ӘОЖ 517.956
ҒТАХР 27.31.15

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-3-124-143

[1]*Қошанов Б.Д.,
ф.-м.ғ.д., профессор, бас ғылыми қызметкер
ORCID ID: 0000-0002-0784-5183,
*e-mail: koshanov@math.kz
[2]Тұрғанбек Ұ.,
магистрант, ORCID ID: 0009-0000-5894-1194,
e-mail: Ulzya03@mail.ru
[2]Ерхан А.Ж.,
магистрант, ORCID ID: 0009-0001-5552-8908,
e-mail: ainur.erkhan@icloud.com

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

КӨПӨЛШЕМДІ ШАРДА ПОЛИГАРМОНИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Эллиптикалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу қажеттілігі гидродинамика, электростатика, механика, жылуөткізгіштік, серпімділік теориясы және кванттық физика процестерін теориялық тұрғыдан зерттеудегі көптеген практикалық қолданылуларымен негізделеді. Мысалы, электростатикалық өріс потенциалының таралуы Пуассон теңдеуі арқылы сипатталады, ал аз иілетін жұқа пластиналардың тербелістері бигармоникалық теңдеулер арқылы сипатталады. Бұл жұмыста бірлік шарда полигармоникалық теңдеу үшін бір шеттік есептің, яғни ізделінді функцияның бірінші нормал туындысынан бастап $m-1$-ші ретті туындысына дейін қатар берілсе және соңғысына $m+1$-ші ретті туындысы берілген есеп шешімділікке зерттеледі. Осы есепті шешу үшін бастапқы есепті арнайы интегралды-дифференциалды операторлардың көмегімен Нейман есебіне алып келеміз. Ал Нейман есебін интегралды-дифференциалды операторлардың көмегімен Дирихле есебіне алып келеміз. Дирихле есебінің шешімі Грин функциясының көмегімен және Альманси өрнегімен өрнектелетіндігін қолданамыз. Осы өрнектердің нәтижесінде бастапқы есептің шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты табылады.

Түйін сөздер: полигармоникалық теңдеу, Нейман есебі, Дирихле есебі, интегралды-дифференциалды операторлар, шешімділіктің қажетті және жеткілікті шарты.

Кіріспе

Эллиптикалық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімдерін ұсынудың тиімді әдістерінің бірі – есептің Грин функциясын құруға негізделген әдіс болып табылады. Әртүрлі классикалық шеттік есептер үшін Грин функциясын айқын түрде құруға көптеген жұмыстар арналған.

Бірлік шардағы полигармоникалық теңдеу үшін Дирихле есебінің Грин функциясының айқын түрі әртүрлі тәсілдермен [1-5] жұмыстарында құрылған.

[6] жұмыста шарда Лаплас операторы үшін Робен есебінің Грин функциясы құрылған, ал [7] жұмыста полигармоникалық теңдеуі үшін Дирихле есебінің полиномиалды шешімі құрылған.

[8, 9] жұмыстарында бигармоникалық теңдеу үшін инволюциясы бар кейбір локалды және локалды емес шеттік есептердің шешімділігі зерттеліп, олардың Грин функциялары құрылған. Шардағы бигармоникалық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешімділік шарттары [10] жұмыста алынған.

[11] жұмысында біртекті полигармоникалық теңдеу үшін Дирихле және Нейман есептерінің шешімдері Грин функциясын қолданбай-ақ табылған. [12] жұмыста Навье [13] және Рикье--Нейман есептері үшін бигармоникалық теңдеудің шардағы Грин функциялары келтірілген, ал [14] жұмысында осындай есептердің полигармоникалық теңдеу үшін Грин функциялары құрылған.

[15,16] жұмыстарында біртексіз үшгармоникалық теңдеу үшін Дирихле-2 есебінің Грин функциясы құрылған. Оның ішінде полигармоникалық теңдеулер үшін іргелі шешімге байланысты тың мәліметтер келтірілген. [17] жұмысында көпөлшемді бірлік шарда үшгармоникалық теңдеу үшін жалпы шарттары бар шеттік есептердің шешімділігі зерттелген, оған қосымша Альманси өрнегінің дұрыстығы дәлелденген.

[18,19] жұмыстарында полигармоникалық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешімділік шарттары табылып, бигармоникалық және үшгармоникалық теңдеулер үшін мысалдар келтірілген.

$$\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$$

бірлік шар, ал

$$\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$$

бірлік сфера болсын және m - оң бүтін сан болсын. Ω облысында келесі Нейман шеттік есебі Б.Қ.Түрметов пен Р.Р.Ашуровтың [22] жұмысында қарастырылған:

$$(-\Delta)^m u(x) = g(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}(x) = \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in \partial\Omega \tag{2}$$

мұндағы ν - $\partial\Omega$ сферасына түсірілген сыртқы бірлік нормаль вектор, $g(x)$ және $\varphi_k(x)$ - берілген функциялар; бұл функциялар жеткілікті түрде тегіс деп есептейміз және әрі қарай олардың тегістігіне тоқталмаймыз.

$u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m+1}(\overline{\Omega})$ функциясы (1), (2) есептердің классикалық мағынада шарттарын қанағаттандырса, осы есептің шешімі деп аталады.

Бұрыннан белгілі (мысалы, [20]-ді қараңыз), тіпті $m = 1$ болған жағдайда да (1), (2) есептердің кез келген (тіпті тегіс) $g(x)$ және $\varphi_k(x)$ функциялары үшін шешімі бола бермейді; Пуассон теңдеуі жағдайында Нейман есебінің шешімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шарт:

$$\int_\Omega g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \varphi_1(x)\,dS_x.$$

Б.Е.Кангужин мен Б.Д.Қошановтың [18] жұмысында, атап айтқанда, ($m = 2$) болған жағдайда (1), (2) есебінің шешімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттың келесі түрде болатынын көрсетті:

$$\int_{\partial\Omega}\left\{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+\int_{\Omega} d_{2,n}(4-n)\right.$$
$$\left.\times\left[(2-n)|x-y|^{-n}(1-(x,y))^2+|x-y|^{-n}(x,y)\right]g(y)\,dy\right\}dS_x=0,$$

мұндағы (x,y) - R^n-дегі скаляр көбейтінді, ал

$$d_{2,n}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{16\pi^{\frac{n}{2}}}.$$

[21] жұмыстың авторлары бұл шартты басқа түрде ұсынды, оны оңай тексеруге болады:

$$\int_{\Omega}\frac{1-|x|^2}{2}g(x)\,dx=\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right]\,dS_x.$$

Жоғарыда аталған [18] жұмыста авторлар (1), (2) Нейман есебі үшін кез келген m жағдайында да шешімділік шартын тапты (қараңыз: [18], Теорема 4.2). Бұл шарт $m\times m$ өлшемді матрицаның анықтауышының нөлге тең болуынан туындайды, оның бір бағаны келесі интегралдардан тұрады:

$$\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_k(x)-\frac{\partial^k}{\partial\nu^k}\left(\varepsilon_{m,n}*g(x)\right)\right]\,dS_x,\quad \varepsilon_{m,n}=d_{m,n}|x|^{2m-n},$$

ал $d_{m,n}$ - белгілі тұрақтылар. Айта кету керек, нәтижесінде алынған теңдеуді тексеру қиынға соғады.

(1), (2) есебі Б.Қ.Түрметов пен Р.Р.Ашуровтың [22] жұмысында толық зерттелді. Сол жұмыста осы Нейман есебінің шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты табылды.

Жоғарыда аталған ескертпелер [22] жұмысында толық шешілген, яғни бірлік шарда полигармоникалық теңдеу үшін (1), (2) Нейман есебінің шешімділік шарты алынған.

[23] жұмысында ұқсас әдіс бөлшек ретті шекаралық операторы бар Пуассон теңдеуі үшін шеттік есепті шешуде қолданылған.

Бұл жұмыста

$$\Omega=\{x\in R^n:|x|<1\}$$

бірлік шарда полигармоникалық теңдеу үшін келесі шеттік есеп қарастырылады:

$$(-\Delta)^m u(x)=g(x),\quad x\in\Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k}(x)=\varphi_k(x),\quad k=1,2,\ldots,m-1,\quad \frac{\partial^{m+1}u}{\partial\nu^{m+1}}(x)=\varphi_m(x),\quad x\in\partial\Omega \tag{4}$$

мұндағы $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ - $\partial\Omega$ сферасына түсірілген сыртқы бірлік нормаль бойынша алынған туынды.

Мұндай шеттік есептерді зерттеу алдында қарастырылған есептерге мүлдем ұқсамайды. Сол себептен де полигармоникалық теңдеу үшін (3),(4) шеттік есебін зерттеу өте маңызды. Дербес жағдайда, бигармоникалық және үшгармоникалық теңдеулер үшін осы есептерге қысқаша К-13 және К-124 белгілеулерін қолданамыз. Бұл есептер қолданыс жағынан маңызды. Мысал ретінде гидромеханиканың сызықтандырылған Стокс жүйесіне қатысты қолданбасын келтіруге болады.

Осы жұмыстың негізгі мақсаты - (3),(4)есебінің шешімділік шартын неғұрлым қарапайым түрде табу. Айта кету керек, біздің зерттеуімізде (3),(4)шеттік есебі үшін негізінен полигармоникалық теңдеуге арналған Дирихле есебінің Грин функциясы және Альманси өрнегі қолданылады.

Материалдар мен әдістер.
$\Gamma_c[u], \Gamma_c^{-1}[u]$ интегралды-дифференциалдық операторлардың қасиеттері

Ω--облысында $u(x)$-жеткілікті дәрежеде тегіс функция болсын. Төмендегідей операторларды қарастырайық:

$$\Gamma_c[u](x) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + c\right) u(x), \qquad \Gamma_c^{-1}[u](x) = \int_0^1 t^{c-1}u(tx)\,dt, \tag{5}$$

мұндағы $r = |x|$ және $c \geq 0$ тұрақты шама. Γ_0^{-1} операторы $u(0) \neq 0$ болатын $u(x)$ функциялары үшін анықталмағанын ескеруміз керек.

Көпөлшемді шардағы гармоникалық функциялар класында $c > 0$ болғанда Γ_c және Γ_c^{-1} операторларының қасиеттері [24] мақалада зерттелген.

Лемма 1. [24] $u(x)$- тегіс функция болсын. Онда кез келген $x \in \Omega$ үшін келесілер орындалады

1) егер $c > 0$ болса, онда

$$\Gamma_c\left[\Gamma_c^{-1}[u]\right](x) = \Gamma_c^{-1}\left[\Gamma_c[u]\right](x) = u(x); \tag{6}$$

2) егер $c = 0$ болса, онда

$$\Gamma_0^{-1}\left[\Gamma_0[u]\right](x) = u(x) - u(0); \tag{7}$$

3) егер $c = 0$ және $u(0) = 0$ болса, онда

$$\Gamma_0\left[\Gamma_0^{-1}[u]\right](x) = u(x). \tag{8}$$

Дәлелдеуі. $c \geq 0$ болсын. Онда

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^c u(tx)\right] dt = \int_0^1 t^{c-1}\left[cu(tx) + t\frac{d}{dt}u(tx)\right] dt = \int_0^1 t^{c-1}\Gamma_c[u](tx)\,dt.$$

Сондықтан, егер $c > 0$ болса, онда

$$u(x) = \int_0^1 t^{c-1}\Gamma_c[u](tx)\,dt = \Gamma_c^{-1}\left[\Gamma_c[u]\right](x),$$

және егер $c = 0$ болса, онда

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 t^{-1}\Gamma_0[u](tx)\,dt. \tag{9}$$

Демек, (7)-ші теңдік және (6)-шы теңдік дәлелденді.

Жоғарыда атап өткендей, егер $u(0) = 0$ болса, онда $\Gamma_0^{-1}[u]$ өрнегі анықталады. Енді осы өрнекке Γ_0 операторын қолданамыз. Сонда

$$\Gamma_0 \left[\Gamma_0^{-1}[u]\right](x) = \int_0^1 t^{-1}\Gamma_0[u](tx)\,dt.$$

Бірақ (9) теңдігіне және $u(0) = 0$ шартына байланысты соңғы өрнек $u(x)$-ке тең. Демек, (8) теңдігі дәлелденді. (6)-тегі бірінші теңдікті дәл осылай дәлелдеуге болады.

Келесі тұжырымды тікелей есептеулер арқылы дәлелдеуге болады.

Лемма 2. [24] $u(x)$- тегіс функция болсын. Онда кез келген $x \in \Omega$ үшін келесілер орындалады

1) егер $c \geq 0$ болса, онда

$$\Delta\Gamma_c[u](x) = \Gamma_{c+2}[\Delta u](x);$$

2) егер $c > 0$ болса, онда

$$\Delta\Gamma_c^{-1}[u](x) = \Gamma_{c+2}^{-1}[\Delta u](x);$$

3) егер $c = 0$ және $u(0) = 0$ болса, онда

$$\Delta\Gamma_0^{-1}[u](x) = \Gamma_2^{-1}[\Delta u](x).$$

Салдар 1. $u(x)$ - тегіс функция болсын. Онда кез келген $x \in \Omega$ үшін:

(1) егер $c \geq 0$ болса, онда

$$\Delta^m\Gamma_c[u](x) = \Gamma_{c+2m}\left[\Delta^m u\right](x); \tag{10}$$

(2) егер $c > 0$, немесе $c = 0$ және $u(0) = 0$ болса, онда

$$\Delta^m\Gamma_c^{-1}[u](x) = \Gamma_{c+2m}^{-1}\left[\Delta^m u\right](x). \tag{11}$$

3. Дирихле есебінің шешімдерінің кейбір қасиеттері

$v(x)$ - келесі Дирихле есебінің шешімі болсын:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m v(x) = g_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Бұрыннан белгілі (мысалы, [3--7] қараңыз) жайт, егер $g_1(x)$ жеткілікті тегіс функция болса, онда (12) есептің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде жазылады:

$$v(x) = \int_\Omega G_{m,n}(x, y) g_1(y)\,dy, \tag{13}$$

мұндағы $G_{m,n}(x, y)$ - (12) Дирихле есебінің Грин функциясы.

Бұл жерде Грин функциясының келесі айқын түрін қолданамыз [4,5]:

Егер n тақ болса, немесе жұп болып, $n > 2m$ болса, онда

$$G_{m,n}(x,y) = d_{m,n}\Bigg[|x-y|^{2m-n} - \left||x|y - \frac{y}{|y|}\right|^{2m-n} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right) \times \left||x|y - \frac{y}{|y|}\right|^{2m-n-2k} (1-|x|^2)^k(1-|y|^2)^k\Bigg],$$

мұндағы

$$d_{m,n} = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{n}{2}-m\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} 4^m (m-1)!};$$

Егер n жұп және $n \le 2m$ болса, онда

$$G_{m,n}(x,y) = d_{m,n}\Bigg[|x-y|^{2m-n}\left(\ln|x-y|^2 - \ln\left||x|y - \frac{y}{|y|}\right|^2\right) + \sum_{k=1}^{m-1}\left||x|y - \frac{y}{|y|}\right|^{2m-n-2k}(1-|x|^2)^k(1-|y|^2)^k \times \sum_{j=\max(k-\frac{n}{2},0)}^{\min(m-\frac{n}{2},k-1)} \frac{(-1)^j}{k-j} C^j_{m-\frac{n}{2}}\Bigg],$$

мұндағы

$$d_{m,n} = \frac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}}{2\pi^{\frac{n}{2}} 4^m \left(m-\frac{n}{2}\right)!(m-1)!}.$$

Лемма 3. (12) Дирихле есебінде $g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x)$ болсын, ал $v(x)$ --- осы есептің жалғыз шешімі болсын. Онда $v(0) = 0$ шартының орындалуы келесі шарттың орындалуымен парапар:

$$\int_\Omega (1-|x|^2)^{m-1} g(x)\,dx = 0. \tag{14}$$

Дәлелдеуі. $v(x)$ --- (12) есебінің шешімі болсын. Онда ол (13) формуламен беріледі. Грин функциясының айқын түрін қолдану үшін n тақ немесе $n > 2m$ болатын жұп жағдайды қарастырамыз (қалған жағдайлар ұқсас дәлелденеді). Сондықтан, егер $v(0) = 0$ болса, онда (13)-ден:

$$\int_\Omega \Bigg[|y|^{2m-n} - 1 - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-|y|^2)^k\Bigg] g_1(y)\,dy = 0.$$

Енді $\rho = |y|$, $\xi = \dfrac{y}{|y|}$ деп белгілейік. Сонда интеграл:

$$\int_{|\xi|=1}\int_0^1 \rho^{n-1}\left[\rho^{2m-n} - 1 - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^k\right] \times g_1(\rho,\xi)\,d\rho\,d\xi = \int_{|\xi|=1} I(\xi)\,d\xi.$$

Енді $I(\xi)$ ішкі интегралын қарастырайық. $g_1(\rho,\xi) = \left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho} + 2m\right) g(\rho,\xi)$ екенін ескеріп, екі интеграл енгіземіз:

$$I_1(\xi) = \int_0^1 \rho^{n-1}\Bigg[2m\rho^{2m-n} - 2m - 2m\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^k\Bigg] g(\rho,\xi)\,d\rho. \quad (1)$$

$$I_2(\xi) = \int_0^1 \rho^{n}\left[\rho^{2m-n} - 1 - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^k\right] \times \frac{\partial}{\partial\rho} g(\rho,\xi)\,d\rho.$$

Айқын түрде, $I(\xi) = I_1(\xi) + I_2(\xi)$.

Енді $I_2(\xi)$ интегралын бөліп интегралдау арқылы есептейміз:

$$I_2(\xi) = \int_0^1 \rho^{n-1}\Bigg[-n\rho^{2m-n} + n + (2m-n)\rho^{2m-n} + n\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^k - 2\rho^2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\,k\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^{k-1}\Bigg] g(\rho,\xi)\,d\rho. \quad (2)$$

Сондықтан

$$I_1(\xi) + I_2(\xi) = \int_0^1 \rho^{n-1} S_{m-1}(\rho) g(\rho,\xi)\,d\rho,$$

мұндағы

$$S_j(\rho) = n - 2m - 2\rho^2\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^{k-1} + (n-2m)\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)(1-\rho^2)^k,$$
$$1 \le j \le m-1.$$

Индукция әдісімен келесі теңдікті дәлелдеу қиын емес:

$$S_j(\rho) = \frac{(n-2m)\cdots(n-2(m-j))}{2^j}\cdot\frac{(1-\rho^2)^j}{j!}. \tag{15}$$

Айталық, егер $j=1$ болса, онда

$$\begin{aligned} S_1(\rho) &= n-2m-2\rho^2(-1)\left(m-\frac{n}{2}\right)+(n-2m)(-1)\left(m-\frac{n}{2}\right)(1-\rho^2)\\ &= (n-2m)(1-\rho^2)+(n-2m)\cdot\frac{n-2m}{2}(1-\rho^2)\\ &= \frac{(n-2m)(n-2(m-1))}{2}(1-\rho^2). \end{aligned}$$

Енді (13) теңдігі қандай да бір j үшін орындалады деп алып, оны $j+1$ үшін дәлелдейік. Онда

$$\begin{aligned} S_{j+1}(\rho) &= \frac{(n-2m)\cdots(n-2(m-j))}{2^j}\cdot\frac{(1-\rho^2)^j}{j!}\\ &-\frac{2}{j!}\cdot\frac{n-2m}{2}\cdots\frac{n-2(m-j)}{2}(1-\rho^2)^j\rho^2\\ &+\frac{2+n-2m}{(j+1)!}\cdot\frac{n-2m}{2}\cdots\frac{n-2(m-j)}{2}(1-\rho^2)^{j+1}\\ &= \frac{(n-2m)\cdots(n-2(m-j))}{2^j}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{j+1}}{j!}\\ &+\frac{n-2m}{2(j+1)}\cdot\frac{(n-2m)\cdots(n-2(m-j))}{2^j}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{j+1}}{j!}\\ &= \frac{(n-2m)\cdots(n-2(m-j))}{2^j}\cdot\frac{n-2(m-j-1)}{2}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{j+1}}{(j+1)!}. \end{aligned}$$

Осылайша, (13) теңдігі барлық $j=1,2,\ldots,m-1$ үшін орындалады. Атап айтқанда,

$$S_{m-1}(\rho) = \frac{(n-2m)\cdots(n-2)}{2^{m-1}}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{m-1}}{(m-1)!} = a_{n,m}(1-\rho^2)^{m-1},$$

мұндағы

$$a_{n,m} = \frac{(n-2m)\cdots(n-2)}{2^{m-1}(m-1)!}.$$

Сондықтан

$$0 = \int_{|\xi|=1} I(\xi)\,d\xi = a_{n,m}\int_{|\xi|=1}\int_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho^2)^{m-1}g(\rho,\xi)\,d\rho\,d\xi.$$

енді декарттық координаталарға қайта оралсақ, келесі теңдікке келеміз:

$$\int_\Omega (1-|x|^2)^{m-1}g(x)\,dx = 0.$$

4. Біртекті шекаралық шарттарымен Нейман есебі

Бұл бөлімде (1), (2) есептері біртекті шекаралық шарттармен қарастырылады.

Лемма 4. [22] $g(x)$ жеткілікті тегіс функция болсын. Онда Нейман есебінің (1), (2) шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты (14) түрінде беріледі.

Егер шешім бар болса, онда ол тұрақтыға дейін бірмәнді және келесі түрде жазылады:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[v](x),$$

мұндағы $v(x)$ - оң жағы $g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x)$ болатын (12) Дирихле есебінің шешімі, әрі қосымша келесі шартты қанағаттандырады: $v(0) = 0$.

Дәлелдеуі. (1), (2) есептің шешімі бар болсын және оны $u(x)$ деп белгілейік. $u(x)$ функциясына Γ_0 операторын қолданып, $v(x) = \Gamma_0[u](x)$ деп аламыз. Енді $v(x)$ үшін шарттарды табамыз.

Айқын түрде: $v(0) = 0$. Егер $v(x)$-ке $(-\Delta)^m$ операторын қолдансақ, онда (10)-ге сәйкес:

$$(-\Delta)^m v(x) = \Gamma_{2m}\left[(-\Delta)^m u\right](x) = \Gamma_{2m}[g](x) = g_1(x).$$

Әрі қарай,

$$r\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

сондықтан

$$v(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Кез келген $k = 1, 2, \ldots$ және барлық $x \in \partial\Omega$ үшін [7]:

$$\frac{\partial^k v}{\partial \nu^k}(x) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)\cdots\left(r\frac{\partial}{\partial r} - k + 1\right)v(x) = r^k\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x).$$

Сондықтан біртекті шекаралық (2) шарттардан қорытындылаймыз:

$$\frac{\partial^k v}{\partial \nu^k}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad x \in \partial\Omega.$$

Осылайша, егер $u(x)$--(1), (2) есебінің біртекті шекаралық шарттардағы шешімі болса, онда $v(x) = \Gamma_0[u](x)$ функциясы (12) Дирихле есебінің шешімі болады, оның оң жағы:

$$g_1(x) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 2m\right)g(x) = \Gamma_{2m}[g](x).$$

Сонымен қатар, $v(x)$ функциясы $v(x) = 0$ шартын қанағаттандырады және Лемма 3-ке сәйкес, бұл үшін қажетті шарт - (14). Демек, егер (1), (2) есебінің шешімі бар болса, онда (14) шарты міндетті түрде орындалуы тиіс.

Енді керісінше дәлелдейік: егер (14) шарты орындалса, онда (1), (2) есебінің біртекті шекаралық шарттардағы шешімі бар.

Шынында, егер (14) орындалса, онда Лемма 3 бойынша $g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x)$ үшін (12) Дирихле есебінің шешімі $v(x)$ бар және $v(x) = 0$.

Сондықтан $v(x)$-ке Γ_0^{-1} операторын қолданып, келесі функцияны қарастырамыз:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[v](x).$$

Бұл функция (1), (2) есебінің шешімі болатынын көрсету қиын емес. Сонымен қатар, (11)-ге сәйкес:

$$(-\Delta)^m u(x) = \Gamma_{2m}^{-1}\left[(-\Delta)^m v\right](x) = \Gamma_{2m}^{-1}\left[\Gamma_{2m}[g]\right](x) = g(x), \quad x \in \Omega.$$

Ал

$$\Gamma_0[v](x) = \Gamma_0\left[\Gamma_0^{-1}[v]\right](x) = v(x)$$

болғандықтан, жоғарыдағы дәлелдеумен $u(x)$ функциясының барлық біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандыратынын көруге болады.

5. Біртекті теңдеу үшін Нейман есебі

Бұл бөлімде $g(x) \equiv 0$ болған жағдайда Нейман есебін (1), (2) қарастырамыз.

A матрицасы келесі түрде берілсін:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2^{[1]} & 4^{[1]} & \cdots & (2m-2)^{[1]} \\ 0 & 2^{[2]} & 4^{[2]} & \cdots & (2m-2)^{[2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2^{[m-1]} & 4^{[m-1]} & \cdots & (2m-2)^{[m-1]} \end{pmatrix} \tag{16}$$

мұндағы

$$j^{[k]} = j(j-1)\cdots(j-k+1), \quad j^{[1]} = j.$$

Егер $k > j$ болса, онда $j^{[k]} = 0$. Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, деп A матрицасының бірінші бағанын және j-жолын өшіру арқылы алынған матрицаның анықтауышын белгілейік. Айқын түрде, $|A| = det\, A = \Delta_1$.

$w(x)$ - шекаралық функциялары $f_k(x)$ жеткілікті тегіс болатын келесі Дирихле есебінің шешімі болсын:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m w(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^{k-1} w}{\partial \nu^{k-1}}(x) = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{17}$$

Лемма 5. [22] $g(x) \equiv 0$ және $\varphi_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, жеткілікті тегіс функциялар болсын. Онда Нейман есебі (1), (2) үшін шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты келесі түрде беріледі:

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega} (-1)^{k+1} \Delta_k \left[\varphi_k(x) + (k-1)\varphi_{k-1}(x)\right] dS_x = 0, \tag{18}$$

мұндағы $\varphi_0(x) = 0$. Егер шешім бар болса, онда ол тұрақты дәлдікпен жалғыз және келесі түрде өрнектеледі:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[w](x),$$

мұндағы $w(x)$ - (17) Дирихле есебінің шешімі, оның шекаралық функциялары $f_1(x) = \varphi_1(x)$, $f_k(x) = \varphi_k(x) + (k-1)\varphi_{k-1}(x)$, $k = 2, 3, \ldots, m$, және қосымша $w(0) = 0$ шартын қанағаттандырады.

Дәлелдеуі. (1), (2) есептердің шешімі бар болсын және $u(x)$ - осы шешім болсын. $u(x)$ функциясына Γ_0 операторын қолданайық және $w(x) = \Gamma_0[u](x)$ деп белгілейік. Енді $w(x)$ функциясының (17) Дирихле есебінің шешімі екенін және $w(0) = 0$ шартын қанағаттандыратынын көрсетеміз.

Γ_0 операторының қасиеттерінен

$$(-\Delta)^m w(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Келесі формулаға сүйенсек [7]:

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - j + 1\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) r\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{19}$$

онда $x \in \partial\Omega$ үшін:

$$w(x) = \varphi_1(x),$$

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} - j + 1\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) w(x) = \varphi_j(x), \quad j = 2, 3, \ldots, m.$$

Бұл шарттарды ыңғайлырақ түрде қайта жазайық. Ол үшін соңғы екеуін қарастырайық:

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} - m + 2\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) \left(r\frac{\partial}{\partial r} - (m-1)\right) w(x) = \varphi_m(x), \tag{20}$$

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} - m + 2\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) w(x) = \varphi_{m-1}(x). \tag{21}$$

(21)-өрнекті $(m-1)$-ге көбейтіп, (20)-ге қосамыз. Сонда (19)-ні пайдаланып:

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} - m + 2\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) r\frac{\partial w(x)}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^{m-1} w(x)}{\partial \nu^{m-1}} = \varphi_m(x) + (m-1)\varphi_{m-1}(x) = f_m(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Осы әдісті барлық $1 \le j \le m-1$ үшін қайталасақ, онда:

$$\frac{\partial^j w(x)}{\partial \nu^j} = \varphi_{j+1}(x) + j\varphi_j(x) = f_{j+1}(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Сонымен, егер $u(x)$ - (1), (2) Нейман есебінің шешімі болса, онда $w(x) = \Gamma_0[u](x)$ - (17) Дирихле есебінің шешімі және $w(0) = 0$ шартын қанағаттандырады.

Айта кету керек, Лемма 5 шарттары орындалғанда (17) есебінің шешімі бар және ол жалғыз (мысалы, [25]-ды қараңыз).

Келесіде біз $\varphi_k(x)$ шекаралық функциялары үшін $w(0) = 0$ теңдігін қамтамасыз ететін шарттарды табамыз. Альманси формуласын (мысалы, [26], 188-б.) пайдаланып, (17) есебінің шешімін келесі түрде жазамыз:

$$w(x) = w_0(x) + r^2 w_1(x) + r^4 w_2(x) + \cdots + r^{2m-2} w_{m-1}(x), \tag{22}$$

мұндағы $w_j(x)$--Ω шарындағы гармониялық функциялар. Айқын түрде, $w(0) = 0$ сонда тек сонда ғана $w_0(0) = 0$ болғанда орындалады.

(22)-ны (17) есебінің шекаралық шарттарына қойып және сфера бойынша интегралдап, келесі теңдіктерді ескерсек:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial^k w_j(x)}{\partial \nu^k}\, dS_x = \begin{cases} \omega_n w_j(0), & k=0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$$

мұндағы ω_n- бірлік сфераның ауданы, онда келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$w_0(0) + w_1(0) + w_2(0) + \cdots + w_{m-1}(0) = b_1,$$

$$0 \cdot w_0(0) + 2w_1(0) + 4w_2(0) + \cdots + (2m-2)w_{m-1}(0) = b_2,$$

$$0 \cdot w_0(0) + 2w_1(0) + 4 \cdot 3\, w_2(0) + \cdots + (2m-2)(2m-3)w_{m-1}(0) = b_3,$$

$$\cdots$$

$$0 \cdot w_0(0) + 2^{[m-1]} w_1(0) + 4^{[m-1]} w_2(0) + \cdots + (2m-2)^{[m-1]} w_{m-1}(0) = b_m,$$

мұндағы

$$b_k = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\varphi_k(x) + (k-1)\varphi_{k-1}(x)\right]\, dS_x, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

және $\varphi_0(x) \equiv 0$. Бұл жүйенің матрицасы (16)-мен анықталған A матрицасы. Жоғарыда айтылғандай, $|A| = det\, A = \Delta_1$. Вандермонд анықтауышына келтіру арқылы бұл анықтауыштың мәнін табу қиын емес:

$$\Delta_1 = 2^{m-1}(m-1)!(2m-4)!! \cdots 4!!2!!.$$

Крамер ережесін пайдаланып, жоғарыдағы теңдеулер жүйесінен $w_0(0)$-ді табамыз:

$$w_0(0) = \frac{|B|}{|A|},$$

мұндағы $|B|$ - келесі матрицаның анықтауышы:

$$|B| = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_2 & 2^{[1]} & 4^{[1]} & \cdots & (2m-2)^{[1]} \\ b_3 & 2^{[2]} & 4^{[2]} & \cdots & (2m-2)^{[2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & 2^{[m-1]} & 4^{[m-1]} & \cdots & (2m-2)^{[m-1]} \end{vmatrix}.$$

Айқын түрде,

$$|B| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} b_k \Delta_k,$$

мұндағы Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, жоғарыда анықталған. Сондықтан $w_0(0) = 0$ теңдігі сонда тек сонда ғана

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}b_k\Delta_k = 0$$

болғанда орындалады. Ал b_k-ның анықтамасына сәйкес, бұл шарт (18)-ға тең мәндес.

Сонымен, егер қарастырылып отырған Нейман есебінің шешімі бар болса, онда міндетті түрде (18) шарты орындалады.

Енді кері тұжырымды дәлелдейік, яғни егер (18) шарты орындалса, онда Нейман есебінің шешімі бар болады.

$w(x)$ - (17) Дирихле есебінің шешімі болсын. Егер (18) шарты орындалса, онда $w(0) = 0$ және біз келесі функцияны қарастыра аламыз:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}w = C + \int_0^1 s^{-1}w(sr\theta)\,ds, \quad x = r\theta,$$

бұл функцияның шынында да Нейман есебінің шешімі екенін көрсетеміз.

Айнымалыны ауыстырып $sr = \xi$ десек, соңғы интегралды былай жазуға болады:

$$u(x) = C + \int_0^r \frac{w(\xi\theta)}{\xi}\,d\xi.$$

Сондықтан,

$$r\frac{\partial u(x)}{\partial r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^r \frac{w(\xi\theta)}{\xi}\,d\xi\right) = w(x). \tag{23}$$

Келесі талдауларда (19) және (23) формулаларын қолданамыз және $x \in \partial\Omega$ деп аламыз. Онда:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = r\frac{\partial u(x)}{\partial r} = w(x) = f_1(x) = \varphi_1(x).$$

Енді екінші туынды үшін:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) r\frac{\partial u(x)}{\partial r} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) w(x).$$

Сонда:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} + \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) r\frac{\partial u(x)}{\partial r} + r\frac{\partial u(x)}{\partial r} = r\frac{\partial w(x)}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = f_2(x) = \varphi_2(x) + \varphi_1(x).$$

Осыдан:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = \varphi_2(x) + \varphi_1(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \varphi_2(x).$$

Осы тәсілді қолдана отырып, кез келген $j = 2, 3, \ldots, m$ үшін:

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - j + 1\right)\cdots\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) r\frac{\partial u(x)}{\partial r}$$

$$= \left(r\frac{\partial}{\partial r} - j + 1\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) w(x).$$

Осыдан,

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j} + (j-1)\frac{\partial^{j-1} u(x)}{\partial \nu^{j-1}} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - (j-1)\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - (j-2)\right) \cdots$$

$$\cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) w(x) + (j-1)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - (j-2)\right) \cdots \left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right) w(x)$$

$$= \frac{\partial^{j-1} w(x)}{\partial \nu^{j-1}} = f_j(x) = \varphi_j(x) + (j-1)\varphi_{j-1}(x).$$

Сондықтан, индукция бойынша ақырында:

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j} = \varphi_j(x) + (j-1)\varphi_{j-1}(x) - (j-1)\frac{\partial^{j-1} u(x)}{\partial \nu^{j-1}}$$

$$= \varphi_j(x) + (j-1)\varphi_{j-1}(x) - (j-1)\varphi_{j-1}(x) = \varphi_j(x).$$

6. Жалпы жағдайдағы Нейман есебі

(1), (2) Нейман есебін теңдеу де, шеттік шартты біртексіз болған жағдайды қарастырамыз.

(1), (2) есебінің шешімі бар болсын және оны $u(x)$ деп белгілейік. Оған Γ_0 операторын қолданайық және оны $z(x) = \Gamma_0[u](x)$ деп белгілейік. Онда $z(x)$ функциясы келесі Дирихле есебінің шешімі болады:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m z(x) = g_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^{k-1} z}{\partial \nu^{k-1}}(x) = \varphi_k(x) + (k-1)\varphi_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{24}$$

мұндағы

$$g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x), \quad \varphi_0(x) \equiv 0.$$

Сонымен қатар, анықтама бойынша $z(x)$ қосымша $z(0) = 0$ шартын қанағаттандырады.

g_1 және φ_k функциялары жеткілікті тегіс болғандықтан, (242) есебінің шешімі бар және ол жалғыз.

Келесіде $g(x)$ және $\varphi_k(x)$ функцияларына $z(0) = 0$ теңдігін қанағаттандыратын шарттарды табамыз. Ол үшін $z(x)$-ті келесі түрде жазамыз:

$$z(x) = v(x) + w(x),$$

мұндағы $v(x)$ және $w(x)$ - жоғарыда қарастырылған сәйкесінше (12) және (17) Дирихле есептерінің шешімдері. Айқын түрде, $z(0) = 0 \Longleftrightarrow v(0) + w(0) = 0$.

(13) және (22) формулаларға сәйкес $v(x)$ және $w(x)$-ті келесі түрде жазамыз:

$$v(x) = \int_\Omega G_{m,n}(x, y) g_1(y)\, dy,$$

$$w(x) = w_0(x) + r^2 w_1(x) + r^4 w_2(x) + \cdots + r^{2m-2} w_{m-1}(x).$$

Онда:

$$v(0) = \int_\Omega G_{m,n}(0,y) g_1(y)\, dy = C_{n,m} \int_\Omega (1-|y|^2)^{m-1} g(y)\, dy,$$

$$w(0) = w_0(0) = -\frac{1}{\omega_n |A|} \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega} (-1)^k \Delta_k \left[\varphi_k(x) + (k-1)\varphi_{k-1}(x)\right]\, dS_x,$$

мұндағы

$$C_{n,m} = d_{n,m} a_{n,m} = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{n}{2} - m\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} 4^m (m-1)!} \cdot \frac{(n-2m)\cdots(n-2)}{2^{m-1}(m-1)!}.$$

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

формуласын пайдаланып, $C_{n,m}$-ті ықшамдауға болады:

$$C_{n,m} = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{(-1)^m}{\left(2^{m-1}(m-1)!\right)^2}.$$

$$|A| = \Delta_1 = 2^{m-1}(m-1)!(2m-4)!!\cdots 4!!2!!$$

болғандықтан, $v(0) + w(0) = 0$ шарты келесі түрде жазылады:

$$\int_\Omega (1-|x|^2)^{m-1} g(x)\, dx =$$

$$= \frac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m-4)!!\cdots 4!!2!!} \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega} (-1)^k \Delta_k \left[\varphi_k(x) + (k-1)\varphi_{k-1}(x)\right]\, dS_x, \qquad (25)$$

мұндағы $\varphi_0(x) = 0$.

Осылайша, біз жалпы Нейман шеттік есебі үшін шешімділіктің қажетті және жеткілікті шартын дәлелдедік.

Теорема 1. [22]. $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, және $g(x)$ жеткілікті тегіс функциялар болсын. Онда (1), (2) Нейман шеттік есебінің шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты (25) түрінде беріледі.

Егер шешім бар болса, онда ол тұрақты дәлдікпен жалғыз болады, яғни есептің кез келген екі шешімінің айырмасы тұрақты функцияға тең, және келесі түрде жазылады:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[z](x),$$

мұндағы $z(x)$ - (24) Дирихле есебінің шешімі, оның оң жағы $g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x)$, және ол қосымша $z(0) = 0$ шартын қанағаттандырады.

7. Нәтижелер мен талқылаулар. (3), (4) шеттік есебінің шешімділігі

(4) шеттік шарттың соңғы шекаралық шартына келесі Γ_0^{-1} интегралдық-дифференциалдық операторымен әсер етеміз, нәтижесінде

$$\varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad \widetilde{\varphi}_m(x) = \Gamma_0^{-1}\varphi_m(x), \quad \varphi_m(0) = 0$$

шартымен Нейман есебіне келеміз.

Теорема 2. $\varphi_k(x), k = 1, 2, \ldots, m$, және $g(x)$ жеткілікті тегіс функциялар болсын. Онда (3), (4) шеттік есебінің шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты (25) түрінде беріледі, мұндағы соңғы шеттік шартқа мынандай шарт пайда болады $\widetilde{\varphi}_m(x) = \Gamma_0^{-1}\varphi_m(x)$, $\varphi_m(0) = 0$.

Егер шешім бар болса, онда ол тұрақты дәлдікпен жалғыз және келесі түрде жазылады:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[z](x),$$

мұндағы $z(x)$ -- (24) Дирихле есебінің шешімі, оның оң жағы $g_1(x) = \Gamma_{2m}[g](x)$, және ол қосымша $z(0) = 0$ шартын қанағаттандырады.

Мысал 1. Бигармоникалық теңдеуді қарастырайық, яғни $m = 2$.

Бұл жағдайда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 1.$$

Осыдан (3), (4) шеттік есебінің, яғни К-13 есебінің шешімділігінің шарты келесі түрге ие болады:

$$\int_\Omega (1 - |x|^2) g(x)\, dx = 2 \int_{\partial\Omega} \left[\widetilde{\varphi}_2(x) - \varphi_1(x)\right] dS_x, \quad \widetilde{\varphi}_2(x) = \Gamma_0^{-1}\varphi_2(x), \quad \varphi_2(0) = 0.$$

Мысал 2. Үшгармоникалық теңдеуді қарастырайық, яғни К-124 есебінің

$$\Delta^3 u(x) = g(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} u = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial^4}{\partial \nu^4} u = \varphi_3(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

шешілімділігінің шарты келесі түрде өрнектеледі:

$$\int_\Omega (1 - |x|^2)^2 g(x)\, dx = 8 \int_{\partial\Omega} \left[3\varphi_1(x) - 3\varphi_2(x) - \widetilde{\varphi}_3(x)\right] dS_x,$$

$$\widetilde{\varphi}_3(x) = \Gamma_0^{-1}\varphi_3(x), \quad \varphi_3(0) = 0.$$

Егер шешім бар болса, онда ол тұрақты дәлдікпен жалғыз және келесі түрде жазылады:

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[v](x),$$

мұндағы $v(x)$ - оң жағы $g_1(x) = \Gamma_6[g](x)$ болатын Дирихле есебінің шешімі, әрі қосымша $v(0) = 0$ шартын қанағаттандырады.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландырды (грант № BR31714735).

Әдебиеттер

[1] Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m //Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97--135.
[2] Begerh H., Vu TN.H., Zhang Z.X. Polyharmonic Dirichlet Problems //Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006. V. 255. P. 13--34.
[3] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. -- 2008. -- V. 53, №2. -- P. 177--183. http://dx.doi.org/10.1080/17476930701671726
[4] Kal'menov T.S., Suragan D. On a new method for constructing the green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation. Differ. Equ. 48(3), 441--445 (2012)
[5] Koshanov B.D. Green's functions and correct restrictions of the polyharmonic operator //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021. V. 109(1). P. 34--54. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2021.v109.i1.03
[6] Sadybekov M.A., Torebek B.T. and Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle, Adv. Pure Appl. Math. 6 (2015), 163--172.
[7] Karachik V.V. Construction of Polynomial Solutions to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Comp. Math. and Math. Physics. 2014. V. 54. P. 1122--1143.
[8] Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67. P. 1712--1736.
[9] Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball //Mathematics. 2022. 10. 1158.
[10] Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations //Math. Notes. 2017. V. 102. P. 31--42.
[11] Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball //Mathematics. 2021. 9. 1907.
[12] Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball //Differential Eq. 2021. V. 57. P. 654--668.
[13] Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic //Complex Var. And Elliptic Eq. 2009. V. 54. P. 79--93.
[14] Karachik V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Mathematics. 2023; 11: 1000.
[15] Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле-2 для 3-гармонического уравнения в шаре // Сибирские электронные математические известия, 2023, Т.20, 2, С. 144--167.
[16] Karachik V. Green's Functions of one problem for the 3-harmonic equation in a ball //Complex Var. And Elliptic Eq. 2025, 1--24.
[17] Koshanov B., Shynybayeva N., Koshanova M., Oralbekova, N. On the solvability of boundary value problems with general conditions for the triharmonic equation in a ball. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2025. 126(2). P. 49--58. https://doi.org/10.26577/JMMCS2025126204
[18] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения //Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2(2). С. 41--52. http://mi.mathnet.ru/rus/ufa50

[19] Koshanov B.D. About solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equation in a ball //Journal Advances in Pure and Applied Math. 2013. V. 4(4). P. 351--373. https://doi.org/10.26577/JMMCS2025126204
[20] Vladimirov V.C: Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moscow (1974) (in Russian)
[21] Karachik V.V., Turmetov B.K., Bekayeva A.E. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. Int. J. Pure Appl. Math. 81(3), 487--495 (2012)
[22] Turmetov B.K., Ashurov R.R. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball. Boundary Value Problems. 2013. 162 (1) https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-162
[23] Torebek B.T., Turmetov B.K. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order. Bound. Value Probl. (2013). https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-93
[24] Bavrin I.I. Operators for harmonic functions and their applications. Differ. Uravn. 21(1), 9--15 (1985) (in Russian); English transl.: Differ. Equ. 21(1), 6--10 (1985)
[25] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. Commun. Pure Appl. Math. 17, 35--92 (1964)
[26] Bitsadze A.V. Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations. North-Holland, Amsterdam (1968)

[1*]**Koshanov B.D.,**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher
ORCID ID: 0000-0002-0784-5183,
*e-mail: koshanov@math.kz

[2]**Turganbek U.,**
Master's student,
ORCID ID: 0009-0000-5894-1194
e-mail: Ulzya03@mail.ru

[2]**Yerkhan A.Zh.,**
Master's student,
ORCID ID: 0009-0001-5552-8908
e-mail: ainur.erkhan@icloud.com

[1*]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

ON THE SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POLYHARMONIC EQUATION IN A MULTIDIMENSIONAL BALL

Abstract

The necessity of studying boundary value problems for elliptic equations is motivated by their numerous practical applications in the theoretical study of processes in hydrodynamics, electrostatics, mechanics, heat conduction, elasticity theory, and quantum physics. For example, the distribution of

the potential of an electrostatic field is described by the Poisson equation, while the vibrations of thin plates with small deflections are described by biharmonic equations
In this paper, we study the solvability of one boundary value problem for the polyharmonic equation in the unit ball. In this problem, the normal derivatives of the unknown function are prescribed consecutively from the first-order normal derivative up to the $(m-1)$-th order derivative, while the $(m+1)$-th order derivative is additionally prescribed as the last condition. To solve this problem, we reduce the original problem to the Neumann problem by means of a special integro-differential operator. Then, using another integro-differential operator, the Neumann problem is reduced to the Dirichlet problem. We use the fact that the solution of the Dirichlet problem can be represented by means of the Green function and the Almansi representation. As a result of these representations, the necessary and sufficient condition for the solvability of the original problem is obtained.

Keywords: polyharmonic equation, Neumann problem, Dirichlet problem, integro-differential operators, necessary and sufficient condition for solvability.

Received May 6, 2026; revised June 14, August 18, 2026; accepted August 24, 2026

[1*]**Кошанов Б.Д.,**
д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник
ORCID ID: 0000-0002-0784-5183,
Автор для корреспонденции *e-mail: koshanov@math.kz

[2]**Турганбек У.,**
Магистрант
ORCID ID: 0009-0000-5894-1194
e-mail: Ulzya03@mail.ru

[2]**Ерхан А.Ж.,**
Магистрант
ORCID ID: 0009-0001-5552-8908
e-mail: ainur.erkhan@icloud.com

[1*]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

Аннотация

Необходимость исследования краевых задач для эллиптических уравнений продиктована с многочисленными практическими приложениями при теоретическом изучении процессов гидродинамики, электростатики, механики, теплопроводности, теории упругости, квантовой физики. Например, распределения потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона, колебания тонких пластин малых прогибов описываются бигармоническими уравнениями.
В данной работе исследуется разрешимость одной краевой задачи для полигармонического уравнения в единичном шаре. В этой задаче последовательно задаются нормальные производные искомой функции, начиная с первой нормальной производной до производной порядка $(m-1)$, а в качестве последнего условия дополнительно задается производная порядка $(m+1)$. Для решения данной задачи исходная задача с помощью специального интегро-дифференциального оператора сводится к задаче Неймана. Затем задача Неймана с помощью

интегро-дифференциального оператора сводится к задаче Дирихле. Используется тот факт, что решение задачи Дирихле представляется с помощью функции Грина и формулы Альманси. В результате этих представлений получено необходимое и достаточное условие разрешимости исходной задачи.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, задача Неймана, задача Дирихле, интегро-дифференциальные операторы, необходимое и достаточное условие разрешимости.