой формулы $\varphi_i(x, \bar{b}_i) \in p$ левая граница множества $\varphi_i(M, \bar{b}_i)$ определяется выпуклой формулой $\varphi_i^1(x, b_i^1)$ для некоторого $b_i^1 \in \bar{b}_i$ В силу почти омега-категоричности попарно неэквивалентных выпуклых формул $\theta(x, b_i^1)$ с условием $p(M) \subseteq \theta(M, b_i^1)$ конечное число. Таким образом, мы заключаем что левая граница множества p(M) определяется счетным числом констант из A. Поэтому в качестве A_0 можем взять счетное подмножество множества A.

Случай 3. p(x) – иррациональный. В этом случае можно показать аналогично случаю 2, что как левая, так и правая границы множества p(M), определяются счетным множеством констант из A.

Таким образом, в качестве λ можем взять первый несчетный кардинал ω_1. Следовательно, T имеет Свойство Изоляции.

Заключение

Таким образом, в качестве следствия получаем, что если T почти омега-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, то любой расширенный запрос, являющийся локально генерическим над конечными состояниями, эквивалентен ограниченному запросу.

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544).

REFERENCES

1. E.F. Codd. A relational model for large shared data banks // Communications ACM. – 1970. – Vol. 13. – No. 6. - P. 377-387.
6. E.F. Codd. Relational completeness of database sublanguages // Database systems. – Prentice-Hall. – 1972. – P. 33-64.
7. M. Benedikt, G. Dong, L. Libkin, L. Wong. Relational expressive power of constraint query languages // Journal of ACM. – 1998. – Vol. 45. – No. 1. – P. 1-34.
8. O.V. Belegradek, A.P. Stolboushkin, and M.A. Taitslin. Extended order-generic queries // Annals of Pure and Applied Logic. – 1999. – Vol. 97. – P. 85-125.
9. M.A. Taitslin. A general condition for collapse results // Annals of Pure and Applied Logic. – 2002. – Vol. 113. – No. 1-3. – P. 323-330.
10. С.М. Дудаков, М.А. Тайцлин. Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных // Успехи математических наук. – 2006. – Т. 61. – № 2. – С. 3-66.
11. B.Sh. Kulpeshov. On Problem of Expressiveness of Database Queries // International Journal of Mathematics, Computer Sciences and Information Technology. – 2010. – Vol. 3. – No. 2. – P. 123-128.
12. B.Sh. Kulpeshov. To Reducibility of Database Queries over an Ordered Domain // Computer Modelling and New Technologies. – 2012. – Vol. 16. – No. 2. – P. 34-39.
13. B.Sh. Kulpeshov. On Reducibility of database queries over a circularly minimal domain // Advances in Computational Sciences and Technology. – 2013. – Vol. 6. – No. 1. – P. 25-33.
14. B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov. On the Isolation Property over a Database Domain // Journal of Mathematics and System Science. – 2013. – Vol. 3. – No. 2. – P. 96-100.
15. H.D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352. – P. 5435–5483.
16. B.Sh. Kulpeshov. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – Vol. 63. – P. 1511–1528.
17. B.S. Baizhanov. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – Vol. 66. – P. 1382–1414.
18. K. Ikeda, A. Pillay, A. Tsuboi. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly. – 1998. – Vol. 44. – No. 2. – P. 161–166.
19. S.V. Sudoplatov. Classification of countable models of complete theories. — Part 1. — Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House. — 2018. — ISBN 978-5-7782-3527-4. — 326 p.
20. M.G. Peretyat'kin. A theory with three countable models // Algebra and Logic. – 1980. – Vol. 19. – No. 2. – P. 139-147.

21. B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov. Linearly ordered theories which are nearly countably categorical // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101. – No. 3. – P. 475–483.
22. A.B. Altayeva, B.Sh. Kulpeshov. Binarity of almost ω -categorical quite o-minimal theories // Siberian Mathematical Journal. 2020. – Vol. 61. – No. 3. – P. 379-390.
23. B.Sh. Kulpeshov, T.S. Mustafin. Almost ω -categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 62. – No. 1. – P. 52-65.

Information about authors:

1. Kulpeshov Beibut Shayikovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kazakh-British Technical University, st. Tole bi 59
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-4242-0463
Email: b.kulpeshov@kbtu.kz
2. Mustafin Timur Salymovich – Lecturer, Kazakh-British Technical University, st. Tole bi 59
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9916-4168
Email: t.mustafin@kbtu.kz