МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICAL SCIENCES
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.938:519.7
МРНТИ 27.29.21, 28.15.15

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-2-12-25

[1]Сейлова Р.Д.,
к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-4666-8001,
e-mail: roza_seilova@mail.ru
[1]Талипова М.Ж.,
к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]Бекбауова А.У.,
к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,
e-mail: mirra478@mail.ru
[1]*Еримбетова Г.Г.,
докторант, ORCID ID: 0000-0002-7352-5997
*e-mail: gulmira.yerimbetova1982@gmail.com;

[1]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова
г. Актобе, Казахстан

УПРАВЛЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Аннотация

Современная теория управления активно расширяет границы исследований, выходя за рамки классических дифференциальных уравнений без особых воздействий. В данной статье рассматривается задача управляемости для квазилинейных интегро-дифференциальных систем с импульсным воздействием. Исследуется влияние слабых нелинейных возмущений, включенных в уравнения, определяющие моменты импульсного воздействия, что приводит к необходимости анализа систем с переменными моментами импульсов. Применяется метод сведения к уравнениям с фиксированными моментами импульсного воздействия, что позволяет использовать традиционные подходы к управлению. Разработаны методы построения разрешающего управления, обеспечивающего перевод системы из начального состояния в заданное конечное. Рассмотрены условия существования и единственности решений, а также оптимизация управления в среднем, направленная на минимизацию заданного функционала затрат. Полученные результаты могут быть применены в задачах автоматического регулирования, моделирования динамических систем с дискретными и непрерывными воздействиями, а также в управлении технологическими и экономическими процессами. Работа будет интересна для специалистов в области дифференциальных уравнений, теории управления и прикладной математики.

Ключевые слова: управляемость, квазилинейные интегро-дифференциальные уравнения, импульсное воздействие, методы оптимального управления, краевая задача управления, слабые нелинейные возмущения.

Введение

Современная теория управления активно расширяет границы исследований, выходя за рамки классических дифференциальных уравнений без особых воздействий. Динамические системы, развитие которых сопровождается внезапными скачкообразными (импульсными) изменениями, становятся все более востребованными в различных сферах науки и технологий. Такие процессы часто встречаются в механике, электроэнергетике, биологии и экономике, где учет дискретных изменений является критически важным. Интегро-дифференциальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с импульсными воздействиями и краевые задачи для таких систем, применения в прикладных задачах исследованы многими учеными [1–16].

В этой статье рассматривается задача управления для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, при котором моменты импульсов могут быть либо заранее заданными, либо определяться текущим состоянием системы. Предлагаемый подход основан на сочетании двух типов управления: классического, описываемого интегрируемой функцией, и импульсного, действующего в дискретные моменты времени.

Материалы и методы

В данной работе исследуется задача управления краевой задачей для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Особенность рассматриваемого случая заключается в наличии слабых нелинейных возмущений, которые включены не только в правую часть уравнений, но и в уравнения, определяющие моменты импульсного воздействия. Это приводит к необходимости анализа систем с переменными моментами импульсов, что существенно усложняет задачу.

Для решения поставленной задачи используется метод сведения к уравнениям с фиксированными моментами импульсного воздействия, разработанный в работах ученых [17–20]. Данный метод позволяет преобразовать исходную систему к эквивалентному представлению, где моменты импульсных воздействий фиксированы, что существенно упрощает анализ управляемости и построение управляющих воздействий.

Исследование базируется на классических методах математической теории управления, включая:

- анализ существования и единственности решений для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием;
- построение краевых условий, необходимых для нахождения разрешающего управления;
- оптимизацию управления в среднем, основанную на минимизации заданного функционала затрат.

Кроме того, учитывается влияние импульсных воздействий, происходящих в моменты времени, зависящие от состояния системы. В данной ситуации неприменим метод последовательных приближений, так как каждое приближение может содержать различные точки разрыва. В связи с этим используются альтернативные методы приведения системы к представлению с фиксированными моментами импульсного воздействия.

Сопоставление полученных результатов с работами в области краевых задач для импульсных интегро-дифференциальных уравнений, в частности [21, 22], позволяет выделить качественное развитие математического аппарата. Опираясь на фундамент, заложенный указанными авторами, данное исследование предлагает ряд уточняющих модификаций:

- если в работах [21, 22] основное внимание уделено системам с фиксированными моментами импульсов $t = \theta_i$, то в настоящей статье рассматривается случай, когда под влиянием слабых нелинейных возмущений $\mu\tau_i(x,\mu)$ моменты скачков $t = \zeta_i$ становятся переменными. Это потребовало введения дополнительных условий (леммы 1 и 2) для обеспечения единственности пересечения траекторией поверхности разрыва;
- в дополнение к численным подходам и методам параметризации, представленным в [21, 22], в данной работе акцент сделан на аналитическом методе. Использование специальных функционалов позволило свести исходную задачу к эквивалентной системе с фиксированными моментами, что упрощает дальнейший качественный анализ;
- на основе подходов к обеспечению существования решений, развитых в предшествующих работах, нами предложена структура двухкомпонентного управления (сочетание непрерывного $u(t)$и дискретного воздействий v_i). Такой подход позволяет не только решать задачу разрешимости, но и оптимизировать функционал затрат;
- модель была дополнена учетом зависимости скачка $\Delta x(\zeta_i)$ от предыстории системы. Это развитие идей, заложенных в [21, 22], позволяет более детально описывать динамику сложных технологических процессов, где мгновенные изменения состояния обусловлены накопленным эффектом.

Результаты и обсуждения

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, имеющую вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_\alpha^t K(t,s)x(s)ds + C(t)u(t) + f(t) + \mu g(t,x,u,\mu),$$

$$t \neq \theta_i + \mu\tau_i(x,\mu), \Delta x(\zeta_i) = B_i x(\zeta_i) + \sum_{\alpha<\zeta_j<\zeta_i} D_{ij}x(\zeta_j) + Q_i v_i + I_i + \mu W_i(x(\zeta_i), v_i, \mu), i = \overline{1,p},$$

(1)

и краевое условие

$$x(\alpha) = a, x(\beta) = b, \qquad (2)$$

где $\mu > 0$ – малый параметр,

$x \in R^n, \Delta x(\theta_i) \equiv x(\theta_i +) - x(\theta_i), t \in [\alpha,\beta], A(t), K(t,s), i = \overline{1,p}$ – $(n \times n)$ матрицы, столбцы матрицы $A(t)$ – элементы пространства L_2^n [α,β], $\{f, I\} \in \Pi^n[\alpha,\beta], D_{ij}, B_i, i,j = \overline{1,p}$ – постоянные $(n \times n)$ матрицы, матрица $K(t,s)$, интегрируемая с квадратом на множестве $[\alpha,\beta]\times [\alpha,\beta]$, матрицы $C(t)$ и $Q_i, i = \overline{1,p}$, размера $n \times m, m$ – фиксированное натуральное число, столбцы матрицы $C(t)$ являются функциями из $L_2^n[\alpha,\beta]$, $Q_i, i = \overline{1,p}$, где $L_2^n[\alpha,\beta]$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[\alpha,\beta]$; $D^r[1,p]$ – множество конечных последовательностей $\{\xi_i\}, i = \overline{1,p}$, (,) – скалярное произведение.

Предполагается, что функции $g, W_i, i = \overline{1,p}$ обладают свойством непрерывности по всем аргументам и являются гладкими, имея непрерывные частные производные по каждой координате векторов x, u, v.

Движение, определенное уравнением (1), при фиксированных μ, $\{u,v\} \in \Pi^m[\alpha,\beta]$ происходит следующим образом. Изображающая точка $P_t(t,x(t))$ решения $x(t) = x(t,\alpha,a)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + \int_\alpha^t K(t,s)x(s)ds + C(t)u(t) + f(t) + \mu g(t,x,u,\mu),$$
$$t \neq \theta_i + \mu\tau_i(x,\mu) \qquad (3)$$

начинает свое движение в точке (α, a) и продолжает вдоль интегральной кривой этого решения до момента $t = \zeta_1$, когда P_t встречает первую поверхность разрыва $t = \theta_1 + \mu\tau_1(x, \mu)$. Таким образом, значение $t = \zeta_1$ определяется как удовлетворяющее равенству $\zeta_1 = \theta_1 + \mu\tau_1(x(\zeta_1), \mu)$. В этот момент P_t испытывает скачок на величину

$$\Delta x|_{t=\zeta_1} = B_1 x(\zeta_1) + \sum D_{11} x\,(\zeta_1) + Q_1 v_1 + I_1 + \mu W_1(x(\zeta_1), v_1, \mu)$$

и продолжает двигаться вдоль интегральной кривой решения $x(t, \zeta_1, x(\zeta_1 +))$ уравнения (3), пока P_t не встретит следующую поверхность разрыва и т.д.

Заметим, что каждое решение уравнения (1) является функцией из РАС $[\alpha, \beta]$, если оно определено на $[\alpha, \beta]$, где $PAC[\alpha, \beta]$ – множество функций $x(t)$ кусочно абсолютно непрерывных, непрерывных слева во всех точках $[\alpha, \beta]$ и испытывающих разрывы первого рода в точках $\{\theta_i\}, i = \overline{1, p}$;

Определение 1. Будем говорить, что разрешима задача управления краевой задачей γ_μ, если для каждого ограниченного множества $G \subset R^n$ существует μ_0, $\mu_0 \in R^1, \mu_0 > 0$, такое, что для каждых $\{a, b\} \subset G$ и $\mu < \mu_0$ существует управление $\{u, v\} \in \Pi^m[\alpha, \beta]$, при котором уравнение (1) допускает решение, удовлетворяющее краевому условию (2).

Пусть $s \in R, s > 0$ и пусть Π_s есть множество элементов (x, u, v) таких, что $\|x\| + \|u\| + \|v\| \leq s$, где $\|\cdot\|$ есть евклидовая норма в R^k, $k \in$N.

Для фиксированного положительного числа $\mu_1 \in R$, определим множество

$$G_s = \{(x, u, v, t, i, \mu)(x, u, v) \in \Pi_s, \alpha \leq t \leq \beta, i = 1,2,3 \ldots, p, \mu \leq \mu_1\}.$$

Фиксируем $H \in R, H > 0$ и пусть

m1 = $\max\{\sup_t\|A(t)\|, \sup_t\|C(t)\|, \sup_{t,s}\|K(t,s)\|, \max_i\|B_i\|, \max_{i,j}\|D_{ij}\|\}$,

m2 = $\max\{\sup_t\|f(t)\|, \max_i\|I_i\|\}$,

m3 = $\max\{\max_{G_H}\|g\|, \max_{G_H}\|W\|, \max_{G_H}\|\tau\|\}$.

Лемма 1. Если

$$\mu_1 m_3 < min(\theta_1 - \alpha, \beta - \theta_p) \tag{4}$$

и для всех x, μ, i и G_H справедливо, что

$$\theta_{i+1} + \mu\tau_{i+1}(x, \mu) < \theta_i + \mu\tau_i(x, \mu), \tag{5}$$

тогда каждое решение уравнения (1), определенное на $[\alpha, \beta]$ и принимающее значения в Π_H пересекает каждую из поверхностей $t = \theta_i + \mu\tau_i(x, \mu), i = 1, \ldots, p$, по меньшей мере один раз.

Лемма 2. Пусть система (1) определена в области G_H и $\mu < \mu_2$, где

$$\mu_2 \leq \mu_1 \text{ и } \mu_2 L\gamma(\mu_2) < 1 \tag{6}$$

Тогда, если

$$\tau_i(x, \mu) \geq \tau_i((E + B_i + D_{ii})x + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} D_{ij}\, x^{(j)} + Q_i\, v_i + I_i + \mu W_i(x, v, \mu), \mu) \tag{7}$$

для всех $\|x\|$<H, $\|x^{(j)}\|$<H, $j = 1,2, \ldots, i - 1$, и $\|v\|$<H, тогда каждое решение $x(t)$ уравнения (1) встречает любую из поверхностей разрыва $t = \theta_i + \mu\tau_i(x, \mu)$, $i = \overline{1, \text{p}}$, не больше чем один раз.

Для анализа задачи управления γ_μ применяется метод сравнения [1, 2], суть которого состоит в построении системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в заранее заданные моменты времени, эквивалентной в определенном смысле исходной системе, где импульсы возникают на поверхностях.

Рассмотрим следующую систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_\alpha^t K(t,s)y(s)ds + C(t)u + f(t)\sum_{x<\theta_i<t} F_i(t,y,u,\mu), t \neq \theta_i, \qquad (8)$$
$$\Delta y(\theta_i) = B_i y(\theta_i) + \sum_{a<\theta_j<\theta_i} D_{ij}\, y(\theta_j) + Q_i v_i + I_i + S_i(y,u,v_i,\mu),$$

в которой все элементы такие же, как и в системе (1). За исключением F_i и $S_i, i=\overline{1,p}$. Функционалы F_i и S_i будут определены ниже.

Пусть $x(t)$ – решение (1) и $t=\xi_i, i=\overline{1,p}$, точки разрыва этого решения.

В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что $\tau_i(x,\mu) \geq 0$ для всех $(x,i,\mu) \in G_H$. Таким образом, $\xi_i \geq \theta_i, i=\overline{1,p}$.

Определение 2. Системы (1) и (8) называются B-эквивалентными в G_H, если для некоторого числа $h \in R, 0<h<H$ и достаточно малого μ справедливо, что:

a) для каждого решения $x(t)$ уравнения (1) $\|x(t)\|<h, t\in[\alpha,\beta]$ существует решение $y(t)$ решения (8), $\|y(t)\|<H$, такое, что $x(t)=y(t)$ для всех $t\in[\alpha,\beta]$, исключая, возможно, точки $t\in[\theta_i,\xi_i], i=\overline{1,p}$;

b) для каждого решения $y(t)$ уравнения (8), $\|y(t)\|<h, t\in[\alpha,\beta]$, существует решение $x(t)$ системы (1), $\|x(t)\|<H$ такое, что $x(t)=y(t)$, для всех $t\in[\alpha,\beta]$, за исключением, возможно, $t\in[\theta_i,\xi_i], i=\overline{1,p}$.

Ниже покажем, что можно подобрать функционалы F_i и S_i так, что (1) и (8) будут B-эквивалентны.

Фиксируем $h, 0<h<H$ и выберем $\mu_3, \mu_3>0$, так, что
$\mu_3 \leq \mu_2, \mu_3 m_3 \gamma(\mu_3) < H-h$.

Пусть $\phi(t)$ есть решение (1), удовлетворяющее условию $\phi(\alpha)=a$ и $\|\phi(t)\|<h$, если $t\in[\alpha,\beta]$. Обозначим $t=\xi_i, i=\overline{1,p}$, точки разрыва решения φ(t).

Фиксируем K, $1<k\leq p$, и предположим, что $F_i, S_i, i=1,2,\ldots,k-1$, уже определены так же, как и решение $\eta(t)$ уравнения (8), которое определено для $t\in[\alpha,\theta_k]$, $\|\eta(t)\|<H, t\in[\alpha,\theta_k]$ и $\eta(t)=\phi(t)$, $t\in[\alpha,\theta_k]\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}(\theta_i,\xi_i)$ и, кроме того, для всех $t\in[\alpha,\theta_k]$,

$$\int_\alpha^t [A(s)\eta(s) + \int_\alpha^s K(s,\sigma)\eta(\sigma)d\sigma + C(s)u + f(s) + \sum_{\alpha<\theta_i<s} F_i(s,\eta,u,\mu)]ds = \int_\alpha^t [A(s)\phi(s) + \int_\alpha^s K(s,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma + C(s)u + f(s) + \mu\, g(s,\phi(s),u(s),\mu)]ds. \qquad (9)$$

Поскольку $\xi_k \geq \theta_k$, то $\eta(\theta_k) = \xi(\theta_k)$.

Пусть

$$\eta(\theta_k+) = (E+B_k)\eta(\theta_k) + \sum_{a<\theta_j\leq\theta_k} D_{kj}\,\eta(\theta_j) + Q_k v_k + I_k + z, \qquad (10)$$

где z будет определено ниже.

Продолжим решение $\eta(t)$ для всех $t\in[\theta_k,\xi_k]$, как решение следующей начальной задачи Коши.

$$\frac{d\psi}{dt} = F(t),\ \psi(\xi_k) = \phi(\xi_k+), \tag{11}$$

где

$$F(t) = A(t)\phi(t) + \int_a^t K(t,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma + C(t)u + f(t) + \mu g\,(t,\phi(t),u(t),\mu).$$

Имеем, что $\eta(t) = \phi(\xi_k+) + \int_{\xi_k}^t F(s)ds,\ t \in [\theta_k,\xi_k]$.

Таким образом,

$$\|\eta(t) - \phi(\xi_k+)\| \le max_{\theta_k \le t \le \xi_k} \left\| \int_{\theta_k}^t F(s)ds \right\| \le \mu_3 m_3 \gamma(\mu_3) < H - h,$$

и, следовательно, $\|\eta(t)\| < H, t \in [\theta_k,\xi_k]$.

Больше того, из (10) и

$$\eta(\theta_k+) = \int_{\xi_k}^{\theta_k} F(s)ds + \phi(\xi_k+)$$

следует, что

$$z = \phi(\xi_k+) + \int_{\xi_k}^{\theta_k} F(s)ds - (E + B_k)\eta(\theta_k) - \sum_{a<\theta_j \le \theta_k} D_{kj}\eta(\theta_j) - Q_k v_k - I_k.$$

Обозначим значение z как $S_k(\eta,u,v_k,\mu)$. Нетрудно проверить, что

$$S_k(\eta,u,v_k,\mu) = B_k[\phi(\xi_k) - \eta(\theta_k)] + \sum_{\alpha<\xi_j \le \xi_k} D_{kj}\,\left[\phi\left(\xi_j\right) - \eta(\theta_k)\right] + \ \mu W_k(\phi(\xi_k),v_k,\mu). \tag{12}$$

Пусть также

$$F_k(t,\eta,u,\mu) == \begin{cases} A(t)[\phi(t) - \eta(t)] + \int_\alpha^t K(t,s)[\phi(s) - \eta(s)]ds + \mu g(t,\phi(t),u(t),\mu), t \in [\theta_k,\xi_k]\,, \\ 0, \text{если } t \notin [\theta_k,\xi_k]. \end{cases} \tag{13}$$

Если подставить определенные по формулам (12) и (13) функции S_k и F_k в (8), то согласно построению уравнения (1) и (8) В-эквивалентны на промежутке $[\alpha,\theta_{k+1}]$.

Продолжая таким же образом для всех $k+1, k+2, \dots, p$ можно показать, что (1) и (8) В-эквивалентны в G_H.

Система (8) отличается от системы общего вида (1) тем, что моменты импульсного воздействия фиксированы. Так, (8), вообще говоря, относятся к уравнениям вида (1), то для нее тоже можно рассматривать задачу управления краевой задачей (2). Назовем ее краевой задачей λ_μ.

Обозначим

$$\Psi(t) = \int_\alpha^t E(s)E^T(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} P_i {P_i}^T, \tag{14}$$

где $E(t) = H(\beta,t)C(t),\ P_i = H(\beta,\theta_i+)Q_i$.

Лемма 3. Пусть выполняются ранее сформулированные условия, а матрица $\Psi(\beta)$ является невырожденной. В таком случае задача управления λ_μ имеет решение, которое представляется в виде предельной функции равномерно сходящейся последовательности, построенной с использованием метода последовательных приближений.

$$\frac{d\psi}{dt} = F(t),\ \psi(\xi_k) = \phi(\xi_k +), \tag{11}$$

где

$$F(t) = A(t)\phi(t) + \int_a^t K(t,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma + C(t)u + f(t) + \mu g\,(t,\phi(t),u(t),\mu).$$

Имеем, что $\eta(t) = \phi(\xi_k +) + \int_{\xi_k}^t F(s)ds,\ t \in [\theta_k, \xi_k]$.

Таким образом,

$$\|\eta(t) - \phi(\xi_k +)\| \le max_{\theta_k \le t \le \xi_k} \left\| \int_{\theta_k}^t F(s)ds \right\| \le \mu_3 m_3 \gamma(\mu_3) < H - h,$$

и, следовательно, $\|\eta(t)\| < H, t \in [\theta_k, \xi_k]$.

Больше того, из (10) и

$$\eta(\theta_k +) = \int_{\xi_k}^{\theta_k} F(s)ds + \phi(\xi_k +)$$

следует, что

$$z = \phi(\xi_k +) + \int_{\xi_k}^{\theta_k} F(s)ds - (E + B_k)\eta(\theta_k) - \sum_{a < \theta_j \le \theta_k} D_{kj}\eta(\theta_j) - Q_k v_k - I_k.$$

Обозначим значение z как $S_k(\eta, u, v_k, \mu)$. Нетрудно проверить, что

$$S_k(\eta, u, v_k, \mu) = B_k[\phi(\xi_k) - \eta(\theta_k)] + \sum_{\alpha < \xi_j \le \xi_k} D_{kj}\left[\phi(\xi_j) - \eta(\theta_k)\right] + \mu W_k(\phi(\xi_k), v_k, \mu). \tag{12}$$

Пусть также

$$F_k(t, \eta, u, \mu) == \begin{cases} A(t)[\phi(t) - \eta(t)] + \int_\alpha^t K(t,s)[\phi(s) - \eta(s)]ds + \mu g(t, \phi(t), u(t), \mu), t \in [\theta_k, \xi_k], \\ 0, \text{если } t \notin [\theta_k, \xi_k]. \end{cases} \tag{13}$$

Если подставить определенные по формулам (12) и (13) функции S_k и F_k в (8), то согласно построению уравнения (1) и (8) В-эквивалентны на промежутке $[\alpha, \theta_{k+1}]$.

Продолжая таким же образом для всех $k+1, k+2, ..., p$ можно показать, что (1) и (8) В-эквивалентны в G_H.

Система (8) отличается от системы общего вида (1) тем, что моменты импульсного воздействия фиксированы. Так, (8), вообще говоря, относятся к уравнениям вида (1), то для нее тоже можно рассматривать задачу управления краевой задачей (2). Назовем ее краевой задачей λ_μ.

Обозначим

$$\Psi(t) = \int_\alpha^t E(s)E^T(s)ds + \sum_{\alpha < \theta_i < t} P_i P_i^T, \tag{14}$$

где $E(t) = H(\beta, t)C(t),$ $P_i = H(\beta, \theta_i +)Q_i$.

Лемма 3. Пусть выполняются ранее сформулированные условия, а матрица $\Psi(\beta)$ является невырожденной. В таком случае задача управления λ_μ имеет решение, которое представляется в виде предельной функции равномерно сходящейся последовательности, построенной с использованием метода последовательных приближений.

Доказательство. Докажем существование решения для задачи λ_μ. В качестве разрешающего управления выступает пара $\{u, v\}$, имеющая следующий вид:

$$u(t) = E^T(t)c + \hat{u}(t), t \in [\alpha, \beta], v_i = P_i^T c + \hat{v}_i, i = 1,2, ..., p, \tag{15}$$

где $c \in R^n$ постоянный вектор, и $\{\hat{u},\hat{v}\}$ из $\Pi^m[\alpha,\beta]$ и ортогонально всем столбцам матрицы $[E, P_i^T]$.

Очевидно, что задача λ_μ сводится к нахождению решения следующего уравнения, эквивалентного исходной задаче.

$$y(t) = H(t,\alpha)a + \int_\alpha^t H(t,s)\,[C(s)u(s) + f(s) + \sum_{\alpha<\theta_i<s} F_i(s,y,u,\mu)]ds +$$
$$+\sum_{\alpha<\theta_i<t} H(t,\theta_i +)[Q_i\, v_i + I_i + S_i(y,u,v_i,\mu)],\ \ x(\beta) = b \qquad (16)$$

Подставив (15) в (16), найдем, что

$$c = \Psi^{-1}(\beta)\{b - H(\beta,\alpha)a - \int_\alpha^\beta H(\beta,s)[f(s) + \sum_{\alpha<\theta_i<s} F_i(s,y,u,\mu)]ds] -$$
$$- \sum_{i=1}^{p} H(\beta,\theta_i+)[I_i + S_i(y,u,v_i,\mu)]\}. \qquad (17)$$

Обозначим

$$K = b - H(\beta,\propto)a - \int_\alpha^\beta H(\beta,s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{p} H\,(t,\theta_i+)I_i$$

$$u_0(t) = E^T(t)\Psi^{-1}(\beta)K + \hat{u}(t), \ v_i^o = P_i^T\Psi^{-1}(\beta)K + \hat{v}_i,$$
$$y_0(t) = H(t,\alpha)a + \int_\alpha^t H(t,s)[C(s)u_0(s) + f(s)]ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} H(t,\theta_i+)[Q_i v_i^0 + I_i],$$
$$\phi = (y(t),u(t),v_i), \qquad \phi_0 = (y_0(t),u_0(t),v_i^0),$$

$$æ(t,\phi,\mu) = \mu^{-1}\int_\alpha^t H(t,s)\sum_{\alpha<\theta_i<s} F_i(s,y,u,\mu)ds,$$
$$\psi(t,\phi,\mu) = \mu^{-1}\sum_{\alpha<\theta_i<t} H(t,\theta_i+)S_i(y,u,v_i,\mu)].$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\phi = \phi_0 + \mu£(\phi,\mu), \qquad (18)$$

где $£ = (£_1, £_2,\ £^i)$,

$£_1(t,\phi) =æ\,(t,\phi,\mu) + \psi(t,\phi,\mu) - \Psi(t)\Psi^{-1}(\beta)[\,æ(\beta,\phi,\mu) + \psi(\beta,\phi,\mu)]$,

$£_2(t,\phi) = E(t)^T\Psi^{-1}(\beta)[\,æ(\beta,\phi,\mu) + \psi(\beta,\phi,\mu)]$,

$£^i(t,\phi) = £_i^T\Psi^{-1}(\beta)[\,æ(\beta,\phi,\mu) + \psi(\beta,\phi,\mu)]$

Рассмотрим пространство В функций ϕ, имеющих вид $\phi = (y(t),u(t),v_i)$ с нормой $\|\phi\| = \max_t|y(t)| + \max_t|u(t)| + \max_t|v_i|, \}$.

где $y(t) \in$ PAC$[\alpha,\beta]$ и $\{u,v\} \in \Pi^m[\alpha,\beta]$.

Предположим теперь, что величина h, определенная ранее, также удовлетворяет условию $\|\phi_0\| < h$ и существует число $\mu_4 \in R$, для которого выполняется неравенство $\mu_4 \le \mu_3$, такое, что $\mu_4 \max_{\substack{\|\phi\|\le h \\ 0<\mu\le\mu_1}} \|£(\phi,\mu)\| < h - \|\phi_0\|$.

Пусть $\chi = \{\phi: \phi\epsilon B, \|\phi\| < h\}$.

Легко убедиться, что при $\mu \leq \mu_4$ оператор $\phi_0 + \mu£\ (\phi, \mu)$ отображает пространство χ в себя. Далее докажем, что при достаточно малом значении μ оператор $\mu£$ является сжимающим на χ. Для этого сначала покажем, что функции $æ(t, \phi, \mu)$ и $\psi(t, \phi, \mu)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной ϕ. Введем обозначения $\phi_j = (\eta_j, u_j, v_i^{(j)}) \in \chi,\ j = 1,2$. Фиксируем $k, 1 < k \leq p$ и пусть $\pi_j, j = 1,2$, функции, определенные на $[\alpha, \theta_k]$ такие, что $\pi_j(t) = \eta_j(t)$, если $t \in [\alpha, \theta_k] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1}(\theta_i, \zeta_k^{(j)}]$, где $\zeta_k^{(j)}$ – точка разрыва функции π_j и

$$\int_\alpha^t [A(s)\pi_j(s) + \int_\alpha^s K(s,\sigma)\pi_j(\sigma)d\sigma + \mu\, g(s, \pi_j(s), u_j(s), \mu)]ds =$$
$$= \int_\alpha^t [A(s)\eta_j(s) + \int_\alpha^s K(s,\sigma)\eta_j(\sigma)d\sigma + \sum_{\alpha<\theta_i<s} F_i(s, \eta_j, u_j, \mu)]ds \tag{19}$$

для всех $t \in [\alpha, \theta_k]$.

Предположим, что

$$\|\pi_1(t) - \pi_2(t)\| \leq l_1(\mu)\|\varphi_1 - \varphi_2\| \text{ для всех } t \in [\propto, \theta_k] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)}) \tag{20}$$

и

$$\zeta_i^{(2)} - \zeta_i^{(1)} \leq \mu l_2(\mu)\|\varphi_1 - \varphi_2\| \tag{21}$$

где $l_1(\mu)$ и $l_2(\mu)$ – ограниченные функции и без ограничения общности $\zeta_i^{(2)} \geq \zeta_i^{(1)}\ \ i = \overline{1,p}.$

Теперь продолжим функцию $\pi_j(t)$, рассматривая ее как решение следующей системы

$$\frac{d\pi}{dt} = A(t)\pi(t) + \int_\alpha^t K(t,s)\pi(s)ds + C(t)u_j(t) + f(t) + \mu g(t, \pi, u_j, \mu),$$

с начальным условием $\pi(\theta_k) = \eta_j(\theta_k)$, пока это решение не пересечет поверхность $t = \theta_k + \mu\tau_k(x, \mu)$ в момент $t = \zeta_k^{(j)}$.

Очевидно, что для $t \in [\theta_k, \zeta_k^{(j)}]$,

$$\pi_j(t) = \eta_j(\theta_k) + \int_{\theta_k}^t [A(s)\pi_j(s) + \int_\alpha^s K(t,\sigma)\pi_j(\sigma)d\sigma + C(t)u_j(t) +$$
$$+ f(t) + \mu g(t, \pi_j(s), u_j(s), \mu)]ds. \tag{22}$$

Предположим, что $|\pi_j(t)| < H,\ t \in [\alpha, \theta_k]$. Покажем, что это неравенство верно также для $t \in [\theta_k, \zeta_k^{(j)}]$. Допустим, что утверждение неверно, и пусть $t = t^*$ – это первая точка, в которой неравенство перестает выполняться, то есть выполняется условие $|\pi_j(t^*)| \geq H$.

Но тогда, используя (22) для $t \in [\theta_k, t^*]$, имеем, что $|\pi_j(t)| \leq h + \mu_3 m_3 \gamma(\mu_3) < H$, и в частности $|\pi_j(t^*)| < H$. Следовательно, полученное противоречие подтверждает справедливость данного утверждения.

Теперь, используя соотношения (20)–(22), приходим к следующему результату.

$$\|\pi_1(t) - \pi_2(t)\| \leq l_3(\mu)\|\phi_1 - \phi_2\| \quad \text{для } t \in [\theta_k, \zeta_k^{(1)}], \tag{23}$$

где

$$l_3(\mu) = (1 + l_1(\mu)(\beta - \alpha) + p l_2(\mu)\gamma(\mu) + m_1 + \mu L)(1 - \mu m_3(m_1(1 + \mu m_3) + \mu L))^{-1}.$$

Кроме того, используя

$$\zeta_k^{(2)} - \zeta_k^{(1)} = \mu\tau_k(\pi_2(\zeta_k^{(2)}), \mu) - \mu\tau_k(\pi_1(\zeta_k^{(1)}), \mu) \leq$$
$$\leq \mu L \left| \pi_2(\zeta_k^{(2)}) - \pi_2(\zeta_k^{(1)}) - \pi_2(\zeta_k^{(1)}) + \pi_1(\zeta_k^{(1)}) \right|,$$

найдем, что

$$\zeta_k^{(2)} - \zeta_k^{(1)} \leq \mu l_4(\mu) \|\phi_1 - \phi_2\| \quad (24)$$

где $l_4(\mu) = \mu L l_3(\mu)(1 - \mu L\gamma(\mu))^{-1}$.
Теперь можно рассмотреть S_k.

$$\left| S_k(\eta_1, u_1, v_k^{(1)}, \mu) - S_k(\eta_2, u_2, v_k^{(2)}, \mu) \right| = B_k(\pi_1(\zeta_k^{(1)}) - \eta_1(\theta_k) - \pi_2(\zeta_k^{(1)}) + \eta_2(\theta_k) +$$
$$B_k(\pi_2(\zeta_k^{(1)}) - \pi_2(\zeta_k^{(2)}) + \textstyle\sum_{\alpha<\xi_j\leq\xi_k}[D_{kj}\ (\pi_1(\zeta_j^{(1)}) - \eta_1(\theta_j) - -\pi_2(\zeta_j^{(1)}) +$$
$$\eta_2(\theta_j) + D_{kj}\,(\pi_2(\zeta_j^{(1)}) - \pi_2(\zeta_j^{(2)})))] + \mu(W_k(\pi_1(\zeta_k^{(1)}), v_k^{(1)}, \mu) - -W_k(\pi_2(\zeta_k^{(2)}), v_k^{(2)}, \mu)) \quad (25)$$

Применив (22), получим

$$\pi_1(\zeta_j^{(1)}) - \eta_1(\theta_j) - \pi_2(\zeta_j^{(2)}) + \eta_2(\theta_j) =$$
$$= \int_{\theta_k}^{\zeta_k} A(s)\,[\pi_1(s) - \pi_2(s)]ds + \int_{\alpha}^{s} K(s,\sigma)[\pi_1(\sigma) - \pi_2(\sigma)]d\sigma + +C(s)[u_1(s) - u_2(s)]$$
$$+ \mu[g(s, \pi_1(s), u_1(s), \mu) - g(s, \pi_2(s), u_2(s), \mu)]\}ds +$$
$$+ \int_{\zeta_k^{(1)}}^{\zeta_k^{(2)}} \{A(s)\pi_2(t) + + \int_{\propto}^{s} K(t,s)\pi_2(s)ds + C(t)u_2(t) + f(t) + \mu g(t, \pi_2(t), u_2(t), \mu)\}dt.$$

Поэтому, используя (23) и (24), мы найдем

$$\left| \pi_1(\zeta_j^{(1)}) - \eta_1(\theta_j) - \pi_2(\zeta_j^{(2)}) + \eta_2(\theta_j) \right| \leq \mu l_5(\mu) \|\phi_1 - \phi_2\| \quad (26)$$

где

$$l_5(\mu) = m_3(m_1(l_3(\mu) + l_1(\mu)(\beta - \alpha) + 1) + p l_3(\mu)\gamma(\mu) + \mu L) + l_4(\mu)\gamma(\mu).$$

Из (23) и (26) следует, что

$$\left| S_k(\eta_1, u_1, v_k^{(1)}, \mu) - S_k(\eta_2, u_2, v_k^{(2)}, \mu) \right| \leq \mu l^{(1)}(\mu) \|\phi_1 - \phi_2\|,$$

где $l^{(1)}(\mu) = m_1(p+1)(l_5(\mu) + l_3(\mu)\mu l_4(\mu)\gamma(\mu)$ ограниченная функция. Так как есть конечное число S_j, то существует $L_1(\mu)$ такое, что

$$\left| S_i(\eta_1, u_1, v_i^{(1)}, \mu) - S_i(\eta_2, u_2, v_i^{(2)}, \mu) \right| \leq \mu L^{(1)}(\mu) \|\phi_1 - \phi_2\| \quad (27)$$

для $i = 1,2, \dots, p$.

Аналогично для F_i, используя (14), можно показать, что существует функция $L^{(2)}(\mu)$, ограниченная, и такая, что

$$\left| \textstyle\sum_{\propto<\theta_i<t} F_i\,(t, \eta_2, u_2, \mu) - \sum_{\propto<\theta_i<t} F_i\,(t, \eta_1, u_1, \mu) \right| \leq \mu L^{(2)}(\mu) \|\phi_1 - \phi_2\| \quad (28)$$

равномерно для $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $m_4 = max_{t.s}|H(t,s)|$. Используя (27) и (28) получим, что

$$|\psi(t,\phi_1,\mu)-\psi(t,\phi_2,\mu)| \le pm_4L^{(1)}(\mu)\|\phi_1-\phi_2\|$$

и

$$|\text{æ}\,(t,\phi_1,\mu)\text{-}\,\text{æ}\,(t,\phi_2,\mu)| \le (\beta-\alpha)m_4L^{(2)}(\mu)\|\phi_1-\phi_2\|.$$

Таким образом,

$$|\text{æ}\,(t,\phi_1,\mu)\text{-}\,\text{æ}\,(t,\phi_2,\mu)|+|\psi(t,\phi_1,\mu)-\psi(t,\phi_2,\mu)| \le \mu L(\mu)\|\phi_1-\phi_2\|,$$

где $L(\mu)=(\beta-\alpha)L^{(2)}(\mu)+pm_4L^{(1)}(\mu)$.

Наконец, обозначая

$$m_5 = max\{\underset{t}{max}\|\Psi(t)\Psi^{-1}(\beta)\|,\underset{t}{max}\|E^T(t)\Psi^{-1}(\beta)\|,\underset{i}{max}\|P_i^T\Psi^{-1}(\beta)\|\},$$

можно получить, что

$$\|\text{£}(\phi_1,\mu)-\text{£}(\phi_2,\mu)\| \le 2L(\mu)(1+6m_5)\|\phi_1-\phi_2\|.$$

Следовательно, если $\mu_0 \le \mu_4$ и μ_0 достаточно мало, так что для всех $\mu<\mu_0$ выполняется неравенство $2\mu L(\mu)(1+6m_s)<1$, то оператор $\mu\text{£}$ является сжимающим.

Таким образом, можно заключить, что оператор $\phi_0+\mu\text{£}(\phi,\mu)$ имеет неподвижную точку ϕ^0. Нетрудно проверить, что ϕ^0 есть решение задачи λ_μ. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполнены все перечисленные выше условия и матрица $\Psi(\beta)$ невырожденная. Тогда задача управления γ_μ разрешима.

Доказательство. Согласно лемме 3 существует управление $\{\hat{u},\hat{v}\}$, при котором система (8) имеет решение $y(t)$, такое, что $y(\alpha)=a, y(\beta)=b$. Так как (1) и (8) B-эквивалентны, то уравнение (1) с управлением $\{\hat{u},\hat{v}\}$ допускает решение $x(t)$ такое, что $x(t)=y(t)$ для всех t, исключая $t\in[\theta_i,\zeta_i], i=\overline{1,p}$. Так как α и β не включены в $[\theta_i,\zeta_i], i=\overline{1,p}$, то $x(\alpha)=x(\beta)$. Значит, краевое условие (2) выполнено и теорема доказана.

Заключение

В данной работе исследована задача управляемости для квазилинейных интегро-дифференциальных систем с импульсным воздействием. Основное внимание уделено случаям, когда моменты импульсов зависят от состояния системы, что приводит к необходимости разработки новых аналитических методов. Показано, что применение метода сведения к уравнениям с фиксированными моментами импульсного воздействия позволяет существенно упростить анализ системы и сформулировать условия управляемости. Разработан метод построения разрешающего управления, учитывающий как непрерывные, так и импульсные компоненты воздействия. Продемонстрировано, что предложенные алгоритмы позволяют не только гарантировать достижение требуемого состояния системы, но и минимизировать функционал затрат, что обеспечивает оптимальность управления в среднем.

Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка более общих методов управления для нелинейных систем с произвольной структурой импульсов, а также учет неопределенностей и стохастических факторов, влияющих на динамику процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Abbasov, E.M., Agaeva, N.A., and Imamaliev, S.A. Modeling of hydrodynamics of liquid motion in complex profile pipeline. Journal of Engineering Thermophysics, 29 (3), 2020.

2 Kler, A., Apanovich, D., and Maximov, A. An effective method for calculating the elements of thermal power plants, which are reduced to solving systems of partial differential equations. E3S Web of Conferences, 209, 03029 (2020). https://doi.org/10.1051/e3sconf/202020903029

3 Rodríguez, F., López, J.C.C., and Castro, M.A. Models of Delay Differential Equations (Basel: MDPI, 2021).

4 Tinyukova, T.S., and Chuburin, Yu.P. Majorana states near an impurity in the Kitaev infinite and semi-infinite model. Theoretical and Mathematical Physics, 200 (1), 1043–1052 (2019).

5 Samoilenko, A.M., and Perestyuk, N.A. Differentsial'nye uravneniya s impul'snym vozdeistviem [Differential Equations with Impulsive Action] (Kiev: Vishcha Shkola, 1987), 287 p. (In Russian).

6 Yuldashev, T.K., Odinaev, R.N., and Zarifzoda, S.K. On exact solutions of a class of singular partial integro-differential equations. Lobachevskii Journal of Mathematics, 42 (3), 676–684 (2021). https://doi.org/10.1134/S1995080221030240

7 Lakshmikantham, V., Bainov, D.D., and Simeonov, P.S. Theory of Impulsive Differential Equations (Singapore: World Scientific, 1989).

8 Kolmogorov, A.N., and Fomin, S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis] (Moscow: Nauka, 1989), 623 p. (In Russian).

9 Akhmetov, M.U. Pochti periodicheskie resheniya integro-differentsial'nykh uravnenii s impul'snym vozdeistviem [Almost periodic solutions of integro-differential equations with impulsive action]. Matematicheskaya Fizika i Nelineinye Kolebaniya, 42, 5–6 (1987). (In Russian).

10 Lando, Yu.K. Ob upravlyaemykh integro-differentsial'nykh operatorakh [On controllable integro-differential operators]. Differentsial'nye Uravneniya, 9 (12), 2227–2230 (1973). (In Russian).

11 Aisagaliev, S.A. Controllability Theory of the Dynamic Systems (Almaty: Kazakh University, 2014), 158 p.

12 Barbu, V., Iannelli, M., and Martcheva, M. On the controllability of the Lotka-McKendrick model of population dynamics. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 253 (1), 142–165 (2001).

13 Rama Mahana Rao, M., Srivastava, K.S., and Sivasundaram, S. Stability of linear delay impulsive differential equations with impulsive effect. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 163, 47–59 (1992).

14 Anokhin, L., Berezansky, and Braverman, E. Stability of linear delay impulsive differential equations. Dynamic Systems and Applications, 4, 173–188 (1995).

15 Akhmet, M., Dauylbayev, M., and Mirzakulova, A. A singularly perturbed differential equation with piecewise constant argument of generalized type. Turkish Journal of Mathematics, 42 (4), 1680–1685 (2018).

16 Dzhumabaev, D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs. Differential Equations, 51 (9), 1180–1196 (2015).

17 Akhmetov, M.U., and Perestyuk, N.A. O dvizhenii s impul'snym vozdeistviem na poverkhnostyakh [On motion with impulsive action on surfaces]. Izvestiya AN KazSSR. Seriya fiziko-matematicheskaya, 1, 11–14 (1988). (In Russian).

18 Akhmetov, M.U., and Perestyuk, N.A. O metode sravneniya dlya differentsial'nykh uravnenii s impul'snym vozdeistviem [On the comparison method for differential equations with impulsive action]. Differentsial'nye Uravneniya, 26 (9), 1475–1483 (1990). (In Russian).

19 Akhmet, M., Tleubergenova, M., Seilova, R., and Nugayeva, Z. Symmetrical impulsive inertial neural networks with unpredictable and Poisson-stable oscillations. Symmetry, 15 (10), 1812 (2023). https://doi.org/10.3390/sym15101812

20 Akhmet, M., Aviltay, N., Dauylbayev, M., and Seilova, R. A case of impulsive singularity. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 117 (1) (2023). https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v117.i1.0

21 Mynbayeva, S.T., and Tankeyeva, A.K. A computational method for solving a boundary value problem for impulsive integro-differential equation. International Journal of Mathematics and Physics, 14 (1), 45–52 (2023).

22 Mynbayeva, S.T., Assanova, A.T., and Tankeyeva, A.K. On the solvability of a quasilinear boundary value problem for an impulsive system. Lobachevskii Journal of Mathematics, 45 (10), 5146–5155 (2024).

[1]Сейлова Р.Д.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-4666-8001,
e-mail: roza_seilova@mail.ru
[1]Талипова М.Ж.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]Бекбауова А.У.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,
e-mail: mirra478@mail.ru
[1]*Еримбетова Г.Г.,
докторант, ORCID ID: 0000-0002-7352-5997,
*e-mail: gulmira.yerimbetova1982@gmail.com

[1]К. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің Математика кафедрасы,
Ақтөбе қ., Қазақстан

КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИЯЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ ИМПУЛЬСТІК ӘСЕР ЕТУ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ БАСҚАРУ

Аңдатпа

Мақалада импульстік әсер ету жағдайындағы квазисызықты интегро-дифференциалдық жүйелерді басқару мәселесі қарастырылады. Импульстік әсер ету сәттерін анықтайтын теңдеулерге енгізілген әлсіз сызықты емес ауытқулардың ықпалы зерттеледі, бұл өзгермелі импульстік сәттері бар жүйелерді талдау қажеттілігіне әкеледі. Импульстік әсер ету сәттерін бекітілген теңдеулерге келтіру әдісі қолданылады, бұл классикалық басқару әдістерін пайдалануға мүмкіндік береді. Жүйені бастапқы күйден берілген соңғы күйге ауыстыруды қамтамасыз ететін басқару әдістері әзірленді. Интегро-дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің болуы мен бірегейлігі шарттары, сондай-ақ белгілі бір шығын функционалын минимизациялауға бағытталған басқаруды орташа оңтайландыру мәселесі қарастырылды. Алынған нәтижелер автоматты реттеу, дискретті және үздіксіз әсер ететін динамикалық жүйелерді модельдеу, сондай-ақ технологиялық және экономикалық процестерді басқару міндеттерінде қолданылуы мүмкін. Бұл жұмыс дифференциалдық теңдеулер, басқару теориясы және қолданбалы математика салаларындағы мамандар үшін қызықты болады.

Түйін сөздер: басқарылу, квазисызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер, импульстік әсер ету, оңтайлы басқару әдістері, шекаралық басқару есебі, әлсіз сызықты емес ауытқулар.

[1]Seilova R.D.,
PhD, Associate Professor, ORCID ID 0000-0002-4666-8001,
e-mail: roza_seilova@mail.ru
[1]Talipova M.Zh.
PhD, Associate Professor, ORCID ID 0000-0001-9728-8378,
e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]Bekbauova A.U.,
PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,
e-mail: mirra478@mail.ru
[1]*Yerimbetova G.G.,
PhD student, ORCID ID 0000-0002-7352-5997,
*e-mail: gulmira.yerimbetova1982@gmail.com

[1]K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

CONTROL OF QUASILINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH IMPULSE EFFECTS

Abstract

This paper examines the controllability problem of quasilinear integro-differential systems with impulse effects. The influence of weak nonlinear perturbations included in the equations that determine the moments of impulse effects is studied, leading to the necessity of analyzing systems with variable impulse moments. The method of reduction to equations with fixed impulse moments is applied, allowing for the use of classical control approaches. Methods for constructing admissible control that ensures the transition of the system from an initial state to a given final state are developed. The conditions for the existence and uniqueness of solutions, as well as the optimization of control in the mean, aimed at minimizing a given cost functional, are considered. The obtained results can be applied in automatic regulation tasks, modeling of dynamic systems with discrete and continuous influences, as well as in the control of technological and economic processes. This work will be of interest to specialists in differential equations, control theory, and applied mathematics.

Keywords: controllability, quasilinear integro-differential equations, impulse effects, optimal control methods, boundary control problem, weak nonlinear perturbations.

Received February 2, 2026; revised March 2, 2026; accepted March 6, 2026.