ӘОЖ 517.518
FТАХР 27.39.25

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-240-249

[1,2]***Манарбек М.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0006-6879-8356,
*e-mail: manarbek@math.kz
[2,3]**Мусабаева Г.К.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-2368-8955,
e-mail: mussabayeva@mail.ru

[1]Математика және математикалық модельдеу институты,
Алматы қ., Қазақстан
[2]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Астана қ., Қазақстан
[3]«Geometry» ЖШС,
Астана қ., Қазақстан

АНИЗОТРОПТЫ ГРАНД ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ ГЕЛЬДЕР ТЕҢСІЗДІГІ ЖӘНЕ ОСЫ КЕҢІСТІКТІҢ ДУАЛДЫЛЫҒЫ

Аңдатпа

Соңғы жылдары функционалдық кеңістіктер теориясында гранд Лебег, гранд Лоренц кеңістіктері және олардың жалпыламалары кеңінен зерттелуде. Себебі қазіргі уақытта белгілі функционалдық кеңістіктердің көпшілігі электрореологиялық және термореологиялық сұйықтықтарды модельдеуде, бейнелерді өңдеу мәселелерінде, стандартты емес өсуі бар дифференциалдық теңдеулерде және басқа да салалардағы қолданбалы есептерді сипаттауда жеткіліксіз екендігі анықталды. Сондықтан функционалдық кеңістіктердің жаңа шкалалары, атап айтқанда айнымалы көрсеткішті кеңістіктер мен гранд кеңістіктер енгізілді. Осы мақалада анизотропты гранд Лоренц кеңістігінің анықтамасы мен дәлелденген қасиеттеріне сүйене отырып, осы кеңістікте бұрын дәлелденбеген Гёльдер теңсіздігі алынады. Аталған теңсіздікті дәлелдеу үшін функциялардың кемімелі қайта орналастырылуының қасиеттері пайдаланылады. Зерттеуде көпөлшемді жағдайларға арналған әдістер қолданылып, функциялардың реттелген және қайта орналастырылған нұсқалары арасындағы байланыстар талданады. Алынған нәтижелер тек теориялық маңызға ие болып қана қоймай, қолданбалы есептерде, атап айтқанда дифференциалдық теңдеулерді шешуде және интегралдық операторларды зерттеуде пайдаланылуы мүмкін. Сонымен қатар алынған Гёльдер теңсіздігі негізінде осы кеңістіктердің дуалдылығы дәлелденді. Мақалада ұсынылған нәтижелер функционалдық кеңістіктер теориясын тереңдетуге және олардың қолданылу аясын кеңейтуге ықпал етеді.

Тірек сөздер: стандартты емес кеңістіктер, қатарлар, теңсіздіктер, функциялардың кемімелі қайта орналастырылуы, енгізу теоремалары, кеңістіктің дуалдылығы.

Кіріспе

Бұл мақалада A ≲ B белгісі $A \leqslant CB$ түріндегі бағалауды білдіреді, мұндағы $C > 0$ дегеніміз кеңістіктің негізгі параметрлеріне тәуелсіз тұрақты. Ал A ≍ B жазуы екі жақты бағалауды, яғни A ≲ B және B ≲ A орындалатынын көрсетеді.

Анықтамаларда келесі белгілер қолданылады: $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2) \in R_+^2$, $\bar{p} + \bar{q} = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ және бұл барлық параметрлер үшін қарастырылады.

Егер $0 < p_1, p_2 \leqslant \infty, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1, \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$ болса, онда $\bar{0} < \bar{p} \leqslant \bar{\infty}$, $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}'} = \bar{1}$. $\bar{p} \leqslant \bar{q}$ қатынасы орындалады. Сондай-ақ, егер $p_1 \leqslant q_1, p_2 \leqslant q_2$.болса, онда $\bar{p} \leqslant \bar{q}$ деп жазамыз.

Гранд Лебег кеңістіктерін 1992 ж. Иваньек және Сбордон енгізген болатын [1]. Олар бұл кеңістіктерді Якобианның интегралдануы мәселесін минималды болжамдармен шешу үшін қолданды. Кейінірек, $|\Omega| = 1$ болған жағдайда гранд Лебег кеңістіктерінің альтернативті сипаттамасы [2]-[3], жұмыстарында берілген. Анизотропты және аралас метрикалы Лоренц кеңістіктеріндегі теңсіздіктер жайлы Н.Т. Тлеуханова және Г.К. Мусабаева [4]-[5] мақалаларында зерттелді. Е.Д. Нұрсұлтанов, У. Рафейро, және Д. Сураган [6] жұмысында гранд Лоренц кеңістіктерін анықтады. Лоренц–Карамата кеңістігі мен гранд Лоренц кеңістігінің басқа нұсқасымен салыстырулар жүргізілді. Алғаш рет анизотропты гранд Лоренц кеңістігі [7] еңбегінде енгізіліп, қасиеттері зерттелді. Негізгі нәтижелерді алу үшін ең алдымен анизотропты гранд Лоренц кеңістіктерінің анықтамасын көрсетейік.

1-анықтама [7]. $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, $-\infty < \bar{\theta} \le \infty$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $0 < \bar{p} \le \infty$, $0 < \bar{q} \le \infty$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$ және $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^2$, $|\Omega| = 1$ болсын. $GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}(\Omega)$ анизотропты гранд Лоренц кеңістіктері деп келесі квазинормалары ақырлы болатын f өлшенетін функциялар жиынын айтамыз:
$\theta_1, \theta_2, \geqslant 0$, кезінде келесі теңдік орындалады:

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} = \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1}t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2}f^{*1,*2}(t_1,t_2)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}, \quad (1)$$

$\theta_1, \theta_2 > 0, p_1, p_2 = \infty$ кезінде:

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} = \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}f^{*1,*2}(t_1,t_2)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\right., \quad (2)$$

$\theta_1, \theta_2 < 0$, $\bar{0} < \bar{q} < \bar{\infty}$ болса:

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} = \inf_{\substack{0<\varepsilon_1<\frac{1}{p_1}\\ 0<\varepsilon_2<\frac{1}{p_2}}} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(t_1^{\frac{1}{p_1}-\varepsilon_1}t_2^{\frac{1}{p_2}-\varepsilon_2}f^{*1,*2}(t_1,t_2)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}, \quad (3)$$

және $\theta_1, \theta_2 \geqslant 0$ болса:

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\infty}[0,1]^2} = \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1}\sup_{0<t_1,t_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}t_1^{\frac{1}{p_1}+\varepsilon_1}t_2^{\frac{1}{p_2}+\varepsilon_2}f^{*1,*2}(t_1,t_2) \quad (4)$$

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\infty}[0,1]^2} = \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1}\sup_{0<t_1,t_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}t_1^{\frac{1}{p_1}}t_2^{\frac{1}{p_2}}f^{*1,*2}(t_1,t_2) \quad (5)$$

$\theta_1, \theta_2 < 0$, $\bar{q} = \bar{\infty}$ болса:

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\infty}[0,1]^2} = \inf_{\substack{0<\varepsilon_1<\frac{1}{p_1}\\ 0<\varepsilon_2<\frac{1}{p_2}}}\sup_{0<t_1,t_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}t_1^{\frac{1}{p_1}-\varepsilon_1}t_2^{\frac{1}{p_2}-\varepsilon_2}f^{*1,*2}(t_1,t_2). \quad (6)$$

мұндағы $f^{*1,*2}(t_1, t_2)$ – $f(x) = f(x_1, x_2)$ функциясынан алынған, мұнда алдымен x_1 содан кейін x_2 айнымалысы бойынша, әр жолы екінші айнымалыны тұрақты етіп ұстай отырып, кемімелі ретпен қайта орналастыру қолданылады.

Функцияның кемімелі қайта орналастырылуы мынадай түрде анықталады [8]:

$$f^*(t)=\inf\{\sigma:\mu\{x\in\Omega:|f(x)|>\sigma\}\leqslant t\}$$

мұндағы қайта орналастыру x_1 and x_2айнымалыларының әрқайсысы бойынша кезекпен орындалады, ал қалған айнымалы тұрақты деп есептеледі.

Бұл мақалада анизотропты гранд Лоренц кеңістігінің анықтамасы мен бұрын дәлелденген қасиеттеріне сүйене отырып, осы кеңістікте Гельдер теңсіздігі және осы кеңістіктің дуалдылығы дәлелденеді.

1-лемма [8]. f,g дегеніміз Ω-де анықталған өлшенетін функциялар болса, онда төмендегі теңсіздік орындалады:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu\leqslant\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt \tag{7}$$

$\{a_k\}_{k=1}^m,\{b_k\}_{k=1}^m$дегеніміз күрделі сандар тізбегі болса, онда келесі орындалады:

$$\sum_{k=1}^n |a_kb_k|\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^*b_k^* \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^n |a_kb_k|\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^*b_{n-k+1}^* \tag{9}$$

мұндағы $\{a_k^*\}_{k=1}^m,\{b_k^*\}_{k=1}^m$, сәйкесінше, $\{|a_k|\}_{k=1}^m,\{|b_k|\}_{k=1}^m$ тізбегі үшін кемімелі ретпен қайта орналастыруы.

Дәлелдеу. 1-лемманы дәлелдеу үшін, келесі қадамдар орындалады:

1-қадам. f және g дегеніміз e және ω өлшемді жиындардың сипаттамалық функциялары болсын, онда $f^*(t)=\chi_{(0,|e|)}, g^*(t)=\chi_{(0,|\omega|)}$, мұндағы $|e|=\mu(e),|\omega|=\mu(\omega)$, онда

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu=|e\cap\omega|\leqslant\min(|e|,|\omega|)=\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt \tag{10}$$

2-қадам. f және g дегеніміз мәндердің шектеулі санын қамтитын теріс емес функциялар болсын және болсын. Олай болса бұл функцияларды келесідей сипаттамалық функциялардың соңғы сызықтық комбинациялары ретінде көрсетуге болады:

$$f(x)=\alpha_1\chi_{e_1}(x)+\dots+\alpha_m\chi_{e_m}(x)$$
$$g(x)=\beta_1\chi_{\omega_1}(x)+\dots+\beta_n\chi_{\omega_n}(x)'$$

мұндағы $\alpha_i>0,\beta_i>0$ және $e_1\subset e_2\subset\dots\subset e_m,\omega_1\subset\omega_2\subset\dots\subset\omega_m$. Бұл жағдайда келесі теңдік орындалады:

$$f^*(t)=\alpha_1\left(\chi_{e_1}\right)^*(t)+\dots+\left(\chi_{e_m}\right)^*(t)$$
$$g^*(t)=\beta\left(\chi_{\omega_1}\right)^*(t)+\dots+\left(\chi_{\omega_n}\right)^*(t)$$

Сондықтан сипаттамалық функциялар үшін дәлелденген теңсіздікті қолдану. мәндердің шектеулі санын қабылдайтын өлшенетін функциялар үшін (7)-теңсіздіктің дұрыстығын тексереміз.

3-қадам. (7)-теңсіздіктің оң жағы шекті болатындай алынған f және g өлшенетін функциялар болсын. Біз f және g теріс емес деп қарастыра аламыз. $n\in\mathbb{N}$ болсын.

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{k}{n}, & \text{if } \frac{k}{n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{n}, k=0,1,\dots,n^2-1\\ 0 & \text{if } f(x)\geqslant n\end{cases}$$

және сол сияқты

$$g_n(x)=\begin{cases}\frac{k}{n}, & \text{if } \frac{k}{n}\leqslant g(x)<\frac{k+1}{n}, k=0,1,\dots,n^2-1\\ 0, & \text{if } g(x)\geqslant n\end{cases}$$

Бұл функциялар мәндердің шекті санын, $f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$ және $f_n^* \uparrow f^*$, арқылы қабылдайды $g_n^* \uparrow g$.

Осылайша, біз төмендегі теңсіздіктерін легін аламыз:

$$\int_\Omega |f_n(x)g_n(x)|d\mu \leqslant \int_0^\infty f_n^*(t)g_n^*(t)dt \leqslant \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt, n \in \mathbb{N}$$

Фату теоремасы дәлелдеуді аяқтайды. Қарап отырсаңыздар, 1-лемма бір өлшемді жағдай үшін орындалады, енді осы теңсіздікті көпөлшемді жағдай үшін қарастырайық.

2-лемма [9] f, g дегеніміз Ω-де анықталған өлшенетін функциялар болса, онда төмендегі теңсіздік орындалады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2 \dots x_n)g(x_1, x_2 \dots x_n)|dx_1dx_2..dx_n$$
$$\leq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f^{*_1,*_2,\dots,*_n}(t_1, t_2 \dots t_n)g^{*_1,*_2,\dots,*_n}(t_1, t_2 \dots t_n)dt_1dt_2 \dots dt_n \quad (11)$$

Дәлелдеу. Жоғарыдағы теңсіздікті дәлелдеу үшін біз 1-леммада көрсетілген қадамдарды қайталаймыз, сонда келесі теңсіздік шығады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2 \dots x_n)g(x_1, x_2 \dots x_n)|dx_1dx_2..dx_n$$
$$\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f^{*_1}(t_1, x_2 \dots, x_n)g^{*_1}(t_1, x_2 \dots, x_n)dt_1dx_2 \dots dx_n$$
$$\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-2} f^{*_1,*_2}(t_1, t_2, x_3 \dots, x_n)g^{*_1,*_2}(t_1, t_2, x_3 \dots, x_n)dt_1dt_2dx_3 \dots dx_n \quad (12)$$
$$\leq \dots \leq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f^{*_1,*_2,\dots,*_n}(t_1, t_2 \dots t_n)g^{*_1,*_2,\dots,*_n}(t_1, t_2 \dots t_n)dt_1dt_2 \dots dt_n$$

Жоғарыда көрсетілген екі лемма бізге негізгі нәтижелерді алу үшін қажетті шарт болады.

Нәтижелер мен талқылау

Келесі нәтиже классикалық Лоренц кеңістігі үшін Гельдер типті теңсіздігі болып табылады.

3-лемма [10]. ($X, \mathcal{A}, \mu$) өлшенетін кеңістік болсын, p және q дегеніміз $[1, \infty]$ арасындағы екі кеңейтілген нақты сандар, ал p' және q' олардың конъюгаттық көрсеткіштері. Егер $f \in L_{(p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ және $g \in L_{(p',q')}(X, \mathcal{A}, \mu)$ болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{(p,q)}\|g\|_{(p',q')}.$$

Дәлелдеу. Функцияның кемімелі қайта орналастырылуының қасиеттері және Гельдер теңсіздігі бойынша бізде келесідей дәлелденеді:

$$\int_X |fg|\mathrm{d}\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)\right)\left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}}g^*(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p'}g^*(t)\right)^{q'} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q'}$$
$$= \|f\|_{(p,q)}\|g\|_{(p',q')}$$

Енді біз анизотропты Лоренц кеңістігі үшін Гельдер теңсіздігін дәлелдейміз. Ол үшін анизотропты Лоренц кеңістігінің анықтамасын жаза кетейік:

2-анықтама [11]. $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ дегеніміз $0 < p_i < \infty$, және $0 \le \tau_i \le \infty$ болатындай, ал егер $p_i = \infty$ болса, онда $\tau_i = \infty, i = 1,2$ болатындай алынсын. $L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$ анизотропты Лоренц кеңістігі деп бұл [0,1]2 квадратында анықталған өлшемді функциялардың жиыны, олар үшін мына шама шекті болады:

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)\right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}$$

1-теорема. f, g дегеніміз Ω-де анықталған өлшенетін функциялар болса, $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{q} = (q_1, q_2)$ дегеніміз $0 < p_i < \infty$, және $0 \le q_i \le \infty$ болатындай онда төмендегі теңсіздік орындалады:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \le c\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{q}[0,1]^2}} \|g\|_{L_{\bar{p}',\bar{q}'[0,1]^2}} \tag{13}$$

Теореманы дәлелдеу үшін біз 2-леммадағы теңсіздікті қолданамыз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2 \dots x_n) g(x_1, x_2 \dots x_n)| \, dx_1 dx_2 .. dx_n$$

$$\le \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f^{*_1,*_2,\dots *_n}(t_1, t_2 \dots t_n) g^{*_1,*_2,\dots *_n}(t_1, t_2 \dots t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$$= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q_n}} f^{*_1,\dots *_n}(t_1 \dots t_n) \cdot t_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q_n}} g^{*_1,\dots *_n}(t_1 \dots t_n)$$

$$= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i=1}^n t_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}} f^{*_1,\dots *_2}(t_1 \dots t_n) \cdot \prod_{i=1}^n t_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}} g^{*_1,\dots *_2}(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

$$\le \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{n-1} \left[\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^n t_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}} f^{*_1,\dots *_2}(t_1 \dots t_n) dt_1\right)^{q_1} dt_1\right]^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\left[\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^n t_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}} g^{*_1,\dots *_2}(t_1 \dots t_n) dt_1\right)^{q_1'} dt_1\right]^{\frac{1}{q_1'}} dt_2 \dots dt_n$$

$$= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i=2}^n \left[\int_0^\infty t_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}} f^{*_1,\dots *_2}(t_1 \dots t_n) dt_1\right)^{q_1} dt_1\right]^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\prod_{i=2}^n \left[\int_0^\infty t_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}} g^{*_1,\dots *_2}(t_1 \dots t_n) dt_1\right)^{q_1'} dt_1\right]^{\frac{1}{q_1}} dt_2 \dots dt_n \tag{14}$$

$$\le \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[t_n^{\frac{1}{p_n}} \left[t_{n_1}^{\frac{1}{p_n}} \dots \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1,\dots *_n}(t_1, \dots t_n)\right)^{q_n} \frac{dt_1}{t_1}\right]^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n}\right]^{\frac{1}{q_n}}$$

$$\le c\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} \|g\|_{L_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2}$$

Енді біз анизотропты гранд Лоренц кеңістігінің анықтамасын және 1-теореманы қолдана отырып, анизотропты гранд Лоренц теңсіздігі үшін Гельдер теңсіздігін аламыз.

2-теорема. f, g дегеніміз Ω-де анықталған өлшенетін функциялар болса, $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{q} = (q_1, q_2)$ дегеніміз $0 < p_i < \infty$, және $0 \le q_i \le \infty$ болатындай онда төмендегі теңсіздік орындалады:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \le c \parallel f \parallel_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} \parallel g \parallel_{GL^{-\bar{\theta}}_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2} \tag{15}$$

Дәлелдеу. $\frac{1}{\bar{p}(\bar{\varepsilon})} = \frac{1}{\bar{p}} + \bar{\varepsilon}$ және $\frac{1}{\bar{p}(-\bar{\varepsilon})} = \frac{1}{\bar{p}} - \bar{\varepsilon}$ деп қарастырайық.

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \le c\|f\|_{L_{\bar{p}(\varepsilon),\bar{q}}[0,1]^2}\|g\|_{L_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2} = \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2}\varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\|g\|_{L_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2}$$

$$\le \sup_{0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1} \varepsilon_1^{\theta_1}\varepsilon_2^{\theta_2}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(t_2^{\frac{1}{p_2(\varepsilon_2)}}t_1^{\frac{1}{p_1(\varepsilon_1)}}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

$$\varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\|g\|_{L_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2}.$$

Инфинумның қасиетін қолдана отырып, біз келесіні аламыз:

Теорема дәлелденді.

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2}\varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\|g\|_{L_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2}.$$

$$\le \|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} \inf_{0<\varepsilon_1<\frac{1}{p_1}} \inf_{0<\varepsilon_2<\frac{1}{p_2}} \varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(t_2^{\frac{1}{p_2(-\varepsilon_2)}}t_1^{\frac{1}{p_1(-\varepsilon_1)}}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\right)^{\frac{q_1}{t_1}}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\le c\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2}\|g\|_{GL^{-\bar{\theta}}_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2}.$$

Нәтижелер мен талқылау

Жоғарыда дәлелденген Гельдер теңсіздігі негізінде енді анизотропты гранд Лоренц кеңістіктерінің дуалдылығын көрсетеміз.

3-теорема. f, g дегеніміз Ω-де анықталған өлшенетін функциялар болсын, $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, $-\infty < \bar{\theta} \le \infty$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $0 < \bar{p} \le \infty$, $0 < \bar{q} \le \infty$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$ және $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^2$, $|\Omega| = 1$ болсын, онда келесі келесі шамалар эквивалентті:

$$\|f\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2} \asymp \sup_{\|g\|_{GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}}=1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(x)dx.$$

Дәлелдеу. $\frac{1}{\bar{p}(\bar{\varepsilon})} = \frac{1}{\bar{p}} + \bar{\varepsilon}$ және $\frac{1}{\bar{p}(-\bar{\varepsilon})} = \frac{1}{\bar{p}} - \bar{\varepsilon}$ деп қарастырайық. Теореманы дәлелдеу үшін функционалдық кеңістіктерінің дуалдылығын қолданамыз:

$$\left(GL^{-\bar{\theta}}_{\bar{p}',\bar{q}'}[0,1]^2\right)^* = \left(GL^{\bar{\theta}}_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2\right),$$

яғни:

$$\sup_{g\neq 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(x)dx}{\inf\limits_{\substack{0<\varepsilon_1<\frac{1}{p_1}\\ 0<\varepsilon_2<\frac{1}{p_2}}} \varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\|g\|_{L_{\overline{p}'(\overline{\varepsilon}),\overline{q}'}}},$$

Супремумның қасиеті арқылы:

$$\sup_{g\neq 0}\sup_{\substack{0<\varepsilon_1<\delta_1\\ 0<\varepsilon_2<\delta_2}} \varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\frac{\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(x)dx}{\|g\|_{L_{\overline{p}'(\overline{\varepsilon}),\overline{q}'}[0,1]^2}} \asymp \sup_{\substack{0<\varepsilon_1<\delta_1\\ 0<\varepsilon_2<\delta_2}} \varepsilon_1^{-\theta_1}\varepsilon_2^{-\theta_2}\|f\|_{L_{\overline{p}'(\overline{\varepsilon}),\overline{q}'}[0,1]^2} = \|f\|_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2}.$$

4-теорема. $\bar{\theta} > 0$ болған кезде келесі енгізу орындалады, ол теңсіздіктің қарама-қарсы жағдайының орындалатынын көрсетеді:

$$GL^{-\overline{\theta}}_{\overline{p}',\overline{q}'}[0,1]^2 \hookrightarrow \left(GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2\right)^*$$

Дәлелдеу. $\|f\|_{\left(GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2\right)^*} = \sup\limits_{\|g\|_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2}=1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(x)dx,$

мұндағы $\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)\,| dx \leq c \parallel g \parallel_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2} \parallel f \parallel_{GL^{-\overline{\theta}}_{\overline{p}',\overline{q}'}[0,1]^2}$ екендігі

15-теңсіздіктен белгілі Енді орнына қойсақ:

$$\|f\|_{\left(GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2\right)^*} \leq \sup_{\|g\|_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2}=1} \parallel g \parallel_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2} \parallel f \parallel_{GL^{-\overline{\theta}}_{\overline{p}',\overline{q}'}[0,1]^2}.$$

$\sup\limits_{\|g\|_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2}=1} \parallel g \parallel_{GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2} = 1$ болғандықтан, $\|f\|_{\left(GL^{\overline{\theta}}_{\overline{p},\overline{q}}[0,1]^2\right)'} \leq c\|f\|_{GL^{-\overline{\theta}}_{\overline{p}',\overline{q}'}[0,1]^2},$

яғни теорема дәлелденді.

Қорытынды

Бұл мақалада анизотропты гранд Лоренц кеңістігінің анықтамасы мен бұрын дәлелденген қасиеттеріне сүйене отырып, осы кеңістіктегі Гёльдер теңсіздігі және оның дуалдылығы дәлелденді. Нәтижелерді алу барысында функциялардың кемімелі қайта орналастырылуының қасиеттері және көпөлшемді жағдайға арналған әдістер қолданылды. Аталған кеңістіктердегі Гёльдер теңсіздігін дәлелдеу үшін бірөлшемді және көпөлшемді функциялар қарастырылып, классикалық Лоренц кеңістігінде дәлелденген Гёльдер теңсіздігін алу кезінде пайдаланылған әдістемелік қадамдарға сүйендік.

Мақалада алынған тұжырымдар теориялық және қолданбалы тұрғыдан маңызды болып табылады әрі гранд кеңістіктер теориясы бойынша алдағы зерттеулерге әдіснамалық негіз қалайды.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (Грант №AP23488613) қаржыландырады. Авторлар құнды пікірталастар үшін профессорлар Н.Т. Тлеуханова, А. Горбанализадеге алғысын білдіреді.

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Iwaniec T., Sbordone C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1992. – Vol. 119. – No. 2. – P. 129–143. https://doi.org/10.1007/BF00375119.

2 Fiorenza A., Karadzhov G.E. Grand and Small Lebesgue Spaces and Their Analogs // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 2004. – Vol. 23. –No. 4. – P. 657–681. https://doi.org/10.4171/ZAA/1215.

3 Fiorenza A., Formica M. R., Gogatishvili A., Kopaliani T., Rakotoson J. M. Characterization of interpolation between Grand, small or classical Lebesgue spaces // Nonlinear Analysis. – 2018. – Vol. 177. – P. 422–453. https://doi.org/10.1016/j.na.2017.09.005

4 Мусабаева Г.К. Неравенство типа Бочкарева // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. – 2014. – № 3 (82). – С. 12–18.

5 Мусабаева Г.К. Суммируемость коэффициентов Фурье из анизотропного пространства Лоренца // Математический журнал. – 2014. – Т. 14. – № 4 (54). – С. 84–96

6 Nursultanov E.D., Rafeiro H. & Suragan D. Convolution-type operators in grand Lorentz spaces // Anal.Math.Phys. – 2025. – Vol. 15. – No. 65. https://doi.org/10.1007/s13324-025-01049-7

7 Манарбек М., Тлеуханова Н.Т., Мусабаева Г.К. Анизотропные гранд-пространства Лоренца и их свойства // Вестник КБТУ. – 2025. – Т. 22. – № 2. – С. 207–219. https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-207-219

8 Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 1952. – XII+324 с.

9 Bennett C., Sharpley R.C. Interpolation of Operators. – Amsterdam: Elsevier Science, 1988.

10 Castillo R.E., Rafeiro H. An Introductory Course in Lebesgue Spaces. – Cham: Springer, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, 2016. – XV+206 с.

11 Мультипликаторы двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца // Вестник Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова. – 2024. – Т. 68. – № 2. https://vestnik.arsu.kz/index.php/hab/article/view/204

REFERENCES

1 Iwaniec, T., and Sbordone, C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 119 (2), 129–143 (1992). https://doi.org/10.1007/BF00375119

2 Fiorenza, A., and Karadzhov, G.E. Grand and Small Lebesgue Spaces and Their Analogs. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 23 (4), 657–681 (2004). https://doi.org/10.4171/ZAA/1215

3 Fiorenza, A., Formica, M.R., Gogatishvili, A., Kopaliani, T., and Rakotoson, J.M. Characterization of interpolation between Grand, small or classical Lebesgue spaces. Nonlinear Analysis, 177, 422–453 (2018). https://doi.org/10.1016/j.na.2017.09.005

4 Musabayeva, G.K. Neravenstvo tipa Bochkareva. Vestnik KazNU im. al'-Farabi. Seriya matematika, mekhanika, informatika, 3 (82), 12–18 (2014). (in Russian).

5 Musabayeva, G.K. Summiruemost' koeffitsientov Fur'e iz anizotropnogo prostranstva Lorentsa. Matematicheskiy zhurnal, 14 (4), 84–96 (2014). (in Russian).

6 Nursultanov, E.D., Rafeiro, H., and Suragan, D. Convolution-type operators in grand Lorentz spaces. Analysis and Mathematical Physics, 15, 65 (2025). https://doi.org/10.1007/s13324-025-01049-7

7 Manarbek, M., Tleukhanova, N.T., and Musabayeva, G.K. Anizotropnye grand-prostranstva Lorentsa i ikh svoystva. Vestnik KBTU, 22 (2), 207–219 (2025). https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-207-219 (in Russian).

8 Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Pólya, G. Inequalities. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952, XII+324 pp.

9 Bennett, C., and Sharpley, R.C. Interpolation of Operators. Amsterdam: Elsevier Science, 1988.

10 Castillo, R.E., and Rafeiro, H. An Introductory Course in Lebesgue Spaces. Cham: Springer, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, 2016, XV+206 pp.

11 Multiplikatory dvoinykh ryadov Fur'e–Khaara v anizotropnykh prostranstvakh Lorentsa. Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo universiteta imeni K. Zhubanova, 68 (2) (2024). https://vestnik.arsu.kz/index.php/hab/article/view/204 (in Russian).

[1,2]*Manarbek M.,
PhD, ORCID ID: 0009-0006-6879-8356,
*e-mail: makpa19136@mail.ru
[2,3]Mussabayeva G.K.,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-2368-8955,
e-mail: mussabayeva@mail.ru

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[3]Geometry LLP, Astana, Kazakhstan

HÖLDER'S INEQUALITIES IN ANISOTROPIC LORENTZ SPACES AND THE DUALITY OF THESE SPACES

Abstract

In recent years, grand Lebesgue spaces, grand Lorentz spaces, and their generalizations have been extensively studied in functional analysis. This is because it has become evident that most known functional spaces are insufficient for modeling applied problems such as electrorheological fluids, thermorheological fluids, image processing, differential equations with non-standard growth, and other fields. Therefore, new precise scales of functional spaces have been introduced, namely variable exponent spaces and grand spaces. In this article, using the definition of anisotropic grand Lorentz spaces and their previously proven properties, we derive a previously unproven Hölder's inequality in this space. To prove these inequalities, we utilize the properties of decreasing rearrangements of functions. The study employs methodologies developed for multidimensional cases, including the analysis of relationships between ordered and rearranged versions of functions. The duality of these spaces is established by means of Hölder's inequality. The results obtained are not only of theoretical importance but also find applications in practical problems, such as solving differential equations and studying integral operators. The findings presented in this article contribute to deepening the theory of functional spaces and expanding their areas of application.

Keywords: non-standard spaces, series, inequalities, decreasing rearrangement of functions, embedding theorems, duality of the spaces.

Received: December 12, 2025; accepted: February 22, 2026.

[1,2]*Манарбек М.,
докторант, ORCID ID: 0009-0006-6879-8356,
*e-mail: manarbek@math.kz
[2,3]Мусабаева Г. К.,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-2368-8955,
e-mail: musabaevaguliya@mail.ru

[1]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан,
[2]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
[3]ТОО «Geometry», г. Астана, Казахстан

НЕРАВЕНСТВА ГЕЛЬДЕРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНД ЛОРЕНЦА И ДУАЛЬНОСТЬ ЭТИХ ПРОСТРАНСТВ

Аннотация

В последние годы в исследованиях функциональных пространств широко изучаются пространства гранд Лебега, гранд Лоренца и их обобщения. Это связано с тем, что в настоящее время стало очевидным, что большинство известных функциональных пространств недостаточны для моделирования прикладных задач, таких как моделирование электрореологических жидкостей, термореологических жидкостей, обработка изображений, дифференциальные уравнения с нестандартным ростом и другие области. Поэтому были введены новые точные шкалы функциональных пространств, а именно переменнозначные пространства и гранд-пространства. В данной статье, используя определение анизотропного гранд-пространства Лоренца и его ранее доказанные свойства, мы получаем ранее недоказанное неравенство Гёльдера в этом пространстве. Для доказательства этих неравенств используются свойства невозрастающей перестановки функций. В исследовании применяются методы, разработанные для многомерных случаев, включая анализ связей между упорядоченными и переставленными вариантами функций. С помощью полученного неравенства Гёльдера доказана дуальность этих пространств. Полученные результаты имеют не только теоретическое значение, но и применяются в прикладных задачах, таких как решение дифференциальных уравнений и изучение интегральных операторов. Результаты, представленные в статье, способствуют углублению теории функциональных пространств и расширению сфер их применения.

Ключевые слова: нестандартные пространства, ряды, неравенства, убывающая перестановка функций, теоремы вложения, дуальность пространства.