ӘОЖ 510.67
ҒТАХР 27.03.66
https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-49-56

Кулпешов Б.Ш.
Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан
Математика және математикалық модельдеу институты, 050010, Алматы қ., , Қазақстан
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАР МОДЕЛДЕРІНІҢ ГИПЕРГРАФТАРЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Аңдатпа. Бұл жұмыста біз әлсіз о-минималды теориялар модельдерінің гиперграфтар үшін салыстырмалы H-еркіндік және салыстырмалы H-тәуелсіздік ұғымдарын зерттейміз. Теорияның модельдердің гиперграфтары теориялардың өздері туралы да, соған байланысты семантикалық объектілер туралы да маңызды құрылымдық ақпаратты алуға мүмкіндік беретін туынды объектілер болып табылады. Еске салайық, гиперграф – кез келген жұп (X, Y), мұндағы Y және X жиындары P(X) булеанының кейбір ішкі жиыны. Бұл жағдайда X жиыны гиперграфтың (X, Y) негізгі жиын деп аталады. Ал Y-тің элементтері гиперграфтың (X, Y) қабырғалары деп аталады. Әлсіз о-минималдылықты бастапқыда Д. Макферсон, Д. Маркер және Ч. Стейнхорн терең зерттеген. Өткен ғасырдың тоқсаныншы жылдарында Қазақстан ғалымдары осы авторлар қойған бірқатар мәселелерді шеше отырып, бұл түсінікті зерттеуге сәтті қосылды. Бұл жұмыста біз әлсіз о-минималды құрылымдардың модельдік-теориялық қасиеттерін зерттеуді жалғастырамыз. Дөңестік рангісі бойынша омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардағы алгебралық емес 1-типті жүзеге асыру жиынының салыстырмалы H-еркіндігінің критерийі алынған. Біз сондай-ақ 1-типтердің әлсіз ортогональдылығы тұрғысынан омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардағы екі алгебралық емес 1-типтерінің жүзеге асу жиындарының салыстырмалы H-тәуелсіздігінің критерийін белгілейміз.

Тірек сөздер: сызықтық реттелген құрылым, гиперграф, әлсіз о-минималдылық, салыстырмалы еркіндік, салыстырмалы тәуелсіздік, омега-категориялыққа жуық.

Кулпешов Б.Ш.
Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, 050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz,

СВОЙСТВА ГИПЕРГРАФОВ МОДЕЛЕЙ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Аннотация. В настоящей статье исследуются понятия относительной H-свободы и относительной H-независимости для гиперграфов моделей слабо о-минимальных теорий. Гиперграфы моделей теории относятся к производным объектам, позволяющим получать существенную структурную информацию как о самих теориях, так и о сопутствующих семантических объектах. Вспомним, что гиперграфом называется любая пара множеств (X, Y), где Y – некоторое подмножество булеана P(X) множества X. При этом множество X называется носителем гиперграфа (X, Y), а элементы из Y – ребрами гиперграфа (X, Y). Слабая о-минимальность первоначально была глубоко исследована Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном. В девяностые годы прошлого столетия к исследованию данного понятия успешно подключились казахстанские ученые, решив ряд поставленных этими авторами проблем. В настоящей работе мы продолжаем исследование теоретико-модельных свойств слабо о-минимальных структур. Получен критерий относительной свободы множества реализаций неалгебраического 1-типа в почти омега-категоричных слабо о-минимальных теориях в терминах ранга выпуклости. Также установлен критерий относительной H-независимости множеств реализаций двух неалгебраических 1-типов в почти омега-категоричных слабо о-минимальных теориях в терминах слабой ортогональности 1-типов.

Ключевые слова: линейно упорядоченная структура, гиперграф, слабая о-минимальность, относительная свобода, относительная независимость, почти омега-категоричность.

Kulpeshov B.Sh.
Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

PROPERTIES OF HYPERGRAPHS OF MODELS OF WEAKLY O-MINIMAL THEORIES

Abstract. In this paper, we study the notions of relative H-freedom and relative H-independence for hypergraphs of models of weakly o-minimal theories. Hypergraphs of models of a theory are derived objects that allow obtaining essential structural information both about the theories themselves and about related semantic objects. Recall that a hypergraph is any pair of sets (X, Y), where Y is some subset of the Boolean P(X) of a set X. In this case, the set X is called the support of the hypergraph (X, Y), and elements from Y are called edges of the hypergraph (X, Y). Weak o-minimality was originally deeply investigated by D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn. In the nineties of the last century, Kazakhstan scientists successfully joined the study of this concept, solving a number of problems posed by the authors. In this paper, we continue the study of model-theoretic properties of weakly o-minimal structures. A criterion for relative H-freedom of the set of realizations of non-algebraic 1-type in almost omega-categorical weakly o-minimal theories is obtained in terms of convexity rank. We also establish a criterion for relative H-independence of the sets of realizations of two non-algebraic 1-types in almost omega-categorical weakly o-minimal theories in terms of weak orthogonality of 1-types.

Key words: linearly ordered structure, 1-transitivity, weak o-minimality, relative freedom, relative independence, almost omega-categoricity.

Кіріспе

Бұл мақалада әлсіз о-минималды теориялар модельдерінің гиперграфтары үшін салыстырмалы еркіндік және салыстырмалы тәуелсіздік ұғымдарын зерттейміз.

Теорияның модельдердің гиперграфтары – теориялардың өздері туралы да, соған байланысты семантикалық объектілер туралы да маңызды құрылымдық ақпаратты алуға мүмкіндік беретін туынды объектілер болып табылады [1-7].

Еске салайық, гиперграф – кез келген жұп (X, Y), мұндағы Y X жиыны P(X) булеанының кейбір ішкі жиыны. Бұл жағдайда X жиыны гиперграфтың (X, Y) тірегі деп аталады, ал Y-тің элементтері гиперграфтың (X, Y) қабырғалары деп аталады.

M толық T теориясының кейбір моделі болсын. [1]-ге сәйкес, M моделінің N элементар ішкі модельдің негізгі жиыны болып табылатын M жүйесінің M тірегінің барлық ішкі жиындарының N жиынын H(M) арқылы белгілейміз: $H(M) = \{N \mid N \prec M\}$. (M, H(M)) жұбы M моделінің элементар ішкі моделінің гиперграфы деп аталады және H деп белгіленеді.

L бірінші ретті саналымды тіл болсын. Осы мақалада біз L-құрылымдарды қарастырамыз және L құрамында бинарлық қатынас символы < кіреді, бұл құрылымдарда сызықтық рет түсіндіріледі деп есептейміз. Бұл жұмыста бастапқыда [8] терең зерттелген әлсіз о-минималдылық түсінігі қарастырылады. Кез келген $a, b \in A$ және $c \in M$ кезінде $a < c < b$ бізде $c \in A$ болса, сызықты реттелген M құрылымының A ішкі жиыны дөңес деп аталады.

Әлсіз о-минималды құрылым – сызықты реттелген құрылым $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ осылайша M құрылымының кез келген анықталатын (параметрлері бар) ішкі жиыны M-дегі дөңес жиындардың шекті санының бірігуі болып табылады. Мұндай M құрылымы о-минималды деп аталады, егер M құрылымының әрбір анықталатын (параметрлері бар) ішкі жиыны M-дегі интервалдар мен нүктелердің шекті санының бірігуі болса. Осылайша, әлсіз о-минималдылық о-минималдылықтың жалпылама нұсқасы болып табылады. Меншікті дөңес бағалау сақинасы бар нақты жабық өрістер әлсіз о-минималды (о-минималды емес) құрылымдардың маңызды мысалын береді.

Анықтама 1.1 T – әлсіз о-минималды теория, M – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ алгебралық емес типтер болсын. Егер L_A-формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ және $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ бар болса, сонымен бірге келесі шарттар орындалса: $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ және $\beta_2 \in H(M, \alpha)$, сонда p типі q типіне әлсіз ортогональды емес деп айтамыз.

Басқаша айтқанда, $p(x) \cup q(y)$ L_A-формулалар жиыны толық 2-типке бірегей кеңейтімге ие болса, p типі q типіне әлсіз ортогональды болады.

Лемма 1.2 [9] Егер T әлсіз o-минималды теория, $M \models T$, $A \subseteq M$ болса, сонда әлсіз емес ортогоналдылық қатынасы $S_1(A)$ бойынша эквиваленттік қатынас болады.

Анықтама 1.3 [10, 1] T – толық теория болсын және $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Егер $q(x_1, \dots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ және $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i)$ $q(x_1, \dots, x_n)$ $(p_1, \dots, p_n)$-тип деп аталады. T теорияның барлық $(p_1, \dots, p_n)$-типтердің жиыны $S_{p_1,\dots,p_n}(T)$ деп белгілейді. Кез келген $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ типтер үшін $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1,\dots,p_n}(T)$ тек қана шекті болса, саналымды теориясы T ω-категориялыққа жуық (омега-категориялыққа) деп аталады.

Омега-категориялыққа жуық түсінігі Эренфойхт теориясы деген түсінікпен тығыз байланысты. Сонымен, [10] жұмысында дәлелденді, егер I(T, ω) = 3 шарты бар ω-категориялыққа жуық теория T болса, онда T теориясында тығыз сызықтық рет түсіндіріледі. Соған қарамастан, I(T, ω) = 3 шарты бар, бірақ ω-категориялыққа жуық емес теорияның мысалы ([11]-де М.Г. Перетяткин құрастырған) бар.

[12] жұмысында Эренфойхттың әбден o-минималды теорияларының омега-категориялыққа жуықтығы және омега-категориялыққа жуық әбден o-минималды теориялар үшін алгебралық тұйықталуды ауыстыру принципінің негізділігі анықталды. [13] жұмысында жұптық әлсіз ортогональды алгебралық емес 1-типтердің кез келген жиынының бос жиынға ортогоналдылығы мұндай теориялар үшін және ω-категориялыққа жуық әбден o-минималды теориялардың бинарлығы дәлелденді. [14] жұмысында дөңестік рангісі 1 ω-категориялыққа жуық әлсіз o-минималды теорияларының бинарлылығы дәлелденді. [15] жұмысында саналымды модельдер саны аз дөңестік рангісі шекті әлсіз o-минималды теорияларының ω-категориялыққа жуықтығы дәлелденді. Соңында [16] жұмысында ω-категориялыққа жуық әлсіз o-минималды теориялардың бинарлық критерийі табылды.

Анықтама 1.4 [17] Σ_n, $n \in \omega$, жұптық ажыратылған предикатты сигнатуралары M_n жұптық ажыратылған құрылымдардың $\coprod_{n\in\omega} M_n$ дизъюнктивтік (ажыратылған) бірігуі $\coprod_{n\in\omega} M_n$, $P_n = M_n$, жиынымен және Σ_n-дан предикаттық символдардың интерпретацияларымен сәйкес келетін M_n, $n \in \omega$, құрылымдарында $\bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n \cup \{P_n^{(1)} | n \in \omega\}$ сигнатуралық құрылым деп аталады. Σ_n, $n \in \omega$, жұптық ажыратылған сигнатуралары T_n теорияларының дизъюнктивтік (ажыратылған) бірігуі $M_n \models T_n$, $n \in \omega$, орындалса, $\coprod_{n\in\omega} T_n \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\coprod_{n\in\omega} M_n)$ теориясы деп аталады.

Назар аударыңыз, омега-категориялыққа жуық әлсіз o-минималды теориялар жалпы жағдайда Эренфойхт емес. Мұндай теорияның мысалы ретінде Эренфойхт мысалының ω типі бойынша реттелген үш саналымды модельдермен есептелетін көшірмелерінің дизъюнктивтік бірігуін алуға болады. Бұл теорияда бос жиынның үстінде әлсіз ортогональды оқшауланбаған 1-типтердің есептелетін саны бар, сондықтан саналымды модельдері максималды саны бар.

Сондай-ақ, омега-категориялыққа жуық әлсіз o-минималды теориялар жалпы алғанда кіші емес екенін ескереміз. Мұндай теорияның мысалы ретінде $M = \langle \mathbb{Q}, <, q \rangle_{q\in\mathbb{Q}}$ құрылымын қарастыруға болады. Әлбетте, Th(M) бос жиынның үстінде 1 типтері континуумға ие, яғни, бұл теориясы кіші емес болады.

Әдістері

Осы жобада XX ғасырдың 80-ші жылдары және кейінірек модельдер теориясында өз дамуын алынған тәсілдерді қолдауын ұсынады. Олардың арасында o-минималдық және оның түрлерін негізінде реттелген құрылымдардың зерттеу методологиясы белгілеп кетуге болады. Бұл жағдайда бір бос айнымалы шамасы бар формулалармен анықталатын жиындарға қатал шектер салуы типтілік болады. Шынында, o-минималды құрылым *M* *L*-құрылым деп қарастыруға болады, бұл жерде $L \supset L_0 = \{<\}$, $<$ – сызықтық рет *M*-де, және *M*-құрылымның кез келген анықталатын ішкі жиын кванторсыз L_0-анықталатын болады. Бұл басқа түсініктерге нұсқау береді: L_0–ді кейбір басқа белгілі тілге ауыстырамыз, сосын L_0-азайтылуы келіскен типті болатын (мысалы, сызықтық рет) *L*-құрылымдарды қарастырамыз, және *M*-құрылымның кез келген анықталатын ішкі жиын кванторсыз L_0-анықталатын болатындығын талап етеміз (осыны берілген теориясының модельдердің бәрінен талап етуге болады).

Нәтижелер

Назар аударыңыз, егер біз кез келген омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теорияда кез келген алгебралық емес оқшауланған $p \in S_1(\varnothing)$ типті қарастырсақ, онда кез келген M |= T моделінде p(M) жиыны H-еркін болмайды. Өйткені егер біз A' жиыны ретінде кейбір тұйық интервалды $[a,b] \subset p(M)$ a < b шарты орындалатын, алсақ, онда $A' = p(M) \cap M_1$ болатын ішкі моделі $M_1 \prec M$ болмайды. H-еркіндігінің бұзылуының тағы бір себебі – тығыз емес шексіз $A' \subset p(M)$ жиынды алу мүмкіндігі, ал T теориясының модельдері үшін $A' \subset p(M)$ жиынтықтар тығыз болуы керек.

b элементі бар кез келген ашық интервал b элементінің көршілестігі деп аталады. Еске салайық, M сызықты реттелген құрылымның кез келген A ішкі жиыны, егер кез келген $b \in A$ үшін A құрамындағы b элементінің көршілестігі болса, ашық болады.

Анықтама 3.1 [7] T – әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типі болсын. Біз p(M) жиынын салыстырмалы түрде H-еркін, дөңес жиындарға қатысты H-еркін немесе (H, cs)-еркін болады дейміз, егер кез келген ашық дөңес жиын $A' \subseteq p(M)$ үшін кейбір $M_1 \in H(M)$ үшін $A' = p(M) \cap M_1$ теңдік орындалса.

Назар аударыңыз, H гиперграфтары H-еркін жиындардағы барлық шексіз ішкі жиындарды таңдауға мүмкіндік беруімен қатар, соңғы нүктелері жоқ дөңес жиындарға қосымша (H, cs)-еркін жиындар үшін сәйкес гиперграфтар соңғы нүктелері жоқ тығыз жиынтықтар таңдауға мүмкіндік береді. Мысалы, соңғы нүктелері жоқ тығыз сызықтық реттелген теориясы үшін соңғы нүктелері жоқ кез келген тығыз ішкі жиын осылай бөлектеледі.

Теорема 3.2 Егер T омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p \in S_1(\varnothing)$ алгебралық емес оқшауланған типі болса, сонда *p(M)* жиыны салыстырмалы H-еркін $\Leftrightarrow RC(p) = 1$.

Мысалы 3.3 $M = \langle Q, <, f^1 \rangle$ – сызықтық реттелген құрылым, Q – рационалды сандар жиыны, *f(x)=x+*1– Q жиында унарлық функция болсын. Бұл *M* о-минималды құрылым екенін түсіну оңай, бірақ *Th(M)* омега-категориялыққа жуық теория емес. Сондай-ақ, бұл $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\varnothing)$ алгебралық емес оқшауланған типі, *RC(p)*=1, бірақ салыстырмалы түрде *p(M)* жиыны H-еркін емес екенін ескереміз.

Анықтама 3.4 [7] *T* – әлсіз о-минималды теория, $M \models T, p, q \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер, $RC(p) = RC(q) = 1$ болсын. Біз *p(M)* және *q(M)* салыстырмалы түрде H-тәуелсіз, дөңес жиындарға қатысты H-тәуелсіз немесе *(H,cs)*-тәуелсіз деп атаймыз, егер кез келген ашық дөңес жиындар $A' \subseteq p(M)$ және $B' \subseteq q(M)$ үшін $A' = p(M) \cap M_1$ және $B' = q(M) \cap M_1$ орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса.

Теорема 3.5 Егер *T* омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p, q \in S_1(\varnothing)$ алгебралық емес оқшауланған типтер, $RC(p) = RC(q) = 1$ болса, сонда *p(M)* және *q(M)* салыстырмалы түрде *H*-тәуелсіз $\Leftrightarrow p$ және q әлсіз ортогоналды.

Салдар 3.6 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория,M |= T, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типі, *RC(p)=n*, мұнда *n > 1*, болсын. Шексіз дөңес класстардың шексіз санына *p(M)* жиынды бөлінетін $E_1(x,y), E_2(x,y), ..., E_{n-1}(x,y)$ $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынастар бар деп есептейік, сондықтан кез келген $a \in p(M)$ үшін $E_1(a,M) \subset E_2(a,M) \subset ... \subset E_{n-1}(a,M)$ орындалсын. Сонда

1) Әрбір E_1-класс салыстырмалы түрде H-еркін болады;

2) Кез келген екі E_1-класс салыстырмалы түрде H-тәуелсіз болады;

3) Кез келген $2 \le i \le n-1$ үшін әрбір E_i-класс салыстырмалы түрде *H*-еркін емес болады.

Мысалы 3.7 $M = \langle Q \times Q; <, E^2, f^1 \rangle$ – сызықтық реттелген құрылым, мұнда $Q \times Q$ – лексикографиялық реттелген жиын болсын. E символы келесідей анықталған бинарлық қатынас арқылы түсіндіріледі: кез келген $a = (n_1, m_1), b = (n_2, m_2) \in Q \times Q$ үшін $E(a,b) \Leftrightarrow n_1 = n_2$, *f* символы $(n,m) \in Q \times Q$ барлығына $f((n,m)) = (n+1, m)$ теңдікпен анықталған унарлы функция арқылы түсіндіріледі.

Бұл *E (x,y)* – шексіз дөңес кластардың шексіз санына *M* бөлетін эквиваленттік қатынас екені анық. *Th(M)* ω-категориялыққа жуық емес әлсіз о-минималды теория екенін анықтауға болады. Назар аударыңыз, $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған тип, *RC (p)* = 2, әрбір *E*-класс салыстырмалы түрде H-еркін болады, бірақ әрқайсысы $a \in M$ үшін *E (a,M)* және *E (f (a) M)* салыстырмалы түрде H-тәуелсіз емес.

Анықтама 3.8 [7] T – әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типі, *E (x,y)* – шексіз дөңес кластардың шексіз санына *p(M)* жиынды бөлінетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Егер $A \subseteq p(M)$ онда A мен бос емес қиылысы бар E-кластар өкілдерінің A/E жиынымен белгілейміз. Егер кез келген дөңес $A' \subset p(M)$ үшін A' / E ашық жиын және кейбіреу $M_1 \in H(M)$ жиыны үшін $A' = p(M) \cap M_1$ теңдік орындалса, сонда *p(M)* жиынды салыстырмалы түрде *(H,E)*-еркін деп айтамыз.

Соңғы анықтамада *p(M)* тығыз реттелген жағдайда A' жиынтықтың дөңес болуы маңызды екенін ескеріңіз. Шынында да, $p(x) := \{U(x)\}, a_1, a_2 \in p(M)$ болсын және $M \models E(a_1,a_2) \wedge a_1 < a_2$ орындалсын. Келесі формуланы қарастырайық:

$$\varphi(x,a_1,a_2) := U(x) \wedge [x \le a_1 \vee x \ge a_2]$$

$A' = \varphi(M,a_1,a_2)$ болсын. Онда $A' \subseteq p(M), A'$ дөңес емес, A' / E ашық дөңес жиын екені көрініп тұр, бірақ $A' = p(M) \cap M_1$ теңдеу орындалатын ондай ішкі модель $M_1 \prec M$ жоқ.

Теорема 3.9 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p,q \in S_1(\varnothing)$– алгебралық емес оқшауланған типі, *E (x,y)* – шексіз дөңес кластардың шексіз санына *p(M)* жиынды бөлінетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Сонда *p(M)* жиыны салыстырмалы түрде *(H, E)*-еркін $\Leftrightarrow$ дөңес кластардың шексіз санына *p(M)* жиынды бөлінетін кез келген $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынасы *E' (x,y)* кейбір $a \in p(M)$ үшін $E'(a,M) \subseteq E(a,M)$ орындалады.

Мысалы 3.10 $M = \langle M,<,E_i^2 \rangle_{i\in\omega}$ – сызықтық реттелген құрылым болсын, әрбір $i \in \omega$ $E_i(x,y)$ дөңес кластардың шексіз санына M құрылымды бөлетін эквиваленттік қатынасты анықтайды, бұл ретте әрбір E_{i+1}-класс E_i-кластардың шексіз санына бөлінді, әрбір E_i-класс дөңес және ашық болады, сондықтан әрбір E_{i+1}-кластың ішкі E_i-кластары соңғы нүктелерсіз тығыз реттелген.

Th(M) ω-категориялыққа жуық емес әлсіз о-минималды теория екенін анықтауға болады. M құрылым 1-айыруға болмайтыны анық, яғни $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\varnothing)$. Кез келген $i \in \omega$ үшін p(M) салыстырмалы түрде (H, E_i)-еркін емес нәрсені түсіну оңай.

Анықтама 3.11 [7] T – әлсіз о-минималды теория, $M \models T, p_1, p_2 \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер болсын. Соның ішінде $E_1(x,y), E_2(x,y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1)-еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде(H, E_2)-еркін деп есептейік. Егер кез келген дөңес $A' \subseteq p_1(M)$ және $B' \subseteq p_2(M)$ A'/E_1 пен B'/E_2 ашық жиындар болса және $A' = p_1(M) \cap M_1$ пен $B' = p_2(M) \cap M_1$ орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса, сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H,E_1,E_2)-тәуелсіз деп айтамыз.

Теорема 3.12 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p_1, p_2 \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер болсын. Соның ішінде $E_1(x,y), E_2(x,y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_1(M)$ бөлетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1)-еркін және$p_2(M)$ салыстырмалы түрде(H, E_2)-еркін деп есептейік. Сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H,E_1,E_2)- тәуелсіз $\Leftrightarrow$ p_1 және p_2 әлсіз ортогоналды.

Салдар 3.13 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p_1, p_2 \in S_1(\varnothing)$ – алгебралық емес оқшауланған типтер болсын, және $(\varnothing)$-анықталатын биекция $f : p_1(M) \to p_2(M)$ бар деп есептейік. Соның ішінде $E_1(x,y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ бөлетін $(\varnothing)$ -анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. $p_2(M)$ жиын бойынша $E_2(x,y)$ қатынасты былай анықтайық: кез келген $a,b \in p_2(M)$ үшін $E_2(a,b) \Leftrightarrow E_1(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$. Содан $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1)-еркін $\Leftrightarrow$ $p_2(M)$ салыстырмалы (H, E_2)-еркін.

Әрі қарай, салыстырмалы *H*-еркіндік, салыстырмалы *H*-тәуелсіздік, салыстырмалы(H, *E*)-еркіндік және салыстырмалы *(H, E_1, E_2)*-тәуелсіздік анықтамаларын оқшауланбаған 1-типтерге кеңейтеміз.

Еске салайық, егер A – M сызықтық реттелген құрылымның кез келген ішкі жиыны болса, онда $A < b$ $(b < A)$ шартымен қарастырылатын құрылым b элементтерінің жиынын A^+ (және сәйкесінше A^-) арқылы белгілейміз.

Анықтама 3.14 [9] $M-$ әлсіз о-минималды құрылым, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – алгебралық емес типі болсын. Кез келген жеткілікті мазмұнды модель $N \succ M$ үшін $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$) шарты орындалатын дөңес L_A-формуласы $U_p(x) \in p$ бар болса, біз p типті оңға (солға) квазирационалды деп айтамыз. Оңға квазирационалды немесе солға квазирационалды болса, оқшауланбаған 1-типі квазирационалды деп аталады. Квазирационалды емес оқшауланбаған 1-типі иррационалды деп аталады.

Бір уақытта оңға квазирационалды және солға квазирационалды 1-типі оқшауланғаны анық.

A дөңес жиынды оңға (солға) ашық деп айтамыз, егер элемент $a \in A$ табылса келесі шартпен: кез келген $b > a$ $(b < a)$ үшін *A* құрамындағы *b* элементтің көршілестігі бар болады. Егер кез келген жиын оңға да, солға да ашық болса, онда оның ашықтығы анық.

Анықтама 3.15 [7] *T* – әлсіз о-минималды құрылым, *M* – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\varnothing)$– оқшауланбаған типі, $RC(p) = 1$. Егер *p* – оңға (солға) квазирационалды болса, сонда кез келген оңға (солға) ашық дөңес $A' \subseteq p(M)$ үшін кейбіреу $M_1 \in H(M)$ үшін $A' = p(M) \cap M_1$ теңдік болса, *p(M)* жиыны салыстырмалы түрде *H*-еркін деп айтамыз. Егер *p* иррационал болса, онда A' ретінде кез келген дөңес жиынды алуы жеткілікті.

Лемма 3.16 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, M |= T, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типі болсын. Сонда *p(M)* – салыстырмалы H-еркін $\Leftrightarrow$ $RC(p) = 1$.

Анықтама 3.17 [7] *T* – әлсіз о-минималды теория, *M* – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типтері болсын, $RC(p) = RC(q) = 1$. Егер кез келген дөңес жиындар $A' \subseteq p(M)$ және $B' \subseteq q(M)$ үшін *p* және *q* типтерге сәйкес келетін (Анықтама 3.15 бойынша) $A' = p(M) \cap M_1$ және $B' = q(M) \cap M_1$ шарттар орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса, сонда *p(M)* және *q(M)* салыстырмалы түрде *H*-тәуелсіз деп айтамыз.

Лемма 3.18 *T* – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, *M* – T теориясының жеткілікті қаныққан моделі, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типтері болсын, $RC(p) = RC(q) = 1$. Сонда *p(M)* және *q(M)* салыстырмалы түрде *H*-тәуелсіз $\Leftrightarrow$ *p* және *q* әлсіз ортогоналды.

Анықтама 3.19 [7] *T* – әлсіз о-минималды теория, *M* – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типі, $RC(p) = 1$. Егер *p* – оңға (солға) квазирационалды болса, сонда кез келген дөңес $A' \subseteq p(M)$ үшін A' / E оңға (солға) ашық болуы орындалса, $M_1 \in H(M)$ шарты орындалатын $A' = p(M) \cap M_1$ табылса, сонда *p(M)* салыстырмалы түрде *(H,E)*-еркін деп айтамыз. Егер *p* иррационалды болса, онда A' ретінде A' / E жиынның түрін кез келген етіп қалдырып, *p(M)* жиынның кез келген дөңес ішкі жиынды алуы жеткілікті.

Теорема 3.20 *T* – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, *M* – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типі, *E(x,y)* – шексіз дөңес кластардың шексіз санына *p(M)* жиынды бөлінетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Сонда *p(M)* салыстырмалы түрде *(H,E)*-еркін $\Leftrightarrow$ *E(x,y)* – дөңес кластардың шексіз санына *p(M)* жиынды бөлетін ең үлкен $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынас.

Анықтама 3.21 [7] *T* – әлсіз о-минималды теория, *M* – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p_1, p_2 \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типтері болсын. Соның ішінде $E_1(x,y), E_2(x,y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H,E_1)-еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H,E_2)-еркін деп есептейік. Егер кез келген дөңес $A' \subseteq p_1(M)$ және $B' \subseteq p_2(M)$ p_1 және p_2 сәйкес келетін (Анықтама 3.19 бойынша), $A' = p_1(M) \cap M_1$ пен $B' = p_2(M) \cap M_1$ орындалатын $M_1 \in H(M)$ табылса, сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1, E_2)-тәуелсіз деп айтамыз.

Теорема 3.22 T – омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теория, *M* – T теориясының жеткілікті мазмұнды моделі, $p_1, p_2 \in S_1(\varnothing)$ – оқшауланбаған типтері болсын. Соның ішінде $E_1(x,y), E_2(x,y)$ – дөңес кластардың шексіз санына $p_1(M)$ және $p_2(M)$ бөлетін $(\varnothing)$-анықталатын эквиваленттік қатынастар болсын. $p_1(M)$ салыстырмалы түрде (H,E_1)-еркін және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H,E_2)-еркін деп есептейік. Сонда $p_1(M)$ және $p_2(M)$ салыстырмалы түрде (H, E_1, E_2)-тәуелсіз $\Leftrightarrow$ p_1 және p_2 әлсіз ортогоналды.

Қорытынды. Бұл жұмыста омега-категориялыққа жуық әлсіз о-минималды теориялардағы салыстырмалы еркіндік пен салыстырмалы тәуелсіздік ұғымдары зерттелді. Алгебралық емес

1-типті жүзеге асыру жиынының салыстырмалы еркіндігі және мұндай теориялардағы жиындардың салыстырмалы тәуелсіздігі үшін критерийлер алынады. Бұл омега-категориялыққа жуық әбден о-минималды теориялар үшін алынған ұқсас нәтижелерді жалпылайды.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеулерге Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант BR20281002).

Әдебиеттер тізімі

1 Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. – Part 1. – Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House, 2018. – 326 p. ISBN 978-5-7782-3527-4

2 Судоплатов С.В. Об ациклических гиперграфах минимальных простых моделей // Сибирский математический журнал . – Т. 42. – №6. – С. 1408–1412.

3 Судоплатов С.В. Гиперграфы простых моделей и распределения счетных моделей малых теорий // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15. – № 7. – С. 179–203.

4 Байкалова К.А. О некоторых гиперграфах простых моделей и порождаемых ими предельных моделях // Алгебра и теория моделей 7 : сб. науч. тр. / под. редакцией А.Г. Пинуса, К.Н. Пономарева, С.В. Судоплатова. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2009. – С. 6–17.

5 Sudoplatov S.V. On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». – 2016. – Т. 82. – №. 2. – С. 113–120.

6 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On relative separability in hypergraphs of models of theories // Eurasian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 9. – No. 4. – P. 68–78.

7 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On freedom and independence in hypergraphs of models of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 612–630.

8 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352. – No. 6. – P. 5435–5483.

9 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – Vol. 66. – P. 1382–1414.

10 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly. – 1998. – Vol. 44. – Issue 2. – P. 161–166.

11 Peretyatkin M.G. Theories with three countable models // Algebra and Logic. – 1980. – Vol. 19. – No. 2. – P. 224–235.

12 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Linearly ordered theories near to countably categorical // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101. – No. 3. – P. 413–424.

13 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. Binarity of almost ω-categorical quite o-minimal theories // Siberian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 61. – No. 3. – P. 484–498.

14 Kulpeshov B.Sh., Mustafin T.S. Almost ω-categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 62. – No. 1. – P. 65–81.

15 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – Vol. 18. – No. 1. – P. 247–254.

16 Kulpeshov B.Sh. A criterion for binarity of almost ω -categorical weakly o-minimal theories // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 62. – No. 6. – P. 1063–1075.

17 Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University. – 1976. – 99 p.

References

1 Sudoplatov S.V. (2018) Classification of countable models of complete theories, part 1. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House, 326 p. ISBN 978-5-7782-3527-4

2 Sudoplatov S.V. Ob aciklicheskih gipergrafah minimal'nyh prostyh modelej, Sibirskij matematicheskij zhurnal, vol. 42, no. 6, pp. 1408–1412.

3 Sudoplatov S.V. (2009) Gipergrafy prostyh modelej i raspredelenija schetnyh modelej malyh teorij, Fundamental'naja i prikladnaja matematika, vol. 15, no. 7, pp. 179–203.

4 Bajkalova K.A. (2009) O nekotoryh gipergrafah prostyh modelej i porozhdaemyh imi predel'nyh modeljah, Algebra i teorija modelej 7 : sb. nauch. tr. / pod. redakciej A.G. Pinusa, K.N. Ponomareva, S.V. Sudoplatova. Novosibirsk: Izdatel'stvo NGTU, pp. 6–17.

5 Sudoplatov S.V. (2016) On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory, Vestnik Karagandinskogo universiteta, vol. 82, no. 2, pp. 113–120.

6 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2018) On relative separability in hypergraphs of models of theories, Eurasian Mathematical Journal, vol. 9, no. 4, pp. 68–78.

7 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2018) On freedom and independence in hypergraphs of models of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 15, pp. 612–630.

8 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. (2000) Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 352, no. 6, pp. 5435–5483.

9 Baizhanov B.S. (2001) Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, vol. 66, pp. 1382–1414.

10 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. (1998) On theories having three countable models, Mathematical Logic Quarterly, vol. 44, issue 2, pp. 161–166.

11 Peretyatkin M.G. (1980) Theories with three countable models, Algebra and Logic, vol. 19, no. 2, pp. 224–235.

12 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2017) Linearly ordered theories near to countably categorical, Mathematical Notes, vol. 101, no. 3, pp. 413–424.

13 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. (2020) Binarity of almost ω-categorical quite o-minimal theories, Siberian Mathematical Journal, vol. 61, no. 3, pp. 484–498.

14 Kulpeshov B.Sh., Mustafin T.S. (2021) Almost ω-categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1, Siberian Mathematical Journal, vol. 62, no. 1, pp. 65–81.

15 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. (2021) On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 18, no. 1, pp. 247–254.

16 Kulpeshov B.Sh. (2021) A criterion for binarity of almost ω -categorical weakly o-minimal theories, Siberian Mathematical Journal, vol. 62, no. 6, pp. 1063–1075.

17 Woodrow R.E. (1976) Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University, 99 p.

Автор туралы мәлімет

Кулпешов Бейбіт Шайықұлы

Физика-математика ғылымының докторы, Қазақстан Республикасы Ұлттық Ғылымдар Академиясының корреспондент мүшесі, Қолданбалы математика мектебінің профессоры, Қазақстан-Британ техникалық университеті, Төле би көш., 59, 050000, Алматы қ., Қазақстан; Математика және математикалық модельдеу институттың бас ғылыми қызметкері, Шевченко көш., 28, 050010, Алматы қ., Қазақстан

ORCID ID: 0000-0002-4242-0463

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Information on the author

Kulpeshov Beibut Shaiykovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan; Professor of School of Applied Mathematics, Kazakh-British Technical University, 59, Tole bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan; Chief Researcher of Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 28, Shevchenko street, Almaty, 050010, Kazakhstan

ORCID ID: 0000-0002-4242-0463

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Информация об авторе

Кулпешов Бейбут Шайыкович

Доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН РК, профессор Школы прикладной математики, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан; главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования, ул. Шевченко, 28, 050010, г. Алматы, Казахстан

ORCID ID: 0000-0002-4242-0463

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz