ӘОЖ 517.957.6
ҒТАХР 27.31.15

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-250-264

[1]*Сарман А.Д.,
докторант, оқытушы, ORCID ID: 0009-0006-3617-4071,
*e-mail: sadrasul8@gmail.com
[2]Асанова А.Т.,
ф.-м.ғ.д., б.ғ.к., ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,
e-mail: assanova@math.kz
[1]Токмурзин Ж.С.
PhD, аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0002-3738-5923,
e-mail: tokmurzinzh@gmail.com

[1]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
[2]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

ТӨРТІНШІ РЕТТІ ЖҮКТЕЛГЕН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Екі айнымалыға тәуелді, n жүктемесі бар төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады. Жаңа белгісіз функцияны енгізу арқылы бастапқы есеп оған пара-пар бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін Коши есептері әулетіне келтіріледі. Белгісіз функцияның жүктелген мәндеріне қатысты x айнымалысына тәуелді функционалдық теңдеулер жүйесі құрылады. Осы функционалдық теңдеулер жүйесінің шешімін табу алгоритмі ұсынылады. Бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін Коши есептері әулетінің жалғыз шешімінің бар болуы туралы теорема дәлелденеді. Сонымен қатар, екі айнымалыға тәуелді, n жүктемесі бар төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығының шарттары анықталады. Алынған нәтижелер нақты мысал арқылы сипатталады.

Тірек сөздер: жоғары ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу, бастапқы-шеттік есеп, функционалдық теңдеулер жүйесі, шешімнің бар болуы мен жалғыздығы шарттары.

Кіріспе

Төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер қазіргі математикалық физикада, континуум механикасында және қолданбалы математикада кеңінен қолданылады. Мұндай теңдеулер нақты физикалық жүйелердің күйі тек локалдық емес, сонымен қатар кеңістіктің немесе уақыттың орташа сипаттамаларына тәуелді болатын жағдайларды модельдеуге мүмкіндік береді. Жүктелген мүшелер көбіне интегралдық немесе функционалдық түрде беріледі және зерттелетін есептердің күрделілігін арттырады.

Төртінші ретті теңдеулер, ең алдымен, серпімділік теориясында кездеседі. Атап айтқанда, жұқа пластиналардың иілуі мен тербелісін сипаттайтын Кирхгоф–Ляв типті теңдеулер осы класқа жатады. Жүктелген мүшелер материалдың жаһандық қасиеттерін немесе сыртқы ортаның әсерін ескеруге мүмкіндік береді.

Континуум механикасында мұндай теңдеулер микрополярлық және градиенттік серпімділік модельдерінде қолданылады. Физикада олар жоғары ретті операторлармен сипатталатын процестерде, соның ішінде кейбір кванттық және фазалық ауысу модельдерінде кездеседі. Сонымен қатар, басқару теориясында және биологиялық жүйелерді модельдеуде бейлокал әсерлері бар төртінші ретті теңдеулер маңызды рөл атқарады.

Төртінші ретті дербес туындылы теңдеулердің классикалық теориясы Эйлер мен Лагранж еңбектерінен бастау алады. Кейінірек серпімділік теориясында Тимошенко, ал дербес туындылы теңдеулердің жалпы теориясында Соболев пен Петровский еңбектері елеулі үлес қосты.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер теориясының қалыптасуы А.М. Нахушевтің атымен тығыз байланысты. Оның еңбектерінде нүктелік және интегралдық жүктемелері бар дифференциалдық теңдеулердің қисынды қойылу мәселелері жүйелі түрде зерттелді. Кейін бұл бағытты көптеген ғалымдар дамытты, соның ішінде жоғары ретті жүктелген теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер қарастырылды [1–8].

Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер қолданыстарының көптігіне байланысты ерекше зерттеуді талап етеді [9–18]. Аралас туындылары бар екі айнымалыдан тұратын төртінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептердің әртүрлі кластары [19–24] еңбектерінде зерттелген.

Қазіргі таңда төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін өзекті мәселелердің бірі – шеттік және бастапқы-шеттік есептердің қисынды қойылуын зерттеу, сондай-ақ шешімнің бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу болып табылады [25, 26].

Қорыта айтқанда, төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу қазіргі математиканың маңызды әрі қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бірі болып табылады. Бұл теңдеулер нақты қолданбалы есептерді сипаттаумен қатар, жаңа теориялық әдістерді дамытуды талап етеді. Сондықтан олардың қасиеттерін жан-жақты зерттеу өзектілігін сақтап отыр.

Бұл мақалада төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады. Есепті шешуде жаңа функция енгізу әдісі қолданылады. Қарастырылып отырған есеп бірінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есептер әулетіне келтіріледі. Бірінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі шеттік есептер [27–30] еңбектерінде жан-жақты зерттеліп, олардың сандық шешімдері алынған.

Осы мақалада төртінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп пен бірінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есептер әулеті шешімдерінің арасындағы байланыс орнатылған. Теңдеудің коэффициенттері мен шекаралық функциялары үзіліссіз болған жағдайда бастапқы есептер әулетінің бірмәнді шешілімділік шарттары анықталып, аналитикалық шешімі тұрғызылған. Бұл шарттар бастапқы берілгендер мен коэффициенттер арқылы құрылған арнайы матрицаның қайтарымдылығы терминдерімен өрнектеледі. Сонымен қатар, төртінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің бірмәнді шешілімділік шарттары орнатылып, нәтижелер мысалмен сипатталған.

Төртінші ретті дербес туындылы екі айнымалыға тәуелді n жүктемесі бар дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} + \sum_{i=1}^{n} B_i(t,x)\frac{\partial^3 u(t_i,x)}{\partial x^3} + f(t,x), (t,x) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(t,0) = \varphi_1(t), \quad t \in [0,T], \quad (2)$$

$$u_x(t,0) = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad (3)$$

$$u_{xx}(t,0) = \varphi_3(t), \quad t \in [0,T], \quad (4)$$

$$u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\omega], \quad (5)$$

мұндағы $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$, $u(t,x) -$ ізделінді функция, $A_1(t,x)$, $B_i(t,x)$, $f(t,x)$–Ω облысындағы үзіліссіз функциялар; $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$– $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар; $\psi(x)$ функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданатын болсын; келісімділік шарты орынды: $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_2(0) = \dot\psi(0)$, $\varphi_3(0) = \ddot\psi(0)$.

(1)–(5) есебінің шешімі деп $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R), \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R), \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} \in C(\Omega, R), \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t \partial x^3} \in C(\Omega, R)$ дербес туындыларымен Ω - облысында (1) теңдеуді және (2)–(5) шарттарын қанағаттандыратын $u(t,x) \in C(\Omega, R)$ функциясын айтамыз.

Материалдар мен әдістер

(1)–(5) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз. Ол үшін жаңа белгісіз функцияны енгіземіз:

$$z(t,x) = \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}, x \in [0, \omega]. \tag{6}$$

(6) формуладан $u(t,x)$ ізделінді шешімін интегралдау арқылы табамыз және (2)–(4) шарттарды ескереміз:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2} = \int_0^x z(t,y)dy, \quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \varphi_3(t) + \int_0^x z(t,y)dy,$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \varphi_3(t)x + \int_0^x \int_0^y z(t,s)dsdy,$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \varphi_2(t) + \varphi_3(t)x + \int_0^x \int_0^y z(t,s)ds\,dy,$$

$$u(t,x) - u\,(t,0) = \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s z(t,\xi)d\xi dsdy,$$

$$u(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s z(t,\xi)d\xi dsdy.$$

Бұдан (1)–(5) есебінің шешімі мына түрде болады:

$$u(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s z(t,\xi)d\xi dsdy\,, (t,x) \in \Omega. \tag{7}$$

(6) жаңа белгісіз функцияны ескере отырып, (1)–(5) есебін келесі пара-пар бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есепке келтіреміз:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = A_1(t,x)z(t,x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t,x)\,z(t_i,x) + f(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega\,, \tag{8}$$

$$z(0,x) = \ddot{\psi}(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{9}$$

(8)–(9) есебінің шешімі деп $\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R)$ дербес туындысы Ω - облысында (8) теңдеуді және (9) шартты қанағаттандыратын $z(t,x) \in C(\Omega, R)$ функциясын айтамыз.

(8)–(9) есебі бірінші ретті қарапайым жүктелге дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есептер әулеті болады. Мұнда x айнымалысы параметр рөлін атқарады және ол $[0, \omega]$ аралығында үзіліссіз өзгереді.

Келесі тұжырым орынды.

Лемма. а) (1)–(5) есебінің шешімі $u^*(t,x)$ функциясы болсын. Онда

$$z^*(t,x) = \frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial x^3}, \quad (t,x) \in \Omega,$$

функциясы (8)–(9) есебінің шешімі болады.
б) (8)–(9) есебінің шешімі $\tilde{z}(t,x)$ функциясы болсын. Онда
функциясы (1)–(5) есебінің шешімі болады.

$$\tilde{u}(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s \tilde{z}(t,\xi)d\xi ds dy, \quad (t,x) \in \Omega,$$

Дәлелдеуі. а) (1)–(5) есебінде $z^*(t,x) = \frac{\partial^3 u^*(t,x)}{\partial x^3}, (t,x) \in \Omega$ алмастыруын жасайық. Біртіндеп интегралдау арқылы және (2)-(4) шарттарды ескере отырып, $u^*(t,x)$ шешімін табамыз:

$$\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial x^2} = \varphi_3(t) + \int_0^x z^*(t,y)dy,$$

$$\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x} = \varphi_2(t) + \varphi_3(t)x + \int_0^x \int_0^y z^*(t,s)ds dy,$$

$$u^*(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s z^*(t,\xi)d\xi ds dy.$$

Сонымен (1) теңдеу

$$\frac{\partial z^*(t,x)}{\partial t} = A_1(t,x)z^*(t,x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t,x)\, z^*(t_i,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega\,,$$

түріне, яғни (8) бірінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеулер әулетіне келтіріледі. (5) шартын, яғни $u(0,x) = \psi(x), x \in [0,\omega]$ теңдігін үш рет дифференциалдап, келесі теңдікті аламыз: $z(0,x) = \dddot{\psi}(x), \ x \in [0,\omega]$, яғни (9) шартын аламыз. Сөйтіп, (8)–(9) есебіне келдік. Екі есептің шешімдерінің арасындағы байланыс

$$u^*(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s z^*(t,\xi)d\xi ds dy\,, (t,x) \in \Omega,$$

қатынасы арқылы беріледі.

Керісінше, б) орындалсын, яғни (8)–(9) есебінің шешімі $\tilde{z}(t,x)$ функциясы болсын. $\tilde{z}(t,x)$ және $\varphi_1(t), \ \varphi_2(t), \ \varphi_3(t)$ және $\psi(x)$ функциялары көмегімен келесі функцияны құрамыз:

$$\tilde{u}(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s \tilde{z}(t,\xi)d\xi ds dy, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Осының (1)–(5) есебінің шешімі екенін көрсетейік.

Ол үшін шыққан теңдікті үш рет x бойынша дифференциалдайық.

$$\frac{\partial \tilde{u}(t,x)}{\partial x} = \varphi_2(t) + \varphi_3(t)x + \int_0^x \int_0^y \tilde{z}(t,s)dsdy,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(t,x)}{\partial x^2} = \varphi_3(t) + \int_0^x \tilde{z}(t,y)dy,$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{u}(t,x)}{\partial x^3} = \tilde{z}(t,x),$$

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}(t,x)}{\partial t \partial x^3} = \frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t}.$$

$\frac{\partial \tilde{z}(t,x)}{\partial t}$және $\tilde{z}(t,x)$ функциялардың орнына сәйкес $\frac{\partial^4 \tilde{u}(t,x)}{\partial t \partial x^3}$ және $\frac{\partial^3 \tilde{u}(t,x)}{\partial x^3}$ дербес туындыларын (8) бірінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеуге қойсақ:

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}(t,x)}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 \tilde{u}(t,x)}{\partial x^3} + \sum_{i=1}^{n} B_i(t,x)\frac{\partial^3 \tilde{u}(t_i,x)}{\partial x^3} + f(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega,$$

төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық (1) теңдеуін аламыз.

Енді шарттарын тексерейік:

$$\tilde{u}(t,0) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\cdot 0 + \varphi_3(t)\cdot 0 + \int_0^0 \int_0^y \int_0^s \tilde{z}(t,\xi)d\xi dsdy = \varphi_1(t),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}(t,0)}{\partial x} = \varphi_2(t) + \varphi_3(t)\cdot 0 + \int_0^0 \int_0^y \tilde{z}(t,s)dsdy = \varphi_2(t),$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(t,0)}{\partial x^2} = \varphi_3(t) + \int_0^0 \tilde{z}(t,y)dy = \varphi_3(t),$$

$$\tilde{u}(0,x) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)x + \varphi_3(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^s \dddot{\psi}(\xi)d\xi dsdy =$$

$$= \varphi_1(0) + \varphi_2(0)x + \varphi_3(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^y \left[\ddot{\psi}(s) - \ddot{\psi}(0)\right]dsdy =$$

$$= \varphi_1(0) + \varphi_2(0)x + \varphi_3(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \left[\dot{\psi}(y) - \dot{\psi}(0) - \ddot{\psi}(0)y\right]dy =$$

$$= \varphi_1(0) + \varphi_2(0)x + \varphi_3(0)\frac{x^2}{2} + \psi(x) - \psi(0) - \dot{\psi}(0) - \ddot{\psi}(0)\frac{x^2}{2} = \psi(x).$$

Сонымен $\tilde{z}(t,x)$ функциясы (1)–(5) есебінің шешімі болатынына көз жеткіздік.
Лемма дәлелденді.

Нәтижелер мен талқылау

(8)–(9) есебінің шешілімділік мәселесін зерттейік. (8)–(9) есебі – Коши есебі болғандықтан оның шешімін мына түрде өрнектеуге болады:

$$z(t,x)=e^{\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}\left[\ddot{\psi}(x)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t e^{-\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}B_i(\tau,x)\,z(t_i,x)d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_0^t e^{-\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}f(\tau,x)d\tau\right],(t,x)\in\Omega. \tag{10}$$

$F(t,x), G(t,x,B_i)$ белгілеулерін енгізейік:

$$F(t,x)=e^{\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}\left[\ddot{\psi}(x)+\int_0^t e^{-\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}f(\tau,x)d\tau\right],(t,x)\in\Omega,$$

$$G(t,x,B_i)=e^{\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}\int_0^t e^{-\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau}B_i(\tau,x)d\tau,\qquad i=\overline{1,n},(t,x)\in\Omega.$$

(10) шешімін ықшам түрде жазуға болады:

$$z(t,x)=F(t,x)+\sum_{i=1}^{n}G(t,x,B_i)z(t_i,x),\qquad x\in[0,\omega]. \tag{11}$$

$z(t,x)$ функциясының $t=t_i,\ \ i=\overline{1,n}$ болғандағы мәндерін, яғни $z(t_i,x)$, $i=\overline{1,n}$ табайық:

$$z(t_i,x)=\ F(t_i,x)+\sum_{j=1}^{n}G\big(t_i,x,B_j\big)z\big(t_j,x\big),\ \ i=\overline{1,n},x\in[0,\omega]. \tag{12}$$

(12) өрнектегі белгісіздерді сол жағына шығарып жазайық. Сонда n теңдеуден тұратын функционалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}[1-G(t_1,x,B_1)]z(t_1,x)-G(t_1,x,B_2)z(t_2,x)-\cdots-G(t_1,x,B_n)z(t_n,x)=F(t_1,x),\\-G(t_2,x,B_1)z(t_1,x)-[1-G(t_2,x,B_2)]z(t_2,x)-\cdots-G(t_2,x,B_n)z(t_n,x)=F(t_2,x),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\-G(t_n,x,B_1)z(t_1,x)-G(t_n,x,B_2)z(t_2,x)-\cdots-[1-G(t_n,x,B_n)]z(t_n,x)=F(t_n,x).\end{cases} \tag{13}$$

Келесі белгілеуді енгізе отырып,

$$G_{ij}(x)=G\big(t_i,x,B_j\big),i=\overline{1,n},j=\overline{1,n},x\in[0,\omega],$$

(13) функционалдық теңдеулер жүйесіндегі $z(t_i,x),\ i=\overline{1,n}$ белгісіздердің алдындағы коэффициенттерінен келесі матрицаны құрамыз:

$$I - G(x) = \begin{pmatrix} 1 - G_{11}(x) & G_{12}(x) & \dots & -G_{1n}(x) \\ -G_{21}(x) & 1 - G_{22}(x) & \dots & -G_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{n1}(x) & -G_{n2}(x) & \dots & 1 - G_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0, \omega], \quad (14)$$

мұндағы I –$n \times n$– өлшемді бірлік матрица, ал белгісіздермен оң жағындағы функциялардан құралған векторларды келесі түрде белгілейміз:

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z(t_1, x) \\ z(t_2, x) \\ \dots \\ z(t_n, x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} F(t_1, x) \\ F(t_2, x) \\ \dots \\ F(t_n, x) \end{pmatrix}, x \in [0, \omega].$$

Сонымен (13) функционалдық теңдеулер жүйесін ықшамдап матрицалық теңдеу түрінде жазайық:

$$[I - G(x)]Z(x) = F(x), \ x \in [0, \omega]. \quad (15)$$

(15) функционалдық теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар болу үшін $[I - G(x)]$ матрицасының барлық $x \in [0, \omega]$ үшін кері матрицасы бар болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$det|I - G(x)| \neq 0, x \in [0, \omega]. \quad (16)$$

Бұдан (16) шарт орындалғанда (15) теңдеулер жүйесінің шешімі төмендегідей болады:

$$Z(x) = [I - G(x)]^{-1} F(x), x \in [0, \omega], \quad (17)$$

мұндағы кері матрицанынэлементтерін келесі түрде белгілейік:

$$[I - G(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \dots & g_{1n}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \dots & g_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \dots & g_{nn}(x) \end{pmatrix}, x \in [0, \omega]. \quad (18)$$

(16) шешіміндегі $Z(x)$ векторы үшін $z(t_i, x)$ компоненттерін жазайық:

$$z(t_1, x) = \sum_{j=1}^{n} g_{1j}(x) F(t_j, x),$$

$$z(t_2, x) = \sum_{j=1}^{n} g_{2j}(x) F(t_j, x), \quad (19)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z(t_n, x) = \sum_{j=1}^{n} g_{nj}(x) F(t_j, x).$$

$z(t_i, x)$ мәндері үшін өрнектерді қысқаша жазсақ:

$$z(t_i, x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) F(t_j, x), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in [0, \omega]. \quad (20)$$

(20) өрнегіндегі $z(t_i, x)$ мәндерін (11) кейіптемесіне қойсақ, (8)–(9) есебінің шешімін келесі түрде аламыз:

$$z(t,x) = F(t,x) + \sum_{i=1}^{n} G(t,x,B_i) \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) F(t_j, x), x \in [0,\omega].$$

Жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, теореманы тұжырымдаймыз:

1-теорема. Келесі шарттар орындалсын:

a) $A_1(t,x), B_i(t,x), f(t,x)$–$\Omega$ облысындағы үзіліссіз функциялар;

b) $\psi(x)$ функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданатын болсын;

c) $[I - G(x)]$матрицасының барлық $x \in [0,\omega]$үшін кері матрицасы бар болсын.

Онда (8)–(9) бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есептің жалғыз шешімі бар болады және келесі түрде анықталады:

$$z(t,x) = F(t,x) + \sum_{i=1}^{n} G(t,x,B_i) \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) F(t_j,x), x \in [0,\omega], \quad (21)$$

мұндағы

$$F(t,x) = e^{\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau} \left[\dddot{\psi}(x) + \int_0^t e^{-\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau} f(\tau,x)d\tau \right], (t,x) \in \Omega,$$

$$G(t,x,B_i) = e^{\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau} \int_0^t e^{-\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau} B_i(\tau,x)d\tau, i = \overline{1,n}, (t,x) \in \Omega,$$

$g_{ij}(x)$–$[I - G(x)]^{-1}$ матрицасының элементтері.

Дәлелдеуі. 1-теореманың a)–b) шарттары орындалсын.

Онда (8)–(9) есебінің шешімін

$$z(t,x) = F(t,x) + \sum_{i=1}^{n} G(t,x,B_i) z(t_i,x), x \in [0,\omega]. \quad (22)$$

түрінде жазамыз. Осы өрнектен $z(t_i,x)$ мәндерін тауып, (15) жүйесіне келеміз.Теореманың c) шарты бойынша $[I - G(x)]$матрицасының барлық $x \in [0,\omega]$үшін кері матрицасы бар. Онда (15) бірмәнді шешілімді болады және $z(t_i,x)$ мәндерін (20) формула арқылы өрнектейміз. Нәтижесінде $z(t_i,x)$ мәндерін (22) өрнегіне қойсақ, есептің шешімі келесі түрде болады:

$$z(t,x) = F(t,x) + \sum_{i=1}^{n} G(t,x,B_i) \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) F(t_j, x), x \in [0,\omega].$$

$z(t,x)$ шешімнің жалғыздығын көрсетейік. Ол үшін қарсы жору әдісі арқылы (8)–(9) есебінің екі шешімі, яғни $z(t,x)$ және $\tilde{z}(t,x)$ функциялары болсын делік. Ендеше бұл шешімдер (15) теңдеулер жүйесін қанағаттандырады.$[I - G(x)]$матрицасының барлық $x \in [0,\omega]$ үшін кері матрицасы болғанда, (15) жүйенің тек бір ғана шешімі бар. Демек, қарама-қайшылыққа келдік. Бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін (8)–(9) бастапқы есебінің жалғыз ғана шешімі бар.

Теорема дәлелденді.

(8)–(9) есебі мен (1)–(5) есебіне пара-пар болғандықтан табылған $z(t_i,x)$ функциясының көмегімен (1)–(5) есебінің шешімін келесі түрде жазамыз:

$$u(t,x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)\frac{x^2}{2} +$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^s\left[F(t,\xi)+\sum_{i=1}^{n}G(t,\xi,B_i)\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(\xi)F(t_j,\xi)\right]d\xi ds dy,(t,x)\in\Omega. \quad (23)$$

Келесі тұжырым орынды.

2-теорема. Егер төмендегі шарттар орындалса:

I) $A_1(t,x), B_i(t,x), f(t,x)$ – Ω облысындағы үзіліссіз функциялар;

II) $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \varphi_3(t)$–$[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын болсын;

III) $\psi(x)$функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз үш рет дифференциалданатын болсын;

IV) $[I-G(x)]$матрицасының барлық $x\in[0,\omega]$үшін кері матрицасы бар болсын.

Онда (1)–(5) есебінің $u(t,x)$ жалғыз шешімі бар болады және келесі түрде анықталады:

$$u(t,x)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)x+\varphi_3(t)\frac{x^2}{2}+$$
$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^s\left[F(t,\xi)+\sum_{i=1}^{n}G(t,\xi,B_i)\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(\xi)F(t_j,\xi)\right]d\xi ds dy,(t,x)\in\Omega,$$

мұндағы $g_{ij}(x)$ – $[I-G(x)]^{-1}$кері матрицасының элементтері.

Дәлелдеуі. Төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеуі үшін (1)–(5) есебінің шешімі бар және оның жалғыздығы бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеуі үшін (8)–(9) бастапқы есебіне пара-пар болуымен қатар, лемманың және 1-теореманың тұжырымдамасынан шығады.

Теорема дәлелденді.

Төртінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеуінің бір жүктемесі болғанда бастапқы-шеттік есебінің шешімін табудың жолын көрсететін мысалды қарастырайық.

Мысал.

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t\partial x^3}=\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u\left(\frac{1}{2},x\right)}{\partial x^3}+6\left[(2t-1)e^{t^2}-e^{\frac{1}{4}}\right],(t,x)\in\Omega,(24)$$

$$u(t,0)=t^5,\quad t\in[0,1], \quad (25)$$
$$u_x(t,0)=t^4,\quad t\in[0,1]], \quad (26)$$
$$u_{xx}(t,0)=t^3,\quad t\in[0,1], \quad (27)$$
$$u(0,x)=x^3,\quad x\in[0,1], \quad (28)$$

мұндағы $\Omega=[0,1]\times[0,1],\ \ u(t,x)-$ ізделінді функция.

(24)–(28) есебінің шешімін табу үшін жаңа белгісіз функцияны енгіземіз:

$$z(t,x)=\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3},\quad x\in[0,1]. \quad (29)$$

$$u(t,x)=t^5+t^4x+t^3\frac{x^2}{2}+\int_0^x\int_0^y\int_0^s z(t,\xi)d\xi ds dy,(t,x)\in\Omega, \quad (30)$$

(24)–(28) есебін жаңа белгісіз функция арқылы жазсақ, бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу есебінің әулетін аламыз:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}=z(t,x)+z\left(\frac{1}{2},x\right)+6\left[(2t-1)e^{t^2}-e^{\frac{1}{4}}\right],(t,x)\in\Omega, \quad (31)$$

$$z(0,x) = 6, \quad x \in [0,1]. \tag{32}$$

(31)–(32) есебі – Коши есебі болғандықтан оның шешімін мына түрде өрнектеуге болады:

$$z(t,x) = e^{\int_0^t d\tau}\left[6 + \int_0^t e^{-\int_0^t d\tau} z\left(\frac{1}{2},x\right)d\tau + 6\int_0^t e^{-\int_0^t d\tau}\left[(2t-1)e^{t^2} - e^{\frac{1}{4}}\right]d\tau\right],$$

$x \in [0,1]$, (33)

(33) өрнегін түрлендірейік, сонда

$$z(t,x) = 6e^{t^2} + 6e^{\frac{1}{4}} - 6e^{\frac{1}{4}+t} + e^t\int_0^t e^{-\tau} z\left(\frac{1}{2},x\right)d\tau, x \in [0,1], \tag{34}$$

өрнегін аламыз. Енді (34) өрнектегі t мәні $t = \frac{1}{2}$ болғандағы $z\left(\frac{1}{2},x\right)$ мәнінтабайық:

$$\left[1 - e^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\tau}d\tau\right] z\left(\frac{1}{2},x\right) = 12e^{\frac{1}{4}} - 6e^{\frac{3}{4}}, \; x \in [0,1],$$

алынған өрнектің сол жағындағы интегралды есептейік:

$$\left(2 - e^{\frac{1}{2}}\right) z\left(\frac{1}{2},x\right) = 12e^{\frac{1}{4}} - 6e^{\frac{3}{4}}, \; x \in [0,1],$$

Бұдан $z\left(\frac{1}{2},x\right)$ мәнін табайық:

$$z\left(\frac{1}{2},x\right) = \frac{6e^{\frac{1}{4}}\left(2 - e^{\frac{1}{2}}\right)}{2 - e^{\frac{1}{2}}}, \; x \in [0,1],$$

соңғы өрнекті ықшамдайық:

$$z\left(\frac{1}{2},x\right) = 6e^{\frac{1}{4}}, \; x \in [0,1]. \tag{35}$$

Осы табылған мәнді (34) өрнегіне қойсақ, (31)–(32) есебінің шешімін табамыз:

$$z(t,x) = 6e^{t^2}, \quad x \in [0,1]. \tag{36}$$

(36) өрнекті жоғарыда келтірілген лемманың тұжырымдамасы бойынша (30) өрнекке қойып, (24)–(28) есебінің шешімін табамыз:

$$u(t,x) = t^5 + t^4x + t^3\frac{x^2}{2} + \int_0^x\int_0^y\int_0^s 6e^{t^2}d\xi ds dy, x \in [0,1], t \in [0,1].$$

Соңғы өрнектегі үш еселі интегралды есептейік, сонымен (24)–(28) есебінің шешімі мына түрде болады:

$$u(t,x) = t^5 + t^4x + t^3\frac{x^2}{2} + x^3e^{t^2}, x \in [0,1], t \in [0,1]. \tag{37}$$

Қорытынды

Жұмыста төртінші ретті дербес туындылы, екі айнымалыға тәуелді және n жүктемесі бар дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп жан-жақты зерттелді. Бастапқы есепті жаңа белгісіз функция енгізу арқылы оған пара-пар бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін Коши есептері әулетіне келтіру мүмкіндігі көрсетілді. Белгісіз функцияның мәндері үшін x-ке тәуелді функционалдық теңдеулер жүйесі құрылып, бұл жүйенің шешімін табудың тиімді алгоритмі ұсынылды. Сонымен қатар, бірінші ретті жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін Коши есептері әулетінің жалғыз шешімінің бар болуы туралы теорема дәлелденді. Осы нәтижелердің негізінде төртінші ретті дербес туындылы, n жүктемесі бар дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің шешімі бар болуы мен жалғыздығының жеткілікті шарттары анықталды. Алынған теориялық қорытындылар жүктелген дифференциалдық теңдеулер теориясын әрі қарай дамытуға және қолданбалы есептерді шешуге негіз бола алады.

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Bishop R.E.D. Longitudinal waves in beams//Aeronaut. – 1952. – Q. 3(2). – P. 280 – 293 p.

2 Ptashnyck B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. – Kiev: Naukova Dumka, 1984. – 265 p.

3 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 305 с.

4 Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative// Pure and Appl.Math. – Marcel Dekker, New York, 1998 – 256 p.

5 Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. – Kyiv: Naukova Dumka, Ukraine, 2002. – 292 p.

6 Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. – 245 с.

7 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

8 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

9 Мамедов И.Г. Задача оптимального управления в процессах, описываемых нелокальной задачей с нагружениями для гиперболического интегро дифференциального уравнения // Известия Национальной академии наук Азердбайжана, серия ФТМН. – 2004. – Т. 24. – №2. – С. 74–79.

10 Midodashvili B. Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proc. of A. Razmadze Math. Insitute, – 2005. – Vol. 138. – P. 43–54.

11 Kiguradze T. On solvability and well – posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order // Georgian Mathematical Journal. – 2008. – Vol. 15. – No. 3. – P. 555–569.

12 Liu Y., Li H. H1 – Galerkin mixed finite element for pseudo – hyperbolic equations// Applied Mathematics and Computation. – 2009. – Vol. 212 (2). – P. 446–457.

13 Mamedov I.G. A fundamental solution to the Cauchy problem for a fourth order pseudoparabolic equation // Comput. Math. Phys. – 2009. – Vol. 49 (1). – P. 93–104.

14 Guo H. Analysis of split weighted least–squares procedures for pseudohyperbolic equations // Applied Mathematics and Computation. – 2010. – Vol. 217 (8). – P. – 4109–4121.

15 Ferraioli D.C., Tenenblat K. Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces // J. Differtial Equations. – 2014. – Vol. 257. – P. 3165–3199. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.06.010.

16 Fedotov I., Shatalov M., Marais J. Hyperbolic and pseudohyperbolic equations in the theory of vibration // Acta Mech. – 2016. – Vol. 227(12). – P. 3315–3324.

17 Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear Benny – Luke type integro – differential equations with degenerate kernel// Russian Mathematics. – 2016. – Vol. 60. – No. 9.– P. 53–60.

18 Zhao Z., Li H. A continuous Galerkin method for pseudo – hyperbolic equations with variable coefficients // J. Math. Anal. and Appl. – 2019. – Vol. 473 (2). – P. 1053–1072.

19 Assanova A.T., Boichuk A.A., TokmurzinZh.S. On the initial – boundary value problem for system of the partial differential equations of fourth order // News of the NAS RK. Physico–Math. Ser. – 2019. – Vol. 323. – P. 14–21. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.2.

20 Assanova A.T., Tokmurzin,Zh.S. On two – point initial boundary value problem for fourth order partial differential equations// Kazakh Mathematical Jounal. – 2019. – Vol. 19. – No. 3. – P. 66–78.

21 Assanova A.T., Tokmurzin,Zh.S. An approach to the solution of the initial boundary – value problem for systems of fourth – order hyperbolic equations // Mathematical Notes. – 2020. – Vol. 108. – No. 1. – P. 3–14.

22 Assanova A.T., TokmurzinZh.S. Boundary value problem for system of pseudo – hyperbolic equations of the fourth order with nonlocal condition // Russian Mathematics. – 2020. – Vol. 64. – No. 9. – P. 1–11.

23 Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. A nonlocal multipoint problem for a system of fourth – order partial differential equations// EurasianMathematical Journal. – 2020. – Vol. 11(3). – P. 8–20. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-08-20.

24 Assanova A.T., Tokmurzin,Zh.S. Method of functional parametrization equations // Bulletin of the Karaganda university – Series Mathematics. – 2020. – Vol. 100. – No. 4. – P. 5–16.

25 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. A nonlocal problem for ioaded partial differential equations of fourth order // Bulletin of the Karaganda university – Series Mathematics. – 2020. – Vol. 97. – No. 1. – P. 6–16. https://doi.org/10.31489/2020M1/6-16.

26 Абдикаликова Г.А., Асанова А.Т., Шекербекова Ш.Т. О нелокальной задаче для нагруженных гиперболических уравнений четвертого порядка // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 8. – С. 3–23.

27 Assanova A.T., Kadirbaev Zh.M., Bakirova E.A. On the unique solvability of a nonlocal boundary – value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 69(8). – P. 1175 –1195. https://doi.org/101007/s11253-017-1424-5.

28 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 72. – P. 1– 8.

29 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 58(4) – P. 508–516. https://doi.org/10.1134/s096554251804005X.

30 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two – point boundary – value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 37(4). – P. 4966–4976. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9.

REFERENCES

1 Bishop, R.E.D. Longitudinal waves in beams. Aeronautical Quarterly, 3 (2), 280–293 (1952).

2 Ptashnyck, B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations (Kiev: Naukova Dumka, 1984), 265 p.

3 Nakhushev, A.M. Equations of Mathematical Biology (Moscow: Vysshaya shkola, 1995), 305 p.

4 Demidenko, G.V., and Uspenskii, S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative (New York: Marcel Dekker, 1998), 256 p.

5 Ptashnyk, B.Yo., Il'kiv, V.S., Kmit', I.Ya., and Polishchuk, V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations (Kyiv: Naukova Dumka, 2002), 292 p.

6 Algazin, S.D., and Kiiko, I.A. Flutter of plates and shells (Moscow: Nauka, 2006), 245 p. (in Russian).

7 Nakhushev, A.M. Boundary value problems with nonlocal conditions for partial differential equations (Moscow: Nauka, 2006), 287 p. (in Russian).

8 Nakhushev, A.M. Loaded equations and their applications (Moscow: Nauka, 2012), 232 p. (in Russian).

9 Mamedov, I.G. The optimal control in processes described by a nonlocal loaded problem for a hyperbolic integro-differential equation. Izvestiya of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series Physico-Mathematical Sciences, 24 (2), 74–79 (2004). (in Russian).

10 Midodashvili, B. Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, 138, 43–54 (2005).

11 Kiguradze, T. On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order. Georgian Mathematical Journal, 15 (3), 555–569 (2008).

12 Liu, Y., and Li, H. H^1-Galerkin mixed finite element for pseudo-hyperbolic equations. Applied Mathematics and Computation, 212 (2), 446–457 (2009).

13 Mamedov, I.G. A fundamental solution to the Cauchy problem for a fourth order pseudoparabolic equation. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 49 (1), 93–104 (2009).

14 Guo, H. Analysis of split weighted least-squares procedures for pseudohyperbolic equations. Applied Mathematics and Computation, 217 (8), 4109–4121 (2010).

15 Ferraioli, D.C., and Tenenblat, K. Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces. Journal of Differential Equations, 257, 3165–3199 (2014). https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.06.010.

16 Fedotov, I., Shatalov, M., and Marais, J. Hyperbolic and pseudohyperbolic equations in the theory of vibration. Acta Mechanica, 227 (12), 3315–3324 (2016).

17 Yuldashev, T.K. Inverse problem for a nonlinear Benny–Luke type integro-differential equation with degenerate kernel. Russian Mathematics, 60 (9), 53–60 (2016).

18 Zhao, Z., and Li, H. A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 473 (2), 1053–1072 (2019).

19 Assanova, A.T., Boichuk, A.A., and Tokmurzin, Zh.S. On the initial-boundary value problem for a system of fourth order partial differential equations. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Physico-Mathematical Series, 323, 14–21 (2019). https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.2.

20 Assanova, A.T., and Tokmurzin, Zh.S. On two-point initial-boundary value problem for fourth order partial differential equations. Kazakh Mathematical Journal, 19 (3), 66–78 (2019).

21 Assanova, A.T., and Tokmurzin, Zh.S. An approach to the solution of the initial boundary-value problem for systems of fourth-order hyperbolic equations. Mathematical Notes, 108 (1), 3–14 (2020).

22 Assanova, A.T., and Tokmurzin, Zh.S. Boundary value problem for system of pseudo-hyperbolic equations of the fourth order with nonlocal condition. Russian Mathematics, 64 (9), 1–11 (2020).

23 Assanova, A.T., and Tokmurzin, Zh.S. A nonlocal multipoint problem for a system of fourth-order partial differential equations. Eurasian Mathematical Journal, 11 (3), 8–20 (2020). https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-08-20.

24 Assanova, A.T., and Tokmurzin, Zh.S. Method of functional parametrization of equations. Bulletin of the Karaganda University – Series Mathematics, 100 (4), 5–16 (2020).

25 Assanova, A.T., Imanchiyev, A.E., and Kadirbayeva, Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order. Bulletin of the Karaganda University – Series Mathematics, 97 (1), 6–16 (2020). https://doi.org/10.31489/2020M1/6-16.

26 Abdikalikova, G.A., Assanova, A.T., and Shekerbekova, Sh.T. A nonlocal problem for fourth-order loaded hyperbolic equations. Russian Mathematical Journal, 8, 3–23 (2022). (in Russian).

27 Assanova, A.T., Kadirbayeva, Zh.M., and Bakirova, E.A. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions. Ukrainian Mathematical Journal, 69 (8), 1175–1195 (2018). https://doi.org/10.1007/s11253-017-1424-5.

28 Assanova, A.T., and Kadirbayeva, Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of loaded hyperbolic equations. Electronic Journal of Differential Equations, 72, 1–8 (2018).

29 Assanova, A.T., Imanchiyev, A.E., and Kadirbayeva, Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 58 (4), 508–516 (2018). https://doi.org/10.1134/S096554251804005X.

30 Assanova, A.T., and Kadirbayeva, Zh.M. On the numerical algorithms of the parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations. Computational and Applied Mathematics, 37 (4), 4966–4976 (2018). https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9.

[1]*Sarman A.D.,
PhD, Lecturer, ORCID ID: 0009-0006-3617-4071,
*e-mail:sadrasul8@gmail.com
[2]Assanova A.T.,
Dr. Phys.-Math.Sc., Cand.Biol.Sc., ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,

e-mail: assanova@math.kz
[1]Tokmurzin Zh.S.,
PhD, Senior Lecturer, ORCID ID: 0000-0002-3738-5923,
e-mail: tokmurzinzh@gmail.com

[1]K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan,
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

ON THE SOLUTION OF AN INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED FOURTH–ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract

An initial–boundary value problem is considered for a differential equation with n loads, depending on two variables and involving fourth-order partial derivatives. By introducing a new unknown function, the original problem is reduced to a family of Cauchy problems for a loaded differential equation with first-order partial derivatives. For the unknown function with loads z(t_i,x), a system of functional equations with respect to the variable x is constructed. An algorithm for finding a solution to this system of functional equations is proposed. A theorem on the existence and uniqueness of a solution to the family of Cauchy problems for the loaded differential equation with first-order partial derivatives is proved. Conditions for the existence and uniqueness of a solution to the initial–boundary value problem for the loaded differential equation involving fourth-order partial derivatives and depending on two variables are established. The result is illustrated by an example.

Keywords: high-order loaded partial differential equation, initial-boundary value problem, system of functional equations, solvability conditions.

Received: February 11, 2026; revised: February 23, 2026; accepted: February 23, 2026.

[1]*Сарман А.Д.,
докторант, преподаватель, ORCID ID: 0009-0006-3617-4071,
*e-mail: sadrasul8@gmail.com
[2]Асанова А.Т.,
д.ф.-м.н., к.б.н., ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,
e-mail: assanova@math.kz
[1]Токмурзин Ж.С.,
PhD, ст. преподаватель, ORCID ID: 0000-0002-3738-5923,
e-mail: tokmurzinzh@gmail.com

[1]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова,
г. Актобе, Казахстан,
[2]Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Казахстан.

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация

Рассматривается начально-краевая задача для дифференциального уравнения с n-нагрузкой, зависящего от двух переменных и содержащего частные производные четвертого порядка. Путем введения новой неизвестной функции исходная задача сводится к семейству задач Коши для нагруженного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Для неизвестной функции снагрузкамистроится система функциональных уравнений по переменной x. Предложен алгоритм нахождения решения этой системы функциональных уравнений. Доказана теорема о существовании единственного решения семейства задач Коши для нагруженного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Установлены условия существования и единственности решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с нагрузкой, содержащего частные производные четвертого порядка и зависящего от двух переменных. Результат проиллюстрирован примером.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, начально–краевая задача, система функциональных уравнений, условия разрешимости.