

УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-3-47-54>

^{1,2*} **Вербовский В.В.**,

доктор физико-математических наук, доцент,

ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy at math.kz

¹ Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

² Казахский национальный исследовательский технический университет
им. К.И. Сатпаева, г. Алматы, Казахстан

О ЛОКАЛЬНОМ АНАЛОГЕ СВОЙСТВА СТРОГОГО ПОРЯДКА ВНУТРИ СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР

Аннотация

В работе исследуется локальный аналог свойства строгого порядка внутри сечения для линейно упорядоченных структур, возникающий в теории упорядоченно стабильных моделей. Рассматривается естественная попытка сформулировать это свойство через конечные цепи строго вложенных формульных подмножеств, пересеченных с реализациями сечения. Показано, что в такой формулировке это свойство не является элементарным: она может выполняться в элементарном расширении, но не сохраняться в исходной модели и, следовательно, не дает корректного локального критерия. Для устранения этого недостатка вводится понятие строгой вложенности выпуклых компонент определенных множеств, а также его равномерная версия для семейств формул с параметрами. Доказывается, что свойство строгого порядка внутри сечения эквивалентно существованию равномерного свойства вложенности выпуклых компонент. Полученный результат уточняет локальную природу данного свойства, показывает его отличие от классического локального свойства строгого порядка и позволяет применять его при исследовании упорядоченно стабильных теорий и их моделей. Тем самым работа дополняет критерий упорядоченной стабильности.

Ключевые слова: линейно упорядоченное множество, о-минимальность, упорядоченная стабильность, свойство строгого порядка.

Введение

Теория стабильности в рамках логики предикатов первого порядка возникла как попытка понять, какие теории допускают классификацию своих моделей. Отправной точкой стала теорема Морли (1965): если счётная теория категорична в некоторой несчётной мощности, то она категорична во всех несчётных мощностях [2]. Этот результат имеет фундаментальное значение, но он не даёт наглядного описания таких теорий. Дальнейшее развитие связано с работами Шелаха, который в конце 1960-х — 1970-х годов построил теорию стабильности как обобщение идей Морли. Вместо «глобального» ранга Морли, который использует все формулы данного языка, Шелах предложил определять ранг при помощи одной формулы или некоторого семейства формул [3]. Одним из центральных результатов является эквивалентность стабильности отсутствию свойства порядка. Наличие свойства порядка означает, что в теории можно закодировать линейный порядок произвольной длины, что свидетельствует о её высокой комбинаторной сложности. Отсутствие свойства порядка, напротив, обеспечивает контролируемость пространства типов и является одной из эквивалентных характеристик стабильности.

В свою очередь, свойство порядка можно разделить на два свойства: свойство независимости и свойство строгого линейного порядка. Заметим, что одно свойство не исключает другого, так, существуют формулы, которые одновременно обладают и свойством независимости, и свойством строгого линейного порядка. В качестве простого примера можно взять формулу $\varphi(x, y) \equiv x \mid y$ в структуре $(\mathbb{N}, \mid)$, где $x \mid y$ означает, что число x делит число y без остатка. Действительно, если вместо y подставлять степени некоторого числа, скажем, 2^n , то получаем свойство строгого порядка: любое число, которое делится на 2^{n+1} , делится и на 2^n ; а если вместо y подставлять простые числа $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$, то для любого числа $n > 1$ и любого подмножества $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ число $\prod_{i \in A} p_i$ делится на число p_i , если и только если $p_i \in A$.

С. Шелах доказал, что теория является стабильной тогда и только тогда, когда она не обладает ни свойством независимости, ни свойством строгого порядка. Заметим, что эти свойства можно выразить как при помощи существования бесконечных последовательностей, так и локально, что такое свойство выполняется для всех достаточно больших чисел n . Наличие локальных аналогов свойств независимости и строгого порядка позволяет упростить многие рассуждения.

Б.С. Байжанов и В.В. Вербовский в работе [1] ввели понятие упорядоченно стабильной теории, которое основано одновременно и на понятии стабильной теории, и на понятии о-минимальной теории. Там же они доказали, что упорядоченно стабильные теории не допускают свойства независимости. В.В. Вербовский в работе [4] ввел понятие строгого порядка внутри сечения и доказал аналог теоремы Шелаха о характеристизации стабильных теорий: теория является упорядоченно стабильной тогда и только тогда, когда она не обладает ни свойством независимости, ни свойством строгого порядка внутри сечения. Однако оставался открытым вопрос описания локального варианта свойства строгого порядка внутри сечения. Ответу на данный вопрос и посвящена данная работа.

Материалы и методы

Здесь мы исследуем локальный аналог свойства строгого порядка внутри сечения для линейно упорядоченных структур. Методами исследования являются классические методы теории моделей, в частности, методы исследования стабильных теорий и линейно упорядоченных структур.

Результаты и обсуждение

Для начала вспомним классические определения.

Теория T обладает *свойством порядка*, если существует формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (возможно с параметрами) и кортежи $\bar{a}_i, \bar{b}_i$ в некоторой модели $\mathcal{M} \models T$ такие, что для всех $i, j < \omega$:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad i < j.$$

Формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ обладает *локальным свойством порядка* в структуре $\mathcal{M}$, если для любого натурального положительного числа n существуют кортежи $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_j$ ($i, j < n$) такие, что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \iff i < j$.

Теория T обладает *свойством независимости*, если существует формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и модель $\mathcal{M} \models T$, в которой существуют кортежи $\bar{a}_n$ ($n < \omega$), такие что для любого множества $F \subseteq \omega$ найдется такой элемент $\bar{b}_F$, что: $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_n, \bar{b}_F)$ тогда и только тогда, когда $n \in F$.

Формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ обладает *локальным свойством независимости*, если существует формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, что для каждого положительного целого числа N существует модель $\mathcal{M} \models T$, в которой существуют кортежи $\bar{a}_n$ ($n < N$), такие что для любого множества $F \subseteq N$ найдется такой элемент $\bar{b}_F$, что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_n, \bar{b}_F)$ тогда и только тогда, когда $n \in F$.

Теория T обладает *свойством строгого порядка* (SOP), если существует формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, такая что в некоторой (эквивалентно, любой достаточно насыщенной) модели $\mathcal{M} \models T$ найдётся последовательность кортежей $\bar{a}_i$, где $i < \omega$, для которой выполнено:

$$\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}_i) \subsetneq \varphi(\mathcal{M}, \bar{a}_j) \Leftrightarrow i < j.$$

Аналогично предыдущим определениям мы можем определить локальное свойство строгого порядка, рассматривая не бесконечную последовательность кортежей, а последовательности любой конечной длины.

Хорошо известно, что формула обладает свойством порядка тогда и только тогда, когда она обладает свойством независимости или свойством строгого порядка (или обоими свойствами одновременно). Связь между вышеприведенными понятиями и их локальными аналогами следующая: локальный аналог — элементарное свойство, если оно выполняется в некоторой модели данной теории, то оно выполняется во всех моделях этой теории. Однако локального выполнения этих свойств недостаточно, чтобы в данной конкретной модели проявились свойства рангов, для этого требуется уже выполнение вышеприведенных свойств на бесконечной последовательности кортежей.

Вспомним, что теория является стабильной тогда и только тогда, когда она не обладает свойством порядка. Локальное свойство порядка позволяет записать нестабильность как элементарное свойство.

Цель данной работы — исследовать локальный аналог свойства строгого порядка внутри сечения, которое используется для описания упорядоченно стабильных теорий.

Пусть $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ — линейно упорядоченная структура, a — элемент из M , а A и B — подмножества для M . Как обычно, будем писать $a < A$, если $a < b$ для любого $b \in A$, и будем писать $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Разбиение $\langle C, D \rangle$ множества M называется *сечением*, если $C < D$. Если дано сечение $\langle C, D \rangle$, то можно построить частичный тип $\{c < x < d : c \in C, d \in D\}$, который также будем называть сечением и обозначать тем же символом $\langle C, D \rangle$.

Подмножество A линейно упорядоченного множества M называется *выпуклым*, если для любых a и $b \in A$ отрезок $[a, b]$ лежит в A . *Выпуклым компонентом* множества A называется максимальное выпуклое подмножество для A . Определим *выпуклое замыкание* A^c множества A следующим образом: $A^c = \{b \in M : \exists a_1, a_2 \in A (a_1 \leq b \leq a_2)\}$, то есть это наименьшее выпуклое множество, содержащее A .

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая структура. Пусть s — некоторый частичный n -тип, A — подмножество. Тогда $S_s^n(A) \equiv \{p \in S^n(A) : p \cup s \text{ совместно}\}$. Заметим, что область определения типа s может не совпадать с множеством A .

- Определение 1 (Б. Байжанов, В. Вербовский, [1])** 1. Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M}$ называется *упорядоченно стабильной в λ* , если для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности не больше λ и для любого сечения $\langle C, D \rangle$ в $\mathcal{M}$ существует самое большее λ 1-типов над A , которые совместны с сечением $\langle C, D \rangle$, то есть $|S^1(A)| \leq \lambda$. $\langle C, D \rangle$
- Теория T называется *упорядоченно стабильной в λ* , если каждая ее модель такова. Иногда будем писать, что T упорядоченно λ -стабильна.
 - Теория T называется *упорядоченно стабильной*, если существует бесконечный кардинал λ , в котором теория T упорядоченно стабильна.

В работе [4] было дано следующее определение свойства строгого порядка внутри сечения.

Определение 2 Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ обладает *свойством строгого порядка внутри сечения*, если существует формула $\phi(x, \bar{y})$, такая что для любого натурального числа n существуют кортежи $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ и сечение $\langle C_n, D_n \rangle$ в $\mathcal{M}$, такие что в некотором $|M|^+$ -насыщенном элементарном расширении $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ имеет место:

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subset \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N})$$

Теория обладает *свойством строгого порядка внутри сечения*, если некоторая ее модель обладает этим свойством.

Кроме того, в работе [4] был доказан следующий критерий упорядоченной стабильности теории.

Теорема 3 Пусть T является элементарной теорией линейно упорядоченной структуры. Тогда теория T является упорядоченно стабильной тогда и только тогда, когда она не обладает свойством независимости и не обладает свойством строгого порядка внутри сечения.

По теореме компактности легко построить элементарное достаточно насыщенное расширение, в котором найдется сечение, в котором уже будет бесконечная цепь вложенных подмножеств, как в определении 2. Однако остается открытым вопрос, если в некоторой модели заданной теории существует подобная бесконечная цепь вложенных формульных подмножеств, пересеченных реализацией сечения, будет ли свойство, описанное в определении 2 выполняться во всех моделях этой теории? Следующий пример дает отрицательный ответ на данный вопрос.

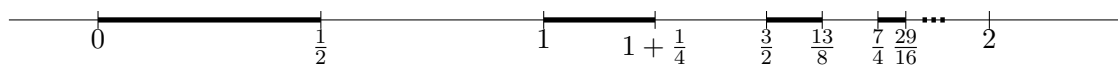
Рассмотрим $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, +, P)$, где предикат P проинтерпретирован следующим подмножеством:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[1, 1 + \frac{1}{4}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right] \cup \dots$$

Иначе говоря,

$$P(\mathcal{M}) = \bigcup_{n < \omega} \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

Или, как показано на рисунке ниже:



Пусть

$$\varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists z(P(z) \wedge \exists u(u < z \wedge \forall t(u < t < z \rightarrow \neg P(t))) \wedge z \leq x \leq z + y).$$

Формула $\varphi(x, a)$, где a — некоторое положительное вещественное число, выделяет в модели $\mathcal{M}$ следующее множество. Берем минимальный элемент выпуклой компоненты множества $P(\mathcal{M})$, откладываем от него отрезок длины a , после чего рассматриваем объединение всех таких отрезков, полученных по всем выпуклым компонентам множества $P(\mathcal{M})$. Очевидно, что так как длина выпуклых компонент множества $P(\mathcal{M})$ стремится к нулю, то при любом положительном вещественном числе a множество $\varphi(\mathcal{M}, a)$ будет представлять собой объединение конечного числа отрезков, так как найдется такая левая граница $b = 2 - 1/2^{n-1}$ одного из отрезков, составляющих множество $P(\mathcal{M})$, что число $a + b$ будет больше 2. Поскольку $\varphi(\mathcal{M}, a)$ есть конечное объединение отрезков, для любого сечения $\langle C, D \rangle$ только одна из формул $\varphi(x, a)$ или $\neg\varphi(x, a)$ совместна с сечением $\langle C, D \rangle$. Следовательно, данная формула

не обладает свойством строгого порядка внутри никакого сечения в структуре $\mathcal{M}$. Однако, если мы перейдем к элементарному расширению $\mathcal{N}$ структуры $\mathcal{M}$, в которой существует положительный элемент α , являющийся бесконечно малым по отношению ко всем положительным вещественным числам, то легко понять, что для последовательности $\alpha_n = n\alpha$ семейство формул $\{\varphi(x, \alpha_n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ обладает свойством строгого порядка внутри сечения $\langle (-\infty, 2), [2, +\infty) \rangle$.

Таким образом, определение 2 не является действительным локальным аналогом свойства строгого порядка внутри сечения, как это происходит в классической теории стабильности; в текущем виде оно выполняется не во всех моделях данной теории. Поэтому мы сейчас перепишем локальный вариант свойства строгого порядка в другом виде.

Скажем, что пара множеств A и B удовлетворяет свойству *строгой вложенности выпуклых компонент*, если $A \subsetneq B$ и существует выпуклая компонента множества A , являющаяся собственным подмножеством некоторой выпуклой компоненты множества B . Например, если взять $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ и $B = \mathbb{Q}$ как подмножества множества вещественных чисел $\mathbb{R}$, то хотя $A \subsetneq B$, но эта пара множеств не удовлетворяет свойству строгой вложенности выпуклых компонент, поскольку все выпуклые компоненты множеств A и B являются одноточечными.

Будем говорить, что последовательность множеств $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяет свойству *строгой вложенности выпуклых компонент*, если $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$ и существуют выпуклые компоненты $C_1, \dots, C_n$ множеств $A_1, \dots, A_n$, соответственно, такие что $C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \dots \subsetneq C_n$.

Будем говорить, что последовательность множеств $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяет свойству *строгой вложенности k выпуклых компонент*, если $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$ и существуют выпуклые компоненты $C_1^j, \dots, C_n^j$ множеств $A_1, \dots, A_n$, соответственно, такие что

$$C_1^j \subsetneq C_2^j \subsetneq \dots \subsetneq C_n^j,$$

где $j < k$, причем для каждого i компоненты C_i^j , где $j < k$, попарно различны.

Заметим, что для формульных подмножеств $A_1, \dots, A_n$ свойство строгой вложенности k выпуклых компонент само является формульным.

Пусть $F(x)$ некоторая формула, которая выделяет множество A . Напишем отношение эквивалентности $E_F(x, y)$ на множестве A , классами которой являются выпуклые компоненты множества A :

$$E_F(x, y) \equiv F(x) \wedge F(y) \wedge \forall z (x \leq z \leq y \vee y \leq z \leq x \rightarrow F(z)).$$

Пусть даны формулы $F_1(x), \dots, F_n(x)$, которые выделяют подмножества $A_1, \dots, A_n$, соответственно. Отношения эквивалентности E_{F_i} для краткости обозначим E_i , где $i = 1, \dots, n$. Классы эквивалентности E_i обозначим $[x]_i$. Тогда свойство строгой вложенности выпуклых компонент множеств $A_1, \dots, A_n$ (формул $F_1(x), \dots, F_n(x)$), записывается следующим образом:

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} A_i \subseteq A_{i+1} \wedge \exists x_1 \dots \exists x_n \left[\bigwedge_{i=1}^n x_i \in A_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [x_i]_i \subsetneq [x_{i+1}]_{i+1} \right].$$

Аналогичным образом записывается формула, выражающая свойство строгой вложенности k выпуклых компонент; однако мы не приводим её ввиду громоздкости.

Если формулы $F_1(x), \dots, F_n(x)$ определены равномерно, то есть, $F_i(x) = G(x, \bar{b}_i)$, где $i = 1, \dots, n$, то будем говорить, что выполняется равномерное (n, k) свойство вложенности выпуклых компонент, если последовательность формул $F_1(x), \dots, F_n(x)$ удовлетворяет свойству строгой вложенности k выпуклых компонент. Также будем говорить, что формула $G(x, \bar{y})$ удовлетворяет (n, k) свойству вложенности выпуклых компонент.

Будем говорить, что линейно упорядоченная структура обладает равномерным свойством вложенности выпуклых компонент, если существует формула, которая удовлетворяет равномерному (n, k) свойству вложенности выпуклых компонент для любых натуральных положительных чисел n и k .

Теорема 4 *Элементарная теория T линейно упорядоченной структуры обладает свойством строгого порядка внутри сечения тогда и только тогда, когда каждая ее модель обладает равномерным свойством вложенности выпуклых компонент.*

Доказательство. Предположим, что T обладает свойством строгого порядка внутри сечения. Пусть в некоторой модели $\mathcal{M} \models T$ существует формула $\phi(x, \bar{y})$, такая что для любого натурального числа n существуют кортежи $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ и сечение $\langle C_n, D_n \rangle$ в $\mathcal{M}$, такие что в некотором $|M|^+$ -насыщенном элементарном расширении $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ имеет место:

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subset \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N})$$

Не умаляя общности, в силу компактности, мы можем считать, что в модели $\mathcal{M}$ существует сечение $\langle C, D \rangle$ и бесконечная последовательность кортежей $\bar{a}_n$, $n < \omega$, что имеет место

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subset \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap \langle C_n, D_n \rangle(\mathcal{N}) \subsetneq$$

Более того, мы можем предположить, что множество C в структуре $\mathcal{M}$ формульно, иначе, мы добавим одноместный предикат P , который выделяет множество C . Будем предполагать, что $\mathcal{N}$ является элементарным расширением модели $\mathcal{M}$ и в обогащенном языке. Тогда свойство строгого порядка внутри сечения можно выразить как хотя бы одно из двух:

$$\begin{aligned} \exists x(P(x) \wedge \forall y(x < y \wedge P(y) \rightarrow \phi(\mathcal{M}, \bar{a}_1) \cap (y, +\infty) \cap P(\mathcal{M}) \subsetneq \\ \subsetneq \phi(\mathcal{M}, \bar{a}_2) \cap (y, +\infty) \cap P(\mathcal{M}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{M}, \bar{a}_n) \cap (y, +\infty) \cap P(\mathcal{M}))) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \exists x(\neg P(x) \wedge \forall y(y < x \wedge \neg P(y) \rightarrow \phi(\mathcal{M}, \bar{a}_1) \cap (-\infty, y) \cap \neg P(\mathcal{M}) \subsetneq \\ \subsetneq \phi(\mathcal{M}, \bar{a}_2) \cap (-\infty, y) \cap \neg P(\mathcal{M}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{M}, \bar{a}_n) \cap (-\infty, y) \cap \neg P(\mathcal{M}))) \end{aligned}$$

Предположим, что выполняется первое. Тогда в модели $\mathcal{N}$, так как она достаточно насыщена, можно найти такой элемент α , что имеет место

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap (\alpha, +\infty) \cap P(\mathcal{N}) \subsetneq \\ \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap (\alpha, +\infty) \cap P(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap (\alpha, +\infty) \cap P(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \end{aligned}$$

Заметим, что, как было доказано в [1], подмножество $\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_i) \cap \langle C, D \rangle(\mathcal{N})$ состоит из бесконечного числа выпуклых множеств. Пусть $\phi_1(x, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$ состоит из тех выпуклых компонент множества $\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_i)$, которые являются собственными подмножествами соответствующих выпуклых компонент множества $\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_{i+1})$, а формула $\phi_2(x, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$ состоит из тех выпуклых компонент множества $\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_i)$, которые совпадают с некоторой выпуклой компонентой множества $\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_{i+1})$. Очевидно, что для выполнения свойства строгого порядка внутри сечения требуется, чтобы в любой окрестности сечения формула ϕ_1 имеет реализацию. Не умаляя общности мы можем предположить, что ϕ_2 несовместна (заменяем ϕ на ϕ_1).

Тогда, если предикат P выразим в исходном языке, то мы получили равномерное семейство формул, вложенных одна в другую (причем соответствующие выпуклые компоненты

тоже вкладываются одна в другую), откуда следует равномерное свойство вложенности выпуклых компонент.

Если же предикат P не выразим в исходном языке, то с точностью до инвертирования порядка мы можем проделать то же самое и найти такой элемент $\beta \in N$, что будет верно

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap (\alpha, \beta) \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap (\alpha, \beta) \subsetneq \cdots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap (\alpha, \beta) \subsetneq \cdots$$

Отсюда легко следует равномерное свойство вложенности выпуклых компонент. Поскольку это свойство элементарное, легко понять, что если оно выполняется в одной модели теории T , то оно выполняется во всех моделях этой теории.

Теперь предположим, что имеет место равномерное свойство вложенности выпуклых компонент. Тогда по компактности из равномерного (n, k) свойства вложенности выпуклых компонент можно построить (ω, ω) свойство вложенности выпуклых компонент. Не ограничивая общности, можно предположить, что у нас не бесконечно возрастающая цепь, а бесконечно убывающая (перенумеруем ее при помощи отрицательных целых чисел). Тогда есть счетная монотонная (для определенности, пусть она будет возрастающая) последовательность элементов b_i из $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_{-1})$, которые лежат в разных выпуклых компонентах множества $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_{-1})$, причем в каждой из этих выпуклых компонент есть меньшая выпуклая компонента множества $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_{-2})$, а в них есть меньшая выпуклая компонента множества $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_{-3})$, и так далее. Пусть $C = \{x \in M : \exists i(x < b_i)\}$. Легко понять, что внутри сечения $\langle C, M \setminus C \rangle$ выполняется свойство строгого порядка. $\square$

Заключение

Таким образом, локальный аналог свойства строгого порядка внутри сечения достаточно сильно отличается от классического локального аналога свойства строгого порядка. Было бы интересно понять ситуацию в более общем случае: описать поведение свойства строгого порядка внутри Δ -типа, что важно для изучения стабильных с точностью до Δ теорий [5-7].

Информация о финансировании

Работа поддержана Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант BR28713025.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Baizhanov, B., Verbovskii, V. O-stable theories. Algebra and Logic 50 (2011), no 3, 211–225. <https://doi.org/10.1007/s10469-011-9136-7>
- 2 Morley, M. Categoricity in power. Transactions of the American Mathematical Society. 1965. V. 114.P. 514–538. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175782-0>
- 3 Shelah, S. Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models (1978, 2nd ed. 1990).
- 4 Verbovskiy, V.V. O-stable ordered groups. Siberian Advances in Mathematics, 22 (2012), 50–74. <https://doi.org/10.3103/S105513441201004X>
- 5 Verbovskiy, V. V. On definability of types and relative stability, Mathematical Logic Quarterly, 65 (3), 332–346 (2019). <https://doi.org/10.1002/malq.201600084>
- 6 Verbovskiy, V.V., Yershigeshova, A.D. On non-essentiality of an o-stable expansion of $(\mathbb{Z}, \text{Lobachevskii Journal of Mathematics, 44, 5485–5492 (2023). } \langle \mathbb{Z}, \text{Lobachevskii Journal of Mathematics, 44, 5485–5492 (2023). } \langle \mathbb{Z},$
<https://doi.org/10.1134/S1995080223120387>
- 7 Verbovskiy, V.V. On the function depth in an o-stable ordered group of a finite convexity rank. Kazakh Mathematical Journal, 25 (2), 25–35 (2025). <https://doi.org/10.70474/6tx4zj76>

^{1,2} Вербовский В.В.,

ф.-м.ф.д., доцент, ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy at math.kz

¹ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан² Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті,
Алматы қ., Қазақстан**СЫЗЫҚТЫ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАР ҮШІН ҚИМА ІШІНДЕГІ
ҚАТАҢ РЕТТІЛІК ҚАСИЕТІНІҢ ЛОКАЛДЫ АНАЛОГЫ****Аңдатпа**

Бұл жұмыста реттелген тұрақты модельдер теориясында пайда болатын сызықты реттелген құрылымдар үшін қима ішіндегі қатаң реттілік қасиетінің локалды аналогы зерттеледі. Бұл қасиетті қиманың жүзеге асуларымен қиылысқан формулалармен анықталатын жиындардың қатаң кірістірілген шекті тізбектері арқылы тұжырымдаудың табиғи әрекеті қарастырылады. Мұндай тұжырым элементар емес екені көрсетіледі: ол элементар кеңейтуде орындалуы мүмкін, бірақ бастапқы модельде сақталмайды, сондықтан дұрыс локалды критерий бермейді. Бұл кемшілікті жою үшін анықталатын жиындардың дөңес компоненттерінің қатаң кірістірілуі ұғымы, сондай-ақ параметрлері бар формулалар отбасылары үшін оның бірқалыпты нұсқасы енгізіледі. Қима ішіндегі қатаң реттілік қасиеті дөңес компоненттердің кірістірілуінің бірқалыпты қасиетінің бар болуына эквивалент екені дәлелденеді. Алынған нәтиже бұл қасиеттің локалды табиғатын нақтылайды, оның классикалық локалды қатаң реттілік қасиетінен айырмашылығын көрсетеді және оны реттелген тұрақты теориялар мен олардың модельдерін зерттеуде қолдануға мүмкіндік береді. Осылайша, жұмыс реттелген тұрақтылық критерийін толықтырады.

Түйін сөздер: сызықтық реттелген жиын, о-минималдылық, реттелген тұрақтылық, қатаң реттілік қасиеті.

^{1,2} Verbovskiy V.V.,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent,

ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy at math.kz

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan²Satbayev University, Almaty, Kazakhstan**ON A LOCAL ANALOGUE OF THE STRICT ORDER PROPERTY INSIDE
A CUT FOR LINEARLY ORDERED STRUCTURES****Abstract**

The paper studies a local analogue of the strict order property inside a cut for linearly ordered structures, arising in the theory of order-stable models. A natural attempt to formulate this property in terms of finite chains of strictly nested definable subsets intersected with realizations of a cut is considered. It is shown that such a formulation is not elementary: it may hold in an elementary extension but fail to be preserved in the original model and therefore does not provide a correct local criterion. To overcome this drawback, the notion of strict inclusion of convex components of definable sets is introduced, together with its uniform version for families of formulas with parameters. It is proved that the strict order property inside a cut is equivalent to the existence of the uniform property of inclusion of convex components. The obtained result clarifies the local nature of this property, shows its difference from the classical local strict order property, and makes it applicable to the study of order-stable theories and their models. Thus, the paper complements the criterion of order-stability.

Keywords: linearly ordered set, o-minimality, o-stability, strict order property.

Received April 28, 2026; accepted May 26, 2026.