УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-3-45-50

Вербовский В.В.*[1], Ершигешова А.Д.[2]

[1]Казахский национальный исследовательский технический университет
им. К.И. Сатпаева, 050013, г. Алматы
[2]Университет им. Сулеймана Демиреля, 040900, г. Каскелен
*E-mail: v.verbovskiy@satbayev.university

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ С ОПРЕДЕЛИМОЙ ОДНОМЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И СВОЙСТВО НЕЗАВИСИМОСТИ

Аннотация. После появления понятия о-минимальности, которое было введено Л. ван ден Дриесом для обогащений упорядоченного поля вещественных чисел и обобщено на произвольные линейные порядки А. Пиллаем и Ч. Стайнхорном, линейно упорядоченные структуры прочно вошли в круг интересов специалистов по теории моделей. В работах разных авторов появились многочисленные обобщения понятия о-минимальности, такие как слабая о-минимальность, квази-о-минимальность, слабая квази-о-минимальность, дп-минимальность и упорядоченная стабильность. Б.С. Байжановым и В.В. Вербовским было доказано, что упорядоченная стабильность обобщает все вышеперечисленные понятия для линейно упорядоченных структур и что упорядоченная стабильность влечет отсутствие свойства независимости. Также ими было доказано, что любой линейный порядок имеет упорядоченно суперстабильную теорию. В.В. Вербовским были исследованы упорядоченно стабильные упорядоченные группы, в частности, им было доказано, что они являются коммутативными. В данной работе мы начинаем исследование вопроса, насколько сложной может быть теория линейного порядка с одной одноместной функцией. Мы строим пример обогащения линейно упорядоченной структуры одной одноместной функцией, который обладает свойством независимости.

Ключевые слова: линейно упорядоченное множество, свойство независимости, унар, упорядоченная стабильность, о-минимальность.

Введение

Обобщая понятие тотально трансцендентной теории, С. Шелах в работе [10] ввел понятие стабильной теории, которое оказало колоссальное влияние на дальнейшее развитие теории моделей. В 1984 г. А. Пиллай и Ч. Стайнхорн обобщили понятие о-минимального обогащения упорядоченного поля вещественных чисел, которое ввел Л. ван ден Дриес. Они ввели понятие о-минимальной структуры [7]. Это понятие оказалось не менее интересным, чем понятие стабильной теории, и стало поворотным в дальнейшем развитии теории моделей, теперь специалисты по теории моделей обратили свое пристальное внимание на классы теорий логики предикатов первого порядка, в сигнатуре которых имеется символ , который интерпретируется как линейный порядок, то есть эти теории включают в себя аксиомы линейного порядка. Понятие о-минимальности не могло не повлечь за собой появление самых различных обобщений. Первое из них – понятие слабой о-минимальности, которое было введено в работе Д. Макферсона, Д. Маркера и Ч. Стайнхорна [6]. Дальнейшее развитие теории слабой о-минимальности получило среди специалистов по теории моделей из Казахстана, мы не будем перечислять все работы, отметим лишь некоторые: работу Б.С. Байжанова [4], в которой он решал проблему Г. Черлина, и работы Б.Ш. Кулпешова [8, 9]. Дальше появилось понятие квази-о-минимальности, дп-минимальности, на которых мы подробно останавливаться не будем. Понятие квази-о-минимальности для упорядоченных групп оказалось эквивалентным понятию косет-минимальности. Среди работ по косет-минимальным группам можно отметить статью [5]. Некоторым итогом этих обобщений классов теорий упорядоченных структур стало понятие упорядоченной стабильности, введенное в работе [1]. Класс упорядоченно стабильных теорий включает в себя и о-минимальные теории, и слабо о-минимальные, квази-о-минимальные и слабо квази-о-минимальные [1], а также дп-минимальные теории с определимым линейным порядком [2]. Дальнейшее свое развитие теория упорядоченной стабильности получила в работах [11–16]. В статье [1] Б.С. Байжановым и В.В. Вербовским было доказано, что элементарная теория любого чистого линейного порядка является упорядоченно суперстабильной. Поэтому перед специалистами в теории моделей встает естественный вопрос: а что можно добавить в сигнатуру чистого линейного порядка, чтобы полученные алгебраические структуры были бы достаточно хорошими? Самым естественным было добавить символ двуместной операции, который удовлетворял бы аксиомам группы. Более того, естественно было положить, что такая группа является упорядоченной. В работе [3] было доказано, что упорядоченно стабильная упорядоченная группа является коммутативной, кроме того, были получены и другие интересные свойства упорядоченно стабильных упорядоченных групп.

Теперь мы решили рассмотреть, что будет, если к языку чистого линейного порядка добавить одну одноместную функцию – унар. В данной работе мы построим пример линейно упорядоченной структуры с одной одноместной функцией, которая обладает свойством независимости, таким образом, получаем, что элементарная теория этой структуры не является упорядоченно стабильной.

Целью данной работы является продвижение к проблеме нахождения условий, как необходимых, так и достаточных, которые бы обеспечивали упорядоченную стабильность обогащения чистого линейного порядка одной одноместной функцией.

На данном этапе мы доказали, что эти условия не могут быть тривиальными, поскольку существует пример такого обогащения, чья элементарная теория не является упорядоченно стабильной. Более того, этот пример обладает свойством независимости.

Основная часть

В работе начато исследование теоретико-модельных свойств алгебраических линейно упорядоченных структур с одной одноместной функцией. Если чистые линейные порядки и линейные порядки с произвольным числом одноместных предикатов достаточно хорошо изучены, из теоремы Рубина следует полное описание 1-типов над моделью, то свойства линейных порядков с одной одноместной функцией еще не были исследованы. Таким образом, в некотором смысле тематика является новой. Что же касается исследований линейно упорядоченных структур с точки зрения упорядоченной стабильности, то их совсем немного, практически все результаты по этой тематике содержатся в работах [1–3, 11, 13, 16]. Основным результатом статьи является построение примера линейно упорядоченной структуры с одной одноместной функцией, которая обладает свойством независимости.

Материалы и методы

В работе использовались известные методы теорий моделей полных теорий логики предикатов первого порядка, в частности касающиеся свойства независимости и построения формульных подмножеств данной алгебраической структуры.

Результаты исследования и их обсуждение

Пусть s – некоторый частичный n - тип, A – множество, Δ – семейство формул от n свободных переменных, где свободные переменные, вместо которых будут поставлены параметры, в счет не идут. Тогда

$$S^n_{\Delta,s}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in S^n_{\Delta}(A): p \cup s \text{совместно}\}$$

Если Δ = L, то будем опускать этот индекс и писать просто S^n_s. Заметим, что s не обязательно является частичным типом над множеством A. Если же $\Delta = \{\varphi\}$, то будем писать $S_\varphi(A)$ вместо $S_{\{\varphi\}}(A)$.

Определение 1. Пусть M – некоторая структура, $A \subseteq M$. Пусть Δ и ∇ – семейства формул вида $\varphi(x;\overline{y})$.

1. Структура M называется стабильной с точностью до Δ в (λ, ∇), если для любого подмножества $A \subseteq M$, такого что $A \vee\leq \lambda$, для любого Δ-типа p над M существует самое большее λ∇-типов над A, которые совместны с p, то есть $S^1_{\nabla,p}(A) \vee\leq \lambda$.

2. Теория T называется стабильной с точностью до Δ в (λ, ∇), если каждая ее модель такова. В некоторых случаях будем писать, что теория T (λ, ∇)-стабильна с точностью до Δ.

3. Если ∇ = L, то будем опускать этот индекс и писать, что теория T стабильна в λ, или -стабильна с точностью до Δ.

4. Теория T называется стабильной с точностью до Δ, если существует бесконечный кардинал λ, в котором теория T стабильна с точностью до Δ. Будем писать, что теория T стабильна с точностью до φ, подразумевая, что она стабильна с точностью до $\Delta = \{\varphi\}$.

5. Теория называется суперстабильной с точностью до Δ, если существует кардинал λ, такой, что теория T стабильна с точностью до Δ во всех $\mu \geq \lambda$.

6. Пусть $\varphi(x; y) \overset{\text{def}}{=} x < y$, а теория T содержит аксиомы линейного порядка для предиката. Если теория T стабильна с точностью до φ, то T называется упорядоченно стабильной.

Определение 2. Будем говорить, что формула $\varphi(\overline{x}; \overline{y})$ обладает свойством независимости, если для каждого натурального положительного числа существуют кортежи $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ и кортежи $\overline{b}_\tau$, где τ пробегает множество всех функций из $\{1, \dots, n\}$ в $\{0,1\}$, такие, что для каждого индекса является истинной формула

$$i = 1n\varphi^{\tau(i)}(\overline{b}_\tau; \overline{a}_i)$$

Здесь мы используем стандартную запись, что φ^1 обозначает φ, а φ^0 обозначает $\neg\varphi$.

В работе [1] было доказано, что упорядоченно стабильные теории не обладают свойством независимости.

Построение примера

Мы будем использовать тот факт, что множество натуральных чисел вместе с отношением делимости обладает свойством независимости. Здесь $b \vee a$ интерпретируется как число α делит b число без остатка. Действительно, будем брать в качестве α простые числа $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n, \dots$ Зафиксируем число n > 1 и функцию τ. В качестве числа b_τ мы возьмем следующее число:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{\tau(i)}$$

Пусть φ (b, α) будет $b \vee a$. Очевидно, что для любого τ является истинной формула

$$i = 1n\varphi^{\tau(i)}(b_\tau, p_i)$$

Действительно, произведение чисел $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\tau(i)}$ делится на число p_j тогда и только тогда, когда показатель степени $\tau(j)$ множителя p_j в рассматриваемом произведении больше нуля.

В качестве носителя нашей алгебраической структуры мы рассмотрим множество рациональных чисел Q. То есть мы рассмотрим структуру $Q = (Q, <, f)$, где V – естественный порядок на множестве рациональных чисел, а функцию f мы определим ниже.

Если $q \in Q$ больше нуля и является целым числом, то $f(q) = 1$.

Если $q \in Q$ больше нуля, но не является целым числом, то $f(q) = 0$.

Пусть множество A_i содержит все положительные числа, которые делятся на простое число p_i. Полуинтервал (-1,0], как подмножество множества рациональных чисел, является счетным множеством, точно так же, как и множество A_1 положительных целых чисел, которые делятся на $p_1 = 2$ (то есть четных чисел). Значит, существует биекция $g_1 : (-1,0] \to A_1$. Определим функцию f на множестве (-1,0] тождественно равной функции g_1.

Аналогично полуинтервал $(-n, -n+1]$, как подмножество множества рациональных чисел, является счетным множеством, точно так же, как и множество A_n положительных целых чисел, которые делятся на n-тое простое число p_n. Следовательно, существует биекция $g_n : (-n, -n+1] \to A_n$. Определим функцию f на множестве $(-n, -n+1]$ тождественно равной функции g_n.

Таким образом, функция f является всюду определенной.

Покажем теперь, что множество A_n формульно в структуре $Q = (Q, <, f)$. Действительно, $x \in A_n$ тогда и только тогда, когда

$$\exists y(-n < y \leq -n + 1 \wedge x = f(y))$$

Обозначим последнюю формулу как $\psi(x; -n, -n+1)$. Очевидно, что по построению множество всех реализаций формулы $\psi(x, -n, -n+1)$ в структуре Q совпадает с множеством A_n, которое, в свою очередь, совпадает с множеством всех реализаций формулы $\varphi(x, p_n)$ в структуре, если рассматривать N как подмножество множества Q.

Отсюда очевидно, что формула $\psi(x; y, z)$ обладает свойством независимости. Следовательно, элементарная теория алгебраической структуры Q не является упорядоченно стабильной.

Заключение

Обогащения линейных порядков одноместной функцией могут иметь достаточно сложную теорию, в частности они могут обладать свойством независимости. Цель дальнейших исследований – найти условия, которые бы обеспечивали упорядоченную стабильность подобных обогащений.

Информация о финансировании

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МНВО РК, грант № AP09259295.

Литература

1 Байжанов Б.С., Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные теории. Алгебра и логика, 50:3 (2011), 303–325.

2 Вербовский В.В. Дп-минимальные и упорядоченно стабильные структуры, Математический журнал, 10:2 (2010), 35–38.

3 Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные группы. Математические труды, 13:2 (2010), 84–127.

4 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates. The Journal of Symbolic Logic, 66:3 (2001), 1382–1414.

5 Belegradek O. V., Verbovskiy V. V., Wagner F. O. Coset-minimal groups, Annals of Pure and Applied Logic, 121:2-3 (2003), 113–143.

6 Macpherson D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), 5435–5483.

7 Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures.1. Transactions of The American Mathematical Society, 295 (1986), 565–592.

8 Kulpeshov B. S. Weakly o-minimal structures and some of their properties. The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), 1511–1528.

9 Kulpeshov B. S. Criterion for binarity of omega-categorical weakly o-minimal theories. Annals of Pure and Applied Logic, 145 (2007), 354–367.

10 Shelah S. Stable theories. Israel Journal of Mathematics, 7 (1969), 187–202.

11 Verbovskiy V.V. O-stable ordered groups. Siberian Advances in Mathematics, 22 (2012), 50–74.

12 Verbovskiy V.V. On a classification of theories without the independence property, Mathematical Logic Quarterly 59 (2013), 119–124.

13 Verbovskiy V.V. On ordered groups of Morley o-rank 1. Siberian Electronic Mathematical Reports 15 (2018), 314–320.

14 Verbovskiy V.V. On commutativity of circularly ordered c-o-stable groups, Eurasian Mathematical Journal, 4:9 (2018), 91–98.

15 Verbovskiy V.V. On definability of types and relative stability, Mathematical Logic Quarterly 65 (2019), 332–346.

16 Verbovskiy V.V., Dauletiyarova A. B. Piecewise monotonicity for unary functions in o-stable groups. Algebra and Logic 60, 1 (2021), 23–38.

References

1 Bajzhanov B.S., Verbovskij V.V. (2011) Uporjadochenno stabil'nye teorii. Algebra i logika, 50:3, pp. 303–325.

2 Verbovskij V.V. (2010) Dp-minimal'nye i uporjadochenno stabil'nye struktury, Matematicheskij zhurnal, 10:2, pp. 35–38.

3 Verbovskij V.V. (2010) Uporjadochenno stabil'nye gruppy. Matematicheskie trudy, 13:2, pp. 84–127.

4 Baizhanov B.S. (2001) Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates. The Journal of Symbolic Logic, 66:3, pp. 1382–1414.

5 Belegradek O.V., Verbovskiy V.V., Wagner F.O. (2003) Coset-minimal groups, Annals of Pure and Applied Logic, 121:2-3, 113–143.

6 Macpherson D., Marker D., Steinhorn C. (2000) Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of The American Mathematical Society, 352, pp. 5435–5483.

7 Pillay A., Steinhorn Ch. (1986) Definable sets in ordered structures.1. Transactions of The American Mathematical Society, 295, pp. 565–592.

8 Kulpeshov B.S. (1998) Weakly o-minimal structures and some of their properties. The Journal of Symbolic Logic, 63, pp. 1511–1528.

9 Kulpeshov B.S. (2007) Criterion for binarity of omega-categorical weakly o-minimal theories. Annals of Pure and Applied Logic, 145, pp. 354–367.

10 Shelah S. (1969) Stable theories. Israel Journal of Mathematics, 7, pp. 187–202.

11 Verbovskiy V.V. (2012) O-stable ordered groups. Siberian Advances in Mathematics, 22, pp. 50–74.

12 Verbovskiy V.V. (2013) On a classification of theories without the independence property, Mathematical Logic Quarterly 59, pp. 119–124.

13 Verbovskiy V.V. (2018) On ordered groups of Morley o-rank 1. Siberian Electronic Mathematical Reports 15, pp. 314–320.

14 Verbovskiy V.V. (2018) On commutativity of circularly ordered c-o-stable groups, Eurasian Mathematical Journal, 4:9, pp. 91–98.

15 Verbovskiy V.V. (2019) On definability of types and relative stability, Mathematical Logic Quarterly 65, pp. 332–346.

16 Verbovskiy V.V., Dauletiyarova A.B. (2021) Piecewise monotonicity for unary functions in o-stable groups. Algebra and Logic 60, 1, pp. 23–38.

Информация об авторах

Виктор Вербовский (автор для корреспонденции)

Доктор физико-математических наук, доцент, профессор Satbayev University, ул. Сатпаева, 22, 050013, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID 0000-0001-5177-8523

E-mail: v.verbovskiy@satbayev.university

Айша Ершигешова

Магистр математики, старший преподаватель Университета им. Сулеймана Демиреля, ул. Абылай хана, 1/1, 040900, г. Каскелен, Казахстан

ORCID ID 0000-0001-6732-1077

E-mail: aisha.yershigeshova@sdu.edu.kz

Авторлар туралы мәліметтер

Виктор Вербовский (корреспонденция авторы)

Физика-математика ғылымдарының докторы, доцент, Satbayev University профессоры, Сәтбаев көш., 22, 050013, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID 0000-0001-5177-8523

E-mail: v.verbovskiy@satbayev.university

Айша Ершигешова

Математика магистрі, Сулейман Демирель атындағы университеттің аға оқытушысы, Абылай хан көш., 1/1, 040900, Қаскелең қ., Қазақстан

ORCID ID 0000-0001-6732-1077

E-mail: aisha.yershigeshova@sdu.edu.kz

Information about authors

Viktor Verbovskiy (corresponding author)

Doctor of physical and mathematical sciences, docent, professor of Satbayev University, 22a Satpaev str., 050013, Almaty, Kazakhstan

ORCID ID 0000-0001-5177-8523

E-mail: v.verbovskiy@satbayev.university

Aisha Yershigeshova
Master of mathematics, Senior Lecture of Suleyman Demirel University, 1/1 Abylai Khan st., 040900, Kaskelen, Kazakhstan
ORCID ID 0000-0001-6732-1077
E-mail: aisha.yershigeshova@sdu.edu.kz

Вербовский В.В.*[1], Ершигешова А.Д.[2]

[1]Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті, 050013, Алматы қ.
[2]Сулейман Демирель атындағы университет, 040900, Қаскелең қ.,
*E-mail: v.verbovskiy@satbayev.university

АНЫҚТАЛАТЫН БІР ОРЫНДЫҚ ФУНКЦИЯСЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ РЕТТЕРДІҢ МЫСАЛДАРЫ ЖӘНЕ ТӘУЕЛСІЗДІК ҚАСИЕТІ

Аңдатпа. Нақты сандардың реттелген өрісін байыту үшін Л. ван ден Дриес енгізген және А. Пиллай мен Ч. Стайнхорнның ерікті сызықтық реттерге жалпыланған о-минималдылық тұжырымдамасы пайда болғаннан кейін сызықтық реттелген құрылымдар модельдер теориясы мамандарының қызығушылықтар шеңберінде берік орнықты. Әртүрлі авторлардың еңбектерінде әлсіз о-минималдық, квази-о-минималдық, әлсіз квази-о-минималдық, дп-минималдық және реттелген тұрақтылық сияқты о-минималдық ұғымының көптеген жалпылаулары пайда болды. Б.С. Байжанов пен В.В. Вербовский реттелген тұрақтылық сызықтық реттелген құрылымдар үшін жоғарыда аталған барлық ұғымдарды жалпылайтынын және реттелген тұрақтылық тәуелсіздік қасиетінің жоқтығынан туындайтынын дәлелдеді. Олар сондай-ақ кез келген сызықтық реттің реттелген супертұрақты теориясы бар екенін дәлелдеді. В.В. Вербовский реттелген тұрақты ретті топтарды зерттеді, атап айтқанда, олардың коммутативті екенін дәлелдеді. Бұл жұмыста біз бір орынды функциямен сызықтық тәртіп теориясы қаншалықты күрделі болуы мүмкін деген сұрақты зерттеуді бастаймыз. Сызықтық реттелген құрылымды тәуелсіздік қасиеті бар бір орынды функциямен байыту мысалын құрастырамыз.

Тірек сөздер: сызықтық реттелген жиын, тәуелсіздік қасиеті, унар, реттелген тұрақтылық, о-минималдық.

Verbovskiy V.V.*[1], Ershigeshova A.D.[2]

[1]Satbayev University, 050013, Almaty
[2]Suleyman Demirel University, 040900, Kaskelen
*E-mail: v.verbovskiy@satbayev.university

EXAMPLES OF LINEAR ORDERS WITH A DEFINABLE UNARY FUNCTION AND THE INDEPENDENCE PROPERTY

Abstract. After the appearance of the concept of o-minimality, which was introduced by L. van den Dries for expansions of the ordered field of real numbers and generalized to arbitrary linear orders by A. Pillay and C. Steinhorn, linearly ordered structures became firmly established in the circle of interests of specialists in model theory. Numerous generalizations of the concept of o-minimality have appeared in the works of various authors, such as weak o-minimality, quasi-o-minimality, weak quasi-o-minimality, dp-minimality, and o-stability. B. S. Baizhanov and V. V. Verbovskiy proved that o-stability generalizes all the above concepts for linearly ordered structures and that o-stability entails the absence of the independence property. They also proved that any linear order has an o-superstable theory. V. V. Verbovskiy studied o-stable ordered groups, in particular, he proved that they are commutative. In this paper, we begin the study of the question of how complex the theory of a linear order with one unary function can be. We construct an example of an expansion of a linearly ordered structure with one unary function, which has the independence property.

Key words: linearly ordered set, independence property, unar, o-stability, o-minimality.