УДК 517.51
МРНТИ 27.39.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-281-291

[1]Ахажанов Т.Б.,
PhD, и.о. доцент, ORCID ID: 0000-0002-9784-9304,
e-mail: talgat_a2008@mail.ru
[1,2]*Мұхамбетжан М.А.,
докторант, сеньор-лектор, ORCID ID: 0009-0002-3632-2303,
e-mail: manshuk-9696@mail.ru
[1]Матин Д.Т.,
PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0002-9784-9304,
e-mail: d.matin@mail.kz
[2]Жулдасов Ж.М.,
сеньор-лектор, ORCID ID: 0009-0007-1927-5951
e-mail: zhanzhanzhan23@gmail.com

[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
[2]Astana IT university, г. Астана, Казахстан

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–УОЛША ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Аннотация

В данной статье рассматриваются оценки коэффициентов Фурье–Уолша для функций двух переменных, обладающих ограниченной вариацией. Исследование направлено на получение верхних оценок модулей коэффициентов ряда Фурье–Уолша, что позволяет анализировать сходимость и аппроксимационные свойства соответствующих рядов. Основное внимание уделено функциям, заданным на единичном квадрате, и имеющим ограниченную вариацию по каждой переменной и в совокупности. Приводятся оценки, зависящие от индексов коэффициентов и характеристик вариации функции. В статье получены новые верхние оценки модулей коэффициентов ряда Фурье–Уолша для функций двух переменных с ограниченной вариацией. В отличие от классических результатов в работе получены новые верхние оценки коэффициентов Фурье–Уолша для функций двух переменных с учетом как вариации по каждой переменной, так и их совместной вариации. Такой подход позволяет более точно описывать поведение коэффициентов и частичных сумм рядов, что важно для исследования абсолютной сходимости и аппроксимационных свойств в многомерном случае. Актуальность работы обусловлена современными направлениями развития теории ортогональных рядов и их прикладными аспектами. Ряды Фурье–Уолша широко применяются в цифровой обработке сигналов, теории сжатия и восстановления данных, а также при анализе дискретных и двоичных структур, что в последние годы приобретает особую значимость в связи с развитием цифровых технологий и вычислительных методов.

Ключевые слова: система функций Уолша, коэффициенты Фурье–Уолша, интегральный модуль непрерывности, функции ограниченной вариации.

Введение

В данной работе рассматриваются оценки коэффициентов Фурье–Уолша для функций двух переменных, обладающих ограниченной вариацией. Исследование основано на использовании интегрального модуля непрерывности, что позволяет установить достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье–Уолша. В процессе анализа применяются методы метрической теории функций, теории приближений и теории ортогональных рядов. Полученные теоретические результаты обладают практической ценностью и могут быть использованы при исследовании свойств функций многих переменных, а также в задачах обработки сигналов, связанных с кратными преобразованиями Фурье–Уолша.

Приведем определение системы Уолша. Рассмотрим на полуинтервале $[0,1)$ функцию

$$r_0(x)=\begin{cases}1,\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ -1,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом 1 на всю числовую ось.

Определим функции $r_k(x)=r_0(2^k x)$, k=0,1,2... представляющие собой сжатия функции $r_k(x)$ в 2^k раз. Функции $r_k(x)$ называются функциями Радемахера.

Систему функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [1] получим в результате всевозможных перемножений между собой функций Радемахера.

Представим натуральное число n в двоичной записи, т.е. в виде

$$n=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i\cdot 2^i,$$

где $\varepsilon_k=1, \varepsilon_i=0$ или 1 при $i=0,1,\ldots,k-1$. Очевидно, что $2^k\le n<2^{k+1}$, где $k=k(n)$. Положим

$$w_n(x)=\prod_{i=0}^{k}(r_i(x))^{\varepsilon_i}.$$

Функции системы Уолша принимают два значения: 1 и -1. В точках разрыва они непрерывны справа.

Пусть $\bar{n}\in R_k$, $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_k)$, $\bar{n}=(n_1,\ldots,n_k)$. Тогда кратную систему Уолша определим следующим образом:

$$w_{\bar{n}}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{k}w_{n_i}(x_i).$$

Для $x\in[0,1)$, $y\in[0,1)$ имеют место представления

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k},\ y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{2^k},$$

где $x_k=0$ или $1, y_k=0$ или 1.

Сумма $x\oplus y$ определяется равенством

$$x\oplus y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x_k+y_k)(\mathrm{mod}2)}{2^k}.$$

Материалы и методы

Пусть $\{w_{n,m}(x,y)\}$ – множество функций системы Уолша, определенных на квадрате $[0,1)^2$. Коэффициенты Фурье для функций $f(x,y)$ по данной системе имеют вид

$$c_{n,m}(f)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{n,m}(x,y)dxdy.$$

Интегральным модулем непрерывности функции $f(x,y)$ относительно сдвигов по осям называется следующее соотношение

$$\omega^{*(1)}(f,\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{h<\delta_1\\ l<\delta_2}}\int_0^1\int_0^1|f(x\oplus h,y\oplus l)-f(x,y)|\,dxdy.$$

Следует также ввести определения L_2 – модуля непрерывности функции $f(x,y)\in L_2[0,1)^2$

$$\omega^{*(2)}(f,\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{h_1<\delta_1\\ l_1<\delta_2}}\|f(x\oplus h_1,y\oplus l_1)-f(x,y)\|_{L_2}$$

и обычного модуля непрерывности

$$\overset{*}{\omega}(f,\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{h_2<\delta_1\\ l_2<\delta_2}}\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}|f(x\oplus h_2,y\oplus l_2)-f(x,y)|.$$

Для дальнейшего потребуется ввести понятие полной вариации функции $f(x,y)$. В двумерном случае вариация функции определяется следующим образом.

Пусть P_N – разбиение квадрата $[0,1)^2$ на малые квадраты $\Delta_{i,j}$ вертикальными и горизонтальными прямыми с координатами x_i и y_j, такими, что

$$0=x_0<x_1<\ldots<x_N=1,\ 0=y_0<y_1<K<y_M=1,$$

$$\Delta_{i,j}=\{(x,y): x_i<x\le x_{i+1},\ y_j<y\le y_{j+1}\}.$$

Обозначим $f(\Delta_{i,j})=f(x_{i+1},y_{j+1})-f(x_i,y_{j+1})-f(x_{i+1},y_j)+f(x_i,y_j)$.

Полной вариацией функции $f(x,y)$ в квадрате $[0,1)^2$ называется величина

$$V_{[0,1)^2}(f)=\sup_{\substack{N\ge0\\ M\ge0}}\left\{\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=1}^{M}\ |f(\Delta_{i,j})|:\forall P_N\right\}.$$

Если эта величина конечна, то будем говорить, что $f(x,y)$ является функцией ограниченной вариации или что $f(x,y)$ имеет на $[0,1)^2$ ограниченное изменение.

В теории приближений многие научные работы посвящены решению задач приближения функций одной и нескольких переменных многочленами по системе Уолша и частными суммами Фурье–Уолша. Некоторые результаты в этой области можно найти в статьях [2–9].

В работах [10] и [11] были получены аналоги теорем Саса, Лоренца, Б.Н. Бернштейна для систем Уолша, ставились вопросы об абсолютной сходимости рядов Фурье по системам характеров нуль-мерных групп в одномерном случае. Для двумерного случая получены следующие результаты.

Результаты и обсуждение

Теорема 1. Пусть $2^{k_1}\le n<2^{k_1+1}, 2^{k_2-1}\le m<2^{k_2}$. Тогда коэффициенты Фурье–Уолша функции $f(x,y)\in L_2[0,1)^2$ удовлетворяют неравенству

$$|c_{n,m}(f)|\le\frac{1}{2}\,\omega^{*(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right) \qquad (1).$$

Доказательство.

Из определения функции Уолша и из равенства

$$w_n(x)=r_k(x)\,w_{n-2^{k_1}}(x),\ \text{при } 2^{k_1}\le n<2^{k_1+1},$$

получим $w_n(2^{-k_1-1})=-1$ (здесь $r_k(x)$- функции Радемахера). Соответственно, из $w_m(y)=r_k(y)\,w_{m-2^{k_2-1}}(y)$, при $2^{k_2-1}\le m<2^{k_2}$, получим $w_m(2^{-k_2})=1$.

Воспользуемся инвариантностью интеграла относительно сдвига, осуществляемого с помощью операции $\oplus$,

$$\int_0^1\int_0^1 f(t_1\oplus x,t_2\oplus y)\,dt_1\,dt_2=\int_0^1\int_0^1 f(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

При $(t_1\oplus2^{-k_1-1})\oplus2^{-k_1-1}=t_1$, $(t_2\oplus2^{-k_2})\oplus2^{-k_2}=t_2$, для коэффициентов Фурье функции $f(t_1\oplus2^{-k_1-1},t_2\oplus2^{-k_2})$ получим равенство

$$\int_0^1 \int_0^1 f\left(t_1 \oplus 2^{-k_1-1}, t_2 \oplus 2^{-k_2}\right) w_n(t_1)\, w_m(t_2)\, dt_1\, dt_2 =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 f(t_1,t_2)\, w_n\left(t_1 \oplus 2^{-k_1-1}\right) w_m\left(t_2 \oplus 2^{-k_2}\right) dt_1\, dt_2 =$$
$$= w_n\left(2^{-k_1-1}\right) w_m\left(2^{-k_2}\right) \int_0^1 \int_0^1 f(t_1,t_2)\, w_n(t_1)\, w_m(t_2)\, dt_1\, dt_2 =$$
$$= c_{n,m}(f)\, w_n\left(2^{-k_1-1}\right) w_m\left(2^{-k_2}\right) = -c_{n,m}(f)\cdot$$

Отсюда

$$2c_{n,m}(f) = \int_0^1 \int_0^1 \left[f(t_1,t_2) - f\left(t_1 \oplus 2^{-k_1-1}, t_2 \oplus 2^{-k_2}\right)\right] w_n(t_1)\, w_m(t_2)\, dt_1\, dt_2. \qquad (2)$$

Поэтому

$$\left|c_{n,m}(f)\right| \le \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \left|f(t_1,t_2) - f\left(t_1 \oplus 2^{-k_1-1}, t_2 \oplus 2^{-k_2}\right)\right| dt_1\, dt_2 \le \frac{1}{2} \overset{*(1)}{\omega}\left(f, 2^{-k_1}, 2^{-k_2+1}\right).$$

Таким образом, неравенство (1) доказано.

Аналогом теоремы Саса является следующее утверждение.

Теорема 2. Если функция $f(x,y) \in L_2[0,1)^2$ и выполнено условие

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} 2^{\frac{k_1+k_2}{2}} w^{*(2)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2-1}}\right) < \infty,$$

то ее ряд Фурье–Уолша абсолютно сходится, т.е. верно соотношение

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left|c_{k_1,k_2}(f)\right| < \infty. \qquad (3)$$

Доказательство.

При $2^{k_1} \le n < 2^{k_1+1}$ и $2^{k_2-1} \le m < 2^{k_2}$, равенство (2) показывает, что при таких n и m коэффициенты Фурье–Уолша функции $f(t_1,t_2) - f\left(t_1 \oplus 2^{-k_1-1}, t_2 \oplus 2^{-k_2}\right)$ равны $2c_{n,m}(f)$. Применив равенство Парсеваля к этой функции, получим оценку

$$4 \sum_{n=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} \left(c_{n,m}(f)\right)^2 \le \left\| f\left(t_1 \oplus 2^{-k_1-1}, t_2 \oplus 2^{-k_2}\right) - f(t_1,t_2)\right\|_{L_2}$$

из которой и из определения $\omega^{*(2)}(f, \delta_1, \delta_2)$ вытекает неравенство

$$4 \sum_{n=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} \left(c_{n,m}(f)\right)^2 \le \left(\omega^{*(2)}\left(\frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2-1}}, f\right)\right)^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, а затем (3), приходим к оценке

$$\sum_{n=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} \left|c_{n,m}(f)\right| \le \left(\sum_{n=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} \left|c_{n,m}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \left(\sum_{n=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}-1} \left|c_{n,m}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{k_1} \cdot 2^{k_2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\frac{k_1+k_2}{2}} {}^{*(2)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2-1}}\right).$$

Суммируем по k_1 и k_2. Получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|c_{n,m}(f)|\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\omega^{*(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right).$$

Ряд справа сходится по условию. Значит, ряд слева тоже будет сходиться. Теорема доказана.

Из неравенства $\omega^{*(2)}(f,\delta_1,\delta_2)\le\overset{*}{\omega}(f,\delta_1,\delta_2)$ и теоремы 2 вытекает аналог теоремы С.Н. Бернштейна.

Теорема 3. Если для некоторой функции $f(x,y)\in\tilde{N}[0,1)^2$ выполнено соотношение

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)<\infty, \tag{4}$$

то ее ряд Фурье–Уолша абсолютно сходится, т.е. верно соотношение

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}|c_{k_1,k_2}(f)|<\infty.$$

Доказательство.

Из выполнения (4) следует условие теоремы 1.

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{k_1,k_2}(f)|\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\omega^{*(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le$$
$$\le\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\omega^{*(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right).$$

Тем самым рассматриваемый ряд Фурье сходится абсолютно. Теорема доказана.

Для непрерывной функции $f(x,y)$ и обычного модуля непрерывности аналог условия (4) естественно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{nm}}<\infty. \tag{5}$$

Теорема 4. Если для некоторой функции $f(x,y)\in C[0,1)^2$ выполнено соотношение (5), то для коэффициентов Фурье–Уолша этой функции справедливо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|c_{n,m}(f)|<\infty.$$

Доказательство.

В силу монотонного убывания членов ряда (5) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{nm}}=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}}\sum_{m=2^{k_2-1}}^{2^{k_2}}\frac{\omega\left(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{nm}}\ge$$
$$\ge\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{k_1+k_2-2}\frac{\omega\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)}{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}=\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\omega\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right).$$

Поэтому из условия (5) следует сходимость ряда справа. Значит, справедливо условие (4) теоремы 3. Таким образом, утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3. Теорема доказана.

Из неравенства (1) можно получить оценку для коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации. Докажем теорему.

Теорема 5. Если функция $f(x,y)$ ограниченной вариации имеет на квадрате $[0,1)^2$ полную вариацию $V_{[0,1)^2}(f)$, то

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)\leq\frac{1}{2^{k_1+k_2}}V_{[0,1)^2}(f). \qquad (6)$$

Доказательство.

Обозначим $\Delta_i^{(k)}\equiv\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)$, при $0\leq i<2^k$-1, двоичные интервалы ранга $k\geq 0$. При этом $\Delta_0^{(0)}=[0,1)$.Тогда в нашем случае, рассматривая двумерные функции, мы должны будем вводить двоичные области $\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}=\Delta_i^{(k_1)}\times\Delta_j^{(k_2)}$.

Если $h<2^{-k_1}, l<2^{-k_2}$ и $(t_1,t_2)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}$, то $(t_1\oplus h, t_2\oplus l)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}$.
При таких h, l, t_1 и t_2 имеем

$$|f(t_1\oplus h,t_2\oplus l)-f(t_1,t_2)|\leq\sup_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)-\inf_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y).$$

Из определения вариации функции имеем

$$\sum_{i=1}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=1}^{2^{k_2}-1}\left(\sup_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)-\inf_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)\right)\leq V_{[0,1)^2}(f).$$

Имея данные оценки, мы получим следующую, доказывающую утверждение теоремы, цепочку неравенств:

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)=\sup_{h<\frac{1}{2^{k_1}},l<\frac{1}{2^{k_2}}}\int_0^1\int_0^1|f(t_1\oplus h,t_2\oplus l)-f(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2=$$

$$=\sup_{h<\frac{1}{2^{k_1}},l<\frac{1}{2^{k_2}}}\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\int_{\Delta_i^{(k_1)}}\int_{\Delta_j^{(k_2)}}|f(t_1\oplus h,t_2\oplus l)-f(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2\leq$$

$$\leq\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left|\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}\right|\cdot\left(\sup_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)-\inf_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2^{k_1}}\cdot\frac{1}{2^{k_2}}\cdot V_{[0,1)^2}(f)=\frac{1}{2^{k_1+k_2}}V_{[0,1)^2}(f).$$

Таким образом, мы получили неравенство, доказывающее утверждение (6). Теорема 5 доказана.

Из неравенств теорем 1 и 6 путем комбинирования получим важное следствие.

Следствие 1. Пусть $2^{k_1}\leq n<2^{k_1+1}, 2^{k_2-1}\leq m<2^{k_2}$. Тогда коэффициенты Фурье–Уолша функции ограниченной вариации $f(x,y)$ удовлетворяют неравенству

$$|c_{n,m}(f)|\leq\frac{1}{2^{k_1+k_2}}V_{[0,1]^2}[f].$$

Доказательство.

Вначале покажем, какой из модулей $\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)$ и $\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)$ больше по величине. Из свойства интегрального модуля непрерывности $(x_0,$ $\overset{*}{\omega}^{(1)}(f,2t)\leq 2\overset{*}{\omega}^{(1)}(f,t)$ при $t\in[0,1)$, для функции $f(x,y)$ на квадрате $[0,1]^2$ имеем

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{2}{2^{k_2}}\right)\leq 2\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right).$$

Значит, из неравенства (1) и неравенства (6), имеем

$$|c_{n,m}(f)|\leq\frac{1}{2}\cdot 2\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)\leq\frac{1}{2^{k_1+k_2}}V_{[0,1)^2}(f).$$

Тем самым оценка сверху коэффициентов Фурье–Уолша с помощью вариации функции показана. Следствие доказано.

Переходя к рассмотрению абсолютной сходимости рядов Фурье-Уолша, заметим следующее: если ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c_{i,j}w_{i,j}(x,y)$ абсолютно сходится хотя бы в одной точке (x_0,y_0), то ввиду того, что $|c_{i,j}w_{i,j}(x_0,y_0)|=|c_{i,j}|$ при всех $i=0,1,2,\ldots,j=0,1,2,\ldots$, то отсюда вытекает абсолютная сходимость ряда из коэффициентов и, значит, абсолютная сходимость ряда Фурье функции по системе Уолша всюду. Поэтому здесь, в отличие от тригонометрической системы, нет смысла ставить отдельно вопрос об абсолютной сходимости ряда Фурье–Уолша на том или ином множестве точек из $[0,1)^2$. Итак, говоря об абсолютной сходимости ряда Фурье-Уолша, можно всегда под этим понимать абсолютную сходимость ряда из коэффициентов.

Далее, получим некоторые условия, которые надо наложить на функцию $f(x,y)$, которые гарантировали бы абсолютную сходимость ее ряда Фурье по системе Уолша.

В монографии Бари Н.К. [12] «Тригонометрические ряды» описана теорема, доказанная А. Зигмундом ([13], стр.614). А. Зигмундом получено одно условие, выполнение которого влечет за собой абсолютную сходимость тригонометрического ряда. Для рядов Фурье–Уолша получено следующее утверждение.

Теорема 6. Если функция $f(x,y)$ имеет ограниченную вариацию на квадрате $[0,1)^2$ и выполнено соотношение

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}<\infty,$$

то ряд Фурье–Уолша функции $f(x,y)$ абсолютно сходится.

Доказательство.

$$\left\{\int_0^1\int_0^1|f(x\oplus h,y\oplus l)-f(x,y)|^2dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left\{\sup_{\substack{h_1<\delta_1\\ l_1<\delta_2}}\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}|f(x\oplus h_1,y\oplus l_1)-f(x,y)|\cdot\int_0^1\int_0^1|f(x\oplus h,y\oplus l)-f(x,y)|^2dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Поскольку

то, считая $h_1<2^{-k_1}$, $l_1<2^{-k_2+1}$, получим

$$\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\leq\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\cdot\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}.$$

$h_1<2^{-k_1}$, $l_1<2^{-k_2+1}$, получим

$$\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\leq\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\cdot\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}.$$

В силу (см.теорему 5) неравенства

$$\overset{*}{\omega}(1)\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\leq\frac{1}{2^{k_1+k_2}}V_{[0,1]^2}[f],$$

и того, что сдвиги по x и y уменьшаются на очень малые величины, получаем

$$\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\sqrt{\frac{1}{2^{k_1+k_2}}\,V_{[0,1)^2}(f)\cdot\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}.$$

Преобразуем данное неравенство следующим образом

$$2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\sqrt{V_{[0,1)^2}(f)}\cdot\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}.$$

Суммируем по k1 и k2. Согласно условию теоремы, полученный ряд справа сходится, поэтому сходится и ряд слева. На основании теоремы 1 ряд Фурье–Уолша функции сходится абсолютно.

В классических работах, посвященных коэффициентам Фурье–Уолша функций ограниченной вариации (например, [10, 11]), оценки, как правило, получаются либо:

- для одномерного случая;
- либо для двумерных функций с учетом вариации только по каждой переменной в отдельности.

В настоящей работе принципиальное отличие состоит в том, что при оценке коэффициентов Фурье–Уолша учитывается не только покоординатная вариация, но и совместная (полная) вариация функции на квадрате $[0,1)^2$.

Рассмотрим следующий иллюстрирующий пример.

Пусть функция $f(x,y)$ имеет ограниченную вариацию по каждой переменной, однако ее полная вариация существенно меньше суммы покоординатных вариаций, например, в случае, когда основные изменения функции сосредоточены вдоль диагональных направлений на квадрате. В этом случае классические оценки, основанные лишь на вариациях по x и y, приводят к завышенным верхним границам для коэффициентов Фурье–Уолша. В отличие от этого, полученное в работе неравенство (6) позволяет использовать полную вариацию функции, что дает более точную оценку сверху для коэффициентов при больших значениях индексов.

Таким образом, в ситуациях, когда совместная вариация существенно меньше покоординатных вариаций, результаты настоящей работы дают качественно более сильные оценки, чем ранее известные, и позволяют точнее описывать убывание коэффициентов Фурье–Уолша и поведение частичных сумм ряда.

Заключение

В заключение отметим, что проведенное исследование позволило получить важные оценки коэффициентов Фурье–Уолша для функций двух переменных с ограниченной вариацией. Установленные условия абсолютной сходимости рядов Фурье–Уолша в терминах интегрального модуля непрерывности расширяют возможности применения теории ортогональных рядов.

Результаты работы представляют интерес как для дальнейшего теоретического анализа, так и для практического применения в задачах анализа многомерных функций и обработки сигналов.

Информация о финансировании. Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект № AP26196065).

ЛИТЕРАТУРА

1 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. – М.: Наука, 1987.

2 Ахажанов Т.Б. Вариационный модуль непрерывности и коэффициенты двойных рядов Фурье–Хаара // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. – 2010. – № 6. – С. 57–62. https://doi.org/ 10.31489/2023M4/21-29.

3 Akhazhanov T., Matin D., Baituyakova Z. The approximation of functions of several variables with bounded p-fluctuation by polynomials in the Walsh system // Mathematics. – 2024. – Vol. 12, iss. 24. https://doi.org/ 10.3390/math12243899.

4 Волосивец С.С. Обобщенное кратное мультипликативное преобразование Фурье и оценки интегральных модулей непрерывности // Математические заметки. – 2024. – Т. 115. – № 4. – С. 578–588. https://doi.org/10.1134/S0001434624030246.

5 Волосивец С.С., Голубов Б.И. Весовая интегрируемость кратных мультипликативных преобразований Фурье // Математические заметки. – 2022. – Т. 111. – № 3. – С. 365–374. https://doi.org/10.4213/mzm13257.

6 Ghodadra B. L. Applications of Hölder's and Jensen's inequalities in studying the β-absolute convergence of Vilenkin–Fourier series // Mathematical Inequalities & Applications. – 2014. – Vol. 17. – No. 2. – P. 749–760. https://doi.org/10.7153/mia-17-55.

7 Goginava U. Matrix summability of Walsh–Fourier series // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – No. 14. – Art. 2458.

8 Nagy K. Restricted convergence of two-dimensional Nörlund means of Walsh–Fourier series // European Journal of Mathematics. – 2025. – Vol. 11. – Art. 28.

9 Temlyakov V.N. Moduli of smoothness and approximation by Walsh–Fourier means in multidimensional settings // Journal of Approximation Theory. – 2024. – Vol. 334. – Art. 107982. https://doi.org/: 10.1016/j.jat.2024.107982.

10 Виленкин Н.Я., Рубинштейн А.И. Одна теорема С.Б. Стечкина об абсолютной сходимости и ряды по системам характеров нуль-мерных абелевых групп // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1975. – № 9. – С. 3–9.

11 Yoneda K. On absolute convergence of Walsh–Fourier series // Mathematical Journal of Japan. – 1973. – Vol. 18. – No. 1. – P. 71–78.

12 Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

13 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

REFERENCES

1 Golubov, B.I., Efimov, A.V., Skvortsov, V.A. Walsh series and transformations: theory and applications (Moscow: Nauka, 1987), 343 p. (in Russian).

2 Akhazhanov, T.B. Variation modulus of continuity and coefficients of double Haar–Fourier series. Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, no. 6, 57–62 (2010). https://doi.org/10.31489/2023M4/21-29 (in Russian).

3 Akhazhanov, T., Matin, D., Baituyakova, Z. The approximation of functions of several variables with bounded p-fluctuation by polynomials in the Walsh system. Mathematics, 12 (24), (2024). https://doi.org/10.3390/math12243899

4 Volosivets, S.S. Generalized multiple multiplicative Fourier transform and estimates of integral moduli of continuity. Mathematical Notes, 115 (4), 528–537 (2024). https://doi.org/10.1134/S0001434624030246 (in Russian).

5 Volosivets, S.S., Golubov, B.I. Weighted integrability of multiple multiplicative Fourier transforms. Mathematical Notes, 111 (3), 364–372 (2022). https://doi.org/10.4213/mzm13257 (in Russian).

6 Ghodadra, B.L. Applications of Hölder's and Jensen's inequalities in studying the β-absolute convergence of Vilenkin–Fourier series. Mathematical Inequalities & Applications, 17 (2), 749–760 (2014). https://doi.org/10.7153/mia-17-55

7 Goginava, U. Matrix summability of Walsh–Fourier series. Mathematics, 10 (14), Article 2458 (2022).

8 Nagy, K. Restricted convergence of two-dimensional Nörlund means of Walsh–Fourier series. European Journal of Mathematics, 11, Article 28 (2025).

9 Temlyakov, V.N. Moduli of smoothness and approximation by Walsh–Fourier means in multidimensional settings. Journal of Approximation Theory, 334, Article 107982 (2024). https://doi.org/10.1016/j.jat.2024.107982

10 Vilenkin, N.Ya., Rubinstein, A.I. One theorem of S.B. Stechkin on absolute convergence and series over systems of characters of zero-dimensional Abelian groups. Izvestiya Vuzov. Matematika, No. 9, 3–9 (1975). (in Russian).

11 Yoneda, K. On absolute convergence of Walsh–Fourier series. Mathematica Japonica, 18 (1), 71–78 (1973).

12 Bari, N.K. Trigonometric series (Moscow: Fizmatgiz, 1961). (in Russian).

13 Zygmund, A. Trigonometric series (Cambridge: Cambridge University Press, 1959)

[1]Ахажанов Т.Б.,
PhD, доцент м.а., ORCID ID: 0000-0002-9784-9304,
e-mail: talgat_a2008@mail.ru
[1,2]*Мұхамбетжан М.А.,
докторант, сениор-лектор, ORCID ID: 0009-0002-3632-2303,
e-mail: manshuk-9696@mail.ru
[1]Матин Д.Т.,
PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0002-9784-9304,
e-mail: d.matin@mail.kz
[2]Жулдасов Ж.М.,
сениор-лектор, ORCID ID: 0009-0007-1927-5951,
e-mail: zhanzhanzhan23@gmail.com

[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан
[2]Astana IT University, Астана қ., Қазақстан

ШЕНЕЛГЕН ВАРИАЦИЯЛЫ ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ФУРЬЕ-УОЛШ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ БАҒАЛАНУЫ

Аңдатпа

Бұл мақалада шектелген вариацияға ие екі айнымалы функциялар үшін Фурье–Уолша коэффициенттерінің бағалары қарастырылады. Зерттеу Фурье–Уолша қатары коэффициенттерінің модульдеріне жоғарғы бағалар алуға бағытталған, бұл сәйкес қатарлардың жинақталуын және аппроксимациялық қасиеттерін талдауға мүмкіндік береді. Негізгі назар бірлік квадратта берілген және әрбір айнымалы бойынша да, олардың жиынтық вариациясы бойынша да шектелген вариацияға ие функцияларға аударылған. Коэффициенттердің индекстеріне және функция вариациясының сипаттамаларына тәуелді бағалар келтіріледі. Мақалада шектелген вариациялы екі айнымалы функциялар үшін Фурье–Уолша қатары коэффициенттерінің модульдеріне жаңа жоғарғы бағалар алынған. Классикалық нәтижелерден айырмашылығы, жұмыста әрбір айнымалы бойынша вариацияны да, сондай-ақ олардың бірлескен вариациясын да ескере отырып, Фурье–Уолша коэффициенттерінің жаңа жоғарғы бағалары алынған. Мұндай тәсіл коэффициенттер мен қатарлардың жартылай қосындыларының мінез-құлқын дәлірек сипаттауға мүмкіндік береді, бұл көпөлшемді жағдайда абсолюттік жинақталу мен аппроксимациялық қасиеттерді зерттеу үшін маңызды. Жұмыстың өзектілігі ортогонал қатарлар теориясының заманауи даму бағыттарымен және олардың қолданбалы аспектілерімен байланысты. Фурье–Уолша қатарлары сигналдарды цифрлық өңдеуде, деректерді сығу және қалпына келтіру теориясында, сондай-ақ дискретті және екілік құрылымдарды талдауда кеңінен қолданылады. Соңғы жылдары цифрлық технологиялар мен есептеу әдістерінің қарқынды дамуына байланысты бұл бағыттардың маңыздылығы артып отыр.

Тірек сөздер: Уолш функциялар жүйесі, Фурье–Уолш коэффициенттері, интегралдық үзіліссіздік модулі, шенелген вариациялы функциялар.

[1]Akhazhanov T.B.,
PhD, Acting Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-9784-9304,
e-mail: talgat_a2008@mail.ru
[1,2]*Mukhambetzhan M.A.,
PhD student, senior-lecturer, ORCID ID: 0009-0002-3632-2303,
e-mail: manshuk-9696@mail.ru
[1]Matin D.T.,
PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-9784-9304d,
e-mail: matin@mail.kz
[2]Zhuldassov Zh.M.,
Senior Lecturer, ORCID ID: 0009-0007-1927-5951,
e-mail: zhanzhanzhan23@gmail.com

[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[2]Astana IT University, Astana, Kazakhstan

ESTIMATES OF FOURIER-WALSH COEFFICIENTS FOR FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

Abstract

This paper considers estimates of Fourier–Walsh coefficients for functions of two variables with bounded variation. The study focuses on deriving upper bounds for the absolute values of the Fourier–Walsh series coefficients, enabling analysis of the convergence and approximation properties of the corresponding series. The main attention is given to functions defined on the unit square, possessing bounded variation in each variable and jointly. The estimates depend on the indices of the coefficients and the variation characteristics of the function. These results are important in approximation theory, digital analysis, signal processing, and the development of efficient data compression and recovery algorithms. The obtained estimates can be used for more accurate analysis of the behavior of partial sums and for studying the uniform convergence of the Fourier–Walsh series. This work contributes to the development of harmonic analysis on discrete systems and expands the scope of applications of the Walsh transform.

Keywords: Walsh function system, Fourier–Walsh coefficients, integral modulus of continuity, functions of bounded variation.

Received: October 23, 2025; revised: February 11, 2026; accepted: February 16, 2026.