

ӨОЖ 517.927.4  
ГТАХР 27.29.17

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-3-93-105>

<sup>1,2\*</sup> **Абдиманапова П.Б.**,

PhD, ассистент-профессор, ORCID ID: 0000-0001-8879-9985,

\*e-mail: perizatabdimanapova344@gmail.com

<sup>1,3</sup> **Темешева С.М.**,

ф.-м.ғ.д., жетекші ғылыми қызметкер, профессордың м.а., ORCID ID: 0000-0002-3341-4539,

e-mail: temesheva.svetlana@kaznu.kz

<sup>4</sup> **Иманчиев А.Е.**,

ф.-м.ғ.к., қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchievae@gmail.com

<sup>2</sup> **Мәжит Ж.Б.**,

сеньор-лектор, ORCID ID: 0000-0002-4635-9241,

e-mail: Zhamilya.Mazhit01@gmail.com

<sup>1</sup> Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

<sup>2</sup> Алматы технологиялық университеті, Алматы қ., Қазақстан

<sup>3</sup> Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

<sup>4</sup> Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

## ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ЕКІ НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІНІҢ ШЕШІМІН ТАБУ ТУРАЛЫ

### Аңдатпа

Қарастырылып отырған мақалада сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есеп қарастырылады. Әулет параметрінің әрбір бекітілген мәнінде есеп жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есепке келтіріледі. Мұндай есептер бейлокал шеттік есептермен, соның ішінде гиперболалық теңдеулер жүйелерімен байланысты болғандықтан, олардың шешілімділік шарттарын анықтау өзекті болып табылады. Жұмыста Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісі бойынша есепті параметрге қарағандағы сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін және параметрге тәуелді дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есепті шешу тәсілі қолданылады. Оны шешу үшін итерациялық әдіс қолданылып, жинақтылық шарттары негізделеді. Ұсынылған әдіс Коши есептерін сандық шешу мен сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешуді үйлестіруге негізделген. Нәтижесінде алынған шешу алгоритмі нақты тестілік мысалдарда жүзеге асыру арқылы тексеріліп, бұл әдістің тиімділігі көрсетіледі. Мысалы, берілген параметр мәніне сәйкес алынған жүйенің шешімін табу итерациялық процесте жинақталатыны анықталады. Қарастырылып отырған әдіс сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттармен сипатталатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есептердің шешімдерін анықтауда тиімді әдіс болып табылады. Ұсынылған әдістің практикалық тиімділігі нақты есептерді сандық түрде шешу нәтижелерімен дәлелденеді.

**Түйін сөздер:** сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер, әулет параметрі, жәй дифференциалдық теңдеулер, шеттік шарттар, сандық әдіс.

### Кіріспе

Қазіргі қолданбалы математика мен математикалық физикада параметрге тәуелді дифференциалдық теңдеулер жүйелері ерекше орын алады. Мұндай есептер әртүрлі табиғи және

техникалық үдерістерді модельдеуде кеңінен қолданылады. Атап айтқанда, басқару теориясында, механикада, жылуалмасу процестерінде және инженерлік есептерде екі нүктелі шеттік шарттары бар дифференциалдық теңдеулер жүйелері жиі кездеседі. Бұл есептердің маңызды ерекшелігі – шеттік шарттардың сызықтық емес болуы, соның салдарынан оларды аналитикалық түрде шешу көп жағдайда мүмкін болмайды. Сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептерді зерттеу күрделі мәселелердің бірі болып табылады, себебі олардың шешімдерінің бар болуы, жалғыздығы және орнықтылығы арнайы шарттарды талап етеді. Сонымен қатар, мұндай есептерді тиімді сандық әдістермен шешу де өзекті ғылыми бағыттардың бірі болып табылады. Осыған байланысты соңғы жылдары параметр енгізу, интервалды бөліктеу және Коши есептеріне келтіру әдістері [1] кеңінен қолданылып келеді. Бұл жұмыста параметрге тәуелді сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттары бар есептер әулеті қарастырылады. Есепті шешу үшін берілген аралықты бөліктерге бөлу арқылы оны эквивалентті түрде параметрлері бар көмекші есепке келтіру тәсілі қолданылады. Нәтижесінде бастапқы есеп белгісіз параметрлерге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі.

### Материалдар мен әдістер

Параметрлерді енгізу әдісі шеттік есептердің шешімдерін іздеу үдерісін жеңілдетуге, алгоритмдерінің жинақтылығын сипаттауға және есептің бастапқы шарттарын тиімді түрде түрлендіруге мүмкіндік беретін конструктивті тәсілдердің бірі болып табылады. Бұл әдіс арқылы есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығын қамтамасыз ететін қажетті шарттарды бастапқы берілген шамалар арқылы өрнектеуге болады. Сонымен қатар, параметрлерді енгізу тәсілі қолданылатын алгоритмдердің орнықтылығын арттырып, есептеу процедураларын оңтайландыруға жағдай жасайды. Әдістің ерекшелігі – күрделі шеттік есептерді қарапайым параметрлік есептерге келтіру арқылы олардың сандық және аналитикалық шешімдерін зерттеуге мүмкіндік беруінде. Осыған байланысты аталған әдіс дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі типтері үшін шеттік есептерді зерттеу мен шешудің тиімді құралдарының бірі болып табылады [2-4]. Д.С. Джумабаев және С.М. Темешева еңбектерінде [5, 6] сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептер параметрлеу әдісімен зерттелген. Авторлар оқшауланған шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын анықтап, бастапқы жуықтауды дұрыс таңдаудың және алынған шешімнің бастапқы мәліметтерге үзіліссіз тәуелділігін қамтамасыз етудің теориялық негіздерін ұсынған. Параметрлеу әдісі алгоритмдерінің құрылымдық ерекшеліктері шеттік есептердің шешімдерін табуға бағытталған сандық және жуықтау әдістерін дамытуға негіз болғанын атап өтуге болады. Зерттеулер және есептеулер барысында алынған нәтижелер ұсынылған алгоритмнің тиімділігін, шешімдердің тұрақтылығын және параметрлер кеңістігінде шеттік есептер әулетінің шешімдерін табу мүмкіндігін көрсетеді. Қарастырылған тәсіл дифференциалдық теңдеулердің кең ауқымды кластары үшін шеттік есептерді зерттеу және шешу барысында кең қолданыс тапқан [7-14].

### Нәтижелер мен талқылау

Сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетін қарастырамыз

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + F(x, t), \quad (x, t) \in [0, \omega] \times (0, T), \quad (1)$$

$$g(x, v(x, 0), v(x, T)) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

мұндағы  $A(x, t)$  –  $(n \times n)$  өлшемді үзіліссіз матрица,

$F(x, t)$  –  $[0, T]$ -да үзіліссіз  $n$ -вектор функция,  $x$  – әулет параметрі,

$$g : [0, \omega] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \text{үзіліссіз функция,}$$

$$\|A\| = \max_{x \in [0, \omega]} \max_{i=1, n} \sup_{t \in (0, T)} \sum_{j=1}^n |A_{ij}(x, t)| \leq a_0 \quad (a_0 - \text{const}),$$

$$\|v\| = \max_{x \in [0, \omega]} \max_{i=1, n} \sup_{t \in (0, T)} |v_i(x, t)|.$$

**Аңықтама 1** (1), (2) есебін қанағаттандыратын  $v^*(x, t) \in C([0, \omega] \times [0, T], \mathbb{R}^n)$  функциясын (1), (2) есебінің шешімі деп айтамыз.

Айталық,  $x - [0, \omega]$  параметрі бекітілген болсын.

$N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) натурал санын таңдап алайық.

$[0, T]$  кесіндісін  $t_p = p \cdot h$ ,  $p = \overline{0, N}$ ,  $h = T/N$  нүктелерімен бөліктейміз.

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$\Omega_r(x) = \{(x, t) : x \in [0, \omega], t \in [t_{r-1}, t_r)\}, \quad r = \overline{1, N};$$

$$\Delta_N(x) : \{x\} \times [0, T) = \bigcup_{r=1}^N \Omega_r(x);$$

$$\lambda_r(x) = v(x, t_{r-1}), \quad r = \overline{1, N}, \quad \lambda_{N+1}(x) = \lim_{t \rightarrow t_N-0} v(x, t);$$

$$\tilde{v}_r(x, t) = v(x, t) - \lambda_r(x), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N};$$

$$C([0, \omega] \times [0, T], \Delta_N(x), \mathbb{R}^{nN}) \text{ арқылы нормасы}$$

$$\|v\|_2 = \max_{r=\overline{1, N}} \|v_r(x, t)\|$$

болатын  $v(x, [t]) = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_N(x, t))$  функциялар жүйелерінің кеңістігін белгілейміз. Мұндағы  $v_r(x, t) \in C(\Omega_r(x))$  үзіліссіз функциялар, әрбір  $x \in [0, \omega]$ -ке қатысты бірқалыпты  $\lim_{t \rightarrow t_r-0} v_r(x, t)$  ( $r = \overline{1, N}$ ) ақырлы шегі бар.

(1), (2) есебі келесі параметр енгізілген шеттік есепке эквивалентті

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x, t)(\lambda_r(x) + \tilde{v}_r) + F(x, t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$\tilde{v}_r(x, t_{r-1}) = 0, \quad (4)$$

$$g(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) = 0, \quad (5)$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t \rightarrow t_r-0} \tilde{v}_r(x, t) - \lambda_{r+1}(x) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \quad (6)$$

мұндағы (6)-шешімнің  $\Delta_N(x)$  ішкі нүктелеріндегі үзіліссіздік шарттары.

$(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x, [t]))$  арқылы элементтері  $\lambda^*(x) = (\lambda^*(x_1), \lambda^*(x_2), \dots, \lambda^*(x_{N+1})) \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n(N+1)})$ ,  $\tilde{v}^*(x, [t]) = (\tilde{v}_1^*(x, t), \tilde{v}_2^*(x, t), \dots, \tilde{v}_N^*(x, t)) \in C([0, \omega] \times [0, T], \Omega_r(x), \mathbb{R}^{nN})$  болатын жұпты белгілейміз және осы жұп элементтерінің компоненттері үшін төмендегі үш шарт орындалсын:

- (i) Кез келген  $r$  үшін  $\tilde{v}_r^*(x, t)$  функциясы  $\Omega_r(x)$ -те үзіліссіз дифференциалданады,
- (ii)  $\tilde{v}_r^*(x, t)$  функциясы  $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$  болғанда (3) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады,
- (iii)  $\lambda_1^*(x)$ ,  $\lambda_{N+1}^*(x)$ ,  $\lambda_r^*(x) + \lim_{t \rightarrow t_r-0} \tilde{v}_r^*(x, t)$  ( $r = \overline{1, N}$ ) шамалары (5), (6) теңдіктерін қанағаттандырады.

**Аңықтама 2** (i)-(iii) шарттарды қанағаттандыратын  $(\lambda^*(x), v^*(x, [t]))$  жұбын (3)-(6) есебінің шешімі деп айтамыз.

Егер  $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x, [t]))$  жұбы (3)-(6) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x, t) = \begin{cases} \sum_{r=1}^N \mathbf{1}_{\Omega_r(x)}(t)(\lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x, t)), & (x, t) \in [0, \omega] \times [0, T), \\ \lambda_{N+1}^*(x), & (x, t) \in [0, \omega] \times \{T\} \end{cases}$$

функциясы (1),(2) шеттік есептің бекітілген  $x$ -ке сәйкес шешімі болады, мұндағы

$$\mathbf{1}_{\Omega_r(x)}(t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in \Omega_r(x), \\ 0, & (x, t) \notin \Omega_r(x), \end{cases} \quad r = \overline{1, N}.$$

(1),(2) және (3)-(6) есептерінің эквиваленттілігін жеңіл көрсетуге болады.

Келесі сызықтық операторды қарастырамыз [15]

$$\begin{aligned} \Phi_r(x, t) &= I + \int_{t_{r-1}}^t A(x, \tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \int_{t_{r-1}}^t A(x, \tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(x, \tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(x, \tau_j) d\tau_j \dots d\tau_2 d\tau_1, \\ &t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

мұндағы  $I$ - ( $n \times n$ ) өлшемді бірлік матрица.

$\Phi_r(x, t)$  операторы

$$\frac{\partial \Phi_r(x, t)}{\partial t} = A(x, t) \Phi_r(x, t), \quad \Phi_r(x, t_{r-1}) = I, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}.$$

есебін қанағаттандырады. Келесі

$$a_r(P, x, t) = \Phi_r(x, t) \int_{t_{r-1}}^t \Phi_r^{-1}(x, \xi) P(x, \xi) d\xi, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}.$$

белгілеулерді қолданамыз және  $a_r(P, x, t)$  функциясы

$$\frac{\partial a_r(P, x, t)}{\partial t} = A(x, t) \cdot a_r(P, x, t) + P(x, t), \quad a_r(P, x, t_{r-1}) = 0, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N} \quad (7)$$

Коши есебін қанағаттандырады.

$\lambda_r(x) \in C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$  ( $r = \overline{1, N}$ ) параметрге қатысты (3), (4) Коши есебінің шешімдер әулетін жазамыз

$$v_r(x, t) = a_r(A, x, t) \lambda_r(x) + a_r(F, x, t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}, \quad (8)$$

және  $v(x, [t]) = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_N(x, t))$  функциялар жүйесін құрамыз.

(8) теңдіктен  $\lim_{t \rightarrow t_r - 0} v_r(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  шектерді анықтаймыз. (5)-ші теңдікті  $T/N$ -ге көбей-

тіп, анықталған шектерді (5)-ші және (6)-шы теңдіктерге қойып, белгісіз  $\lambda(x) \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n(N+1)})$  параметрге қатысты

$$Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x)) = 0, \quad (9)$$

сызықтық емес теңдеулер жүйесін құрамыз, мұндағы  $Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x))$  операторы

$$Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x)) = \begin{pmatrix} h \cdot g(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) \\ (I + a_1(A, x, t_1)) \lambda_1 - \lambda_2 + a_1(F, x, t_1) \\ (I + a_2(A, x, t_2)) \lambda_2 - \lambda_3 + a_2(F, x, t_2) \\ \dots \\ (I + a_N(A, x, t_N)) \lambda_N - \lambda_{N+1} + a_N(F, x, t_N) \end{pmatrix}.$$

Құрылған (9) сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу итерациялық әдістер негізінде жүзеге асырылады. Бірінші кезеңде қойылған есептің шешімі бар және жалғыз болуын қамтамасыз

ететін қасиеттерге ие болатын жиын құрылады. Бұл жиын кейінгі итерациялық есептеулердің орындалу шарттарын анықтауға мүмкіндік береді. Яғни,  $\lambda^0(x) = (\lambda^0_1(x), \lambda^0_2(x), \dots, \lambda^0_{N+1}(x)) \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n(N+1)})$  векторын және  $\rho_\lambda > 0, \rho_v > 0$  сандарын таңдап,

$$S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda) = \left\{ \lambda(x) \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n(N+1)}) : \|\lambda - \lambda^0\|_3 < \rho_\lambda \right\},$$

$$G^0(x, \rho_\lambda) = \{(x, w_1, w_2) \in [0, \omega] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in [0, \omega], \|w_1 - \lambda^0_1(x)\| < \rho_\lambda, \|w_2 - \lambda^0_{N+1}(x)\| < \rho_\lambda\}.$$

жиындарды құрып аламыз.

**Шарт 1.**  $g(x, w_1, w_2)$  функциясы және оның  $\frac{\partial g(x, w_1, w_2)}{\partial w_1}, \frac{\partial g(x, w_1, w_2)}{\partial w_2}$  дербес туындылары  $G^0(x, \rho_\lambda)$  жиынында бірқалыпты үзіліссіз және төмендегі теңсіздіктер орындалады

$$\left\| \frac{\partial g(x, w_1, w_2)}{\partial w_1} \right\| \leq L_1, \quad \left\| \frac{\partial g(x, w_1, w_2)}{\partial w_2} \right\| \leq L_2, \quad (x, w_1, w_2) \in G^0(x, \rho_\lambda)$$

мұндағы  $L_1, L_2$  – тұрақты мәндер.

**Тұжырым.** Барлық  $\lambda(x) \in S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda)$  үшін  $\frac{\partial Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x))}{\partial \lambda} : \mathbb{R}^{n(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(N+1)}$  Якоби матрицасының кері матрицасы бар болуы үшін  $n \times n$  өлшемді

$$M_N(x) = h \cdot \left[ \frac{\partial g(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x))}{\partial w_1} + \frac{\partial g(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x))}{\partial w_2} \cdot \prod_{r=N}^1 (I + a_r(A, x, t_r)) \right]$$

матрицасының кері матрицасы бар болуы қажетті және жеткілікті.

$\lambda(x)$  параметрге қатысты (9) теңдеудің шешімін табу үшін келесі тұжырым 1-ші теореманың [6] жалпыламасы болып табылатын тұжырымның салдары:

**Теорема.** Әрбір  $x \in [0, \omega]$  үшін Шарт 1 және келесі

I)  $S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda)$  жиынында  $\frac{\partial Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x))}{\partial \lambda} : \mathbb{R}^{n(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(N+1)}$  Якоби матрицасы бірқалыпты үзіліссіз;

II) барлық  $\lambda(x) \in S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda)$  үшін  $\frac{\partial Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x))}{\partial \lambda} : \mathbb{R}^{n(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(N+1)}$  Якоби матрицасының шенелген кері матрицасы бар және

$$\left\| \left( \frac{\partial Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda(x))}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \gamma, \quad \gamma - const;$$

III)  $\gamma \cdot \|Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda^0(x))\| < \rho_\lambda$

шарттары орындалсын. Онда кез келген  $\alpha_1 \geq 1$  саны табылып,

$$\lambda^{(0)}(x) = \lambda^0(x),$$

$$\lambda^{(p+1)}(x) = \lambda^{(p)}(x) - \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\partial Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda^{(p)}(x))}{\partial \lambda} \right)^{-1} \cdot Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda^{(p)}(x)),$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

итерациялық процеспен анықталатын  $\{\lambda^{(p)}(x)\}_{p=0}^\infty$  тізбегі  $S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda)$  жиынына тиісті болады, (9)-шы теңдеудің шешімі  $\lambda^*(x)$ -га жинақталады,  $\lambda^*(x) \in S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda)$  және

$$\|\lambda^* - \lambda^0\|_3 \leq \gamma \cdot \|Q_{*, \Delta_N(x)}(x, \lambda^0(x))\|$$

бағалауы орындалады.  $S(x, \lambda^0(x), \rho_\lambda)$  жиынында (9)-шы теңдеудің кез-келген шешімі оқшауланған болады.

Ұсынылған тұжырым Адамар теоремасының локалды нұсқасын кеңейтетін күшейтілген нәтижесінің арнайы бір жағдайын сипаттайды [6].

Шеттік есептердің сандық шешімін табу мысалдарын қарастырамыз.

**Мысал 1.** Параметрі бар сызықтық емес екі нүктелі шеттік есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + F(x, t), \quad (x, t) \in [0, \omega] \times (0, T), \quad (11)$$

$$g(x, v(x, 0), v(x, T)) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (12)$$

мұндағы  $x$  - әулет параметрі,  $\omega = 0.25$ ,  $T = 0.5$ ,

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} 2x + 2 & x - 1 \\ 3x + 3 & x - 2 \end{pmatrix},$$

$$F(x, t) = \begin{pmatrix} -(2x^2 + 3x + 3)t^2 - (2x^3 + 3x^2 - 4x - 1)t - 2x^3 - x^2 \\ -(3x^2 + 5x + 5)t^2 - (3x^3 + 4x^2 - 3x + 4)t - 3x^3 - 3x^2 + x - 1 \end{pmatrix},$$

$$g\left(x, \begin{pmatrix} v_1(x, 0) \\ v_2(x, 0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(x, T) \\ v_2(x, T) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}v_1(x, 0)v_2(x, T) - v_2(x, 0)v_1(x, T) - \frac{1}{16}x^2(2x - 3) \\ v_1(x, 0)v_2(x, T) + \frac{1}{2}v_2(x, 0)v_1(x, T) - \frac{1}{4}x^2(2x - 3) \end{pmatrix},$$

(11) есебінің  $(x, t) \in [0, 0.25] \times [0, 0.5]$  облысында дәл шешімі

$$v^*(x, t) = \begin{pmatrix} (x + 1)t^2 + (t + 1)x^2 \\ (x + 1)t^2 \end{pmatrix}$$

болады.

$N = 1$  деп аламыз да  $v(x, t) = \lambda_1(x) + \tilde{v}(x, t)$  алмастыруын орындаймыз.

Онда

$$\tilde{v}(x, t) = \Phi(x, t) \int_0^t \Phi^{-1}(x, \tau) A(x, \tau) \lambda_1(x) d\tau + \Phi(x, t) \int_0^t \Phi^{-1}(x, \tau) F(x, \tau) d\tau,$$

$$(x, t) \in [0, 0.25] \times [0, 0.5],$$

мұндағы

$$\Phi(x, t) = \frac{2e^{\frac{3xt}{2}}}{\sqrt{13x^2 + 8x + 4}} \cdot \left( \left( \frac{\sqrt{13x^2 + 8x + 4}}{2} \cosh\left(\frac{t\sqrt{13x^2 + 8x + 4}}{2}\right) - \frac{3x}{2} \sinh\left(\frac{t\sqrt{13x^2 + 8x + 4}}{2}\right) \right) \cdot E + \sinh\left(\frac{t\sqrt{13x^2 + 8x + 4}}{2}\right) \cdot A(x, t) \right),$$

$Q_{*, \Delta_1(x)}(x, \lambda(x)) = 0$  сызықтық емес теңдеулер жүйесі әулетін құрып аламыз. Бұл жерде

$$Q_{*, \Delta_1(x)}(x, \lambda(x)) = \begin{pmatrix} g(x, \lambda_1(x), \lambda_2(x)) \\ \lambda_1(x) + \tilde{v}(x, T) - \lambda_2(x) \end{pmatrix}, \quad \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x)) \in \mathbb{R}^4.$$

$\lambda^0(x) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  векторын алып, (10) итерациялық процесті жүзеге асырамыз. 30-шы итерацияда табылған параметрді  $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x))$  деп қабылдаймыз, себебі бұл параметр үшін  $\|Q_{*,\Delta_1}(x, \lambda^*(x))\| \leq 10^{-7}$  теңсіздігі орындалады.

Осы есептеу нәтижелерінен төмендегі бағалаудың орындалатынын көреміз:

$$\max_{i=0,10} \|\lambda^*(0.025i) - v^*(0.025i, 0)\| \leq 0.0000010668.$$

$\tilde{v}(x_i, t)$  функциясы

$$\tilde{v}(x_i, t) = \Phi(x_i, t) \int_0^t \Phi(x_i, \tau) A(x_i, \tau) d\tau \cdot \lambda_1^*(x_i) + \Phi(x_i, t) \int_0^t \Phi(x_i, \tau) F(x_i, \tau) d\tau, \quad t \in [0, 0.5]$$

түрінде жазылады, мұндағы  $(x_i = 0.025i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10)$ . Сонымен, төмендегі бағалау орынды

$$\max_{j=0,20} \max_{i=0,10} \|\lambda^*(0.025i) + \tilde{v}(0.025i, 0.05j) - v^*(0.025i, 0.05j)\| \leq 0.0000010683.$$

$\lambda(x)$  параметрі бөліктеу нүктелерінде  $1.1 \cdot 10^{-6}$ , ал (11), (12) тестілік шеттік есебінің шешімі  $1.1 \cdot 10^{-6}$  дәлдіктерімен анықталады.

**Мысал 2.** Келесі түрдегі

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + F(x, t), \quad (x, t) \in [0, \frac{1}{4}] \times (0, \frac{1}{2}), \quad (13)$$

$$g(x, v(x, 0), v(x, \frac{1}{2})) = 0, \quad x \in [0, \frac{1}{4}], \quad (14)$$

сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулетін қарастырайық, мұндағы  $x$  - әулет параметрі,

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} 2x + 2t & x - 1 \\ 3x + 3(t + 1) & x - 2t \end{pmatrix}, \quad F(x, t) = \begin{pmatrix} F_1(x, t) \\ F_2(x, t) \end{pmatrix},$$

$$F_1(x, t) = -2(x + 1)t^3 - (4x^2 + x + 1)t^2 - (2x^3 + 3x^2 - 4x - 1)t - 2x^3 + x^2,$$

$$F_2(x, t) = -(3x + 5)t^3 - (6x^2 + 3x + 5)t^2 - (3x^3 + 7x^2 - x + 2)t - 3x^3 - 3x^2 + x - 1,$$

$$g\left(x, \begin{pmatrix} v_1(x, 0) \\ v_2(x, 0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(x, T) \\ v_2(x, T) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}v_1(x, 0)v_2(x, T) - v_2(x, 0)v_1(x, T) - \frac{1}{16}x^2(2x - 3) \\ v_1(x, 0)v_2(x, T) + \frac{1}{2}v_2(x, 0)v_1(x, T) - \frac{1}{4}x^2(2x - 3) \end{pmatrix}.$$

(13) есебінің  $(x, t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]$  облысындағы дәл шешімі

$$v^*(x, t) = \begin{pmatrix} (x + 1)t^2 + (t + 1)x^2 \\ (x - 1)t - t^2 \end{pmatrix}.$$

(7), (8)-ші теңдеулерді ескерсек

$$\tilde{v}(x, t) = a_1(A, x, t) \cdot \lambda_1(x) + a_1(F, x, t)$$

анықталады.

Берілген аралықты қандай да бір белгілі қадаммен бөліп,  $a_1(A, x, t)$  және  $a_1(F, x, t)$  функцияларын анықтаймыз. Әрбір  $x$  үшін  $\lambda(x)$  параметрге қатысты  $Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda(x)) = 0$  сызықтық емес теңдеулер жүйесі әулетін құрып аламыз.

**Ескерту.**  $\lambda_1(x) = v(x, 0)$ ,  $\lambda_2(x) = v(x, 0.5)$  белгілеулері қолданылады және  $Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda(x))$  операторының Якоби матрицасы келесі түрде анықталады

$$\frac{\partial Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda(x))}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_{2,2}(x) & -\lambda_{2,1}(x) & -\lambda_{1,2}(x) & \frac{1}{4}\lambda_{1,1}(x) \\ \lambda_{2,2}(x) & \frac{1}{2}\lambda_{2,1}(x) & \frac{1}{2}\lambda_{1,2}(x) & \lambda_{1,1}(x) \\ 1 + a_1^{1,1}(x, T) & a_1^{1,2}(x, T) & -1 & 0 \\ a_1^{2,1}(x, T) & 1 + a_1^{2,2}(x, T) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda^0(x) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  векторын алып,  $Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda(x)) = 0$  сызықтық емес теңдеулер жүйесін итерациялық процесті пайдаланып шешеміз:

$$\lambda^{(p+1)}(x) = \lambda^{(p)}(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda^{(p)}(x))}{\partial \lambda} \right)^{-1} \cdot Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda^{(p)}(x)), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Сонда, 30-шы итерациядағы  $x_i = \frac{1}{40}(i-1)$  ( $i = \overline{1, 11}$ ) нүктелеріндегі  $\lambda_1^*(x)$ ,  $\lambda_2^*(x)$  функцияларының мәндерін табамыз.

Әрбір  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  үшін

$$\tilde{v}\left(\frac{i}{40}, t\right) = a_1\left(A, \frac{i}{40}, t\right) \cdot \lambda_1\left(\frac{i}{40}\right) + a_1\left(F, \frac{i}{40}, t\right),$$

$$\hat{v}\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) = \lambda_1\left(\frac{i}{40}\right) + \tilde{v}\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) \quad (j = 1, 7, 15, 21)$$

функциялардың  $x = \frac{i}{40}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ) нүктелеріндегі мәндерін анықтаймыз.

Ендеше, алынған нәтижелерден

$$\max_{i=0,10} \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1\left(\frac{i}{40}\right) \\ \lambda_2\left(\frac{i}{40}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1^*\left(\frac{i}{40}, 0\right) \\ v_2^*\left(\frac{i}{40}, \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \right\| \leq 0.0000000906$$

$$\max_{j=0,20} \max_{i=0,10} \left\| \lambda\left(\frac{i}{40}\right) + \tilde{v}\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) - v^*\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) \right\| \leq 0.0000000939$$

бағалаулары орындалады.

$\lambda(x)$  параметрі бөліктеу нүктелерінде  $9.06 \cdot 10^{-8}$ , ал (13), (14) тестілік шеттік есебінің шешімі  $9.39 \cdot 10^{-8}$  дәлдіктерімен анықталады.

### Қорытынды

Жұмыста келтірілген есептік мысалдар ұсынылған әдістің қолдану тиімділігін дәлелдейді. Бірінші мысалда  $A(x, t)$  матрицасы тек  $x$  айнымалысына тәуелді болғандықтан, оған сәйкес келетін  $\Phi(x, t)$  фундаменталды матрицасын аналитикалық түрде анықтау мүмкіндігі болды. Бұл жағдай қарастырып отырған әдістің теориялық тұжырымдарын нақтылап, оның

қарапайым жағдайда қалай жүзеге асатынын көрсетуге жағдай жасайды.  $A(x, t)$  матрицасы екі айнымалыға тәуелді болатын жағдайда фундаменталды матрицаның нақты аналитикалық өрнегін алу күрделене түседі. Сондықтан, екінші мысалда  $\Phi(x, t)$  матрицасының элементтері берілген әрбір  $(x, t)$  нүктесі үшін сандық әдістер көмегімен есептеледі. Жүргізілген есептеулер нәтижелері ұсынылған тәсілдің практикалық тұрғыдан тиімді және қолдануға болатынын көрсетеді.

### Қаржыландыру туралы ақпарат

Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23488811) қаржыландырады.

### ӘДЕБИЕТТЕР

1. Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // Comput. Math. and Math. Phys. -1989. -Vol. 29, No.1. -P. 34–46. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90038-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4)
2. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2020. -Vol. 43, No.1. -P. 1788–1802. <https://doi.org/10.1002/mma.6003>
3. Minglibayeva B.B., Assanova A.T. An existence of an isolated solution to nonlinear two-point boundary value problem with parameter // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2021. -Vol.42, No.3. -P. 587–597. <https://doi.org/10.1134/s199508022103015x>
4. Asanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization methods for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. -2018. -Vol. 37, No. 1. -P. 4966–4976. <https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9>
5. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2007. -Vol. 47, No. 1. -P. 37–61. <https://doi.org/10.1134/S096554250701006X>
6. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the Existence of an Isolated Solution of a Nonlinear Boundary-Value Problem // Ukrainian Mathematical Journal. -2018. -Vol. 70, No. 3. -P. 410–421. <https://doi.org/10.1007/s11253-018-1507-y>
7. Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. -2019. -Vol. 325, No. 3. -P. 77–84. /- <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.27>
8. Kadirbayeva Zh.M. A numerical method for solving boundary value problem for essentially loaded system // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2021. -Vol. 42, No. 3. -P. 551–559. <https://doi.org/10.1134/S1995080221030112>
9. Temesheva S.M. A modification of a algorithms of the Dzhumabaev parametrization method and a numerical method // International Journal of Information and Communication Technologies. -2020. -Vol. 1, No.2. -P. 66–73.
10. Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2021. -Vol. 42, No.3. -P. 606–612. <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>
11. Темешева С.М., Абдиманапова П.Б., Борисов Д.И. Об одном методе решения семейства нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Каз НПУ им.Абая Серия "Физико-математические науки". -2021. -Т. 73, №. 1. -С. 70–76. <https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.09>

12. Asanova A.T., Imanchiev A.E. The problem with non-separated multipoint integral conditions for high-order differential equations and a new general solution // *Quaestiones Mathematicae*. -2022. -Vol. 45, No. 10. -P. 1641–1653. <https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1967503>

13. Iskakova N.B., Temesheva S.M., Uteshova R.E. On a problem for a delay differential equation // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. -2022. -Vol. 46, No. 9. -P. 11283–11297. <https://doi.org/10.1002/mma.9181>

14. Abdimanapova P.B., Temesheva S.M. Well-posedness criteria for one family of boundary value problems. *Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series*. -2023. -Vol. 112, No.4. -P. 5–20. /-<https://doi.org/10.31489/2023M4/5-20>

15. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. -М.: Наука, 1970. -536 с.

## REFERENCES

1. Dzhumabaev, D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46 (1989). [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90038-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4)
2. Dzhumabaev, D.S., Bakirova, E.A., and Mynbayeva, S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(1), 1788–1802 (2020). <https://doi.org/10.1002/mma.6003>
3. Minglibayeva, B.B., and Assanova, A.T. An existence of an isolated solution to nonlinear two-point boundary value problem with parameter. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 587–597 (2021). <https://doi.org/10.1134/S199508022103015X>
4. Asanova, A.T., and Kadirbayeva, Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations. *Computational and Applied Mathematics*, 37(1), 4966–4976 (2018). <https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9>
5. Dzhumabaev, D.S., and Temesheva, S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 47(1), 37–61 (2007). <https://doi.org/10.1134/S096554250701006X>
6. Dzhumabaev, D.S., and Temesheva, S.M. Criteria for the Existence of an Isolated Solution of a Nonlinear Boundary Value Problem. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70(3), 410–421 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11253-018-1507-y>
7. Asanova, A.T., Bakirova, E.A., and Kadirbayeva, Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, 325(3), 77–84 (2019). <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.27>
8. Kadirbayeva, Zh.M. A numerical method for solving boundary value problem for essentially loaded system. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 551–559 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030112>
9. Temesheva, S.M. A modification of algorithms of the Dzhumabaev parametrization method and a numerical method. *International Journal of Information and Communication Technologies*, 1(2), 66–73 (2020).

10. Temesheva, S.M., Dzhumabaev, D.S., and Kabdrakhova, S.S. On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 606–612 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>
11. Temesheva, S.M., Abdimanapova, P.B., and Borisov, D.I. *Ob odnom metode resheniya semeystva nelineynykh krayevykh zadach dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [On one method for solving a family of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations] *Bulletin of Abai Kazakh National Pedagogical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 73(1), 70–76, (2021). <https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.09> (in Russian).
12. Asanova, A.T., and Imanchiev, A.E. The problem with non-separated multipoint integral conditions for high-order differential equations and a new general solution. *Quaestiones Mathematicae*, 45(10), 1641–1653 (2022). <https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1967503>
13. Iskakova, N.B., Temesheva, S.M., and Utesheva, R.E. On a problem for a delay differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(9), 11283–11297 (2022). <https://doi.org/10.1002/mma.9181>
14. Abdimanapova, P.B., and Temesheva, S.M. Well-posedness criteria for one family of boundary value problems. *Bulletin of the Karaganda University, Mathematics Series*, 112(4), 5–20 (2023). <https://doi.org/10.31489/2023M4/5-20>
15. Daletskii, Yu.L., and Krein, M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space] (Moscow:Nauka, 1970). (in Russian).

<sup>1,2\*</sup>**Абдиманапова П.Б.**,

PhD, ассистент-профессор, ORCID ID: 0000-0001-8879-9985,

\*e-mail: perizatabdimanapova344@gmail.com

<sup>1,3</sup>**Темешева С.М.**,

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, и.о. профессора,

ORCID ID: 0000-0002-3341-4539,

e-mail: temesheva.svetlana@kaznu.kz

<sup>4</sup>**Иманчиев А.Е.**,

к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchievae@gmail.com

<sup>2</sup>**Мәжит Ж.Б.**,

сеньор-лектор, ORCID ID: 0000-0002-4635-9241,

e-mail: Zhamilya.Mazhit01@gmail.com

<sup>1</sup> Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup> Алматинский технологический университет, г. Алматы, Казахстан

<sup>3</sup> Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

<sup>4</sup> Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан.

## О НАХОЖДЕНИИ РЕШЕНИЯ СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

### Аннотация

В настоящей работе исследуется краевая задача, относящаяся к семейству линейных дифференциальных уравнений с нелинейными двухточечными краевыми условиями. При каждом фиксированном значении параметра семейства исходная задача преобразуется в нелинейную двухточечную краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку такие задачи связаны с нелокальными краевыми задачами, в том числе с системами гиперболических уравнений, определение условий их разрешимости является актуальной задачей. В работе применяется метод параметризации Д.С. Джумабаева, основанный на сведении задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений по параметру и решении начальной задачи для дифференциального уравнения, зависящего от параметра. Для решения используется итерационный метод, при этом обосновываются условия сходимости. Предложенный метод основан на сочетании численного решения задач Коши и решения системы нелинейных уравнений. Полученный алгоритм решения проверяется на конкретных тестовых примерах, что демонстрирует его эффективность. В частности, установлено, что решение соответствующей системы при заданном значении параметра сходится в процессе итераций. Рассматриваемый метод является эффективным методом определения решений краевых задач для семейства линейных дифференциальных уравнений, характеризующихся нелинейными двухточечными краевыми условиями. Практическая эффективность предложенного метода подтверждается результатами численного решения конкретных задач.

**Ключевые слова:** нелинейные двухточечные краевые задачи, параметр семейства, обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые условия, численный метод.

<sup>1,2\*</sup> **Abdimanapova P.B.**,

PhD, Assistant Professor, ORCID ID: 0000-0001-8879-9985,

\*e-mail: perizatabdimanapova344@gmail.com

<sup>1,3</sup> **Temesheva S.M.**,

Dr.Phys.-Math.Sc., Leading Researcher, Acting Professor, ORCID ID: 0000-0002-3341-4539,

e-mail: temesheva.svetlana@kaznu.kz

<sup>4</sup> **Imanchiev A.E.**,

Cand.Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchievae@gmail.com

<sup>2</sup> **Mazhit Zh.B.**,

Senior lecturer, ORCID ID: 0000-0002-4635-9241,

e-mail: Zhamilya.Mazhit01@gmail.com

<sup>1</sup> Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup> Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan

<sup>3</sup> Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

<sup>4</sup> K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

## ON FINDING SOLUTIONS OF A FAMILY OF NONLINEAR TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A DIFFERENTIAL EQUATION

### Abstract

This paper investigates a boundary value problem belonging to a family of linear differential equations with nonlinear two-point boundary conditions. For each fixed value of the family parameter, the original problem is transformed into a nonlinear two-point boundary value problem for ordinary differential

equations. Since such problems are associated with nonlocal boundary value problems, including systems of hyperbolic equations, determining the conditions for their solvability is of considerable interest. The study employs the parameterization method developed by D.S. Dzhumabayev, which is based on reducing the problem to a system of nonlinear algebraic equations with respect to the parameter and solving an initial value problem for a parameter-dependent differential equation. An iterative method is used for the solution process, and the conditions ensuring its convergence are established. The proposed approach combines the numerical solution of Cauchy problems with the solution of a system of nonlinear equations. The developed algorithm is tested on specific benchmark examples, demonstrating its effectiveness. In particular, it is shown that the solution of the corresponding system converges through the iterative process for a given parameter value. The considered approach provides an efficient method for determining solutions of boundary value problems for families of linear differential equations characterized by nonlinear two-point boundary conditions. The practical efficiency of the proposed method is confirmed by the results of numerical solutions of specific problems.

**Key words:** nonlinear two-point boundary value problems, family parameter, ordinary differential equations, boundary conditions, numerical method.

*Received June 23, 2026; accepted August 29, 2026.*