ӘОЖ 517.927
FTAXP 27.31.15

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-2-53-60

[1,2]***Иманбаев Н.С.,**
физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0002-5220-9899,
*e-mail: imanbaevnur@mail.ru
[2,3]**Сайрам Н.Н.,**
магистр, докторант, ORCID ID: 0009-0004-9766-6219,
e-mail: nurgul.sairam02@mail.ru

[1]Ж.А. Ташенев атындағы университет, Шымкент қ., Қазақстан
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[3]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЛОКАЛДЫ ЕМЕС «СЕРПІМДІ» ШЕТТІК ШАРТТАРМЕН БЕРІЛГЕН ЕСЕЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ ЖӘНЕ ҚОСАРЛАНҒАН ФУНКЦИЯЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ БАЗИСТІЛІГІ ТУРАЛЫ

Андатпа

Мақала сегментте анықталған локалды емес интегралдық «серпімді» шеттік шарттары бар Штурм–Лиувилл еселі дифференциалдау операторы үшін қойылған спектралдық есепті зерттеуге арналған. Қарастырылатын шеттік шарттар регулярлы болғанымен, күшейтілмеген регулярлы класқа жататындықтан, мұндай есептерді зерттеу спектралдық теория тұрғысынан елеулі теориялық қиындықтар туындатады және классикалық әдістерді тікелей қолдануға мүмкіндік бермейді. Зерттеудің негізгі мақсаты квадраттары қосындыланатын функциялар кеңістігінде меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің базистік қасиеттерін анықтау, сондай-ақ олардың орнықтылығы мен орнықсыздығын жан-жақты талдау болып табылады. Жұмыста интегралдық «серпімді» Самарский–Ионкин типіндегі есеп дербес жағдай ретінде қарастырылып, оның меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің Рисс базисін құрайтындығы дәлелденеді. Сонымен қатар, шеттік шарттардағы интегралдық ядроның шамалы өзгеруі кезінде базистік қасиеттердің сақталу немесе бұзылу шарттары айқындалады. Рисс базисін құрайтын түбірлік векторлар жүйесі мен жәй базисте құрмайтын меншікті және қосарланған функциялар жүйелерінің жиындарының L1 кеңістігіндегі тығыздығы дәлелденеді. Алынған нәтижелер локалды емес шеттік шарттары бар дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясын дамытуда, сондай-ақ локалды емес әсерлерді ескеретін қолданбалы есептерді зерттеуде пайдаланылуы мүмкін.

Түйін сөздер: Штурм–Лиувилл операторы, бейлокалды шеттік шарттар, интегралдық серпімді шарттар, Самарский–Ионкин есебі, Рисс базис, меншікті және қосарланған функциялар, орнықтылық.

Кіріспе

Локалды емес шеттік шарттары бар спектралдық есептер қазіргі заманғы дифференциалдық операторлар теориясының маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Мұндай есептер әртүрлі физикалық, инженерлік және қолданбалы модельдерде кездесетіндіктен, олардың спектралдық қасиеттерін зерттеу теориялық тұрғыдан да, практикалық тұрғыдан да өзекті [1, 7]. Алайда локалды емес шеттік шарттардың болуы оператордың өзіне-өзі түйіндес еместігіне алып келеді, ал бұл жағдай классикалық спектралдық теория әдістерін тікелей қолдануға мүмкіндік бермейді [1].

Күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттар жағдайында, тіпті екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер үшін де меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің базистік қасиеттері толық сипатталмаған. Бұл мәселенің күрделілігі шеттік шарттар мен теңдеу коэффициенттерінің өзара байланысына тәуелді екені белгілі. Атап айтқанда, шеттік шарттардың коэффициенттері арқылы түбірлік функциялар жүйесінің базис құруы жалпы жағдайда мүмкін еместігі көрсетілген [1]. Алайда теңдеу коэффициенттерінің әсерін ескере отырып, дербес жағдайларда оң нәтижелер алынған.

Коэффициенттері бар екінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттар қойылған есептерде меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің Рисс базисін құрайтын арнайы кластары бөлініп алынған [2]. Ал қарапайым жағдайда, яғни қосымша коэффициенттерсіз берілген екінші ретті дифференциалдық операторлар үшін күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттармен берілген спектралдық есептердің базистік қасиеттері толық зерттелген [3].

Сонымен қатар, жалпыланған шеттік шарттары бар Лаплас операторы үшін периодтық және Самарский–Ионкин типіндегі шеттік шарттарды қамтитын спектралдық есептер бірқатар еңбектерде қарастырылған [4, 5]. Жұлдыз тәрізді графта анықталған Штурм–Лиувилл операторының спектралдық сипаттамалары да жеке зерттеу объектісі ретінде белгілі [6]. Бұл нәтижелер локалды емес интегралдық шеттік шарттары бар операторлардың спектралдық теориясын одан әрі дамыту қажеттігін көрсетеді.

Осы мақалада регулярлы, бірақ күшейтілмеген регулярлы интегралдық «серпімді» шеттік шарттармен берілген Штурм–Лиувилл еселі дифференциалдау операторы үшін қойылған спектралдық есеп қарастырылады. Бұл жұмыста меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің базистік қасиеттеріне, сондай-ақ олардың орнықтылығы мен орнықсыздығына баса назар аударылады.

Материалдар мен әдістер

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \quad q(x) \in C[0,1] \tag{1.1}$$

дифференциалдық амалынан туындайтын

$$Y_1(y) \equiv a_{11}y'(0) + a_{12}y'(1) + a_{13}y(0) + a_{14}y(1) = 0, \tag{1.2}$$

$$Y_2(y) \equiv a_{23}y(0) + a_{24}y(1) = \int_0^1 \overline{p(x)}y(x)\,dx, \quad P(x) \in L_2(0,1)$$

регулярлы, бірақ күшейтілмеген регулярлы [7], интегралдық «серпімді» шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилл еселі дифференциалдау операторын қарастырамыз. Мұндағы $Y_1(y)$, $Y_2(y)$ – күшейтілмеген регулярлық

$$|a_{11}| + |a_{12}| \neq 0, \qquad a_{11}a_{24} + a_{12}a_{23} = \pm[a_{11}a_{23} + a_{12}a_{24}] \neq 0$$

шарттарды қанағаттандыратын, комплекс мәнді тұрақты коэффициенттермен берілген сызықтық тәуелсіз формалар.

[8] – мақалада жәй дифференциалдық оператор үшін кез-келген интегралдық «серпімді» шеттік шарттарда түбірлік векторлар жүйесінің жақшалы Рисс базисін құрайтындығы, ал күшейтілген регулярлы шеттік шарттар жағдайында меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің Рисс базистілігі дәлелденген болатын. Дербес жағдайлардағы еселі дифференциалдау операторының интегралдық «серпімді» периодтық шеттік шарттармен берілген спектралдық есебі үшін меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің базистілік қасиеттерінің орнықсыздығы [2]-ші мақалада зерттелген. [9; 10] біздің зерттеулерімізде $p(0)\nu(0)$ түріндегі жүктелген бірінші және екінші ретті дифференциалдық оператордың түбірлік векторларының базистілік қасиеттерінің орнықтылығы қарастырылды.

Нәтижелер мен талқылау

Теорема 1. Айталық $(p(x) \equiv 0)$ болған жағдайдағы «серпімсіз» L_0 операторының λ_k^0 – меншікті мәндері болсын және сәйкес меншікті-қосарланған функциялар жүйесі (МҚФ) $L_2(0,1)$ кеңістігінде Рисс базисін құрсын делік. Онда (2) – «серпімді» регулярлы шеттік шарттармен берілген L операторының сипаттаушы (характеристикалық) анықтауышы келесі түрде болады:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k_0}} \left(\frac{V_3(v_{k_0})}{\lambda - \lambda_k^0} - \frac{\sqrt{\lambda_k^0} V_3(v_{k_1})}{(\lambda - \lambda_k^0)^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k_1}} \left(\frac{V_3(v_{k_0}^0)}{\lambda - \lambda_k^0}\right)\right]$$

мұндағы $\Delta_0(\lambda)$ – L_0 «серпімсіз» оператордың сипаттаушы (характеристикалық) анықтауышы; $V_3(v)$ – сызықтық біртекті формалар, яғни «серпімсіз» түйіндес L_0^* операторының шеттік шарттарын құру барысында пайда болады;

$\{v_{k_1}^0, v_{k_0}^0\}$ – «серпімсіз» түйіндес есептің меншікті және қосарланған функцияларының жүйесі; a_{k_1}, a_{k_0}- $\overline{p(x)}$ функциясының

$$\overline{p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} [\overline{a_{k_1}} v_{k_1}^0 + \overline{a_{k_0}} v_{k_0}^0] \tag{2.2}$$

жүйесі бойынша биортогоналды жіктелуінің Фурье коэффициенттері.

(1.1)–(1.2) есебінің сипаттаушы (характеристикалық) анықтауышының (2.1) формуласының негізінде әртүрлі күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттардың жағдайы үшін меншікті мәндерінің асимптотикасын аламыз және меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің базистілік қасиеттерінің орнықтылығы мен орнықсыздығы жайында қорытынды жасай аламыз.

Еселі дифференциалдау операторы үшін «серпімді» Самарский-Ионкин есебі, $q(x) \equiv 0$ жағдайында мысал бола алады:

$$y'(0) = y'(1), \ \ y'(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} y(x) dx, \tag{2.3}$$

$$y'(0) = y'(1) + \int_0^1 \overline{p(x)} y(x) dx, \quad y(0) = 0, \tag{2.4}$$

мұндағы $p(x) \in L_2(0,1)$.

Қарастырылып отырған (1.1)–(2.3), (1.1)–(2.4) есептерінің ерекшелігі, бұл есепке түйіндес есептердің жүктелген екінші ретті дифференциалдық теңдеулер болуында:

$$l^*(v) = -v''^{(x)} + p(x)v'(0) = \bar{\lambda} v(x), \ V_1(v) = v'(1) = 0, \ V_2(v) = v(0) - v(1) = 0, \tag{2.5}$$

$$l^*(v) = -v''^{(x)} + p(x)v(0) = \bar{\lambda} v(x), \ V_1(v) = v'(1) = 0, \ V_2(v) = v(0) - v(1) = 0. \tag{2.6}$$

(1.1)–(2.3) спектралдық есебінің сипаттаушы (характеристикалық) анықтауышы келесі түрдегі көрініске ие болады:

$$\Delta_5(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k_0}} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right], \tag{2.7}$$

ал (1.1)–(2.4) есебінің сипаттаушы (характеристикалық) анықтауышы мына түрде:

$$\Delta_6(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 + 4\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\pi \overline{a_{k_0}} \frac{k}{(\lambda - (2k\pi)^2)^2} + \overline{a_{k_1}} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right)\right], \tag{2.8}$$

Мұндағы $\Delta_0(\lambda) = 1 - cos\sqrt{\lambda}$,

$$\overline{p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k_0}} \cdot 2\sqrt{2}(1-x) \cdot sin2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k_1}} \cdot 4\sqrt{2} \cdot cos2k\pi x. \tag{2.9}$$

$\Delta_5(\lambda), \Delta_6(\lambda)$, – функциялары λ айнымалысы бойынша бүтін аналитикалық функциялар.

(2.7) формуласынан (1.1)–(2.3) «серпімді» есебінің меншікті мәндерінің екі сериясы шығады:

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^0 = (2k\pi)^2;$$

$$\lambda_k^{(2)} = \left[2k\pi + \overline{a_{k_0}}\left(\sqrt{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]^2$$

(1.1)–(2.3), (1.1)–(2.4) «серпімді» есептердің меншікті-қосарланған функциялар жүйесі мен «серпімсіз» (Рисс базисін құратын) Самарский-Ионкин есебінің түбірлік векторларының жүйесі тек қана алғашқы мүшелерінің ақырлы санымен ғана айырмашылығы болатындығын байқаймыз.

Олай болса, $L_2(0,1)$ кеңістігінде (1.1)–(2.3), (1.1)–(2.4) «серпімді» есептердің меншікті-қосарланған функцияларының жүйелері де Рисс базисін құрайтындығы шығады.

(2.9) түріндегі $p(x)$ функцияларының жиыны $L_2(0,1)$ кеңістігінде тығыз болады.

Теорема 2. «Серпімді» (1.1)–(2.3), (1.1)–(2.4) есептерінің $L_2(0,1)$ кеңістігінде Рисс базисін құратын меншікті-қосарланған функцияларының жүйелерінің $p(x)$ функцияларының жиыны $L_2(0,1)$ кеңістігінде тығыз болады.

(2.3) шеттік шартының шамалы ғана интегралдық «серпімді» болғандағы (1.1)–(2.3), (1.1)–(2.4) «серпімді» есептердің меншікті және қосарланған функцияларының жүйелерінің базистілік қасиетінің орнықсыздығын көрсету үшін (1.1)–(2.3) есебінің меншікті функцияларын табамыз, ал (2.4) шеттік шарты үшін (2.6) түйіндес есебінің $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ меншікті мәндеріне сәйкес меншікті функцияларын табамыз, яғни

$$u_j^1(x) = C_1\left\{cos(2j\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{\overline{a_{j0}}}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\cdot\frac{\overline{a_{j0}}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\overline{a_{k_0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right]sin(2j\pi x), \quad (2.10)\right.$$

$$u_{j_0}(x) = C_1\left\{cos(2j\pi x) - \left[2\sqrt{2}\cdot\overline{a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\left[sin(2j\pi x) + \int_0^x p(\xi)\frac{sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi}\right]\right. \quad (2.11)$$

(2.10) меншікті функциялары үшін C_1 тұрақтыны $\left(u_j^1(x), v_i^1(x)\right) = 1$ биортогоналдық шартынан таңдаймыз, ал (2.11) меншікті функциялары үшін $\left(u_{j_0}(x), v_{j_0}(x)\right) = 1$ шартынан таңдаймыз. Онда Юнг теоремасынан [11], (1.1)–(2.3) есебі үшін $\lim_{j\to\infty}\|u_j^1\|\cdot\|v_j^1\| = \infty$, ал (1.1)–(2.4) есебі үшін $\lim_{j\to\infty}\|u_{j_0}\|\cdot\|v_{j_0}\| = \infty$ болатындығы шығады.

Демек, меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің бірқалыпты минималдық [12] шарты орындалмайды, олай болса $L_2(0,1)$ кеңістігінде жәй базисте құрмайды. Бұл зерттеліп отырған есептің көкейкесті мәселесі, яғни келесі теорема осы нәтижені дәріптейді:

Теорема 3. (1.1)–(2.3), (1.1)–(2.4) «серпімді» есептердің $L_2(0,1)$ кеңістігінде жәй базисте құрмайтын $p(x) \in L_2(0,1)$ меншікті-қосарланған функциялар жүйелерінің жиыны $L_2(0,1)$ кеңістігінде тығыз болады.

Ескерту. Түбірлік функциялардың Рисс базистілігі қасиеттеріне түйіндес операторлар бір мерзімде ие болады.

Қорытынды

Мақалада локалды емес интегралдық «серпімді» шеттік шарттармен берілген Штурм–Лиувилл еселі дифференциалдау операторы үшін қойылған спектралдық есептердің базистік қасиеттері зерттелді. Алынған нәтижелер күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттар жағдайында меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің құрылымы классикалық есептерден айтарлықтай ерекшеленетінін көрсетеді [1, 7]. Интегралдық «серпімді»

Самарский–Ионкин типіндегі есеп үшін меншікті және қосарланған функциялар жүйесінің квадраттары қосындыланатын функциялар кеңістігінде Рисс базисін құрайтыны дәлелденді. Сонымен қатар, шеттік шарттардағы интегралдық ядроның шамалы өзгеруі кезінде базистік қасиеттердің орнықсыздығы дәлелденді, бұл бұрын алынған нәтижелермен үйлеседі [2]. Рисс базисін құрайтын түбірлік векторлар жүйесінің жиыны мен жәй базисте құрмайтын меншікті және қосарланған функциялар жүйелерінің жиындары L1 функционалдық кеңістігінде тығыз болатыны дәлелденді. Бұл нәтиже локалды емес шеттік шарттармен берілген операторлар үшін базистік мәселесінің күрделілігін және көпқырлы сипатын айқындайды [8, 11]. Алынған нәтижелер авторлардың алдыңғы зерттеулерін толықтырып, кеңейтеді [9, 10].

Сөз соңында, авторлар ф.-м.ғ.д., профессор, ҰҒА корр.-мүшесі М.А. Садыбековке берген ғылыми кеңесі үшін алғыстарын білдіреді.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл мақала Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитетінің гранты аясында (грант №AP23485279) қаржыландырылды.

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Ильин В.А. О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, № 9. – С. 1516–1529. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de9437

2 Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 560–562. https://doi.org/10.1134/S0012266106040185

3 Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D2nD^{2n} D2n // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1990. – Vol. 146, No. 1. – P. 148–191. https://doi.org/10.1016/0022-247X(90)90339-H

4 Dukenbaeva A., Sadybekov M.A.On a spectral problem for the Laplace operator with more general boundary conditions // Herald of the Kazakh-British Technical University. – 2024. – Vol. 21, No. 4. – P. 146–152. https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-4-146-152

5 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property//Eurasian Math. J. – 2017. – Vol. 8, No. 2. – P. 148–191. URL: https://www.mathnet.ru/rus/emj/v8/i2/p40

6 Сатпаева З.З., Кангужин Б.Е. Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля на графе-звезде // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 229–238.https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-229-238

7 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 352 с.

8 Шкаликов А.А.О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Серия: Математика. Механика. – 1982. – № 6. – С. 12–21. URL: https://www.mathnet.ru/vmumm3582

9 Imanbaev N.S., Sairam N.N. On the quadratic closeness of eigenfunctions of «unperturbed» and «perturbed» differentiation operators on an interval // Herald to National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan – 2024. – № 3(93). – C. 313–319. https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.70

10 Imanbaev N.S. On basic properties of eigenfunctions and associated functions of one loaded operator of multiple differentiation // Lobachevskii J. Math. – 2022. – T. 43, № 3. – C. 749–754. URL: https://www.mathnet.ru/vmumm3582

11 Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities. – Cambridge: Cambridge University Press, 1948. – 456 p.

12 Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Мир, 1972.

REFERENCES

1 Ilyin, V.A. O svyazi mezhdu vidom kraevykh uslovii i svoistvami bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom razlozhenii po kornevym funktsiyam nesamosopryazhennogo differentsial'nogo operatora [On the relation between the type of boundary conditions and the basis and equiconvergence properties with trigonometric series expansions in root functions of a non-selfadjoint differential operator]. Differentsial'nye uravneniya, 30 (9), 1516–1529 (1994). (In Russian). URL: https://www.mathnet.ru/rus/de9437

2 Makin, A.S. O nelokal'nom vozmushchenii periodicheskoi zadachi na sobstvennye znacheniya [On a nonlocal perturbation of a periodic eigenvalue problem]. Differentsial'nye uravneniya, 42 (4), 560–562 (2006). (In Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266106040185

3 Lang, P., and Locker, J. Spectral theory of two-point differential operators determined by (D^{2n}). Journal of Mathematical Analysis and Applications, 146 (1), 148–191 (1990). https://doi.org/10.1016/0022-247X(90)90339-H

4 Dukenbaeva, A., and Sadybekov, M.A. On a spectral problem for the Laplace operator with more general boundary conditions. Herald of the Kazakh-British Technical University, 21 (4), 146–152 (2024). https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-4-146-152

5 Sadybekov, M.A., and Imanbaev, N.S. Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property. Eurasian Mathematical Journal, 8 (2), 148–191 (2017). URL: https://www.mathnet.ru/rus/emj/v8/i2/p40

6 Satpaeva, Z.Z., and Kanguzhin, B.E. Regulyarizovannyi sled operatora Shturma–Liuvillya na grafe-zvezde [Regularized trace of the Sturm–Liouville operator on a star graph]. Vestnik Kazakhstansko-Britanskogo tekhnicheskogo universiteta, 22 (1), 229–238 (2025). (In Russian). https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-229-238

7 Naimark, M.A. Lineinye differentsial'nye operatory [Linear Differential Operators] (Moscow: Nauka, 1969), 352 p. (In Russian).

8 Shkalikov, A.A. O bazisnosti sobstvennykh funktsii obyknovennykh differentsial'nykh operatorov s integral'nymi kraevymi usloviyami [On the basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]. Vestnik MGU. Seriya: Matematika. Mekhanika, 6, 12–21 (1982). (In Russian). URL: https://www.mathnet.ru/vmumm3582

9 Imanbaev, N.S., and Sairam, N.N. On the quadratic closeness of eigenfunctions of “unperturbed” and “perturbed” differentiation operators on an interval. Herald to National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, 3 (93), 313–319 (2024). https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.70

10 Imanbaev, N.S. On basic properties of eigenfunctions and associated functions of one loaded operator of multiple differentiation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 43 (3), 749–754 (2022). URL: https://www.mathnet.ru/vmumm3582

11 Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Pólya, G. Inequalities (Cambridge: Cambridge University Press, 1948), 456 p.

12 Funktsional'nyi analiz [Functional Analysis]. Ed. by S.G. Krein (Moscow: Mir, 1972). (In Russian).

[1,2]*Иманбаев Н.С.,
к.физ.-мат.н., профессор, ORCID ID: 0000-0002-5220-9899,
*e-mail: imanbaevnur@mail.ru
[2,3]Сайрам Н.Н.,
магистр, докторант, ORCID ID: 0009-0004-9766-6219,
e-mail: nurgul.sairam02@mail.ru

[1]Университет имени Ж.А. Ташенева, г. Шымкент, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан
[3]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА КРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ «ВОЗМУЩЕННЫМИ» КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация

В статье исследуется спектральная задача для оператора кратного дифференцирования Штурма–Лиувилля, заданного на отрезке с нелокальными интегральными «возмущенными» граничными условиями. Рассматриваемые граничные условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, что существенно осложняет анализ спектральных свойств оператора и изучение базисных свойств соответствующих систем корневых функций, а также ограничивает применение классических методов спектральной теории. Основной целью работы является исследование свойств базисности систем собственных и присоединенных функций в пространстве квадратично суммируемых функций, а также анализ их устойчивости и неустойчивости при малых изменениях параметров задачи и интегральных ядер в граничных условиях. В качестве частного случая подробно рассматривается задача Самарского–Ионкина с интегральными «возмущенными» граничными условиями. Доказано, что система собственных и присоединенных функций данной задачи образует базис Рисса в пространстве квадратично суммируемых функций на отрезке. Показано, что при малых изменениях интегрального ядра в граничных условиях свойства базисности могут быть неустойчивым. Установлено, что множества систем корневых функций, образующих базис Рисса, и систем корневых функций, не образующих обычного базиса, являются плотными в рассматриваемом функциональном пространстве L1. Полученные результаты представляют интерес для дальнейшего развития спектральной теории дифференциальных операторов на отрезке и ее приложений.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, нелокальные граничные условия, интегральное возмущение, задача Самарского–Ионкина, базис Рисса, собственные и присоединенные функции, устойчивость.

[1,2]*Imanbaev N.S.,
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Professor, ORCID ID: 0000-0002-5220-9899,
*e-mail: imanbaevnur@mail.ru
[2,3]Sairam N.N.,
Master, PhD doctoral student,
ORCID ID: 0009-0004-9766-6219, e-mail: nurgul.sairam02@mail.ru

[1]Z.A. Tashenev University, Shymkent, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[3]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

BASIS PROPERTY OF SYSTEMS OF EIGEN AND ASSOCIATED FUNCTIONS OF A SHTURM-LIOUVILLE MULTIPLE DIFFERENTIATION OPERATOR WITH NONLOCAL «PERTURBED» BOUNDARY CONDITIONS

Abstract

This paper is devoted to the study of a spectral problem for a Sturm–Liouville multiple differentiation operator defined on an interval with nonlocal integrally “perturbed” boundary conditions. The considered boundary conditions are regular but not strongly regular, which leads to essential difficulties in the analysis of the spectral properties and the basis behavior of the corresponding systems of functions. The main objective of the study is to investigate the basis properties of systems of eigen and associated functions in the space of square-summable functions and to analyze their stability and instability under small perturbations of the boundary conditions. As a particular case, the Samarskii–Ionkin problem with integrally perturbed boundary conditions is examined in detail. It is proved that the system of eigen and associated functions of this problem forms a Riesz basis in the L2 space on the interval. The paper also shows that small changes in the integral kernel of the boundary conditions may lead either to the preservation or to the loss of the basis property. Moreover, it is established that the sets of root function systems forming a Riesz basis and the sets of eigen and associated function systems that do not form an ordinary basis are dense in the corresponding functional space L 1. The obtained results contribute to the development of the spectral theory of differential operators with nonlocal boundary conditions.

Keywords: Sturm–Liouville operator, nonlocal boundary conditions, integral perturbation, Samarskii–Ionkin problem, Riesz basis, eigen and associated functions, stability.

Received January 17. 2026; revised April 22, 2026; accepted May 4,2026.