УДК 519.21
МРНТИ 27.43.15
https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-2-124-132

[1] Григоренко О.В.,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID ID: 0000-0001-8957-8746,
e-mail: ogrigorenko2311@mail.ru

[2] Кабаева А.М.,
студент,
e-mail: kabaeva-alyona@mail.ru

[3] Логачев А.В.,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID ID: 0000-0002-0605-8831,
e-mail: avlogachov@mail.ru

[1,4] Логачева О.М.,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID ID: 0000-0003-4994-5606,
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

[1]*Шевчук Е.В.,
кандидат технических наук, доцент,
ORCID ID: 0000-0002-1206-3960,
*e-mail: evshevch@mail.ru

[1] Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия
[3] Институт математики им. С.Л. Соболева, г. Новосибирск, Россия
[4] Федеральный университет ABC, г. Санту-Андре, Бразилия

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЙНОМ ПЕЙЗАЖЕ С НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Аннотация

В настоящей статье мы доказываем закон больших чисел для случайного блуждания в случайном пейзаже. Предельное поведение таких последовательностей интенсивно изучается начиная с 80–ых годов прошлого века. Такие результаты, позволяют, в частности, во многих ситуациях доказывать состоятельность статистических оценок неизвестных параметров. В отличие от известных более ранних результатов, мы допускаем, чтобы слагаемые случайного блуждания, на состояниях которого строится случайное блуждание в случайном пейзаже, имели разное распределение и не были центрированными. Также не требуется, чтобы слагаемые случайного блуждания в случайном пейзаже имели одинаковое распределение и были независимыми, требуется только, чтобы они имели одинаковое математическое ожидание и были некоррелированными. Методами исследования являются классические методы теории вероятностей: различные вероятностные неравенства (Берри–Эссена, Гельдера, Ляпунова), а также предельные теоремы (центральная предельная теорема, закон больших чисел). Отметим, что рассматриваемая модель имеет физическую интерпретацию, связанную с перемещением частицы в случайной среде.

Ключевые слова: закон больших чисел, случайное блуждание, случайное блуждание в случайном пейзаже.

Введение

Будем предполагать, что все рассматриваемые далее случайные элементы заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Определим необходимые нам случайные величины и последовательности: $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность целочисленных случайных величин; $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — построенное по ним случайное блуждание; $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — последовательность независимых от $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ случайных величин; $V_n := \sum\limits_{i=1}^{n} Y_{S_i}$ — сумма, в которой индекс суммируемых элементов равен значению положения случайного блуждания S_i. Далее будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbf{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X; $\mathbf{D}X$ — дисперсия случайной величины X.

Основным результатом настоящей работы является закон больших чисел для последовательности V_n, схема описания которой имеет следующую физическую интерпретацию. Пусть имеется частица, которая движется по целым точкам действительной оси, каждый раз меняя свое положение на величину, равную $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, то есть ее перемещение описывается случайным блужданием S_n. В каждой такой целой точке S_n на нее оказывается случайное воздействие другими частицами $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, суммарный результат которого выражается как V_n. Отметим, что последовательность V_n впервые была независимо рассмотрена авторами работ 1979 года [1], [2].

Сделаем краткий обзор известных результатов, связанных с законом больших чисел для последовательности V_n. Статья 1983 года [3] является одной из первых работ по этой тематике, в ней рассматривается приведенная выше схема построения последовательности V_n. Автор называет эту последовательность суммой случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании (то есть предполагается, что $\mathbf{E}X_i = 0$). В этой работе в теореме 2.2 получен закон больших чисел для последовательности V_n, в предположении, что последовательности $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ являются последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными вторыми моментами.

В современной англоязычной литературе последовательность V_n называют Random Walks in Random Scenery (RWRS), что принято переводить на русский язык как случайное блуждание в случайном пейзаже. Именно таким термином пользуется автор статьи 2007 года [4]. В теореме 2 этой работы получен усиленный закон больших чисел для последовательности V_n в случае, когда $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — последовательность центрированных одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathbf{E}|X_i|^{\frac{5}{2}} < \infty$, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом.

В недавней работе 2026 года [5] в теореме 4 получен усиленный закон больших чисел для последовательности V_n, но уже при условии, что Y_i — асимптотически независимые случайные величины.

Основным результатом данной работы является закон больших чисел, который содержится в теореме 4 раздела Результаты и обсуждение. Отличительной особенностью этого результата от работ приведенных выше является выполнение следующих условий:

1. В случае независимых центрированных случайных величин $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ не требуется, чтобы они имели одинаковое распределение. Также рассмотрен случай, когда $\mathbf{E}X_i \neq 0$, в этом случае снова не требуется, чтобы они имели одинаковое распределение и, кроме того, условие независимости ослаблено до условия некоррелированности.

2. Условие одинаковой распределенности случайных величин $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ослаблено до условия, что эти случайные величины имеют одинаковое математическое ожидание; условие независимости случайных величин $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ослаблено до условия некоррелированности.

Материалы и методы

В работе получен закон больших чисел для случайного блуждания в случайном пейзаже. Методами исследований являются классические методы теории вероятностей: различные вероятностные неравенства (Берри-Эссена, Гельдера, Ляпунова), а также предельные теоремы (центральная предельная теорема, закон больших чисел).

Результаты и обсуждение

Обозначим количество попаданий случайного блуждания S_k, $1 \le k \le n$, в фиксированную точку $i \in \mathbb{Z}$ следующим образом: $N_n(i) := \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{I}(S_k = i),\ i \in \mathbb{Z}$, здесь и далее $\mathbf{I}(\cdot)$ — индикатор.

Прежде чем формулировать и доказывать основной результат, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1 *Пусть $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых целочисленных случайных величин таких, что $\mathbf{E}X_i = 0$, для всех $i \in \mathbb{N}$, $0 < \inf\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{E}X_i^2$ и для некоторого $\delta \in (0,1]$ $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta} < \infty$. Тогда найдется константа $C > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}N_n^2(i) \le Cn^{2-\frac{\delta}{2}}.$$

Доказательство. Используя условия текущей леммы и теорему 6 [4, гл. 5, §3] (неравенство типа Берри-Эссена), для любых натуральных $r > l$ и некоторой константы A получаем

$$\mathbf{P}(S_r - S_l = 0) = \mathbf{P}\left(\frac{S_r - S_l}{\sqrt{\mathbf{D}(S_l - S_r)}} = 0\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{S_r - S_l}{\sqrt{\mathbf{D}(S_l - S_r)}} \le 0\right) - \mathbf{P}\left(\frac{S_r - S_l}{\sqrt{\mathbf{D}(S_l - S_r)}} < 0\right)$$

$$\le \left|\mathbf{P}\left(\frac{S_r - S_l}{\sqrt{\mathbf{D}(S_l - S_r)}} \le 0\right) - \Phi(0)\right| + \left|\Phi(0) - \mathbf{P}\left(\frac{S_r - S_l}{\sqrt{\mathbf{D}(S_l - S_r)}} < 0\right)\right|$$

$$\le 2\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Phi(x) - \mathbf{P}\left(\frac{S_r - S_l}{\sqrt{\mathbf{D}(S_l - S_r)}} < x\right)\right|$$

$$\le \frac{2A\sum\limits_{i=l+1}^{r} \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}}{(\mathbf{D}(S_l - S_r))^{1+\frac{\delta}{2}}} \le \frac{2A\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}}{(r-l)^{\frac{\delta}{2}} \inf\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{E}X_i^2}) =: \frac{K}{(r-l)^{\frac{\delta}{2}}},$$

где $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция стандартного нормального распределения.

Используя полученную оценку, получаем

$$\mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}} N_n^2(i) = \mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{r=1}^{n} \mathbf{I}(S_r = i)\right)^2$$

$$= \mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \mathbf{I}(S_r = i)\mathbf{I}(S_l = i) = \mathbf{E}\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \mathbf{I}(S_r = S_l)$$

$$= n + 2\mathbf{E}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n} \mathbf{I}(S_r = S_l) = n + 2\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n} \mathbf{P}(S_r - S_l = 0)$$

$$\le n + K\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n}\frac{1}{(r-l)^{\frac{\delta}{2}}} \le n + K\sum_{l=1}^{n-1}\left(1+\frac{2(n-l)^{1-\frac{\delta}{2}}}{2-\delta}\right)$$

$$\le n\,(1+K) + 2Kn^{2-\frac{\delta}{2}} \le (1+2K)\,n^{2-\frac{\delta}{2}} =: Cn^{2-\frac{\delta}{2}}.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2 *Пусть* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *— последовательность некоррелированных целочисленных случайных величин таких, что*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X_i^2 < \infty$$

и выполнено одно из условий

$$\inf_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X_i > 0 \quad \text{или} \quad \sup_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X_i < 0.$$

Тогда найдется константа $\widetilde{C} > 0$ *такая, что для всех целых* $n \ge 2$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathbf{E}N_n^2(i) \le \widetilde{C}n\ln n.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\inf_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X_i > 0$. Обозначим

$$a := \inf_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X_i, \quad \sigma_{\max}^2 := \sup_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X_i^2.$$

Применяя неравенство Чебышева и тот факт, что слагаемые не коррелированы, для любых натуральных $r > l$ будем иметь

$$\mathbf{P}(S_r - S_l = 0) \le \mathbf{P}\left(S_r - S_l \le \frac{a(r-l)}{2}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left((S_r - S_l) - \mathbf{E}(S_r - S_l) \le \frac{a(r-l)}{2} - \mathbf{E}(S_r - S_l)\right)$$

$$= \mathbf{P}\left((S_r - S_l) - \mathbf{E}(S_r - S_l) \le -\frac{a(r-l)}{2}\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\mathbf{E}(S_r - S_l) - (S_r - S_l) \ge \frac{a(r-l)}{2}\right)$$

$$\le \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(S_r - S_l) - (S_r - S_l)| \ge \frac{a(r-l)}{2}\right) \le \frac{4\mathbf{D}(S_r - S_l)}{a^2(r-l)^2} \le \frac{4\sigma_{\max}^2}{a^2(r-l)}.$$

Используя полученную оценку, для $n \ge 2$ получаем

$$\mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}}N_n^2(i) = \mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{r=1}^{n}\mathbf{I}(S_r = i)\right)^2$$

$$= \mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{I}(S_r = i)\mathbf{I}(S_l = i) = \mathbf{E}\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{I}(S_r = S_l)$$

$$= n + 2\mathbf{E}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n}\mathbf{I}(S_r = S_l) = n + 2\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n}\mathbf{P}(S_r - S_l = 0)$$

$$\le n + \frac{8\sigma_{\max}^2}{a^2}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n}\frac{1}{r-l} \le n + \frac{8\sigma_{\max}^2}{a^2}\sum_{l=1}^{n-1}(1+\ln(n-l))$$

$$\le n\left(1+\frac{8\sigma_{\max}^2}{a^2}\right) + \frac{8\sigma_{\max}^2}{a^2} n\ln n \le \left(1+\frac{16\sigma_{\max}^2}{a^2}\right)\frac{n\ln n}{\ln 2} =: \widetilde{C} n\ln n.$$

Случай, когда $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{E}X_i < 0$, рассматривается аналогично. □

Лемма 3 *Пусть выполнены условия леммы 1 или леммы 2, тогда найдется константа* $\widehat{C} > 0$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|S_n| > \widehat{C}n) = 0.$$

Доказательство. Покажем, что из условий каждой из лемм 1, 2 следует, что

$$b := \sup_{i\in\mathbb{N}}\max\left(\mathbf{E}|X_i|, \mathbf{E}X_i^2\right) < \infty.$$

Рассмотрим сначала случай, когда выполнены условия леммы 2. Используя условие

$$\sup_i \mathbf{E}X_i^2 < \infty,$$

и неравенство Коши – Буняковского (см., например, [5, теорема 7.1]), получаем

$$\sup_i \mathbf{E}|X_i| \le \sup_i \sqrt{\mathbf{E}X_i^2} = \sqrt{\sup_i \mathbf{E}X_i^2} < \infty.$$

Таким образом, и $\mathbf{E}|X_i|$, и $\mathbf{E}X_i^2$ равномерно ограничены, а значит, b конечна.

В условиях леммы 1 предполагается, что для некоторого $\delta \in (0,1]$ выполнено неравенство

$$\sup_i \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta} < \infty.$$

Применяя неравенство Ляпунова, получаем

$$\mathbf{E}|X_i| \le \left(\mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}\right)^{1/(2+\delta)}, \quad \mathbf{E}X_i^2 \le \left(\mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)}.$$

Следовательно,

$$\sup_i \mathbf{E}|X_i| \le \left(\sup_i \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}\right)^{1/(2+\delta)} < \infty,$$

$$\sup_i \mathbf{E}X_i^2 \le \left(\sup_i \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)} < \infty.$$

Итак, в обоих случаях константа b конечна, поэтому, выбирая константу $\widehat{C} = 2b$ и применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbf{P}(|S_n| > \widehat{C}n) \le \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}X_i)\right| > \widehat{C}n - \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}|X_i|\right)$$

$$\le \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}X_i)\right| > \widehat{C}n - bn\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}X_i) > bn\right) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_i}{b^2n^2} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{E}X_i^2}{b^2n^2} \le \frac{bn}{b^2n^2} = \frac{1}{bn}.$$

Таким образом,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|S_n| > 2bn) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{bn} = 0.$$

Лемма 3 доказана. □

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия леммы 1 или леммы 2 и* $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *— последовательность некоррелированных одинаково распределенных случайных величин, которые не зависят от последовательности* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и удовлетворяют условиям:*

1) $\mathbf{E}Y_i = a$, *для всех* $i \in \mathbb{Z}$, *где* a *— константа;*

2) $d^2_{\max} := \sup\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}Y_i^2 < \infty$.

Тогда

$$\frac{V_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} a,$$

где символ $\xrightarrow{p}$ *означает сходимость по вероятности.*

Доказательство. Легко видеть, что по определению

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} N_n(i) = n = \mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}} N_n(i).$$

Поэтому, в силу независимости случайных последовательностей $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, условия 1) и того факта, что сумма $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} Y_i N_n(i)$ всегда содержит не более чем n ненулевых слагаемых, справедливо равенство

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} Y_{S_i} - n\mathbf{E}Y_1 &= \sum_{i=1}^{n} Y_{S_i} - \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} Y_{S_i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} Y_i N_n(i) - \mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}} Y_i N_n(i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} Y_i N_n(i) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}Y_i \mathbf{E}N_n(i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} Y_i N_n(i) - a\mathbf{E}\sum_{i\in\mathbb{Z}} N_n(i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} Y_i N_n(i) - a\sum_{i\in\mathbb{Z}} N_n(i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (Y_i - a) N_n(i). \end{aligned} \tag{1}$$

Используя формулу (1), получаем для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{S_i} - a)\right| > \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(Y_i - a)N_n(i)\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(Y_i - a)N_n(i)\right| > \varepsilon, |S_n| \leq \widehat{C}n\right) + \mathbf{P}(|S_n| > \widehat{C}n) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=-\widehat{C}n}^{\widehat{C}n}(Y_i - a)N_n(i)\right| > \varepsilon\right) + \mathbf{P}(|S_n| > \widehat{C}n) =: \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\widehat{C}$ — константа из леммы 3.

Применяя неравенство Чебышева, условие 2), тот факт, что случайные величины Y_i, $i \in \mathbb{Z}$, не коррелированы, одинаково распределены и не зависят от последовательности $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, а также леммы 1, 2, получаем для $n \geq 2$

$$\mathbf{P}_1 \leq \frac{\sum\limits_{i=-\widehat{C}n}^{\widehat{C}n} \mathbf{D}Y_i \mathbf{E}N_n^2(i)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{d^2_{\max}\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}N_n^2(i)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{d^2_{\max}\max\left(Cn^{2-\frac{\delta}{2}}, \widetilde{C}n\ln n\right)}{\varepsilon^2 n^2}, \tag{3}$$

где C, δ — константы из леммы 1, $\widetilde{C}$ — константа из леммы 2.

Из неравенств (2), (3) и леммы 3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{S_i} - a)\right| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{d_{\max}^2 \max\left(Cn^{2-\frac{\delta}{2}}, \widetilde{C} n \ln n\right)}{\varepsilon^2 n^2} + \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|S_n| > \widehat{C} n) = 0.$$

Теорема 4 полностью доказана. □

Заключение

Таким образом, мы получили закон больших чисел для случайного блуждания в случайном пейзаже с некоррелированными слагаемыми при различных условиях на слагаемые случайного блуждания, на состояниях которого строится случайное блуждание в случайном пейзаже.

Информация о финансировании

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2026-0030

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин А.Н., Предельная теорема для сумм независимых случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании, Докл. АН СССР, 246(4), 786-788, (1979).
2. Kesten H., Spitzer F., A limit theorem related to a new class of self-similar processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verwandte Geb., 50, 5–25 (1979).
3. Бородин А.Н., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании, Теория вероятностей и ее применения, 28(1), 98-114, (1983).
4. Wang W.S., Strong laws of large numbers for random walks in random sceneries, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 23(3), 495-500, (2007).
5. Sharipov S., Strong law of large numbers for random walks in weakly dependent random scenery, Statistics and Probability Letters, 227, Article 110521, (2026).
6. Петров В.В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, Москва, Наука, 1987.
7. Боровков А., Теория вероятностей: учеб. пособие для вузов, Москва, URSS, 2009.

REFERENCES

1. Borodin A.N., A limit theorem for sums of independent random variables defined on a recurrent random walk, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 246(4), 786–788, (1979).
2. Kesten H., Spitzer F., A limit theorem related to a new class of self-similar processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verwandte Geb., 50, 5–25 (1979).
3. Borodin A.N., Limit theorems for sums of independent random variables defined on a recurrent random walk; Theory Probab. Appl., 28(1), 105–121, (1984).
4. Wang W.S., Strong laws of large numbers for random walks in random sceneries, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 23(3), 495–500, (2007).
5. Sharipov S., Strong law of large numbers for random walks in weakly dependent random scenery, Statistics and Probability Letters, 227, Article 110521, (2026).
6. Petrov V.V., Limit theorems for sums of independent random variables, Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).

7. Borovkov A., Probability Theory: A Textbook for Universities. Moscow, URSS, 2009. (In Russian).

[1]Григоренко О.В.,
ф.-м.ғ.к., доцент
ORCID ID: 0000-0001-8957-8746
e-mail: ogrigorenko2311@mail.ru

[2]Кабаева А.М.,
студент,
e-mail: kabaeva-alyona@mail.ru

[3]Логачев А.В.,
ф.-м.ғ.к., доцент
ORCID ID: 0000-0002-0605-8831
e-mail: avlogachov@mail.ru

[1,4]Логачева О.М.,
ф.-м.ғ.к., доцент
ORCID ID: 0000-0003-4994-5606
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

[1*]Шевчук Е.В.,
т.ғ.к., доцент
ORCID ID: 0000-0002-1206-3960
e-mail: evshevch@mail.ru

[1]Сібір мемлекеттік геожүйелер және технологиялар университеті, Новосибирск қ., Ресей
[2]Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей
[3]С.Л. Соболев атындағы математика институты, Новосибирск қ., Ресей
[4]ABC федералдық университеті, Санту-Андре қ., Бразилия

КОРРЕЛЯЦИЯЛАНБАҒАН ТЕРМИНДЕРІ БАР КЕЗДЕЙСОҚ ОРТАДАҒЫ КЕЗДЕЙСОҚ ЖҮРІС ҮШІН ҮЛКЕН САНДАР ЗАҢЫ

Аңдатпа

Мақалада кездейсоқ ортадағы (ландшафттағы) кездейсоқ жүріс үшін үлкен сандар заңы дәлелденеді. Мұндай тізбектердің шектік мінез-құлқы өткен ғасырдың 80-ші жылдарынан бастап қарқынды зерттеліп келеді. Алынған нәтижелер көптеген жағдайларда белгісіз параметрлердің статистикалық бағалауларының дәйектілігін дәлелдеуге мүмкіндік береді. Бұрын алынған нәтижелерден айырмашылығы, бұл жұмыста кездейсоқ ортадағы кездейсоқ жүрістің қосылғыштарының әртүрлі үлестірімдерге ие болуына және олардың центрленбеген болуына жол беріледі. Сонымен қатар, қосылғыштардың бірдей үлестірілген әрі тәуелсіз болуы талап етілмейді. Олардың бірдей математикалық күтімге ие болуы және өзара корреляцияланбауы жеткілікті. Зерттеу барысында ықтималдықтар теориясының классикалық әдістері қолданылды: әртүрлі ықтималдық теңсіздіктері (Берри–Эссен, Гёльдер, Ляпунов), сондай-ақ шектік теоремалар (орталық шектік теорема және үлкен сандар заңы). Қарастырылып отырған модель бөлшектің кездейсоқ ортадағы қозғалысын сипаттайтын физикалық интерпретацияға ие.

Түйін сөздер: үлкен сандар заңы, кездейсоқ жүріс, кездейсоқ ортадағы кездейсоқ жүріс.

[1] Grigorenko O.V.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0001-8957-8746,
e-mail: ogrigorenko2311@mail.ru

[2] Kabaeva A.M.,
student,
e-mail: kabaeva-alyona@mail.ru

[3] Logachov A.V.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
ORCID ID: 0000-0002-0605-8831,
e-mail: avlogachov@mail.ru

[1,4] Logachova O.M.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
ORCID ID: 0000-0003-4994-5606,
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

[1] *Shevchuk E.V.,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0002-1206-3960,
*e-mail: evshevch@mail.ru

[1] Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
[3] Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
[4] Federal University of ABC, Santo André, Brazil

THE LAW OF LARGE NUMBERS FOR RANDOM WALKS IN RANDOM SCENERY WITH UNCORRELATED TERMS

Abstract

In this paper, we prove the law of large numbers for a random walk in random scenery. The limiting behavior of such sequences has been intensively studied since the 1980s. Such results, in particular, allow proving the consistency of statistical estimates of unknown parameters in many situations. Unlike previous results, we allow the terms of the random walk, on whose states the random walk in a random scenery is built, to have different distributions and not be centered. We also do not require that the terms of the random walk in a random scenery be identically distributed and independent; it is only required that they have the same mean and be uncorrelated. The research methods are classical methods of probability theory: various probabilistic inequalities (Berry–Esseen, Hölder's, Lyapunov's), as well as limit theorems (the central limit theorem, the law of large numbers). It should be noted that the model under consideration has a physical interpretation associated with the motion of a particle in a random environment.

Key words: law of large numbers, random walk, random walk in random scenery.

Received: May 13, 2026; revised: May 21, 2026; accepted: May 30, 2026.