ӘОЖ 517.9
ҒТАХР 27.41.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-2-61-74

[1,3]*Молыбайқызы А.,
ғылыми қызметкер, аға оқытушы, ORCID ID: 0009-0008-2452-5932,
e-mail: altynai_bm@mail.ru
[1,2]Кабдрахова С.С.,
ф.-м.ғ.к., бас ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0003-0247-5985,
e-mail: Symbat2909.sks@gmail.com
[1]Искакова Н.Б.,
ф.-м.ғ.к., бас ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,
e-mail: narkesh77@gmail.com
[1,3]Минглибаева Б.Б.,
ф.-м.ғ.к., ғылыми қызметкер, аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: minglibayeva.bayan@gmail.com

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[2]Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[3]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

БӨЛІКТІ ТҰРАҚТЫ АРГУМЕНТТІ ИМПУЛЬСТІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Мақалада бөлікті тұрақты аргументі бар импульсті гиперболалық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады. Бөлікті тұрақты аргументі бар импульсті гиперболалық теңдеулер нейрондық желілердегі, динамикалық жүйелердегі, гибридтік жүйелердегі және т.б. физикалық процестерді сипаттаудың математикалық моделі ретінде пайда болады. Осындай теңдеулер үшін шеттік есептердің бар болуы және шешімдерін құру сұрақтары қазіргі таңда маңызды мәселелердің бірі болып қала береді. Бұл есептің шешілімділік шарттарын алу үшін Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылады және жұмыста шешімнің жуық мәнін табуға арналған итерациялық алгоритм жасалды. Итерациялық процестің әрбір қадамы үшін функционалдық параметрлер арасындағы байланысты сипаттайтын Q(x) матрицасы арқылы өрнектелетін интегралдық формулалар алынды. Егер осы матрицаның кері бар болса, онда есептің параметрлік және бастапқы түрлері үшін шешімнің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Ұсынылған әдіс есептің тек теориялық шешілуін дәлелдеумен шектелмей, шешімді табудың нақты құрылымдық процедурасын ұсынады. Бұл әрі қарайғы сандық жүзеге асырулар мен шешімдердің орнықтылығын талдауда маңызды рөл атқарады. Сонымен қатар, ұсынылған тәсілді бөлікті тұрақты аргументі бар басқа типтегі есептерге, соның ішінде импульстік шарттары бар жүйелерге, жады әсері бар нейрондық желілерге және бейсызық гибридтік модельдерге қолдануға болады.

Түйін сөздер: импульсті гиперболалық теңдеу, бөлікті тұрақты аргумент, шеттік есеп, алгоритм.

Кіріспе

Соңғы жылдары аргументі үзілісті дифференциалдық теңдеулер саласындағы зерттеулер күрделі гибридтік процестерді сипаттау қажеттілігімен тығыз байланысты дамып келеді. Мұндай процестердің қатарына импульстік жүйелер, жады әсері бар желілер және бөлікті үзіліссіз динамикалық модельдер жатады [1]–[2]. Солардың ішінде бөлікті тұрақты аргументі және дискретті жады әсері бар гиперболалық теңдеулерді зерттеу ерекше маңызға ие, себебі олар классикалық гиперболалық теңдеулер мен аргументі кешеуілдеген немесе ілгеріленген функционалдық-дифференциалдық жүйелердің қасиеттерін біріктіреді [1]. Осындай модельдер нейрондық желілер теориясында, секірмелі әсерлері бар механикалық жүйелерде, автоматика мен басқару теориясында және күрделі гибридтік процестерді математикалық модельдеуде жиі кездеседі [3]–[10].

Атап айтсақ [7]–[9], және басқа ғалымдардың еңбектерінде бөлікті тұрақты аргументі бар теңдеулердің жалпы теориясы жасалып, интегралдық көпбейнеліктер құру әдістері, Грин функциялары, тұрақтылық және периодтылық шарттары қарастырылған. Кейінгі зерттеулерде [3]–[5] бұл теория дискретті жады әсері бар импульстік гиперболалық теңдеулерге дейін кеңейтілді, мұнда жүйенің динамикасы тек үзіліссіз емес, сонымен бірге дискретті уақыт сәттерінде әсер ететін импульстар арқылы сипатталады.

Сондай-ақ, зерттелген есептердің шешімдерінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар орнатылғанына қарамастан, импульстік гиперболалық теңдеулерге арналған көптеген шеттік есептер конструктивті тұрғыдан толық қарастырылмаған. Әсіресе, бөлікті тұрақты аргументі мен дискретті жады әсері бар есептер үшін бірмәнді шешімділік шарттары, жуық шешімдерді табудың алгоритмдері мен жинақтылығы мәселелері ұзақ уақыт бойы белгісіз болып келді.

Осы мақалада бөлікті тұрақты аргументі бар импульстік гиперболалық теңдеу үшін қойылған шеттік есеп қарастырылады. Есептің шешілу шарттарын анықтау және шешімін құру мақсатында Джумабаевтың параметрлеу әдісі [4] қолданылады. Бұл әдіс шеттік есептерді шешудің тиімді құралы ретінде кеңінен танылған. Осы тәсіл негізінде жаңа функционалдық параметрлер енгізіліп, бастапқы есепті параметрлері бар Коши есептерінің әулетіне түрлендіретін эквивалентті дифференциалдық және интегралдық теңдеулер жүйесі құрылады.

Осылайша, мақалада алынған нәтижелер дискретті жады және импульстік әсерлері бар теңдеулер теориясын кеңейтіп, бөлікті тұрақты аргументі бар гиперболалық жүйелердің шеттік есептерін шешудің жаңа конструктивті әдісін ұсынады. Алынған нәтижелер [4], [6, 7], [8, 9] еңбектеріндегі тәсілдерді жалпылайды және дамытады. Болашақ зерттеулердің перспективалы бағыттарына әдісті кеңістіктік-уақыттық (көпөлшемді) есептерге, стохастикалық және сызықтық емес гиперболалық теңдеулерге бейімдеу, сондай-ақ мұндай жүйелер үшін тиімді сандық схемаларды жасау жатады.

Материалдар мен әдістер

Есептің қойылымы және шешу әдісі.

$\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$ облысында бөлікті тұрақты аргументі бар импульсті гиперболалық теңдеу үшін қойылған шеттік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + $$
$$+B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x) + f(t,x), \qquad t \neq \theta_j,\ j = \overline{1,N}, \tag{1}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + $$
$$+S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t} + S_0(x)u(T,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\theta_p+0} u(t,x) - \lim_{t\to\theta_p-0} u(t,x) = \varphi_p(x), \quad x \in [0,\omega],\ p = \overline{1,N-1}, \tag{3}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Мұндағы u(t,x) белгісіз функция, A(t,x), B(t,x), C(t,x), $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$ функциялары және f (t,x) функциясы Ω облысында үзіліссіз;

$$\gamma(t) = \zeta_s, \quad \text{егер} \quad t \in [\theta_{s-1},\theta_s), \quad s = \overline{1,N}.$$

$$\theta_{s-1} < \zeta_s < \theta_s, \quad s = 1,2\ldots,N; \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-1} < \theta_N = T;$$

$P_2(x),\ P_1(x), P_0(x), S_2(x), S_1(x), S_0(x)$ үзіліссіз, $\varphi_p(x)$, $\varphi_0(x)$ функциялары [0,ω] кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданады, p = $\overline{1, N-1}$; ψ(t) функциясы [0,T] кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданады.

$\Delta_N(\omega)$ деп Ω облысын $t=\theta_s$ түзулері бойынша бөлуді белгілейміз. $\Omega_s = [\theta_{s-1}, \theta_s) \times [0,\omega],\ s=\overline{1,N},\ \Omega = \cup_{s=1}^{N} \Omega_s$.

$PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right)$арқылы Ω облысында бөлікті үзіліссіз, $t=\theta_j,\ \ j=\overline{1,N-1}$ түзулерінде үзілістері болуы мүмкін u(t,x) функцияларынан тұратын кеңістігін белгілейік және нормасы келесідей анықталсын:

$$\|u\|_1 = \max_{s=\overline{1,N}} \sup_{(t,x)\in\Omega_s} |u(t,x)|.$$

$u(t,x) \in PC(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R})$ функциясы (1)–(4) есебінің шешімі болады, егер төмендегі шарттар орындалса:

I) u(t,x) функциясының дербес туындылары бар болады:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right),\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right);$$

II) әрбір $(t,x) \in \Omega$ нүктесінде $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ аралас дербес туындысы бар, тек (θ_{s-1},x), s = $\overline{1,N}$, $x \in [0,\omega]$ нүктелерін қоспағанда, бірақ бұл нүктелерде бір жақты аралас дербес туындылары бар болады;

III) (1) гиперболалық теңдеуі әрбір $(\theta_{s-1},\theta_s) \times [0,\omega],\ s=\overline{1,N}$ ішкі облысында u(t,x) үшін орындалады, сондай-ақ $(\theta_{s-1},x),\ s=\overline{1,N},\ \ x\in[0,\omega]$ **нүктелеріндегі** u(t,x) функциясының оң жақты екінші ретті аралас дербес туындысы үшін де орынды;

(IV) u(t,x) үшін (2) шеттік шарт және (4) бастапқы шарт, сәйкес, t=0, t=T және x=0 орындалады;

(V) u(t,x) функциясы үшін (3) импульстік әсер шарттары $t=\theta_p,\ \ p=\overline{1,N-1},\ \ x\in[0,\omega]$ орындалады.

Жаңа функциялар енгізу және Джумабаевтың параметрлеу әдісінің сұлбасы.

Алдымен, $v(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x},\ \ w(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ жаңа функцияларын енгіземіз. (1)–(4) есебі бөлікті тұрақты аргументі бар импульсті дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есепке ауысады:

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = A(t,x)v(t,x) + A_0(t,x)v(\gamma(t),x) + B(t,x)w(t,x) + B_0(t,x)w(\gamma(t),x) + C(t,x)u(t,x) + C_0(t,x)u(\gamma(t),x) + f(t,x), t \neq \theta_j, j=\overline{1,N-1}, \tag{5}$$

$$P_2(x)v(0,x) + P_1(x)w(0,x) + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)v(T,x) + S_1(x)w(T,x) + S_0(x)u(T,x) = \varphi_0(x), \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\theta_p+0} v(t,x) - \lim_{t\to\theta_p-0} v(t,x) = \dot{\varphi}_p(x),\ x\in[0,\omega],\ p=\overline{1,N-1}, \tag{7}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int_0^x v(t,\xi)\,d\xi,$$

$$w(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi,\ (t,x)\in\Omega_s,\ \ s=\overline{1,N}. \tag{8}$$

{v(t,x),u(t,x),w(t,x)} функцияларының үштігі (5)–(8) бөлікті тұрақты аргументі бар импульсті дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін есептің шешімі болады, егер:

I) $v(t,x) \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right)$ функциясының дербес туындысы бар және

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right),\ u(t,x) \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right),\ w(t,x) \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right);$$

II) (5) дифференциалдық теңдеулер әулеті әрбір $[\theta_{s-1},\theta_s)\times[0,\omega]$, $s=\overline{1,N}$, ішкі облысында v(t,x), u(t,x) және w(t,x) функциялары үшін орындалады және (θ_{s-1},x), $s=\overline{1,N}, x\in[0,\omega]$ нүктелеріндегі $v(t,x)$ функциясының t бойынша оң жақты дербес туындысы үшін де орынды;

III) (6) шеттік шарты v(t,x) функциясының әрбір t=0, t=T түзулерінде орындалсын;

(IV) u(t,x) және w(t,x) функциялары v(t,x) және $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функцияларымен (8) интегралдық теңдеулері арқылы байланысқан болса.

Біз $v_s(t,x)$ деп $v(t,x)$ функциясының Ω_s-ішкі облыстағы тарылуын белгілейміз, яғни: $v_s(t,x)=v(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_s$, $s=\overline{1,N}$.

$C(\Omega,\Delta_N(\omega),\mathbb{R}^N)$ кеңістігі деп: $v([t],x)=(v_1(t,x),v_2(t,x),\dots,v_N(t,x))'$ функцияларынан тұратын, $v_s:\Omega_s\longrightarrow\mathbb{R}$ және $\lim\limits_{t\to\theta_s-0}v_s(t,x)$ **сол жақты шегі бар,** нормасы төмендегідей анықталған:

$$\|v[\cdot]\|_2=\max_{S=\overline{1,N}}\sup_{(t,x)\in\Omega_s}\|v_s(t,x)\|$$

кеңістікті айтамыз.

$v([t],x)=(v_1(t,x),v_2(t,x),\dots,v_N(t,x))'$ функциясы $C(\Omega,\Delta_N(\omega),\mathbb{R}^N)$ кеңістігінде жатады, және оның элементтері $v_s(t,x)$, $s=1,N$, төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}=A(t,x)v_s(t,x)+A_0(t,x)v_s(\zeta_s,x)+B(t,x)w(t,x)+B_0(t,x)w(\zeta_s,x)+$$
$$C(t,x)u(t,x)+C_0(t,x)u(\zeta_s,x)+f(t,x),\ (t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N}\ , \tag{9}$$

және келесі шарттар орындалады:

$$P_2(x)v_1(0,x)+P_1(x)w(0,x)+P_0(x)u(0,x)+S_2(x)\lim_{t\to T-0}v_N(t,x)+S_0(x)\lim_{t\to T-0}u(t,x)=\varphi_0(x),\quad x\in[0,\omega], \tag{10}$$

$$v_{p+1}(\theta_p,x)-\lim_{t\to\theta_p-0}v_p(t,x)=\dot{\varphi_p}(x),\ x\in[0,\omega],\ p=\overline{1,N-1}\,, \tag{11}$$

$$u(t,x)=\psi(t)+\int_0^x v_s(t,\xi)d\xi,$$
$$w(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x\frac{\partial v_s(t,\xi)}{\partial t}d\xi,\ (t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N}, \tag{12}$$

(9) теңдеуде біз мынаны ескердік $\gamma(t)=\zeta_s,\ t\in[\theta_{s-1},\theta_s),\ s=\overline{1,N}$.

Біз келесі түрде функционалдық параметрлерді енгіземіз: $\mu_s(x)=v_s(\zeta_s,x)$, $s=\overline{1,N}$ және $x\in[0,\omega]$.

Келесі ауыстыруды $v_s(t,x)=\tilde{v}_s(t,x)+\mu_s(x)$, $(t,x)\in\Omega_s$, $s=\overline{1,N}$ жасай отырып, төмендегідей түрдегі параметрлі дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін есеп аламыз:

$$\frac{\partial\tilde{v}_s}{\partial t}=A(t,x)\big(\tilde{v}_s(t,x)+\mu_s(x)\big)+A_0(t,x)\mu_s(x)+B(t,x)w(t,x)+B_0(t,x)w(\zeta_s,x)+$$
$$C(t,x)u(t,x)+C_0(t,x)u(\zeta_s,x)+f(t,x),\ (t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N}, \tag{13}$$

бастапқы шарт

$$\tilde{v}_s(\zeta_s,x)=0,\ s=\overline{1,N}\ \text{және}\ x\in[0,\omega] \tag{14}$$

шеттік шарт

$$P_2(x)\big(\tilde{v}_1(0,x)+\mu_1(x)\big)+P_1(x)w(0,x)+P_0(x)u(0,x)+S_2(x)\lim_{t\to T-0}[\tilde{v}_N(t,x)+\mu_N(x)]+S_1(x)w(T,x)+S_0(x)u(T,x)=\varphi_0(x),\ x\in[0,\omega], \tag{15}$$

импульс шарты

$$\tilde{v}_{p+1}(\theta_p,x)+\mu_{p+1}(x)-\lim_{t\to\theta_p-0}\tilde{v}_p(t,x)-\mu_p(x)=\dot{\varphi_p}(x),$$
$$x\in[0,\omega],\ p=\overline{1,N-1}, \tag{16}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int_0^x [\tilde{v}_s(t,\xi) + \mu_s(\xi)]d\xi,$$

$$w(t,x) = \psi(t) + \int_0^x \frac{\partial \tilde{v}_s(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \quad (t,x) \in \Omega_s, \quad s = \overline{1,N}, \tag{17}$$

(13)–(17) параметрлері бар есептің шешімі ретінде $\{v([t],x), \mu(x), u(t,x), w(t,x)\}$, төрттігін қарастырамыз, мұнда элементтер $v_s(t,x) \in C(\Omega, \Delta_N(\omega), \mathbb{R})$ функцияларының уақыт бойынша туындысы $\frac{\partial v_s(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \Delta_N(\omega), \mathbb{R})$ бар; функционалдық параметрлер $\mu_s(x) \in C([0,\omega], \mathbb{R})$, $s = \overline{1,N}$; ал функциялар $u(t,x), w(t,x) \in C(\Omega, \Delta_N(\omega), \mathbb{R})$ болып табылады. Сонымен бірге, бұл элементтер барлық $(t,x) \in \Omega_s$, $s = \overline{1,N}$ үшін (13) дифференциалдық теңдеулердің жүйесін, (14) бастапқы шарттарын, (15) шеттік шартты және (16) импульстік әсерлер шарттарын $[0,\omega]$ аралығында қанағаттандырады. $u(t,x), w(t,x)$ функциялары барлық $(t,x) \in \Omega_s$, $s = \overline{1,N}$ үшін $v_s(t,x)$ және оның уақыт бойынша туындысы $\frac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}$ арқылы (17) интегралдық теңдеулер $\mu_s(x), u(t,x), w(t,x)$ арқылы байланысқан болса (13)–(14) есебі дифференциалдық теңдеулерге арналған Коши есептерінің әулетіне айналады. Бекітілген $\mu_s(x), u(t,x), w(t,x)$ үшін (13)–(14) Коши есептері әулетінің шешімі жалғыз және төмендегідей түрге ие:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_s(t,x) = {} & e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} [A(\tau,x) + A_0(\tau,x)]d\tau \mu_s(x) \\
& + e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} [B(\tau,x)w(\tau,x) + C(\tau,x)u(\tau,x)]d\tau \\
& + e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} [B_0(\tau,x)w(\zeta_s,x) + C_0(\tau,x)u(\zeta_s,x)]d\tau \\
& + e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} f(\tau,x)d\tau, \quad (t,x) \in \Omega_s, \quad s = \overline{1,N}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Мұндағы $\alpha_s(t,x) = \int_{\zeta_s}^t A(\tau,x)\,d\tau$, $(t,x) \in \Omega_s$, $s = \overline{1,N}$.

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$D_s(t,x) = e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} [A(\tau,x) + A_0(\tau,x)]d\tau,$$

$$\begin{aligned}
H_s(t,x,\omega,u) = {} & e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} [B(\tau,x)w(\tau,x) + C(\tau,x)u(\tau,x)]d\tau + \\
& + e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} [B_0(\tau,x)w(\zeta_s,x) + C_0(\tau,x)u(\zeta_s,x)]d\tau,
\end{aligned}$$

$$F_s(t,x) = e^{\alpha_s(t,x)} \int_{\zeta_s}^t e^{-\alpha_s(t,x)} f(\tau,x)d\tau, \ (t,x) \in \Omega_s, \ s = \overline{1,N}.$$

Онда (18) өрнегін келесі түрде жазуға болады.

$$\tilde{v}_s(t,x) = D_s(t,x)\mu_s(x) + H_s(t,x,w,u) + F_s(t,x), \ (t,x) \in \Omega_s, \ s = \overline{1,N}. \tag{19}$$

(19) теңдеуден біз келесіні табамыз:

$$\tilde{v}_1(0,x), \quad \lim_{t\to T-0} \tilde{v}_N(t,x), \quad \tilde{v}_{p+1}(\theta_p,x), \quad \lim_{t\to \theta_p-0} \tilde{v}_p(t,x), \quad p = \overline{1,N-1}.$$

Табылған өрнектерді (15) және (16) қатынастарына қойып, келесі өрнектерді аламыз:

$$\begin{aligned}
& P_2(x)[1 + D_1(0,x)]\mu_1(x) + S_2(x)[1 + D_N(T,x)]\mu_N(x) = -P_2(x)[F_1(0,x) + H_1(0,x,w,u)] - \\
& S_2(x) \lim_{t\to T-0} [H_N(t,x,w,u) + F_N(t,x)] - P_1(x)\omega(0,x) - P_0(x)u(0,x) - S_1(x)\omega(T,x) - \\
& S_0(x)u(T,x) + \varphi_0(x).
\end{aligned} \tag{20}$$

$$[1+D_{p+1}(\theta_p,x)]\mu_{p+1}(x)-[D_p(\theta_p,x)+1]\mu_p(x)=\dot{\varphi}_p(x)+F_{p+1}(\theta_p,x)-F_{p+1}(\theta_p,x)+ H_p(\theta_p,x,w,u)-H_{p+1}(\theta_p,x,w,u),\ \ p=\overline{1,N-1}. \tag{21}$$

(20), (21) теңдеулер жүйесінің сол жақ бөлігіндегі $\mu_s(x)$, $s=\overline{1,N}$ үшін коэффициенттерді пайдалана отырып, келесі түрде N×N өлшемді Q(x) матрицасын құрамыз:

$$Q(x)\mu(x)=F_*(x)+H_*(x,w,u), \tag{22}$$

$$Q(x)=\begin{bmatrix} P_2(x)[1+D_1(0,x)] & 0 & 0 & \cdots & 0 & S_2(x)[1+D_N(T,x)] \\ -[1+D_1(\theta_1,x)] & 1+D_2(\theta_1,x) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -[1+D_2(\theta_2,x)] & 1+D_3(\theta_2,x) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -[1+D_{N-1}(\theta_{N-1},x)] & 1+D_N(\theta_{N-1},x) \end{bmatrix}$$

$F_*(x)$ пен $H_*(x,,u)$ векторлары төмендегідей етіп аламыз:

$$F_*(x)=\begin{bmatrix} -P_2(x)F_1(0,x)-S_2F_N(\mathrm{T},x)+\varphi_0(x)\ \ ) \\ -F_2(\theta_1,x)+F_2(\theta_2,x)+\varphi_1(x) \\ -F_3(\theta_2,x)+F_2(\theta_3,x)+\varphi_2(x) \\ \cdots \\ -F_N(\theta_{N-1},x)+F_N(\theta_N,x)+\varphi_{N-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$H_*(x,w,u)== \begin{bmatrix} -P_2(x)H_1(0,x,w,u)-S_2(H_N(t,x,w,u)-P_1(x)w(0,x)-P_0(x)u(0,x)-S_1(x)w(T,x)-S_0(x)u(T,x) \\ H_2(\theta_1,x,w,u)+(H_1(\theta_1,x,w,u) \\ H_3(\theta_2,x,w,u)+(H_2(\theta_2,x,w,u) \\ \cdots \\ H_N(\theta_{N-1},x,w,u)+(H_{N-1}(\theta_{N-1},x,w,u) \end{bmatrix}.$$

Нәтижелер мен талқылау

Параметрлеу әдісінің алгоритмі.

Егер $w(t,x)$ және $u(t,x)$ функциялары барлық $(t,x)\in\Omega_s$, $s=\overline{1,N}$ үшін белгілі болса, онда (22) функционалдық теңдеулер жүйесінен $\mu(x)$ функциясын табамыз, оның компоненттері $\mu_s(x)\in C([0,\omega],\mathbb{R})$, $s=\overline{1,N}$. Содан кейін (19) интегралдық өрнек және (13) дифференциалдық теңдеулер арқылы $\tilde{v}_s(t,x)$ функциясын және оның туындысын $\frac{\partial\tilde{v}_s}{\partial t}$ барлық $(t,x)\in\Omega_s$, $s=\overline{1,N}$ үшін анықтаймыз. Табылған $\tilde{v}_s(t,x)$ функциясын және оның туындысы $\frac{\partial\tilde{v}_s}{\partial t}$, $(t,x)\in\Omega_s$, $s=\overline{1,N}$, және функционалдық параметрлер $\mu(x)$ көмегімен $w(t,x)$ және $u(t,x)$ функцияларын анықтаймыз. Бұл жерде (13)–(17) есептер әулетінің шешімін табу үшін итерациялық әдісті қолданамыз. Біз $\{\widetilde{v^*}([t],x),\mu^*(x),u^*(t,x),w^*(t,x)\}$, төрттігін $\{v^{\widetilde{(k)}}([t],x),\mu^{(k)}(x),u^{(k)}(t,x),w^{(k)}(t,x)\}$ төрттіктер тізбегінің шегі ретінде анықтаймыз.

0-қадам.

Барлық $x\in[0,\omega]$ үшін $(N\times N)$ өлшемді $Q(x)$ матрицасының керісі бар деп ұйғарамыз. (22) жүйесінің оң жағындағы $u(x)=\psi(t)$, $w(t,x)=\dot{\psi}(t)$ деп алып, функционалдық параметрдің бастапқы жуықтауын $\mu^{(0)}(x)=(\mu_1^{(0)}(x),\mu_2^{(0)}(x),\ldots,\mu_N^{(0)}(x))$ функционалдық теңдеулер жүйесінен табылады:

$$Q(x)\mu(x) = F_*(x) + H_*(x,\psi,\psi),$$
$$\mu^{(0)}(x) = [Q(x)]^{-1}F_*(x) + [Q(x)]^{-1}H_*(t,x,\psi,\psi), \qquad x \in [0,\omega].$$

мұндағы компоненттер $\mu_s(x) \in C([0,\omega],R)$, $s=\overline{1,N}$.

(13) дифференциалдық теңдеулердің оң жағын $u(x)=\psi(t)$, $w(t,x)=\dot\psi(t)$, $\mu_s(x)=\mu_s^{(0)}(x)$, $s=\overline{1,N}$ деп алып және (13)-(14) Коши есебі әулетінен $\tilde{v}_s^{(0)}(t,x)$ табамыз.

$$\tilde{v}_s^{(0)}(t,x) = D_s(t,x)\mu_s^{(0)}(x) + H_s(t,x,\psi,\psi) + F_s(t,x).$$

Және оның туындысын төмендегідей анықтаймыз:

$$\frac{\partial\tilde{v}_s^{(0)}(t,x)}{\partial t} = A(t,x)\tilde{v}_s^{(0)}(t,x) + (A(t,x)+A_0(t,x))\mu_s^{(0)}(x) + B(t,x)\psi(t) + B_0(t,x)\psi(\zeta_s) + C(t,x)\psi(t) + C_0(t,x)\psi(\zeta_s) + f(t,x),$$
$$(t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N}.$$

Содан соң (17) интегралдық теңдеуден $u^{(0)}(t,x)$ функцияларды анықтаймыз.

$$u^{(0)}(t,x) = \psi(t) + \int_0^x (\tilde{v}_s^{(0)}(t,\xi) + \mu_s^{(0)}(\xi))d\xi, (t,x)\in\Omega_s, \qquad s=\overline{1,N}.$$

$$w^{(0)}(t,x) = \dot\psi(t) + \int_0^x \frac{\partial\tilde{v}_s^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,\ (t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N},$$

1-қадам. (22) жүйенің оң жағына $u(t,x)=u^{(0)}(t,x)$, $\omega(t,x)=\dot\omega^{(0)}(t,x)$ қойып, $\mu^{(1)}(x)=(\mu_1^{(1)}(x),\mu_2^{(1)}(x),\dots,\mu_N^{(1)}(x))$ функционалдық параметрінің

$$Q(x)\mu(x) = F_*(x) + H_*(x,w^{(0)},u^{(0)}),\ x\in[0,\omega]$$
$$\mu^{(1)}(x) = Q(x)^{-1}(F_*(x)+H_*(x,w^{(0)},u^{(0)})), \quad x\in[0,\omega]$$

теңдеуінен бірінші жуықтауын анықтаймыз. (13) дифференциалдық теңдеулердің оң жағын $u(t,x)=u^{(0)}(t,x)$, $w(t,x)=\dot w^{(0)}(t,x), \mu_s(x)=\mu_s^{(1)}(x)$, $s=\overline{1,N}$ қойып, (13)–(14) Коши есебі әулетінен $\tilde{v}_s^{(1)}(t,x)$ табамыз.

$$\tilde{v}_s^{(1)}(t,x) = D_s(t,x)\mu_s^{(1)}(x) + H_s(t,x,w^{(0)},u^{(0)}) + F_s(t,x).$$
$$\frac{\partial\tilde{v}_s^{(1)}}{\partial t} = A(t,x)\tilde{v}_s^{(1)}(t,x) + (A(t,x)+A_0(t,x))\mu_s^{(1)}(x) + B(t,x)w^{(0)}(t,x) + +B_0(t,x)\psi(\zeta_s) + C(t,x)u^{(0)}(t,x) + C_0(t,x)\psi(\zeta_s) + f(t,x),\ (t,x)\in\Omega_s,$$

туындысын табамыз. (17) интегралдық теңдеуден төмендегі функцияларды анықтаймыз.

$$u^{(1)}(t,x) = \psi(t) + \int_0^x (\tilde{v}_s^{(1)}(t,\xi) + \mu_s^{(1)}(\xi))d\xi, (t,x)\in\Omega_s, \qquad s=\overline{1,N}.$$

$$w^{(1)}(t,x) = \dot\psi(t) + \int_0^x \frac{\partial\tilde{v}_s^{(1)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,\ (t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N},$$

Дәл осылай k- қадамға жалғастырамыз. (22) жүйенің оң жағына $u(t,x)=u^{(k-1)}(t,x)$, $w(t,x)=w^{(\dot{k}-1)}(t,x)$ қойып, $\mu^{(k)}(x)=(\mu_1^{(k)}(x),\mu_2^{(k)}(x),\dots,\mu_N^{(k)}(x))$ төмендегі теңдеуден анықтаймыз.

$$Q(x)\mu(x) = F_*(x) + H_*(x,w^{(k-1)},u^{(k-1)}),$$
$$\mu^{(k)}(x) = Q(x)^{-1}(F_*(x)+H_*(x,w^{(k-1)},u^{(k-1)})), \quad x\in[0,\omega].$$

Осыдан

$$\tilde{v}_s^{(k)}(t,x) = D_s(t,x)\mu_s^{(k)}(x) + H_s(t,x,w^{(k-1)},u^{(k-1)}) + F_s(t,x).$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_s^{(k)}}{\partial t} = A(t,x)\tilde{v}_s^{(k)}(t,x) + (A(t,x)+A_0(t,x))\mu_s^{(k)}(x) + B(t,x)w^{(k-1)}(t,x) + B_0(t,x)\psi(\zeta_s) + \quad C(t,x)u^{(k-1)}(t,x) + C_0(t,x)\psi(\zeta_s) + f(t,x),\ (t,x)\in\Omega_s,\ s=\overline{1,N},$$

$$u^{(k)}(t,x) = \psi(t) + \int_0^x (\tilde{v}_s^{(k)}(t,\xi) + \mu_s^{(k)}(x))d\xi,$$

$$w^{(k)}(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial \tilde{v}_s^{(k)}(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \ (t,x) \in \Omega_s, \ s = \overline{1,N}$$

табылады.

Мұнда k=1,2,…

Әдіс белгісіз функцияларды үш кезеңде табуға мүмкіндік береді:

1. (22) функционалдық теңдеулер жүйесінен $\mu_s(x)$, $s = \overline{1,N}$ енгізілген функционалдық параметрлерді барлық $x \in [0,\omega]$ үшін анықтаймыз.

2. Коши есептерінің (13), (14) әулетінен $v_s(t,x)$ функцияларын барлық $(t,x) \in \Omega_s$, $s = \overline{1,N}$ үшін және оның туындысын $\frac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}$ барлық $(t,x) \in \Omega_s$, $s = \overline{1,N}$ үшін табамыз.

3. (17) интегралдық теңдеулерден барлық $(t,x) \in \Omega_s$, $s = \overline{1,N}$ үшін $u(t,x)$және $w(t,x)$ функцияларын анықтаймыз.

Бастапқы есепке қойылған шарттар орындалғанда, әрбір көмекші есептің жалғыз шешімі бар. Алгоритмді жүзеге асыру үшін (13)–(17) параметрлері бар есептің жуық шешімдерінің дәл шешімге жақындауын орнату қажет. Келесі теорема ұсынылған алгоритмнің жинақталу шарттарын және (13)–(17) параметрлері бар есептің жалғыз шешімінің бар болу шарттарын анықтайды.

Теорема 1.

$N \times N$ өлшемді $Q(x)$ матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтарымды болса және

I) $v(t,x) \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right)$ функциясының дербес туындысы бар және $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right)$, u(t,x)$\in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right)$, w(t,x) $\in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right)$;

II) (5) дифференциалдық теңдеулер әулеті әрбір $[\theta_{s-1}, \theta_s) \times [0,\omega]$, $s = \overline{1,N}$, ішкі облысында v(t,x), u(t,x) және w(t,x) функциялары үшін орындалады және (θ_{s-1}, x), $s = \overline{1,N}, x \in [0,\omega]$ нүктелеріндегі $v(t,x)$ функциясының t бойынша оң жақты дербес туындысы үшін де орынды;

III) (6) шеттік шарты v(t,x) функциясының әрбір t=0, t=T түзулерінде орындалсын;

(IV) u(t,x) және w(t,x) функциялары v(t,x) және $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функцияларымен (8) интегралдық теңдеулері арқылы байланысқан болса, онда (13)–(17) параметрлері бар есептің жалғыз шешімі бар.

Негізгі нәтиже және мысал.

(1)–(4) және (13)–(17) пара-пар есептерден келесіні аламыз.

Теорема 2. Егер $N \times N$ өлшемді $Q(x)$ матрицасы барлық $x \in [0,\omega]$ үшін қайтарымды болса және төмендегі шарттар орындалса:

I) u(t,x) функциясының дербес туындылары бар:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right), \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in PC\left(\Omega, \{\theta_j\}_{j=1}^{N-1}, \mathbb{R}\right);$$

II) $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ аралас дербес туындысы бар және әрбір $(t,x) \in \Omega$ нүктесінде, барлық $x \in [0,\omega]$ үшін (θ_{s-1}, x), $s = \overline{1,N}$ нүктелерін қоспағанда, бір жақты аралас дербес туындылары бар;

III) (1) гиперболалық теңдеу әрбір $[\theta_{s-1}, \theta_s) \times [0,\omega]$, $s = \overline{1,N}$ үшін ішкі облыста u(t,x) функциясы бойынша орындалады және u(t,x) функциясының екінші ретті аралас дербес туындысы оң жақтан $[\theta_{s-1}, \theta_s) \times [0,\omega]$, $s = \overline{1,N}$, $x \in [0,\omega]$ нүктелерінде бар;

(IV) u(t,x) үшін (2) шеттік шарт және (4) бастапқы шарт, сәйкес, t=0, t=T және x=0 орындалады;

(V) u(t,x) функциясы үшін (3) импульстік әсер шарттары $t = \theta_p,\ \ p = \overline{1, N-1},\ \ x \in [0,\omega]$ орындалса онда бөлікті тұрақты импульстік гиперболалық теңдеу үшін шеттік (1)–(4) есептің жалғыз шешімі бар.

1 және 2 теоремалардың дәлелдеу схемасы [5] мақаланың теоремаларының дәлелдеу схемасы бойынша жүзеге асырылады.

Мысал. Алынған нәтижелердің иллюстрациясы ретінде келесі мысалды қарастырайық:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = (x+t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + (x^2+t^2)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - 2(x+t)u(t,x) + 3(x+t)u(\gamma(t),x) + \\ + f(t,x), \qquad t \neq 0{,}5; \tag{23}$$

$$3\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + x^2 u(0,x) - 2xu(1,x) = x^4 - 3x^3 + 4x, \qquad x \in [0,1], \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + \\ + B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x) + f(t,x),$$

$$\lim_{t\to 0{,}5+0} u(t,x) - \lim_{t \to 0{,}5-0} u(t,x) = 2x^2 + 3x + 5, \qquad x \in [0,1], \tag{25}$$

$$u(t,0) = t^2. \tag{26}$$

Мұндағы u(t,x) белгісіз функция және

$A(t,x) = x+t,\ \ B(t,x) = x^2+t^2,\ C = -2(x+1),\quad C_0(t,x) = 3(x+t),\ A_0(t,x) = B_0(t,x) = 0,\ P_0(x) = x^2,\ P_2(x) = 3,\ S_0(x) = -2x,\ P_1(x) = S_1(x) = S_2(x) = 0,$

$\psi(t) = t^2,\ \varphi(x) = 2x^2 + 3x + 5,\ \varphi_0(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$ функциялары Ω облысында үзіліссіз.

$$\gamma 1(t) = \zeta_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{егер} \quad t \in [0{,}0.5), \qquad \gamma 2(t) = \zeta_2 = \frac{3}{4} \ \text{егер} \quad t \in [0.5{,}1].$$

Алдымен, $v(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ жаңа функцияларын енгіземіз. (23)–(26) есебі бөлікті тұрақты аргументі бар импульсті дифференциалдық теңдеулер әулетіне үшін шеттік есепке ауысады.

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = (x+t)v(t,x) + (x^2+t^2)w(t,x) - 2(x+t)u(t,x) + 3(x+t)u(\gamma(t),x) + \\ + f(t,x), \quad t \neq 0{,}5;$$

$$3v(0,x) + x^2u(0,x) - 2xu(1,x) = x^4 - 3x^3 + 4x, \qquad x \in [0,1],$$

$$\lim_{t\to 0{,}5+0} v(t,x) - \lim_{t\to 0{,}5-0} v(t,x) = 4x + 3, \qquad x \in [0,1],$$

$$u(t,x) = t^2 + \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad w(t,x) = 2t + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi.$$

$$\theta_{s-1} < \zeta_s < \theta_s, \quad s = 1{,}2; \quad 0 < 0.5 < 1;$$

$$u(t,0) = t^2, \qquad x \in [0,1]$$

v([t],x) функциясы $C(\Omega, \Delta_2(\omega), \mathbb{R}^2)$ кеңістігінде жатады, және оның элементтері $v_s(t,x),\ s = 1{,}2$, төмендегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = (x+t)v_1(t,x) + (x^2+t^2)w(t,x) + -2(x+t)u(t,x) + 3(x+t)u(0.25,x) + 2x^2 + 2xt + x^3 - 2xt^2 + \frac{3x}{16} + \frac{3t}{16} + 3tx^2,$$

$$(t,x) \in \Omega_1 = [0{,}0.5) \times [0{,}1];$$

$$\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} = (x+t)v_2(t,x) + (x^2+t^2)w(t,x) + -2(x+t)u(t,x) + 3(x+t)u(0.75,x) + 2x^2 + 2xt + x^3 - 2xt^2 + \frac{27x}{16} + \frac{27t}{16} + 3tx^2,$$

$$(t,x) \in \Omega_1 = [0.5{,}1) \times [0{,}1];$$

$$3v(0,x) + x^2u(0,x) - 2xu(1,x) = x^4 - 3x^3 + 4x, \qquad x \in [0,1],$$

$$\lim_{t\to 0{,}5+0} v(t,x) - \lim_{t\to 0{,}5-0} v(t,x) = 4x + 3, \qquad x \in [0,1], \qquad u(t,x) = t^2 + \int_0^x v(t,\xi)d\xi,$$

$$w(t,x) = 2t + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \; (t,x) \in \Omega_s, \; s = 1,2.$$
$$u(t,0) = t^2, \qquad x \in [0,1]$$

Біз келесі түрде функционалдық параметрлерді енгіземіз:

$$\mu_1(x) = v_1(\zeta_s, x), \; \mu_2(x) = v_2(\zeta_s, x).$$

Келесі ауыстыруды жасай отырып: $v_s(t,x) = \tilde{v}_s(t,x) + \mu_s(x), \; (t,x) \in \Omega_s, \; s = \overline{1,2}$, төмендегідей түрдегі параметрлі дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін есеп аламыз:

$$\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = (x+t)\left(\tilde{v}_1(t,x) + \mu_1(x)\right) + (x^2+t^2)w(t,x) + -2(x+t)u(t,x) + 3(x+t)u(0.25,x) + 2x^2 + 2xt + x^3 - 2xt^2 + \frac{3x}{16} + \frac{3t}{16} + 3tx^2,$$
$$(t,x) \in \Omega_1 = [0,0.5) \times [0,1];$$

$$\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} = (x+t)\left(\tilde{v}_2(t,x) + \mu_2(x)\right) + (x^2+t^2)w(t,x) + -2(x+t)u(t,x) + 3(x+t)u(0.75,x)2x^2 + 2xt + x^3 - 2xt^2 + \frac{27x}{16} + \frac{27t}{16} + 3tx^2,$$
$$(t,x) \in \Omega_1 = [0.5,1) \times [0,1]; \qquad (27)$$

$$3[\tilde{v}_s(0,x) + \mu_s(x)] + x^2u(0,x) - 2xu(1,x) = x^4 - 3x^3 + 4x, \qquad x \in [0,1], \qquad (28)$$

$$\lim_{t\to 0,5+0}[\tilde{v}_2(t,x) + \mu_1(x)] - \lim_{t\to 0,5-0}[\tilde{v}_1(t,x) + \mu_2(x)] = 4x + 3, \quad x \in [0,1], \qquad (29)$$
$$u(t,x) = t^2 + \int_0^x [\tilde{v}_s(t,\xi) + \mu_s(\xi)]d\xi,$$

$$w(t,x) = 2t + \int_0^x \frac{\partial \tilde{v}_s(t,\xi)}{\partial t} d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega_s, \qquad s = 1,2. \qquad (30)$$

Мынадай белгілеу енгізейік:

$$\alpha_1(t,x) = \int_{\frac{1}{4}}^t (x+t)\,d\tau = xt + \frac{t^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{32}, \qquad (t,x) \in \Omega_1;$$
$$\alpha_2(t,x) = \int_{\frac{5}{4}}^t (x+t)\,d\tau = xt + \frac{t^2}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{9}{32}, \qquad (t,x) \in \Omega_2.$$

Бекітілген $\mu_s(x), u(t,x), w(t,x)$ үшін (27)–(30) Коши есептері әулетінің шешімі жалғыз және келесі түрге ие:

$$\tilde{v}_1(t,x) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{1/4}^t e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}(x+\tau)d\tau\mu_1(x)$$
$$+ e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{1/4}^t e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}[(x^2+\tau^2)w(\tau,x) - 2(x+\tau)u(\tau,x)]d\tau$$
$$+ e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{1/4}^t e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}[3(x+\tau)u(0.25,x)]d\tau$$
$$+ e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32}}\int_{1/4}^t e^{-\left(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32}\right)}(2x^2 + 2x\tau + x^3 - 2x\tau^2 + \frac{3x}{16} + \frac{3\tau}{16} + 3\tau x^2)d\tau,$$

$$\tilde{v}_2(t,x) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\int_{3/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32})}(x+\tau)d\tau\mu_2(x)$$
$$+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\int_{3/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32})}[(x^2+\tau^2)w(\tau,x)-2(x+\tau)u(\tau,x)]d\tau$$
$$+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\int_{3/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32})}[3(x+\tau)u(0.75,x)]d\tau$$
$$+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\int_{\frac{3}{4}}^{t} e^{-\left(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}\right)}\left(2xt+x^3-2xt^2+\frac{27x}{16}+\frac{27t}{16}+3tx^2\right)d\tau,$$
$$(t,x)\in\Omega_s,\qquad s=\overline{1,N}.$$

Келесі белгілеуді енгіземіз:

$$D_1(t,x) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{1/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}(x+\tau)d\tau = -1+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32},$$
$$D_2(t,x) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\int_{3/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32})}(x+\tau)d\tau = -1+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-9/32}.$$

$$H_1(t,x,w,u)$$
$$= e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{3/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}[(x^2+\tau^2)w(\tau,x)-2(x+\tau)u(\tau,x)]d\tau$$
$$+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{3/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}[3(x+\tau)u(0.25,x)]d\tau$$
$$H_2(t,x,w,u) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-9/32}\int_{1/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32})}[(x^2+\tau^2)w(\tau,x)-2(x+\tau)u(\tau,x)]d\tau$$
$$+e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-1/32}\int_{1/4}^{t} e^{-(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32})}[3(x+\tau)u(0.75,x)]d\tau$$
$$F_1(t,x) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32}}\int_{1/4}^{t} e^{-\left(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{32}\right)}(2x^2+2x\tau+x^3-2x\tau^2+\frac{3x}{16}+\frac{3\tau}{16}+3\tau x^2)d\tau,$$
$$F_2(t,x) = e^{xt+\frac{t^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\int_{\frac{3}{4}}^{t} e^{-\left(x\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}\right)}\left(2xt+x^3-2xt^2+\frac{27x}{16}+\frac{27t}{16}+3tx^2\right)d\tau.$$

Табылған өрнектерді (20) және (21) қатынастарына қойып, келесі шектер мен мәндерді табамыз:

$$3e^{-\frac{x}{4}-1/32}\mu_1(x) - 0*e^{-\frac{x}{4}-\frac{1}{32}}\mu_2(x) = -3[F_1(0,x)+H_1(0,x,w,u)] - -x^2u(0,x) - 2xu(T,x) + \varphi_0(x). \qquad 50)$$

$$e^{-\frac{x}{4}-\frac{1}{32}}\mu_1(x) + e^{-\frac{3x}{4}-\frac{9}{32}}\mu_2(x) = \dot{\varphi}_p(x) + F_1(\theta_p,x) - F_2(\theta_p,x) + H_1(\theta_p,x,w,u) - H_2(\theta_p,x,w,u),\ \ p=\overline{1,N-1}.$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 3e^{-\frac{x}{4}-1/32} & 0*e^{-\frac{x}{4}-1/32} \\ -e^{-\frac{x}{4}-1/32} & e^{-\frac{3x}{4}-9/32} \end{bmatrix},\qquad detQ(x) = 3e^{-x-5/16} \neq 0.$$

$Q(x)$ матрицасының анықтауышы нолден өзгеше болатыны анық. Демек, $Q(x)$ матрицасының кері бар және жоғарыдағы келтірілген теорема бойынша қарастырылып отырған есептің шешімі бар және ол жалғыз келесі түрде

$$u^*(t,x) = x^2+t^2$$

өрнектеуге болады.

Сонымен қатар, мысалда берілген (23)-(26) теңдеуде $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$ функцияларын нөлден өзгеше болатындай $A_0(t,x) = x - t$, $B_0(t,x) = 3x - 2t$ деп алып, дербес жағдайын қарастыруға болады.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = (x+t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + (x^2+t^2)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - 2(x+t)u(t,x) + (x-t)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x}$$

$$+ (3x-2t)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + 3(x+t)u(\gamma(t),x) + f(t,x), \quad t \neq 0{,}5;$$

$$3\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + x^2u(0,x) - 2xu(1,x) = x^4 - 3x^3 + 4x, \qquad x \in [0,1],$$

$$\lim_{t \to 0{,}5+0} u(t,x) - \lim_{t \to 0{,}5-0} u(t,x) = 2x^2 + 3x + 5, \qquad x \in [0,1],$$

$$u(t,0) = t^2.$$

Мұндағы u(t,x) белгісіз функция және

$A(t,x) = x + t$, $B(t,x) = x^2 + t^2$, $C = -2(x+1)$, $A_0(t,x) = x - t$, $B_0(t,x) = 3x - 2t$, $C_0(t,x) = 3(x+t)$,

$$P_0(x) = x^2, \quad P_2(x) = 3, \quad S_0(x) = -2x, \quad P_1(x) = S_1(x) = S_2(x) = 0,$$

$\psi(t) = t^2$, $\varphi(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $\varphi_0(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$ функциялары Ω облысында үзіліссіз.

$$\gamma 1(t) = \zeta_1 = \frac{1}{4}, \text{ егер } \quad t \in [0{,}0.5), \; \gamma 2(t) = \zeta_2 = \frac{3}{4} \text{ егер } \quad t \in [0.5{,}1].$$

$$D_1(t,x) = e^{xt + \frac{t^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{32}} \int_{\frac{1}{4}}^{t} e^{-\left(x\tau + \frac{\tau^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{32}\right)} (x + \tau + x - \tau)\,d\tau$$

$$D_2(t,x) = e^{xt + \frac{t^2}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{9}{32}} \int_{\frac{3}{4}}^{t} e^{-\left(x\tau + \frac{\tau^2}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{9}{32}\right)} (x + \tau + x - \tau)\,d\tau.$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 3P_2(x)[1 + D_1(0,x)] & 0 * S_2(x)[1 + D_N(T,x)] \\ -[1 + D_1(\theta_1,x)] & 1 + D_2(\theta_1,x) \end{bmatrix}, \; detQ(x) \neq 0.$$

Бұл қойылған есеп үшін де $Q(x)$ матрицасы нөлден өзгеше екенін көреміз. Демек, $Q(x)$ матрицасының қайтарымы бар және мақалада ұсынылған алгоритм бойынша есептің шешімін бар екендігіне көз жеткізуге болады.

Қорытынды

Мақалада бөлікті тұрақты аргументі бар импульстік гиперболалық теңдеу үшін қойылған шеттік есеп қарастырылған. Джумабаевтың параметрлеу әдісін қолдану арқылы есептің шешімінің бар болуы мен бірмәнділігінің жеткілікті шарттары алынды. Бастапқы шеттік есеп параметрлері бар Коши есептерінің эквивалентті әулетіне келтірілді. Шешімнің жуық мәнін анықтауға арналған итерациялық алгоритм ұсынылды. Q(x) матрицасының кері матрицасы бар болу шартында есептің параметрлік және бастапқы түрлері үшін шешімнің бірмәнділігі қамтамасыз етілетіні көрсетілді. Алынған нәтижелер бөлікті тұрақты аргументі және импульстік әсерлері бар гиперболалық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясын толықтырады және оларды сандық тұрғыдан жүзеге асыруға негіз болады.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP26194447) қаржыландырады.

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations (Singapore: World Scientific, 1993).

2 Samoilenko, A.M., and Perestyuk, N.A. Impulsive Differential Equations (Singapore: World Scientific, 1995).

3 Imanchiyev, A.E., Assanova, A.T., and Molybaikyzy, A. Properties of a nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44 (10), 4299–4309 (2023). https://doi.org/10.1134/S1995080223100177

4 Dzhumabayev, D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 29 (1), 34–46 (1989).

5 Assanova, A.T. Hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type and solving boundary value problems for it. Lobachevskii Journal of Mathematics, 42, 3584–3593 (2021).

6 Assanova, A.T., and Molybaikyzy, A. Solution to the periodic problem for the impulsive hyperbolic equation with discrete memory. Kazakh Mathematical Journal, 25 (1), 16–27 (2025).

7 Akhmet, M.U. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type. Nonlinear Analysis, 66 (3), 367–383 (2007). https://doi.org/10.1016/j.na.2005.11.032

8 Akhmet, M.U. Almost periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument of generalized type. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 336 (4), 646–663 (2007). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.010

9 Nieto, J.J., and Rodriguez-Lopez, R. Green's function for second order periodic BVPs with piecewise constant argument. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 304 (1), 33–57 (2005). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.023

10 Aviltay, N., Akhmet, T., and Zhamanshin, A. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses. Carpathian Journal of Mathematics, 40 (3), 581–598 (2024).

[1,3]*Молыбайқызы А.,
научный сотрудник, ст. преподаватель, ORCID ID: 0009-0008-2452-5932,
e-mail: altynaimolybai@gmail.com
[1,2] Кабдрахова С.С.,
к. ф.-м.н., главный научный сотрудник, ORCID ID: 0000-0003-0247-5985,
e-mail: Symbat2909.sks@gmail.com
[1]Искакова Н.Б.,
к. ф.-м.н., главный научный сотрудник, ORCID ID: 0000-0002-8697-8920,
e-mail: narkesh77@gmail.com
[1,3]Минглибаева Б.Б.,
к. ф.-м.н., научный сотрудник, ст. преподаватель, ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: minglibayeva.bayan@gmail.com

[1]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[3]Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ АРГУМЕНТОМ

Аннотация

В данной статье рассматривается краевая задача для импульсного гиперболического уравнения с кусочно-постоянным аргументом. Импульсные гиперболические уравнения с кусочно-постоянным аргументом возникают как математические модели физических процессов в нейронных сетях, непрерывных динамических системах, гибридных системах и других областях. Вопросы существования краевых задач и построения их решений для таких уравнений в настоящее время остаются одними из актуальных проблем. Для получения условий разрешимости данной задачи используется метод параметризации Джумабаева, а также в работе разработан итерационный алгоритм нахождения приближенного решения. Для каждого шага итерационного процесса получены интегральные формулы, выражаемые через матрицу Q(x), описывающую связь между функциональными параметрами. Если данная матрица является обратимой, то доказывается существование и единственность решения как для параметрической, так и для исходной задачи. Предложенный метод не ограничивается лишь доказательством теоретической разрешимости задачи, а предлагает конкретную конструктивную процедуру нахождения решения. Это имеет важное значение для последующих численных реализаций и анализа устойчивости решений. Кроме того, предложенный подход может быть применен к другим типам задач с кусочно-постоянным аргументом, включая системы с импульсными условиями, нейронные сети с эффектом памяти и нелинейные гибридные модели.

Ключевые слова: импульсное гиперболическое уравнение, кусочно-постоянный аргумент, краевая задача, алгоритм.

[1,3]*Molybaikyzy A.,
Researcher, Senior Lecturer, ORCID ID: 0009-0008-2452-5932,
e-mail: altynaimolybai@gmail.com
[1,2]Kabdrakhova S.S.,
Cand.Phys.Math.Sc., Chief Researcher, ORCID ID: 0000-0003-0247-5985,
e-mail: Symbat2909.sks@gmail.com
[1]Iskakova N.B.,
Cand.Phys.Math.Sc., Chief Researcher, ORCID ID: 0000-0002-8697-8920,
e-mail: narkesh77@gmail.com
[1,3]Minglibayeva B.B.,
Cand.Phys.Math.Sc., Researcher, Senior Lecturer, ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: minglibayeva.bayan@gmail.com

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[3]Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

ON THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN IMPULSIVE HYPERBOLIC EQUATION WITH A PIECEWISE-CONSTANT ARGUMENT

Abstract

This article investigates a boundary value problem for an impulsive hyperbolic equation with a piecewise constant argument. Impulsive hyperbolic equations with a piecewise constant argument arise as mathematical models of physical processes in neural networks, continuous dynamical systems, hybrid systems, and other fields. Issues related to the existence of boundary value problems and the construction of their solutions for such equations remain among the most relevant and challenging problems at present. To obtain solvability conditions for the considered problem, the Dzhumabaev parametrization method is employed, and an iterative algorithm for constructing an approximate solution is developed. For each step of the iterative process, integral formulas are derived and expressed in terms of the matrix Q(x), which describes the relationship between the functional parameters. If this matrix is invertible, the existence and uniqueness of the solution are proved both for the parametric and the original problems. The proposed method is not limited to proving theoretical solvability; it also provides a concrete constructive procedure for obtaining the solution. This is of significant importance for subsequent numerical implementations and for the analysis of solution stability. Moreover, the proposed approach can be applied to other types of problems with a piecewise constant argument, including systems with impulsive conditions, neural networks with memory effects, and nonlinear hybrid models.

Keywords: impulsive hyperbolic equation, piecewise constant argument, boundary value problem, algorithm.

Received February 5, 2026; revised April 12, April 20, 2026; accepted April 24, 2026