УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66
https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-2-43-48

Касатова А.[1], Кабиденов А.[2], Бекенов М.[2*]
[1]Медицинский университет Караганды, 100000, г. Караганды, Казахстан
[2]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, 010008, г. Астана, Казахстан
*E-mail: bekenov50@mail.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРИТЕРИЯ ПОЛНОТЫ КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Во многих источниках по теории моделей помимо доказанных свойств о классах алгебраических систем приводятся характеристики этих свойств в алгебраических терминах, то есть показывают природу этих свойств в ракурсе универсальной алгебры. Например, класс квазимногообразий или многообразий определяют, используя теоретико-модельные понятия выполнения квазитождеств или тождеств и в алгебраических понятиях замкнутости относительно прямых произведений, ультрапроизведений, выполнения локальности, замкнутости относительно гомоморфизмов. Х.Дж. Кейслер привел алгебраическую характеристику критерия аксиоматизируемости класса алгебраических систем, используя замкнутость класса относительно ультрапроизведения и изоморфизма алгебраических систем, а также замкнутости относительно ультрастепеней для дополнения классу. Х.Дж. Кейслер не приводит, однако, какую-либо алгебраическую характеризацию критерия полноты класса алгебраических систем. В данной статье получена алгебраическая характеристика критерия полноты класса алгебраических систем. Для сравнения: дать алгебраическую характеристику критерия модельной полноты класса в терминах, используемых в статье, не представляется возможным. Это показывает, что алгебраическая природа полного и модельно полного классов некоторым образом различается.

Ключевые слова: класс алгебраических систем, элементарное вложение, аксиоматизируемость, отношение частичного порядка.

Касатова А.[1], Кабиденов А.[2], Бекенов М.[2*]
[1]Қарағанды медицина университеті, 100000, Қарағанды қ., Қазақстан
[2] Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті 010008, Астана қ., Қазақстан
E-mail: bekenov50@mail.ru

АЛГЕБРАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР СЫНЫПЫНЫҢ ТОЛЫҚТЫҚ КРИТЕРИІНІҢ АЛГЕБРАЛЫҚ СИПАТТАМАСЫ

Аңдатпа. Модельдер теориясы бойынша көптеген дереккөздерде алгебралық жүйелердің кластары туралы дәлелденген қасиеттермен қатар, бұл қасиеттердің сипаттамалары алгебралық терминдермен беріледі, яғни олар бұл қасиеттердің табиғатын әмбебап алгебра тұрғысынан көрсетеді. Мысалы, квази сорттар немесе сорттар класы модельдік-теориялық ұғымдар, квази сәйкестіктер немесе сәйкестіктердің орындалуы, ал алгебралық түсініктерде тікелей туындыларға, ультраөнімдерге, локальдылықтың орындалуына, гомоморфизмдерге қатысты тұйықтыққа байланысты анықталады. Мұндай мысалдар кейбір басқа дереккөздерде келтірілген. Х. Дж. Кейслер алгебралық жүйелер класының аксиоматизациялану критерийіне алгебралық сипаттама берді, алгебралық жүйелердің ультра өнімі мен изоморфизмі астындағы класстың тұйықталуын, сондай-ақ классты толықтыру үшін ультра күштердің астында жабылуын қолданды. Х.Дж.Кейслер, алайда, алгебралық жүйелердің толық класы үшін критерийдің ешқандай алгебралық сипаттамасын бермейді. Естеріңізге сала кетейік, алгебралық жүйелер класы қандай да бір теорияның алгебралық жүйелер класымен сәйкес келсе, алгебралық жүйелер класы аксиоматизацияланатын деп аталады, алгебралық жүйелер класы қандай да бір толық теорияның алгебралық жүйелер класымен сәйкес келсе, алгебралық жүйелер класы толық деп аталады, ал класс алгебралық жүйелердің класы кейбір модельдік толық теорияның алгебралық жүйелерінің класымен сәйкес келсе, модель-толық деп аталады. Бұл мақалада алгебралық жүйелер класы үшін толықтық критерийінің алгебралық сипаттамасы алынған. Салыстыру үшін мақалада қолданылған терминдер бойынша сыныптың модельдік толықтығы критерийінің алгебралық сипаттамасын беру мүмкін емес. Бұл толық және модельдік толық кластардың алгебралық табиғаты біршама өзгеше екенін көрсетеді.

Тірек сөздер: алгебралық жүйелер класы, элементар кірістіру, аксиоматизация, ішінара реттік қатынас.

Kasatova A. [1], **Kabidenov A.** [2], **Bekenov M.** [2*]
[1]Medical University of Karagandy, 100000, Karagandy, Kazakhstan
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, 010008, Astana, Kazakhstan
*E-mail: bekenov50@mail.ru

ALGEBRAIC CHARACTERISTICS OF THE CRITERION OF COMPLETENESS OF A CLASS OF ALGEBRAIC SYSTEMS

Abstract. In many sources on model theory, in addition to the proven properties about classes of algebraic systems, the characteristics of these properties are given in algebraic terms, that is, they show the nature of these properties from the perspective of universal algebra. For example, the class of quasi-varieties or varieties is defined using model-theoretic concepts, fulfillment of quasi-identities or identities, and in algebraic concepts of closedness with respect to direct products, ultraproducts, fulfillment of locality, closedness with respect to homomorphisms. H.J. Keisler gave an algebraic characterization of the criterion for the axiomatizability of a class of algebraic systems, using the closure of the class under the ultraproduct and isomorphism of algebraic systems, as well as the closure under ultrapowers to complement the class. H.J. Keisler, however, does not give any algebraic characterization of the criterion for completeness of a class of algebraic systems.In this article, an algebraic characterization of the completeness criterion for a class of algebraic systems is obtained. For comparison, it is not possible to give an algebraic description of the criterion for the model completeness of a class, in terms used in the article. This shows that the algebraic nature of complete and model complete classes is somewhat different.

Key words: class of algebraic systems, elementary embedding, axiomatizability, partial order relation.

Введение

Свойства элементарного вложения алгебраических систем рассматривали А. Тарский, Воот [1], А. Робинсон [2]. Отношение подобия алгебраических систем (неотличимости) по элементарной вложимости приводится А.И. Мальцевым в [3].

Во многих источниках по теории моделей [4], [5], [13], [14] помимо доказанных свойств о классах алгебраических систем делаются попытки в алгебраических терминах охарактеризовать эти свойства, т.е. показать природу этих свойств в ракурсе универсальной алгебры. Например, класс квазимногообразий или многообразий определяют, используя теоретико-модельные понятия выполнения квазитождеств или тождеств и в алгебраических понятиях замкнутости относительно прямых произведений, ультрапроизведений, выполнения локальности, замкнутости относительно гомоморфизмов. Такие примеры приводятся и в некоторых других источниках.

В данной статье рассматривается абстрактный класс K_L, то есть замкнутый класс относительно изоморфизма, всех алгебраических систем счетного языка L первого порядка, T – теория языка L. Класс алгебраических систем называется аксиоматизируемым, если он совпадает с классом всех алгебраических систем некоторой теории T [10]. Класс алгебраических систем называется полным, если он совпадает с классом всех алгебраических систем некоторой полной теории T [11]. Класс алгебраических систем называется модельно полным, если он совпадает с классом всех алгебраических систем некоторой модельно полной теории T [4].

Х. Дж. Кейслер в [4], [5] приводит и доказывает алгебраическую характеристику критерия аксиоматизируемости класса. То есть класс алгебраических систем, аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда он замкнут относительно ультрапроизведений и изоморфизмов, а его дополнение замкнуто относительно ультрастепеней. Однако Х. Дж. Кейслер [4], [5] не приводит какую-либо алгебраическую характеристику критерия полноты класса алгебраических систем. Нет такого критерия и в [14].

Основные положения

Запись $A \prec B$ означает, что алгебраическая система А – элементарная подсистема алгебраической системы В. Алгебраическая система А элементарно вкладывается в алгебраическую систему В, если существует изоморфизм алгебраической системы А на элементарную подсистему системы В. Обозначаем через $A \prec\!\to B$.

Конечно, если $A \prec\!\to B$, то алгебраические системы А и В элементарно эквивалентны. Обратное может не выполняться.

Определение 1. Модели А и В называются подобными, если $A \prec\!\to B$ и $B \prec\!\to A$.

Понятно, что если алгебраические системы А и В изоморфны, то они подобны.

На классе $К_L$ рассмотрим двуместное отношение подобия. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно [6], то есть является отношением эквивалентности, которое разбивает класс $К_L$ этим отношением на непересекающиеся классы. Фактор-класс всех этих классов обозначим через $^*К_L$. Если Т – теория, то по отношению подобия получаем фактор-класс, который обозначим через $^*К_{LT}$. Понятно, что если алгебраические системы А и В изоморфны и $A \in к_1$ и $B \in к_2$, где $к_1, к_2 \in {}^*К_L$, то $к_1 = к_2$, в этом случае классы называем изоморфными.

Материалы и методы

В работе использовались известные результаты относительно ультрапроизведений, элементарного вложения и элементарной эквивалентности алгебраических систем.

Результаты и обсуждение

На классе $^*К_L$ введем двуместное отношение $\leq$.

Определение 2. Пусть классы $к_1, к_2 \in {}^*К_L$.Тогда $к_1 \leq к_2$ означает, что алгебраические системы из класса $к_1$ элементарно вкладываются в алгебраические системы класса $к_2$.

Предложение 1. Отношение $\leq$ на $^*К_L$ является частичным порядком.

Доказательство. Отношение рефлексивно. Отношение $\leq$ антисимметрично, так как если $к_1 \leq к_2$ и $к_2 \leq к_1$, то за счет свойства элементарного вложения $к_1 = к_2$. Транзитивность отношения $\leq$ тоже выполняется.

На фактор-классе $^*К_L$ введем определение ультрапроизведения и ультрастепени по ультрафильтру D. Пусть I – непустое множество, D – ультрафильтр над I, и пусть для каждого $i \in I$, $к_i \in {}^*К_L$.

Определение 3. Ультрапроизведение $\prod_D к_i$ по ультрафильтру D – класс, в котором лежит ультрапроизведение по ультрафильтру D алгебраических систем A_i таких, что $A_i \in к_i$, $i \in I$. По аналогии определяется ультрастепень $\prod_D к$ по ультрафильтру D для $к \in {}^*К_L$

Предложение 2. Ультрапроизведение по ультрафильтру D и ультрастепень по ультрафильтру D определены корректно.

Доказательство. Проводится за счет свойств элементарного вложения.

Пусть К – некоторый класс алгебраических систем. С помощью введенного отношения подобия получим фактор-класс $^*К$.

Теорема. Пусть К – некоторый класс алгебраических систем. Класс полный тогда и только тогда, когда К удовлетворяет всем нижеперечисленным свойствам:

1) замкнут относительно ультрапроизведений и изоморфизмов, и его дополнение замкнуто относительно ультрастепеней;

2) для каждого подмножества $H \subseteq {}^*К$ существует верхняя граница в $^*К$ относительно отношения $\leq$.

Доказательство. Пусть класс К полный. Из этого следует, что $^*К \subseteq {}^*К_L$. Из известного факта [15], что для любого семейства алгебраических систем полного класса существует модель, в которую все алгебраические системы этого семейства элементарно вкладываются, вытекает выполнение условия 2).

Пусть класс К удовлетворяет всем перечисленным условиям. Из первого вытекает, что класс К аксиоматизируемый. Значит, $^*К \subseteq {}^*К_L$. И вместе с выполнением условия 2) получаем, что класс К является полным.

Для сравнения: если рассматривать модельно полный класс алгебраических систем, то в терминах, используемых в статье, дать алгебраическую характеристику критерия модельной полноты класса не представляется возможным. Это показывает, что алгебраическая природа полного и модельно полного классов некоторым образом различается.

Замечание. С введением отношения подобия для полного класса К возникает естественное понятие спектральной функции $B_{*K}(\lambda)$ – количества этих классов в каждой конкретной мощности l для полного класса К.

В [6], [7], [16] приводятся примеры, что для некоторого полного класса К спектральные функции $I_K(\lambda)$ [12] и $B_{*K}(\lambda)$ [8] могут быть различными, например, для $I_K(\omega)$ и $B_{*K}(\omega)$.

Если класс алгебраических систем K_T модельно полный и замкнут относительно произведения моделей, то можно ввести корректно операцию произведения классов на $^*K_T$. [9]. То есть получать абелеву подполугруппу $^*K_T$ абелевой полугруппы $^*K_L$.

Заключение

Используя ультрапроизведения, отношения частичного порядка и верхней границы, дана алгебраическая характеристика критерия полноты класса алгебраических систем.

Информация о финансировании

Работа третьего из авторов выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Минобрнауки РК, грант № AP09259295.

Список литературы

1 Tarski A., Vaugt R.L. Arithmetical extensions of relational systems. Compositio math. – 1957. – 13. – PP. 81–102.
2 Robinson A. Complete Theories. – Amsterdam, North-Holland, 1956.
3 Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
4 Кейслер Х.Дж., Чэн К.К. – Теория моделей. – М.: Мир, 1977
5 Keisler H.J. Ultraproducts and elementary classes. – Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, 64 (Indag. Math. 23). – PP. 477–495.
6 Бекенов М.И. Некоторые свойства элементарной вложимости в теории моделей // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. – 2016. – С. 13–16; J. Math. Sci. – 2018. – С. 10–13.
7 Бекенов М. И. О спектре квазитрансцендентных теорий // Алгебра и логика. – 1982. – С. 3–12.
8 Бекенов М.И. – Классы подобия относительно элементарной вложимости моделей теории. – Кокшетау, КУАМ, 2010. – С. 174–176.
9 Бекенов М.И., Нуракунов А.М. Полугруппа теорий и ее решетка идемпотентных элементов // Алгебра и логика. – 2021. – С. 3–22; Algebra and Logic. – 2021. – С.1–14.
10 Sacks G. Saturated Model Theory. – N.Y. Benjamin, 1972.
11 Vaught R.L. Applications Lowenheim-Skolem theorem to problems of completeness and decidability // Indag. Math. – 1954 – PP. 467–472.
12 Morley M. Categoricity in power // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – PP. 514–538.
13 Эклоф П. Теория ультрапроизведений для алгебраистов / Справочная книга по математической логике. – т.1. – гл.3.
14 Барвайс Дж. Теория моделей / Справочная книга по математической логике. – т.1. – М.: Наука, 1982.
15 Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории, УМН. – 1965. – С. 37–108.
16 Bekenov M.I. Properties of elementary embeddability in model theory // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 230. – Issue 1. – 2018. – P. 10–13.

References

1 Tarski A., Vaugt R.L. (1957) Arithmetical extensions of relational systems. Compositio math, 13, pp. 81–102.
2 Robinson A. (1956) Complete Theories. Amsterdam, North-Holland.
3 Mal'cev A.I. (1970) Algebraicheskie sistemy (in Russian).
4 Kejsler H.Dzh., Chjen K.K. (1977) Teorija modelej (in Russian).
5 Keisler H.J. Ultraproducts and elementary classes. Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, 64, Indag.Math. 23, pp. 477–495.
6 Bekenov M.I. (2016) Nekotorye svojstva jelementarnoj vlozhimosti v teorii modelej, Sib. zhurn. chist. i prikl. matem., 6:4, pp. 13–16 (in Russian); 2018 J. Math. Sci. 230:1, pp. 10–13.
7 Bekenov M.I. (1982) O spektre kvazitranscendentnyh teorij, Algebra i logika, 21:1, pp. 3–12 (in Russian).
8 Bekenov M.I. (2010) Klassy podobija otnositel'no jelementarnoj vlozhimosti modelej teorii, pp.174–176 (in Russian).
9 Bekenov M.I., Nurakunov A.M. (2021) Polugruppa teorij i ee reshetka idempotentnyh jelementov, Algebra i

logika, 60:1, pp. 3–22 (in Russian); Algebra and Logic, 2021, 60:1, pp. 1–14.
10 Sacks G. (1972) Saturated Model Theory, N.Y. Benjamin.
11 Vaught R.L. (1954) Applications Lowenheim-Skolem theorem to problems of completeness and decidability, Indag. Math., 16, pp. 467–472.
12 Morley M. (1965) Categoricity in power, Trans. Amer. Math. Soc., 114, pp. 514–538.
13 Jeklof P. Teorija ul'traproizvedenij dlja algebraistov, Spravochnaja kniga po matematicheskoj logike, vol.1, l.3 (in Russian).
14. Barvajs Dzh. (1982) Teorija modelej, Spravochnaja kniga po matematicheskoj logike, vol. 1 (in Russian).
15. Ershov Ju.L., Lavrov I.A., Tajmanov A.D., Tajclin M.A. (1965) Jelementarnye teorii, UMN, 20:4 (124), pp. 37–108 (in Russian).
16. Bekenov M.I. (2018) Properties of elementary embeddability in model theory, Journal of Mathematical Sciences, vol. 230, issue 1, pp. 10–13.

Информация об авторах

Касатова Аида
Начальник отдела Карагандинского медицинского университета, ул. Гоголя, 40, 100000, г. Караганды, Қазақстан
ORCID ID: 0003-0014-6412-7128
E-mail: kassatova@kmu.kz

Қабиденов Ануар
PhD докторант Евразийского Национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана,13, 100008, г. Астана, Казахстан
ORCID ID: 0005-0009-2319-1503
E-mail: kabiden@gmal.com

Бекенов Махсут Ескендірұлы
Профессор кафедры алгебры и геометрии Евразийского Национального университета имени Л.Н.Гумилева, ул. Кажымукана, 13, 010008, г. Астана, Қазақстан
ORCID: 0009-0007-4511-5476
E-mail: bekenov50@mail.ru

Авторлар туралы мәліметтер

Касатова Аида
Бөлім меңгерушісі, Қарағанды медицина университеті, Гоголь көш., 40, 100000, Қарағанды қ., Қазақстан
ORCID ID: 0003-0014-6412-7128
E-mail: kassatova@kmu.kz

Қабиденов Ануар
PhD докторант Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Қажымұқан көш., 010008, Астана қ., Қазақстан
ORCID ID: 0005-0009-2319-1503
E-mail: kabiden@gmal.com

Бекенов Махсут Ескендірұлы
Алгебра және геометрия кафедрасының профессоры, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Қажымұқан көш., 13, 010008, Астана қ., Қазақстан
ORCID: 0009-0007-4511-5476
E-mail: bekenov50@mail.ru

Information about authors

Kasatova Aida
Head of department of the Medical University of Karaganda, Gogol st., 40, 100000, Karagandy, Kazakhstan
ORCID ID: 0003-0014-6412-7128
E-mail: kassatova@kmu.kz

Kabidenov Anuar
PhD in L.N. Gumilyov Eurasian National University, st. Kazhymukan, 13, 010008, Astana, Kazakhstan
ORCID ID: 0005-0009-2319-1503
E-mail: kabiden@gmal.com

Bekenov Mahsut Iskanderuly
Professor of the Algebra and Geometry Department of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, st. Kazhymukan 13, 010008, Astana, Kazakhstan
ORCID: 0009-0007-4511-5476
E-mail: bekenov50@mail.ru