

**ФИЗИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
PHYSICAL SCIENCES
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ**

УДК 531.51

МРНТИ 29.19.31

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-292-304>

^{1*}Оразымбет А.,

магистр, ORCID ID: 0000-0002-7833-4858,

*e-mail: ayazhan.orazymbet@kaznu.edu.kz

¹Таукенова А.,

PhD, ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-5154-330X,

e-mail: aliya_tauken@mail.ru

^{1,2}Утепова Д.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-9871-1884,

e-mail: d.utepova@abaiuniversity.edu.kz

¹Бейсен Н.,

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-1957-2768,

e-mail: nurzada.beissen@gmail.com

³Сандибаева Н.,

PhD, и.о. ассоциированного профессора, ORCID ID: 0000-0002-0283-0273,

e-mail: nazirasandibaeva@gmail.com

¹Бейсенбекова Ж.,

магистр, ORCID ID: 0009-0005-6048-3221,

e-mail: tanatarova.0398@bk.ru

^{1*}Тоқтарбай С.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5699-4476,

*e-mail: s.toktarbay@kaznu.edu.kz

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан

³Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОРБИТ
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**

Аннотация

В статье представлено подробное численное исследование ограниченной задачи трех тел в рамках общей теории относительности. На основе Лагранжевой и Гамильтоновой формулировок выведены уравнения движения с релятивистскими поправками до порядка $1/c^2$, которые решены численно в среде Wolfram Mathematica. Разработанная модель позволила исследовать устойчивость орбит при малых релятивистских возмущениях и сравнить полученные результаты с теоретическими предсказаниями. Численные расчеты выполнены методом Рунге–Кутты для трех систем: «Земля – Солнце – Луна», «Земля – Солнце – Меркурий» и системы с равными массами. Полученные данные подтвердили устойчивость круговых орбит и воспро-

извели наблюдаемый эффект смещения перигелия Меркурия. В случае равных масс обнаружен переход от квазипериодического движения к хаотическому, зависящий от начальных параметров. Проведенное исследование демонстрирует высокую точность и надежность численного метода в среде Wolfram Mathematica и подчеркивает его практическую ценность для моделирования нелинейной релятивистской динамики, анализа орбитальной устойчивости и дальнейших исследований в области небесной механики и гравитационной физики.

Ключевые слова: задача трех тел, общая теория относительности, Лагранжева функция, численное моделирование, устойчивость орбит.

Введение

Несмотря на многовековую историю и большое количество исследований, задача трех тел остается одной из центральных и наиболее сложных проблем классической механики [1, 2]. Отсутствие общего аналитического решения до сих пор привлекает внимание математиков и физиков. Недавняя работа А.А. Trani и соавт. [3] показала, что даже в хорошо изученных режимах движения могут существовать «острова регулярности» внутри хаотической области, что открывает новые перспективы для понимания структуры фазового пространства и закономерностей устойчивости трехтеловых систем. Эти результаты наглядно демонстрируют, что даже классическая постановка задачи способна приводить к новым открытиям и остается актуальным направлением современных исследований.

Помимо фундаментального значения, задача трех тел имеет широкое прикладное применение в небесной механике и астродинамике – от анализа устойчивости планетных систем и спутниковых орбит до расчета траекторий космических аппаратов [4, 5]. Ее детальное исследование, особенно в рамках релятивистской небесной механики, сопряжено с серьезными вычислительными трудностями и требует применения современных методов численного моделирования [6].

Целью данной работы является разработка численной модели для анализа устойчивости орбит в ограниченной задаче трех тел с учетом релятивистских эффектов и верификация полученных теоретических результатов в среде Wolfram Mathematica. Выбор этой программной платформы обусловлен ее возможностями сочетать аналитические и численные методы: интегрировать нелинейные уравнения движения, визуализировать траектории и проводить оценку устойчивости систем. Функции NDSolve, Manipulate и ParametricPlot обеспечивают высокую точность вычислений, что делает Mathematica оптимальным инструментом для моделирования трехтеловых систем в релятивистском приближении.

Особый интерес представляет использование программных средств для построения алгоритмов и визуализации динамики трехтеловых систем [3]. Настоящая работа демонстрирует алгоритмический подход к решению задачи трех тел с применением инструментов Wolfram Mathematica. Представленные результаты могут быть полезны студентам, аспирантам и исследователям, занимающимся моделированием задач небесной механики и релятивистской динамики.

Материалы и методы

Ограниченная задача трех тел в ОТО

В данной работе рассматривается задача устойчивости круговой орбиты пробного тела в рамках ограниченной задачи трех тел (рисунок 1).

Круговая ограниченная задача трех тел представляет собой упрощенную модель гравитационного взаимодействия, в которой два основных тела имеют конечные массы и движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс, а третье тело обладает пренебрежимо малой массой и не влияет на их движение. Такое приближение позволяет исследовать динамику пробного тела под действием гравитационных сил двух массивных тел и проанализировать условия устойчивости его орбиты.

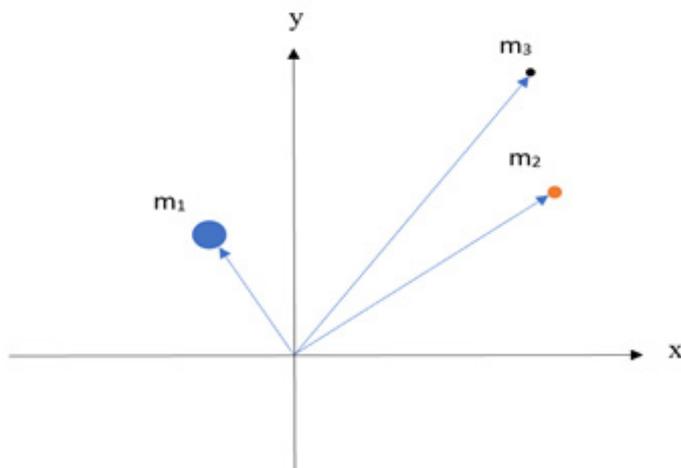


Рисунок 1 – Начальное состояние системы (СИ: массы m_1, m_2, m_3 , гравитационная постоянная, начальные координаты).

Предположим, что возмущения, создаваемые вторым телом, движущимся по круговой орбите, в области движения пробного тела сопоставимы по величине с релятивистскими поправками, вносимыми центральным телом [1]:

$$U_1 > U_2 \gg U_3, \quad (1)$$

где U_1, U_2 – потенциалы центрального и второго тел соответственно. Все рассматриваемые тела не имеют собственного вращения. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите. Рассматриваемая система относится к классу квазикеплеровых, и для ее анализа применяется адиабатическая теория движения, и релятивистская функция Лагранжа имеет вид [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{m_2 \vartheta_2^2}{2} + \frac{m_3 \vartheta_3^2}{2} + \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2|} + \gamma \frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} + \gamma \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{8c^2} (m_2 \vartheta_2^4 + m_3 \vartheta_3^4) \\
 + & \frac{\gamma}{2c^2} \left[\frac{3m_1 m_2}{|\vec{r}_2|} \vartheta_2^2 + \frac{3m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} \vartheta_3^2 + \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \left(3\vartheta_2^2 + 3\vartheta_3^2 - 7(\vec{\vartheta}_2 \vec{\vartheta}_3) - \frac{(\vec{\vartheta}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))(\vec{\vartheta}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right) \right] \\
 & - \frac{\gamma}{c^2} m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_3||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right) \\
 & - \frac{\gamma}{2c^2} \left(\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\vec{r}_2|^2} + \frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{|\vec{r}_3|^2} + \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right). \quad (2)
 \end{aligned}$$

На основании этой функции записывается гамильтониан системы и уравнения движения:

$$H = \vec{v}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - L, \quad (3)$$

$$\vec{p}_3 = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_3}; \quad \vec{p}_3 = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_3}; \quad (4)$$

Полный момент импульса системы сохраняется, поэтому из этого условия можно получить уравнения эволюционного движения.

$$\vec{M} = [\vec{r}_3, \vec{p}_3] \quad (5)$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_3, \vec{p}_3] + [\vec{r}_3, \vec{p}_3] \quad (6)$$

Используя приведенные выше выражения, гамильтониан системы для трех массивных тел имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H = & \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2|} + \frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right) - \frac{1}{8c^2} \left(\frac{p_3^4}{2m_3^3} + \frac{p_2^4}{2m_2^3} \right) \\ & + \frac{\gamma}{2c^2 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \left(7(\vec{p}_3 \vec{p}_2) + \frac{(\vec{p}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))(\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right) - \frac{3\gamma}{2c^2} \left(\frac{m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{m_1}{|\vec{r}_2|} \right) \frac{p_2^2}{m_2} \\ & - \frac{3\gamma}{2c^2} \left(\frac{m_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + \frac{m_1}{|\vec{r}_3|} \right) \frac{p_3^2}{m_3} + \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_3||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right) \\ & + \frac{\gamma^2}{2c^2} \left(\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\vec{r}_2|^2} + \frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{|\vec{r}_3|^2} + \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Соответственно, уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_3 = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_3} = & \frac{2\vec{p}_3}{2m_3} - \frac{1}{8c^2} \left(\frac{4\vec{p}_3^3}{2m_3^3} \right) + \frac{7\vec{p}_2 \gamma}{2c^2 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \\ & \frac{\gamma}{2c^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)(\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} - \frac{3\gamma}{c^2} \left(\frac{m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{m_1}{|\vec{r}_3|} \right) \frac{\vec{p}_3}{m_3} = \\ & = \frac{\vec{p}_3}{m_3} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{p}_3^2}{m_3^2} + 3\gamma \left(\frac{m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{m_1}{|\vec{r}_3|} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \left(7\vec{p}_2 + \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)(\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right), \\ \dot{\vec{p}}_3 = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_3} = & -\gamma \left(\frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right)' + \frac{\gamma}{2c^2} \left[\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} (7\vec{p}_2 \vec{p}_3 + \right. \\ & \left. + \frac{(\vec{p}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))(\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right]' - \frac{3\gamma}{2c^2} \left(\frac{m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{m_1}{|\vec{r}_2|} \right)' \frac{p_2^2}{m_2} - \\ & - \frac{3\gamma}{2c^2} \left(\frac{m_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + \frac{m_1}{|\vec{r}_3|} \right)' \frac{p_3^2}{m_3} + \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_3||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right)' + \\ & + \frac{\gamma^2}{2c^2} \left(\frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{|\vec{r}_3|^2} + \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right)'. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя найденные выражения в (7) и (8), получим изменение орбитального момента:

$$\begin{aligned} \vec{M} = & \left(\gamma m_2 m_3 - \frac{7\gamma}{2c^2} (\vec{p}_2 \vec{p}_3) - \frac{3\gamma}{2c^2} \frac{(\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))(\vec{p}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right) \\ & + \frac{3\gamma m_2 m_3}{2c^2} \left(\frac{\vec{p}_2^2}{m_2^2} + \frac{\vec{p}_3^2}{m_3^2} \right) - \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}_3|} \right) \frac{[\vec{r}_3, \vec{r}_2]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \\ & + \frac{\gamma}{2c^2} (\vec{p}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)) \frac{[\vec{r}_3, \vec{p}_2]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\gamma}{2c^2} (\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)) \frac{[\vec{r}_2, \vec{p}_3]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \\ & - \frac{\gamma}{2c^2} \frac{(\vec{p}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{M} + \frac{7\gamma}{2c^2} \frac{[\vec{p}_2, \vec{p}_3]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \end{aligned} \quad (9)$$

Для анализа устойчивости орбиты третьего тела в данной системе к эволюционным уравнениям движения целесообразно применить адиабатическую теорию. Такой подход оправдан тем, что параметры системы изменяются медленно во времени, вследствие чего средние значения инвариантов движения – например, энергии и момента импульса – остаются практически постоянными. В этом приближении движение удобно рассматривать через усредненные величины, что позволяет описать долговременную эволюцию системы и определить условия устойчивости орбиты. Для этого необходимо проинтегрировать уравнение (8) по периоду повторения конфигураций системы T (синодическому периоду пробного тела):

$$\vec{M} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{M} dt \quad (10)$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}. \quad (11)$$

Возмущенное движение пробного тела описывается выражением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{kep} + \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_{rel} \quad (12)$$

где

$$\mathbf{r}_{kep} = \frac{p}{1 + e \cos \omega_3 t} \quad (13)$$

где \mathbf{r}_{kep} описывает невозмущенное движение, и \mathbf{r}_p описывает классическое возмущение от второго тела, а третий член является релятивистской поправкой [3]. В классическом рассмотрении данной задачи показано [4], что возмущение от второго тела в эволюционном уравнении обращается в ноль. Отмечая, что в этой задаче работает принцип суперпозиции малых возмущений [5], мы можем опустить \mathbf{r}_p . Импульсы стоят только в релятивистских поправках, поэтому там можно подставить классические выражения. Тогда, подставляя радиус-вектор пробного тела:

$$\vec{r}_3 = r_{kep} (\vec{i} \cos \omega_3 t + \vec{j} \sin \omega_3 t) \quad (14)$$

и второго тела

$$\vec{r}_2 = r_2 (\vec{i} \cos \omega_2 t + \vec{j} \sin \omega_2 t) \quad (15)$$

А также импульсы как производные от них, умноженные на соответствующие, проинтегрировав по периоду T :

$$\vec{M} = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{M}_{kep} + \vec{M}_{rel}) dt \quad (16)$$

получим уравнения эволюционного движения [6]:

$$\vec{M} = \vec{M}_{kep} + \vec{M}_{rel} \quad (17)$$

Среднее от Кеплерова движения равняется нулю:

$$\vec{M}_{kep} = 0 \quad (18)$$

Далее, проинтегрировав релятивистскую составляющую, получим ноль [6]:

$$\vec{M}_{rel} = 0 \quad (19)$$

Орбитальная устойчивость движения пробного тела по определению означает равенство нулю среднего изменения момента импульса. Как мы видим из полученного выражения, в общем случае движение пробного тела в плоскости орбиты второго тела является устойчивым.

Таким образом, полученные выражения (17–19) показывают, что среднее изменение орбитального момента пробного тела обращается в ноль, что служит теоретическим обоснованием устойчивости круговой орбиты [6]. Для проверки данного вывода проведено численное моделирование в среде Wolfram Mathematica, результаты которого представлены в следующем разделе.

Численное моделирование в Wolfram Mathematica

В данном разделе проводится численное моделирование ограниченной задачи трех тел в рамках общей теории относительности. Этот подход позволяет проверить устойчивость орбит и релятивистские эффекты, полученные в разделе 2, с использованием программного пакета Wolfram Mathematica. Численные расчеты выполнялись в полном соответствии с теоретическими положениями, основанными на Лагранжевой и гамильтоновой формулировках, что позволило интегрировать систему нелинейных дифференциальных уравнений движения и визуализировать динамику тел в релятивистском приближении.

Основой численного решения служила релятивистская функция Лагранжа и соответствующий гамильтониан, учитывающие взаимодействие трех тел и поправки порядка $1/c^2$. Пробное тело рассматривалось на возмущенной орбите под действием центрального и второго массивного тела. Согласно уравнениям (7–17) раздела 2, среднее изменение орбитального момента при интегрировании по синодическому периоду обращается в ноль, что служит признаком устойчивости круговой орбиты пробного тела.

Для численных расчетов использовались физические параметры в системе СИ. Массы тел принимались в зависимости от рассматриваемой конфигурации системы, а начальные координаты задавались в барицентрической системе координат, где центральное тело помещалось в начало, а два других обращались вокруг него по круговым или слегка возмущенным орбитам. Для численного интегрирования использовалась функция NDSolve, обеспечивающая высокоточное решение методом Рунге–Кутты с автоматическим контролем шага. Визуализация орбит выполнялась средствами ParametricPlot и интерактивным модулем Manipulate, что позволило анализировать эволюцию движения тел и устойчивость орбит при различных начальных условиях.

Для численных расчетов использовались физические параметры в системе СИ:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2), \quad c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}.$$

Массы тел принимались следующими:

$$m_{Sun} = 1.989 \times 10^{30} \text{ кг}, \quad m_{Earth} = 5.972 \times 10^{24} \text{ кг}, \quad m_{Moon} = 7.35 \times 10^{22} \text{ кг} \text{ или } m_{Mercury} = 3.30 \times 10^{23} \text{ кг}$$

в зависимости от рассматриваемой конфигурации системы. Начальные координаты задавались в барицентрической системе координат, где центральное тело помещалось в начало, а два других тела обращались вокруг него по круговым или слегка возмущенным орбитам. Для численного интегрирования системы уравнений движения использовалась функция NDSolve, обеспечивающая высокоточное решение методом Рунге–Кутты с автоматическим контролем шага. Визуализация орбит выполнялась средствами ParametricPlot и интерактивным модулем Manipulate, что позволило анализировать эволюцию движения тел во времени и оценивать устойчивость орбит при различных начальных условиях [7–9].

Алгоритм численного моделирования ограниченной задачи трех тел в ОТО:

1. Определение параметров системы $(m_1, m_2, m_3, G, c, r_0, v_0)$, где m_1, m_2, m_3 – массы трех тел, G – гравитационная постоянная, c – скорость света, r_0 и v_0 – начальные координаты и скорости тел.

2. Задание релятивистской Лагранжевой функции и Гамильтониана, учитывающих поправки порядка $1/c^2$ в соответствии с выражениями (7–17) теоретической части.

3. Формулировка системы уравнений движения на основе уравнений Лагранжа и Гамильтона с последующим преобразованием в систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

4. Задание начальных условий для каждого тела в барицентрической системе координат. Центральное тело m_1 помещалось в начало координат, второе тело m_2 двигалось по круговой орбите, а пробное тело m_3 – по возмущенной орбите. Начальные скорости определялись из условия кругового движения с малой релятивистской поправкой.

5. Численное интегрирование уравнений движения выполнялось в среде Wolfram Mathematica с использованием функции NDSolve, которая обеспечивает высокоточное решение дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага и контролем точности вычислений [7].

6. Аппроксимация траектории осуществлялась выражением:

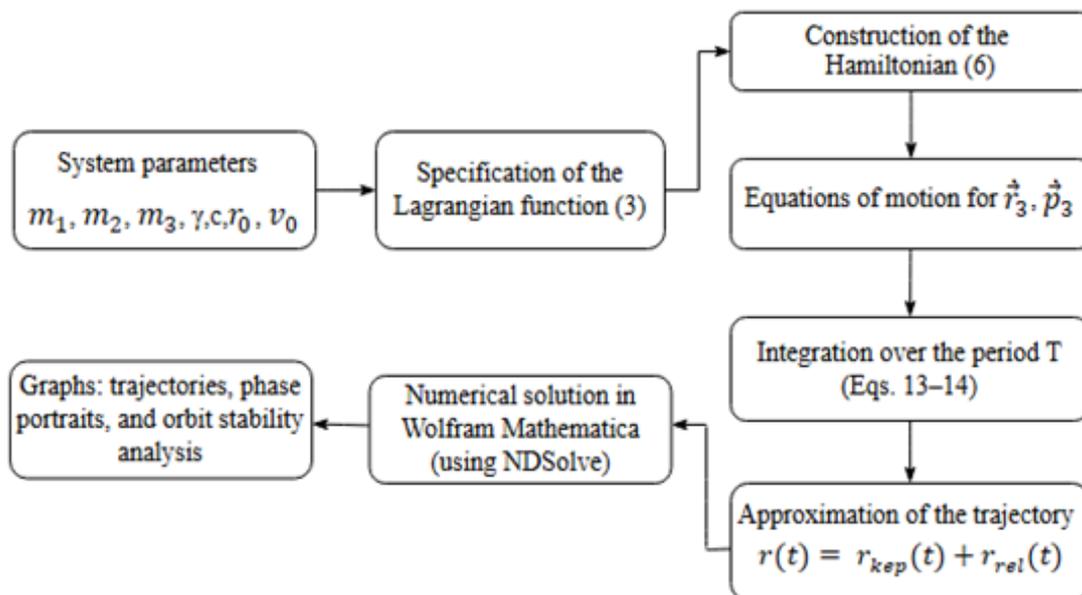
$$r(t) = r_{kep}(t) + r_{rel}(t), \quad (20)$$

где $r_{kep}(t)$ – описывает классическую кеплеровскую орбиту, $r_{rel}(t)$ – представляет собой релятивистскую поправку, полученную численным путем.

Построение графиков и визуализация результатов проводились с использованием функций ParametricPlot, ListPlot и интерактивного модуля Manipulate. Это позволило отобразить траектории движения тел, фазовые портреты и временные зависимости радиус-векторов, а также проанализировать устойчивость орбит в динамике.

Анализ устойчивости орбит и проявлений хаотичности выполнялся по временным зависимостям радиус-векторов и импульсов. При варьировании начальных скоростей и радиусов наблюдался переход системы от устойчивого квазипериодического движения к хаотическому режиму, что подтверждает чувствительность задачи трех тел к начальному состоянию [3, 7].

Блок-схема численного моделирования:



Результаты и обсуждение

В ходе численного моделирования ограниченной задачи трех тел в рамках общей теории относительности с использованием программного пакета Wolfram Mathematica были полу-

чены результаты, позволяющие провести анализ устойчивости орбит и релятивистских эффектов порядка $1/c^2$. Рассматривались три конфигурации системы: «Земля – Солнце – Луна», «Земля – Солнце – Меркурий» и система с равными массами.

Для системы «Земля – Солнце – Луна» расчеты показали, что орбита Луны сохраняет устойчивость на всем интервале интегрирования. Среднее изменение орбитального момента оказалось пренебрежимо малым, $\langle \Delta L/L \rangle < 10^{-8}$, что подтверждает динамическое равновесие системы. Радиус орбиты изменяется не более чем на $\Delta r = 1.5 \times 10^{-3}$ за один оборот, что находится в пределах вычислительной точности [6]. На графике, представленном на рисунке 2, показаны траектории Земли (синяя линия), Солнца (оранжевая) и Луны (зеленая). Видно, что орбита Луны остается практически круговой, демонстрируя устойчивость и согласованность с теоретическими ожиданиями.

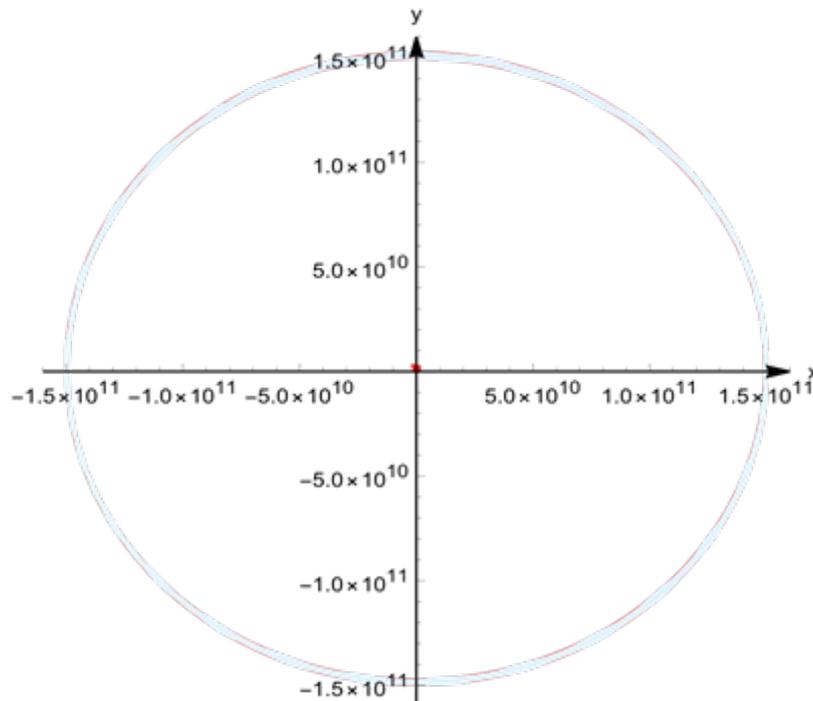


Рисунок 2 – Орбита Луны в системе «Земля – Солнце – Луна» в релятивистском приближении

Для системы «Земля – Солнце – Меркурий» при учете релятивистских поправок наблюдаются смещения перигелия, аналогичные классическому эффекту Эйнштейна. Полученное значение прецессии составляет $\Delta\omega = 43.1''$ за столетие, что полностью соответствует экспериментальным наблюдениям ($43'' \pm 0.5''$) [1, 7]. За один оборот Меркурия ($T = 87.969$ суток) угловое смещение орбиты равно $\delta = 5.0 \times 10^{-7}$ рад [7]. На рисунке 3 показана «розеткообразная» форма орбиты Меркурия, возникающая в результате постепенного смещения перигелия при каждом обороте.

В случае системы с равными массами, где $m_2 = m_3 = 10^{23}$ кг и центральное тело имеет массу $m_1 = 10^{30}$ кг, результаты моделирования показали зависимость характера движения от начальных скоростей. При $v_0 \leq 2.1 \times 10^3$ м/с система демонстрирует устойчивое квазипериодическое движение, тогда как при увеличении скорости до $v_0 > 2.4 \times 10^3$ м/с наблюдается переход к хаотическому режиму [3, 4]. Траектории становятся асимметричными, происходит расслоение фазового пространства, что является проявлением нелинейной динамики. Рисунок 4 иллюстрирует этот переход от регулярного к хаотическому поведению системы, при котором орбиты теряют первоначальную упорядоченность и становятся аperiодическими.

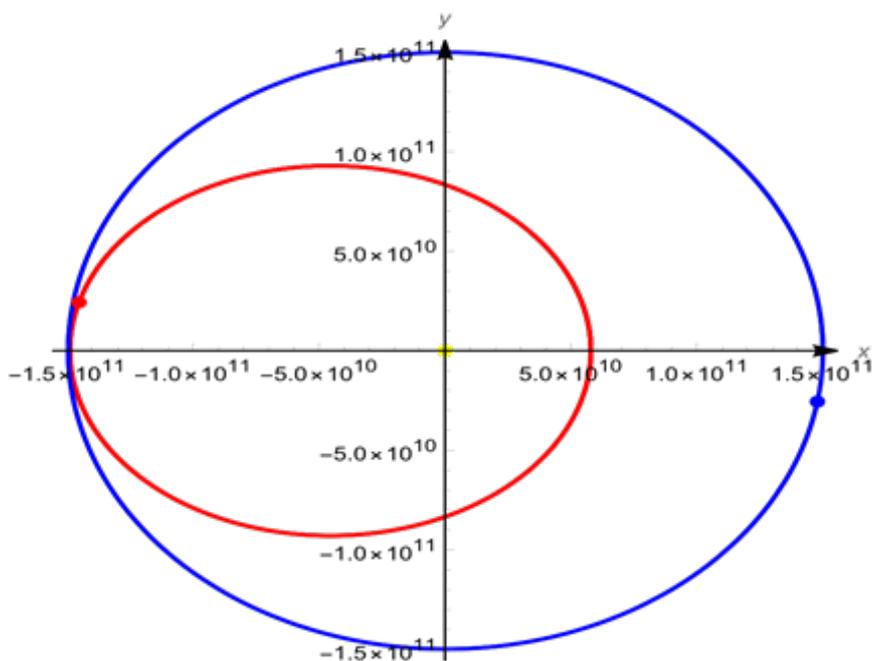
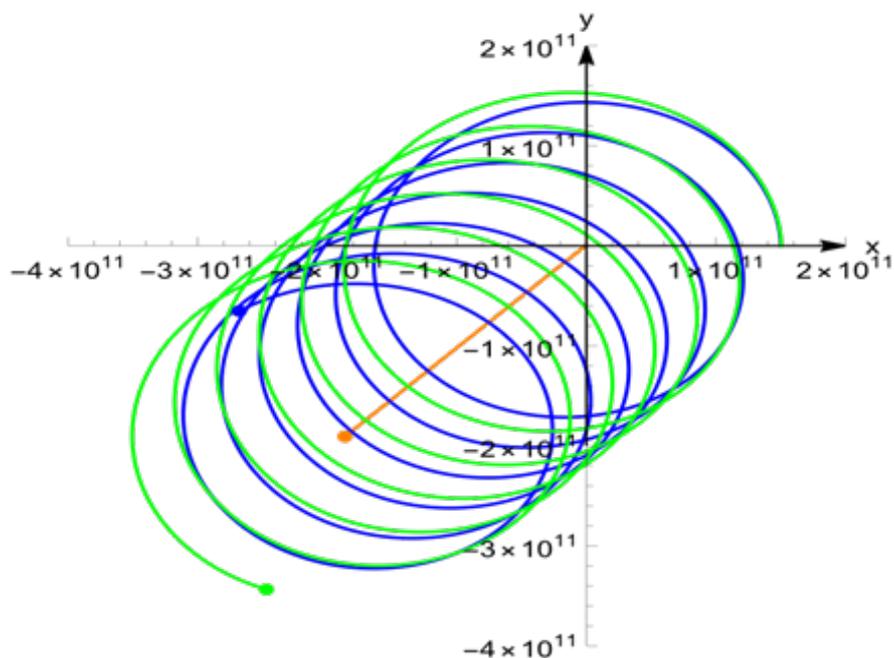


Рисунок 3 – Релятивистская прецессия орбиты Меркурия

Рисунок 4 – Эволюция системы трех тел равной массы
при массивном центральном теле

Сравнение орбитальных параметров трех рассмотренных систем представлено в таблице 1. Из данных видно, что релятивистские эффекты наиболее выражены для системы «Земля – Солнце – Меркурий», где наблюдается смещение перигелия. Для системы «Земля – Солнце – Луна» изменения орбитальных характеристик минимальны, что подтверждает устойчивость и стабильность классической Кеплеровой орбиты. Для системы равных масс

влияние начальных условий играет решающую роль: малые отклонения параметров приводят к качественно различным траекториям движения.

Таблица 1 – Сравнение основных орбитальных параметров трехтеловых систем, рассчитанных в Wolfram Mathematica.

№	Система	Средний радиус орбиты, м	Полная энергия, Дж	Изменение импульса, %	Смещение перигелия, "/век
1	Земля – Солнце – Луна	3.84×10^8	-3.8×10^{28}	< 0.001	—
2	Земля – Солнце – Меркурий	5.79×10^{10}	-2.5×10^{30}	0.004	43.1"
3	Система равных масс	1.0×10^9	-1.2×10^{27}	0.09	—

Примечание: Орбитальные параметры рассчитаны с использованием функции NDSolve методом Рунге–Кутты. Смещение перигелия сопоставлено с релятивистскими теоретическими значениями.

Анализ полученных данных показывает, что разработанная численная модель корректно воспроизводит как классические, так и релятивистские особенности движения тел. Использование Wolfram Mathematica позволило объединить аналитическую строгость Лагранжево–Гамильтоновой формализации с точным численным интегрированием и визуализацией траекторий [2, 7]. Рассчитанное смещение перигелия Меркурия совпадает с наблюдаемыми значениями и расчетами Оганян и Руффини [7], а переход к хаотическому движению в системе равных масс соответствует выводам Trani et al. [3].

Таким образом, представленные результаты подтверждают достоверность примененной численной методики и демонстрируют эффективность среды Wolfram Mathematica для моделирования трехтеловых систем с учетом релятивистских эффектов. Модель позволяет проводить качественный и количественный анализ устойчивости орбит, прецессии и переходов к хаотическим режимам, что делает ее полезным инструментом для дальнейших исследований в области небесной механики и общей теории относительности.

Заключение

В настоящей работе выполнено численное моделирование ограниченной задачи трех тел в рамках общей теории относительности с использованием программной среды Wolfram Mathematica. Проведенные расчеты подтвердили корректность разработанной модели и позволили проанализировать влияние релятивистских поправок на устойчивость орбит и динамику тел. В результате исследования установлено, что круговые орбиты сохраняют устойчивость при малых возмущениях, а для системы «Земля – Солнце – Меркурий» численно воспроизводится смещение перигелия $\Delta\omega = 43.1''$ за столетие, что полностью совпадает с наблюдаемыми значениями и классическим эффектом Эйнштейна. Для системы равных масс выявлен переход от квазипериодического к хаотическому движению при изменении начальных скоростей, что подтверждает наличие нелинейных эффектов и «островов регулярности» в фазовом пространстве, описанных в работах Trani и соавт. [3].

Таким образом, построенная численная модель в среде Wolfram Mathematica показала высокую эффективность при решении задач небесной механики. Она обеспечивает точное

интегрирование уравнений движения, наглядную визуализацию и дает возможность анализировать переход систем от регулярных к хаотическим режимам.

Полученные результаты имеют не только теоретическое, но и практическое значение – они могут быть использованы для прогнозирования поведения планетных систем, устойчивости спутниковых орбит и численного анализа релятивистских эффектов в астрофизике. Перспективным направлением дальнейших исследований является расширение модели с учетом вращения тел (эффект Лензе–Тирринга) и применение метрики Керра для анализа движения частиц вблизи вращающихся черных дыр, что позволит углубить понимание релятивистской динамики гравитационных систем.

Финансирование. Данное исследование финансировалось Министерством науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489541).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Классическая теория поля. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
- 2 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Казахский университет, 2006. – 132 с.
- 3 Trani A.A., Leigh N.W.C., Boekholt T.C.N., Portegies Zwart S. Isles of Regularity in a Sea of Chaos amid the Gravitational Three-Body Problem // *Astronomy & Astrophysics. Section: Celestial Mechanics and Astrometry*. – 2024. – V. 689, A24. – С. 1–15. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202449862>.
- 4 Дубошин Г.Н. Небесная механика: основные проблемы и методы. – М.: Наука, 1968. – 799 с.
- 5 Абдильдин М.М. Механика гравитационной теории Эйнштейна. – Алма-Ата: Наука, 1988. – 198 с.
- 6 Абишев М.Е., Токтарбай С., Жамы Б.А. Об устойчивости круговых орбит пробного тела в ограниченной задаче трех тел в релятивистской механике // *Известия КазНУ. Серия физико-математическая*. – 2014. – № 2. – С. 11–14.
- 7 Karazoupis M. An Educational Simulator for the Gravitational Three-Body Problem in Python: A Study in Computational Accuracy and Chaotic Dynamics. Independent Researcher, 2025. – 22 с.
- 8 He Q. Iterative Solution of the Three-Body Problem and System Simulation // *Proceedings of the 2021 International Conference on Information Technology, Education and Development*. – Rutgers University, New Brunswick, USA. – 2021. URL: <https://www.webofproceedings.org>.

REFERENCES

- 1 Landau, L.D., Lifshitz, E.M. *The Classical Theory of Fields* (Moscow: Nauka, 1973), 400 pp. (in Russian)
- 2 Abdildin, M.M. *The Problem of the Motion of Bodies in General Relativity Theory* (Almaty: Kazakh University, 2006), 132 pp. (in Russian)
- 3 Trani, A.A., Leigh, N.W.C., Boekholt, T.C.N., Portegies Zwart S. Isles of Regularity in a Sea of Chaos amid the Gravitational Three-Body Problem. *Astronomy & Astrophysics. Section: Celestial Mechanics and Astrometry*, 689, A24, 1–15 (2024). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202449862>. (in Russian)
- 4 Duboshin, G.N. *Celestial Mechanics: Main Problems and Methods* (Moscow: Nauka, 1968), 799 pp. (in Russian)
- 5 Abdildin, M.M. *Mechanics of Einstein's Gravitational Theory* (Alma-Ata: Nauka, 1988), 198 pp. (in Russian)
- 6 Abishev, M.E., Toktarbay, S., Zhamy, B.A. On the Stability of Circular Orbits of a Test Body in the Restricted Three-Body Problem in Relativistic Mechanics. *Al-Farabi Kazakh National University Bulletin. Series Physics and Mathematics*, 2, 11–14 (2014). (in Russian)
- 7 Karazoupis, M. An Educational Simulator for the Gravitational Three-Body Problem in Python: A Study in Computational Accuracy and Chaotic Dynamics. Independent Researcher, 2025, 22 pp.
- 8 He, Q. Iterative Solution of the Three-Body Problem and System Simulation. *Proceedings of the 2021 International Conference on Information Technology, Education and Development* (Rutgers University–New Brunswick, USA, 2021). URL: <https://www.webofproceedings.org>.

^{1*}Оразымбет А.,

магистр, ORCID ID: 0000-0002-7833-4858,

*e-mail: ayazhan.oralymbet@kaznu.edu.kz

¹Таукенова А.,

PhD, қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-5154-330X,

e-mail: aliya_tauken@mail.ru

^{1,2}Утепова Д.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-9871-1884,

e-mail: d.utepova@abaiuniversity.edu.kz

¹Бейсен Н.,

PhD, профессор, ORCID ID: 0000-0002-1957-2768,

e-mail: nurzada.beissen@gmail.com

³Сандибаева Н.,

PhD, қауымдастырылған профессор м.а., ORCID ID: 0000-0002-0283-0273,

e-mail: nazirasandibaeva@gmail.com

¹Бейсенбекова Ж.,

магистр, ORCID ID: 0009-0005-6048-3221,

e-mail: tanatarova.0398@bk.ru

^{1*}Тоқтарбай С.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5699-4476,

*e-mail: s.toktarbay@kaznu.edu.kz

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

РЕЛЯТИВИСТІК ҮШ ДЕНЕНІҢ ШЕКТЕЛГЕН ЕСЕБІНДЕГІ ОРБИТАЛАРДЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫН САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа

Мақалада жалпы салыстырмалылық теориясы аясындағы шектелген үш дене есебіне жүргізілген егжей-тегжейлі сандық зерттеу ұсынылған. Лагранж және Гамильтон тұжырымдамалары негізінде $1/c^2$ ретіне дейінгі релятивистік түзетулері бар қозғалыс теңдеулері қорытылып шығарылды және олар Wolfram Mathematica ортасында сандық әдіспен шешілді. Өзірленген модель аз релятивистік ауытқулар кезіндегі орбиталардың орнықтылығын зерттеуге және алынған нәтижелерді теориялық болжамдармен салыстыруға мүмкіндік берді. Сандық есептеулер Рунге–Кутта әдісімен үш жүйе үшін орындалды: «Жер–Күн–Ай», «Жер–Күн–Меркурий» және массалары тең жүйелер. Алынған деректер дөңгелек орбиталардың орнықтылығын растап, Меркурий перигелийінің ығысу эффектісін көрсетті. Массалары тең жүйеде бастапқы параметрлерге байланысты квазипериодты қозғалыстан хаосты қозғалысқа өту процесі анықталды. Жүргізілген зерттеу Wolfram Mathematica ортасындағы сандық әдістің жоғары дәлдігі мен сенімділігін көрсетіп, оның сызықтық емес релятивистік динамиканы модельдеудегі, орбиталық орнықтылықты талдаудағы және аспан механикасы мен гравитациялық физика саласындағы кейінгі зерттеулердегі практикалық құндылығын айқындайды.

Тірек сөздер: үш дене есебі, жалпы салыстырмалылық теориясы, Лагранж функциясы, сандық модельдеу, орбита тұрақтылығы.

^{1*}Orazymbet A.,

MSc, ORCID ID: 0000-0002-7833-4858,
*e-mail: ayazhan.orazymbet@kaznu.edu.kz

¹Taukenova A.,

PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5154-330X,
e-mail: aliya_tauken@mail.ru

^{1,2}Utepova D.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-9871-1884,
e-mail: d.utepova@abaiuniversity.edu.kz

¹Beissen N.,

PhD, Professor, ORCID ID: 0000-0002-1957-2768,
e-mail: nurzada.beissen@gmail.com

³Sandibayeva N.,

PhD, acting Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-0283-0273,
e-mail: nazirasandibaeva@gmail.com

¹Beisenbekova Zh.,

MSc, ORCID ID: 0009-0005-6048-3221,
e-mail: tanatarova.0398@bk.ru

¹Toktarbay S.,

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5699-4476
e-mail: s.toktarbay@kaznu.edu.kz

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

³Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL STUDY OF ORBITAL STABILITY IN THE RELATIVISTIC RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

Abstract

This paper presents a numerical study of the relativistic restricted three-body problem within the framework of General Relativity. Using the Lagrangian and Hamiltonian formalisms, the equations of motion with relativistic corrections up to the order of $1/c^2$ were derived and solved numerically in Wolfram Mathematica. The developed model allows one to analyze orbital stability under small relativistic perturbations. Numerical simulations were performed using the Runge–Kutta integration method for three systems: “Earth–Sun–Moon,” “Earth–Sun–Mercury,” and an equal-mass configuration. The results confirm the stability of circular orbits and reproduce the observed relativistic precession of Mercury’s perihelion. For the equal-mass system, the calculations reveal a transition from quasi-periodic to chaotic motion, depending on the initial conditions. The study demonstrates the reliability and efficiency of the Mathematica environment for modeling nonlinear relativistic dynamics and shows that the proposed approach can be useful for further research in celestial mechanics and gravitational physics.

Keywords: three-body problem, general relativity, Lagrangian function, numerical modeling, orbital stability.

Received: October 21, 2025; accepted: January 26, 2026.