УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66
https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-1-6-13

Кулпешов Б.Ш.*[1,2], Судоплатов С.В.[3,4]

[1]Казахстанско-Британский технический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования, 050000, г. Алматы, Казахстан
[3]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, Россия
[4]Новосибирский государственный технический университет, 630073, г. Новосибирск, Россия
*E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz,

ПОЧТИ 1-ТРАНЗИТИВНОСТЬ В ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Аннотация. Настоящая статья касается понятия слабой o-минимальности, введенного М. Дикманном и первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном. Слабая o-минимальность является обобщением понятия o-минимальности, введенного А. Пиллэем и Ч. Стейнхорном в серии совместных статей. Как известно, упорядоченное поле вещественных чисел является примером o-минимальной структуры. В настоящей работе мы продолжаем исследование теоретико-модельных свойств o-минимальных и слабо o-минимальных структур. В частности, мы вводим понятие почти 1-транзитивности в линейно упорядоченных структурах и исследуем его свойства. Описаны почти 1-транзитивные o-минимальные и слабо o-минимальные линейные порядки. Установлено, что почти 1-транзитивный слабо o-минимальный линейный порядок изоморфен конечному числу конкатенаций почти 1-транзитивных o-минимальных линейных порядков. Исследованы свойства обогащений семейств почти 1-транзитивных линейно упорядоченных теорий. Найдены значения рангов для семейств почти 1-транзитивных o-минимальных и слабо o-минимальных линейных порядков. Найден критерий сохранения почти 1-транзитивности и слабой o-минимальности для обогащения почти 1-транзитивной слабой o-минимальной теории произвольным одноместным предикатом. Установлена плотная упорядоченность почти 1-транзитивной слабо o-минимальной теории, являющейся почти омега-категоричной.

Ключевые слова: линейно упорядоченная структура, 1-транзитивность, o-минимальность, слабая o-минимальность, обогащение теорий, почти омега-категоричность.

Кулпешов Б.Ш.,*[1,2] Судоплатов С.В.[3,4]

[1]Қазақстан-Британ техникалық университеті, 050000, Алматы к., Қазақстан
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, 050010, Алматы к., , Қазақстан
[3]РҒА Сібір бөлімі С.Л. Соболев атындағы математика институты, 630090, Новосібір к., Ресей
[4]Новосібір мемлекеттік техникалық университеті,, 630073, Новосібір к., Ресей
*E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

СЫЗЫҚТЫҚ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАРДАҒЫ 1-ТРАНЗИТИВТІК ДЕРЛІГІ

Аңдатпа. Бұл жұмыс М.Дикманн енгізген және бастапқыда Д.Макферсон, Д.Маркер және Ч.Стейнхорн зерттеген әлсіз o-минималдылық түсінігіне қатысты. Әлсіз o-минималдылық – бұл А. Пиллай мен Ч. Стейнхорнның бірлескен мақалалар сериясында енгізген o-минималдылығы ұғымының жалпылауы. Белгілі болғандай, нақты сандардың реттелген өрісі o-минималды құрылымның алгебралық мысалы болып табылады. Бұл жұмыста біз o-минималды және әлсіз o-минималды құрылымдардың модельдік-теориялық қасиеттерін зерттеуді жалғастырамыз. Атап айтқанда, сызықтық реттелген құрылымдарға дерлік 1-транзитивтік ұғымын енгіземіз және оның қасиеттерін зерттейміз. 1-транзитивтік дерлік o-минималды және әлсіз o-минималды сызықтық реттер сипатталған. Дерлік 1-транзитивтік әлсіз o-минималды сызықтық реттелген дерлік 1-транзитивтік o-минималды сызықтық реттердің конкатенацияларының ақырғы санына изоморфты болатыны анықталды. Дерлік 1-транзитивтік сызықты реттелген теориялардың отбасыларының байыту қасиеттері зерттелінді. Дәрежелік мәндер 1-транзитивтік дерлік о-минималды және әлсіз о-минималды сызықтық реттердің отбасылары үшін табылады. Дерлік 1-транзитивтік әлсіз о-минималды теорияны ерікті бір орындық предикатпен байыту үшін дерлік 1-транзитивтік және әлсіз о-минималдылықты сақтау критерийі табылды. Омега-категориялық дерлік болатын 1-транзитивтік дерлік әлсіз о-минималды теория үшін реттелген тығыздығы дәлелденді.

Тірек сөздер: сызықтық реттелген құрылым, 1-транзитивтік, о-минималдылық, әлсіз о-минималдылық, теорияларды байыту, дерлік омега-категориялық.

Kulpeshov B.Sh.,*[1,2] Sudoplatov S.V.[3,4]

[1]Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan
[3]Sobolev Institute of Mathematics, 630090, Novosibirsk, Russia
[4]Novosibirsk State Technical University, 630073, Novosibirsk, Russia
*E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

ALMOST 1-TRANSITIVITY IN LINEARLY ORDERED STRUCTURES

Abstract. The present paper concerns the notion of weak o-minimality introduced by M. Dickmann and originally deeply studied by D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn. Weak o-minimality is a generalization of the notion of o-minimality introduced by A. Pillay and C. Steinhorn in series of joint papers. As is known, the ordered field of real numbers is an example of an o-minimal structure. We continue studying model-theoretic properties of o-minimal and weakly o-minimal structures. In particular, we introduce the notion of almost 1-transitivity in linearly ordered structures and study tits properties. Almost 1-transitive o-minimal and weakly o-minimal linear orderings have been described. It has been established that an almost 1-transitive weakly o-minimal linear ordering is isomorphic to a finite number of concatenations of almost 1-transitive o-minimal linear orderings. Properties of expansions of families of almost 1-transitive linearly ordered theories are studied. Rank values for families of almost 1-transitive o-minimal and weakly o-minimal linear orderings have been found. A criterion for preserving both the almost 1-transitivity and weak o-minimality has been found at expanding an almost 1-transitive weak o-minimal theory by an arbitrary unary predicate. Dense ordering of an almost 1-transitive weakly o-minimal theory that is almost omega-categorical has been established.

Key words: linearly ordered structure, 1-transitivity, o-minimality, weak o-minimality, expansion of theories, almost omega-categoricity.

1. Введение

Пусть L – счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения <, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах.

Будем говорить, что линейно упорядоченная структура $M := \langle M, <, \dots \rangle$ является 1-транзитивной, если для любых $a, b \in M$

$$tp(a/\emptyset) = tp(b/\emptyset).$$

Будем говорить, что линейно упорядоченная структура $M := \langle M, <, \dots \rangle$ является почти 1-транзитивной, если $dcl(\emptyset) = \emptyset$ и любое непустое $\emptyset$ -определимое подмножество структуры *A*, не являющееся выпуклым, плотно в *M*, т.е. для любых $a_1, a_2 \in A$ из условия $a_1 < a_2$ следует, что существует $a \in A$ такой, что $a_1 < a < a_2$.

Факт 1.1 Любая 1-транзитивная линейно упорядоченная структура является почти 1-транзитивной.

Пример 1.2 Пусть $M := \langle Q_1(2), < \rangle$, т.е. *M* – множество дуплетов, упорядоченных по типу Q. Тогда *M*– почти 1-транзитивная не 1-транзитивная структура.

Пример 1.3 Пусть $M := \langle \omega, < \rangle$ где ω– порядок на множестве натуральных чисел. Очевидно, что *M* не является почти 1-транзитивной, поскольку $dcl(\emptyset) \neq \emptyset$.

Факт 1.4 Пусть *M*-почти 1-транзитивная линейно упорядоченная структура. Тогда

(1) *M* не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов.

(2) Любое выпуклое $\varnothing$ определимое подмножество структуры *M* не имеет концевых точек в *M*.

Открытый интервал *I* в структуре *M* есть параметрически определимое подмножество структуры *M* вида

$$I = \{\, c \in \ M \colon M \vDash \ a < c < b\}$$

для некоторых $a, b \in \ M \cup \{-\infty, \infty\}$, где $a < b$. Аналогично мы можем определить замкнутые, полуоткрытые-полузамкнутые и т.п. интервалы в *M* так, что, например, произвольная точка структуры *M* является сама (тривиальным) замкнутым интервалом. Подмножество *A* линейно упорядоченной структуры *M* называется выпуклым, если для любых $a, b \in \ A$ и $c \in \ M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$. Слабо о-минимальной структурой [1] называется линейно упорядоченная структура $M \coloneqq \langle M, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры *M* является объединением конечного числа выпуклых множеств в *M*. Вспомним, что такая структура *M* называется о-минимальной, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры *M* является объединением конечного числа интервалов и точек в *M*. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Предложение 1.5 Пусть *M* – почти 1-транзитивная о-минимальная структура. Тогда

(1) *M* является 1-транзитивной.

(2) либо $\langle\, M, < \rangle$ – плотный линейный порядок без концевых точек, либо $\langle\, M, < \rangle$ – дискретный линейный порядок без концевых точек.

Доказательство Предложения 1.5. (1) Допустим противное: существуют $a, b \in \ M$ такие, что $a \neq \ b$ и

$$tp(a/\emptyset) \neq \ tp(b/\emptyset).$$

Следовательно, существует *L*-формула *ϕ(x)* такая, что

$$M \vDash \phi(a) \wedge \neg\, \phi(b)$$

Рассмотрим *ϕ(M)*. В силу о-минимальности *ϕ(M)* есть объединение конечного числа интервалов и точек, причем каждый такой интервал или точка являются $\varnothing$- определимыми.

Поскольку согласно допущению $\phi(M) \neq \ M$, то получаем, что $dcl(\emptyset) \neq \emptyset$.

(2) Если это не так, то рассмотрим следующую формулу:

$$\theta(x) \colon= \forall\, y_1 \,\forall\, y_2 \,[y_1 < x < y_2 \rightarrow \exists\, t_1 \,\exists\, t_2 \,(y_1 < t_1 < x < t_2 < y_2)].$$

В силу допущения $\theta(M) \neq \ M$ и $\theta(M) \neq \emptyset$. Также в силу о-минимальности $\theta(M)$ есть объединение конечного числа интервалов и точек, откуда получим, что $dcl(\emptyset) \neq \emptyset$.

Следствие 1.6 Пусть *M* – почти 1-транзитивный о-минимальный линейный порядок. Тогда *M* изоморфна $\langle\, Q, < \rangle$ или *M* изоморфна $\langle\, \omega^* + \omega, < \rangle$.

Предложение 1.7 Пусть *M* – бесконечный линейный порядок. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *M* – 1-транзитивный;

(2) *M* – почти 1-транзитивный и о-минимальный.

2. Методы

В настоящей статье используются методы, которые получили свое развитие в теории моделей в восьмидесятые годы двадцатого века и позже. Среди них можно отметить методологию изучения упорядоченных структур на основе таких понятий, как о-минимальность и варианты о-минимальности. Типичным в такой ситуации является наложение строгих ограничений на множества, определяемые формулой с одной свободной переменной. Так, о-минимальная структура *M* может рассматриваться как L-структура, где $L \supset L_0=\{<\}$,< – линейный порядок на M, и каждое определимое подмножество структуры M является бескванторно L_0-определимым. Это дает установку для других понятий: заменяем L_0 на некоторый другой известный язык, рассматриваем L-структуры такие, что L_0-редукт имеет обусловленный тип (например, линейный порядок), и требуем, чтобы каждое определимое подмножество структуры M являлось (бескванторно) L_0-определимым (можно требовать это для всех моделей данной теории).

3. Результаты

Пусть T – семейство полных теорий фиксированной сигнатуры Σ, ϕ – произвольное Σ-предложение. Тогда множество $\mathrm{T}_\phi := \{T \in \mathrm{T} \mid T \vDash \phi\}$ называется ф-окрестностью семейства T.

Определение 3.1 [2] Пусть T– семейство полных теорий фиксированной сигнатуры Σ.
Определим ранг} RS для семейства теорий следующим образом:

(1) RS(T)=-1, если T= $\emptyset$.

(2) RS (T)=0, если T – конечное непустое семейство.

(3) RS (T)=≥1 если T бесконечно.

(4) $\mathrm{RS}(\mathrm{T}) \geq \alpha + 1$, если существуют попарно несовместные Σ-предложения $\phi_n, n \in \omega$, такие что $\mathrm{RS}(\mathrm{T}_{\phi_n}) \geq \alpha$.

(5) Если δ – предельный ординал, то $\mathrm{RS}(\mathrm{T}) \geq \delta$, если $\mathrm{RS}(\mathrm{T}) \geq \beta$ для любого $\beta < \delta$.

Мы полагаем RS(T)=α если RS(T)≥α и $\neg[RS(\mathrm{T}) \geq \alpha + 1]$.

Если RS(T)≥α для любого α, то мы полагаем $\mathrm{RS}(\mathrm{T}) = \infty$.

Семейство T называется e-тотально трансцендентным или тотально трансцендентным, если RS(T) является ординалом.

Если семейство T e-тотально трансцендентно, с RS(T)=α≥0 то в качестве степени ds(T) семейства T рассматривается максимальное число попарно несовместных предложений ϕ_i, для которых $\mathrm{RS}(\mathrm{T}_{\phi i})=\alpha$

Следствие 3.2 Пусть T – семейство всех почти 1-транзитивных о-минимальных линейных порядков. Тогда RS(T)=0, ds(T)=2.

Пример 3.3 Пусть $M := \langle Q + \omega^* + \omega + Q, < \rangle$, где ω* – обратный порядок на множестве натуральных чисел (или порядок на множестве отрицательных целых чисел).

Тогда M – почти 1-транзитивный слабо о-минимальный линейный порядок, не являющийся 1-транзитивным. Также замечаем, что данная структура не является ни плотно упорядоченной, ни дискретно упорядоченной.

Теорема 3.4 Пусть M – почти 1-транзитивный слабо о-минимальный линейный порядок. Тогда M изоморфна конечному числу конкатенаций почти 1-транзитивных о-минимальных линейных порядков.

Доказательство теоремы 3.4. Пусть M – почти 1-транзитивный слабо о-минимальный линейный порядок. Рассмотрим формулу $\theta(x)$, которая означает, что x не имеет ни непосредственного предшественника, ни непосредственного последователя. В силу слабой о-минимальности $\theta(M)$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств, т.е.

$$\theta(M) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

где каждое U_i выпукло. Опять в силу слабой о-минимальности каждое U_i является $\emptyset$- определимым, и, следовательно, не имеет концевых точек, откуда

$$\langle U_i, < \rangle \simeq \langle Q, < \rangle.$$

Рассмотрим теперь формулу *IS(x),* означающую, что *x* имеет непосредственного последователя, но не имеет непосредственного предшественника. Предположим, что *IS(M)* непустое. Тогда в силу слабой о-минимальности *IS(M)* есть объединение конечного числа выпуклых множеств, откуда элемент, удовлетворяющий формуле *IS(x),* попадает в $dcl(\emptyset)$, т.е. $dcl(\emptyset) \neq \emptyset$. Следовательно, $IS(M) = \emptyset$. Аналогично можно показать, что $IP(M) = \emptyset$, где $IP(x)$ означает, что x имеет непосредственного предшественника, но не имеет непосредственного последователя. Таким образом, если

$a \in \neg\, \theta(M)$ то α имеет как непосредственного предшественника, так и непосредственного последователя. В силу слабой о-минимальности $\neg\theta(M)$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств, т.е.

$$\neg\theta(M) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i\,,$$

где каждое V_i выпукло, $\varnothing$-$_i$ определимо и не имеет концевых точек, откуда

$$\langle\, V_i, < \rangle \simeq \langle\, \omega^* + \omega, < \rangle.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.5 Пусть T – семейство всех почти 1-транзитивных слабо о-минимальных линейных порядков. Тогда RS(T)=1.

Предложение 3.6 Пусть T – линейно упорядоченная теория. Если T почти 1-транзитивна, то не существует обогащения теории T какими-либо константными символами, сохраняющего почти транзитивность.

Теорема 3.7 Пусть T – почти 1-транзитивная слабо о-минимальная теория. Тогда обогащение теории T произвольным одноместным предикатом сохраняет почти 1-транзитивность и слабую о-минимальность тогда и только тогда, когда такой предикат выделяет конечное число бесконечных выпуклых множеств без концевых точек.

Доказательство теоремы 3.7. $(\Rightarrow)$ В силу слабой о-минимальности любой одноместный предикат должен выделять лишь конечное число выпуклых множеств. Если какое-либо из выделенных выпуклых множеств является конечным или имеет хотя бы одну концевую точку, то получим, что определимое замыкание пустого множества не является пустым, что противоречит почти 1-транзитивности.

$(\Leftarrow)$ Если одноместный предикат выделяет лишь конечное число выпуклых множеств, то в силу теоремы 63 [5] такое обогащение сохраняет слабую о-минимальность.

Если каждое выделенное этим предикатом выпуклое множество является бесконечным и не имеет концевых точек, то такое обогащение является почти 1-транзитивным.

Следствие 3.8 Пусть T – о-минимальная теория. Если T почти 1-транзитивна, то не существует нетривиального обогащения теории T какими-либо одноместными предикатными символами, сохраняющего почти транзитивность.

Далее, обозначим через $\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma}$ семейство всех почти 1-транзитивных слабо о-минимальных плотно упорядоченных теорий сигнатуры Σ.

Следствие 3.9 Пусть $\Sigma^1_\kappa = \{<, P^1_i\}_{i<\kappa}$, где k – некоторый кардинал. Тогда имеет место следующее:

(1) если $\kappa < \omega$, то $\mathrm{RS}(\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma^1_\kappa}) = \kappa$;

(2) если $\kappa \geq \omega$, то $\mathrm{RS}\left(\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma^1_\kappa}\right) = \infty$.

Доказательство следствия 3.9.

(1) В силу теоремы 3.7 каждый одноместный предикат выделяет лишь конечное число бесконечных выпуклых множеств без концевых точек. Построим бесконечно ветвящееся дерево длины k для $\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma^1_\kappa}$. На первом уровне различаем теории, в которых первый предикат P_1 выделяет n бесконечных выпуклых множеств без концевых точек для каждого $n < \omega$. Далее, на i-том уровне $(i \leq \kappa)$ различаем теории, в которых предикат P_i выделяет n бесконечных выпуклых множеств без концевых точек для каждого $n < \omega$. Поскольку других способов ветвления нет, то $\mathrm{RS}(\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma^1_\kappa}) = \kappa$.

(2) Так как имеется бесконечное число одноместных предикатов, то можно построить бесконечно ветвящееся дерево бесконечной длины, откуда $\mathrm{RS}\left(\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma^1_\kappa}\right) = \infty$.

Предложение 3.10 Пусть T – о-минимальная теория. Если T почти 1-транзитивна, то не существует нетривиального обогащения теории T каким-либо отношением эквивалентности, разбивающим основное множество структуры на бесконечные выпуклые классы, сохраняющего почти 1-транзитивность и о-минимальность.

Доказательство предложения 3.10. В силу о-минимальности любое отношение эквивалентности

E с бесконечными выпуклыми классами разбивает основное множество структуры лишь на конечное число E-классов, откуда каждый E-класс является $\varnothing$- определимым. Поскольку в силу о-минимальности каждое нетривиальное выпуклое бесконечное множество, являющееся определимым, должно иметь концевые точки, то E является универсальным отношением, т.е. для любых $a, b \in M$ выполняется $E(a, b)$.

Предложение 3.11 Пусть $\Sigma_1^E := \{<, E^2\}$, где бинарный символ E определяет отношение эквивалентности, разбивающее основное множество структуры на бесконечные выпуклые классы. Тогда $\mathrm{RS}\left(\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma_1^E}\right) = \infty$.

Доказательство Предложения 3.11. В слабо о-минимальной теории отношение эквивалентности может разбивать основное множество структуры на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, при этом число классов, имеющих хотя бы одну концевую точку, должно быть конечно. Но учитывая почти 1-транзитивность, каждый E-класс не имеет концевых точек. Если M – основное множество структуры, то в силу слабой о-минимальности M/E имеет лишь конечное число максимальных выпуклых дискретных частей (и, как следствие, конечное число максимальных плотных частей).

Построим бесконечное ветвящееся дерево бесконечной длины. На первом уровне различаем подсемейства теорий, в которых

$$M/E \equiv m_1 + Q + \cdots, \text{где } 1 \leq m_1 < \omega.$$

На втором уровне для каждой m_1-той ветви различаем подсемейства теорий, в которых

$$M/E \equiv m_1 + Q + m_2 + Q + \cdots, \text{где } 2 \leq m_2 < \omega.$$

На k-том уровне $(k < \omega)$ для каждой $(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1})$-той ветви различаем подсемейства теорий, в которых

$$\mathrm{M}/E \equiv m_1 + Q + \cdots + m_{k-1} + Q + m_k + Q + \cdots,$$

где $2 \leq m_k < \omega$. Таким образом, $\mathrm{RS}\left(\mathrm{T}^{dense}_{AT,wom,\Sigma_1^E}\right) = \infty$.

Определение 3.12 [3, 4] Пусть T – счетная полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ является $(p_1, \ldots, p_n)$-типом, если

$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \ldots \cup p_n(x_n) \subseteq q(x_1, \ldots, x_n)$$

Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T будем обозначать через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.

Теория T называется почти ω-категоричной или почти омега-категоричной, если для любых $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$..

Предложение 3.13 Пусть M – почти 1-транзитивная слабо о-минимальная структура. Предположим, что *Th(M)* – почти омега-категоричная. Тогда M является плотно упорядоченной.

Доказательство предложения 3.13. Согласно теореме 2.4 редукт структуры M на линейный порядок $\{<\}$ является изоморфной конечному числу конкатенаций порядков $\langle Q, < \rangle$ и $\langle \omega^* + \omega, < \rangle$..

Предположим, что имеется хотя бы один порядок, изоморфный $\langle \omega^* + \omega, < \rangle$. Тогда рассмотрим следующие формулы:

IS(x)-"*x* имеет непосредственного последователя",

IP(x)-"*x* имеет непосредственного предшественника",

S_1(x,y) -"*y* – непосредственный последователь элемента *x*"

S_n(x,y)-"*y*-*n*-тый непосредственный последователь элемента *x*", *n*≥*1*.

В силу допущенного предположения следующее множество формул локально совместно:

$$\{IS(x) \wedge IP(x)\} \cup \{\exists y\, S_n(x, y) \mid n \geq 1\}.$$

Следовательно, существуют $p \in S_1(\emptyset)$, расширяющий это множество формул, и элементарное расширение M' структуры M, в котором тип p реализуется. Тогда для каждого $n < \omega$ множество

$$p(x) \cup p(y) \cup \{S_n(x, y)\}$$

совместно, откуда число (p_1, p_2)-типов бесконечно, где $p_i(x_i) := p(x_i), i \in \{1, 2\}$. Получаем противоречие с почти ω-категоричностью $Th(M)$.

Пример 3.14 Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, R^2 \rangle$--- линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем каждую интерпретацию $P_i(i=1,2)$ с множеством рациональных чисел Q, упорядоченном как обычно. Отношение $R(x,y)$ определяется следующим образом: для любых $a, b \in P_1(M)$ имеет место

$$R(a, b) \Leftrightarrow a \leq b < a + \sqrt{2}.$$

Может быть установлено, что M – почти 1-транзитивная не 1-транзитивная слабо о-минимальная структура, являющаяся плотно упорядоченной, и при этом $Th(M)$ не является почти омега-категоричной.

Заключение. В настоящей статье введено новое понятие – почти 1-транзитивность в линейно упорядоченных структурах; исследованы его свойства и взаимосвязи с другими понятиями. Заключаем, что новое понятие оказалось весьма продуктивным, поскольку были выявлены новые интересные факты в линейно упорядоченных структурах.

Информация о финансировании. Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант BR20281002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society, 2000, volume 352, no. 12, pp. 5435–5483.

2 Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, volume 42, no. 12, pp. 2959–2968.

3 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly, 1998, volume 44, no. 2, pp. 161–166.

4 Судоплатов С.В. Классификация счетных моделей полных теорий. – Новосибирск: НГТУ. – Части 1 и 2. – 2018.

5 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 2001, volume 66, no. 3, pp. 1382–1414.

REFERENCES

1 Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. (2000) Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society, volume 352, no. 12, pp. 5435–5483.

2 Sudoplatov S.V. (2021) Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics, volume 42, no. 12, pp. 2959–2968.

3 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. (1998) On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly, volume 44, no. 2, pp. 161–166.

4 Sudoplatov S.V. (2018) Klassifikacija schetnyh modelej polnyh teorij. – Novosibirsk: NGTU, chasti 1 i 2. (In Russian)

5 Baizhanov B.S. (2001) Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, volume 66, no. 3, pp. 1382–1414.

Информация об авторах

Кулпешов Бейбут Шайыкович (автор для корреспонденции)
Доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН РК, профессор Школы прикладной математики, Казахстанско-Британский технический университет, ул. Толе би, 59, 050000, г. Алматы, Казахстан; главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, 050010, г. Алматы, Казахстан.
ORCID ID: 0000-0002-4242-0463
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Судоплатов Сергей Владимирович
Доктор физико-математических наук, заместитель директора Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск, Россия; заведующий кафедрой алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета, пр. К. Маркса, 20, 630073, г. Новосибирск, Россия
ORCID ID: 0000-0002-3268-9389
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Авторлар туралы мәліметтер

Кулпешов Бейбіт Шайықұлы (корреспонденция авторы)
Физика-математика ғылымының докторы, Қазақстан Республикасы Ұлттық Ғылымдар Академиясының корреспондент мүшесі, Қолданбалы математика мектебінің профессоры, Қазақстан-Британ техникалық университеті, Төле би көш., 59, 050000, Алматы қ, Қазақстан; Математика және математикалық модельдеу институттың бас ғылыми қызметкері, Пушкин көш., 125, 050010, Алматы қ., Қазақстан
ORCID ID: 0000-0002-4242-0463
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Судоплатов Сергей Владимирович
Физика-математика ғылымдардың докторы, Ресей Ғылымдар Академиясының Сібір Бөлімшесінің С.Л. Соболев атындағы математика институты директорының орынбасары, Академик Коптюга даң., 4, 630090, Новосибирск қ., Ресей; Новосібір мемлекетік техникалық университетінің алгебра және математикалық логика кафедрасының меңгерушісі, 630073, К.Маркс даң., 20, Новосибирск қ., Ресей
ORCID ID: 0000-0002-3268-9389
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Information on the authors

Kulpeshov Beibut Shaiykovich (corresponding author)
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan; Professor of School of Applied Mathematics, Kazakh-British Technical University, 59, Tole bi street, Almaty, 050000, Kazakhstan; Chief Researcher of Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125, Pushkin street, Almaty, 050010, Kazakhstan
ORCID ID: 0000-0002-4242-0463
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Sudoplatov Sergey Vladimirovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Deputy Director of Sobolev Institute of Mathematics, 4, academician Koptyug av., 630090, Novosibirsk, Russia; Head of Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx av., 630073, Novosibirsk, Russia
ORCID ID: 0000-0002-3268-9389
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru