УДК 517.927.2
МРНТИ 27.29.15, 27.29.17, 27.29.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-231-239

[1]Усманов К.И.,
к.ф.-м.н, доцент, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807,
e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[1]Назарова К.Ж.,
к.ф.-м.н, доцент, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,
e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz
[1]*Еркишева Ж. С.,
PhD, ORCID ID: 0009-0005-7507-4535,
*e-mail: zhazira.erkisheva@ayu.edu.kz

[1]Международный казахско-турецкий университет им. А. Ясави,
г. Туркестан, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Аннотация

В данной работе рассматривается краевая задача для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка $0<\alpha<1$ с инволютивным преобразованием. Для исследования разрешимости поставленной краевой задачи используется метод параметризации, предложенный профессором Д. Джумабаевым. Для этого вводится параметр $\mu = x(0)$ и выполняется замена переменных $0<\alpha<1$. Введенная замена переменных разбивает рассматриваемую задачу формально на две части, т.е. задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка $0<\alpha<1$ с инволютивным преобразованием и линейное уравнение относительно введенного параметра. Определяя решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка $0<\alpha<1$ с инволютивным преобразованием и подставляя его в краевое условие, получим линейное уравнение относительно введенного параметра. Считая, что коэффициент данного уравнения не равен нулю, находим единственное решение исследуемой краевой задачи. Установлена взаимосвязь между разрешимостью исследуемой задачи и коэффициентом полученного уравнения.

Ключевые слова: инволюция, краевая задача, метод параметризации, параметр, задача Коши, разрешимость.

Введение

В последние десятилетия дробное исчисление, то есть теория производных и интегралов нецелого (дробного) порядка, привлекло значительное внимание исследователей. Это связано с тем, что дробные производные позволяют более точно описывать процессы с памятью и наследственностью, которые часто встречаются в физике, биологии, экономике, теории управления и в других областях. В отличие от классического дифференцирования целого порядка дробное дифференцирование учитывает предыдущие состояния системы, что делает его особенно полезным при моделировании аномальной диффузии, вязкоупругих сред и динамических систем с фрактальной структурой времени.

Существует несколько подходов к определению дробной производной. Наиболее распространенными являются определения в смысле Римана–Лиувилля и Капуто.

Определение 1. Для каждого выражения, определенного на интервале $[a,b]$, для функции $x(t)$

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\xi)^{-\alpha} x(\xi) d\xi, \ t > a, $$

$$ {}_{RL}D_b^{\alpha} x(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (\xi - t)^{-\alpha} x(\xi) d\xi, \ t < b, $$

называются соответственно левосторонними и правосторонними дробными производными Римана–Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Определение 2. Пусть $x(t) \in L_1(a,b)$. Интегралы

$$ I_a^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha-1} x(\xi) d\xi, $$

$$ I_b^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\xi - t)^{\alpha-1} x(\xi) d\xi, $$

называются, соответственно, левосторонними и правосторонними дробными производными Римана–Лиувилля порядка α, $\alpha > 0$.

Определение 3. Пусть $[a, b]$ – конечный интервал на прямой R. Если $0 < \alpha < 1$, то производная Капуто определяется следующим образом:

$$ {}_{C}D_a^{\alpha} x(t) = {}_{RL}D_a^{\alpha}\big(x(t) - x(a)\big), $$

$$ {}_{C}D_b^{\alpha} x(t) = {}_{RL}D_b^{\alpha}\big(x(t) - f(b)\big). $$

Эти производные называются соответственно левосторонними и правосторонними дробными производными Капуто порядка α .

Теорема ([1], стр. 92). Пусть $0 < \alpha < 1$. Если $x(t) \in AC^1[a,b]$, то дробные производные Капуто ${}_{C}D_a^{\alpha} x(t)\, {}_{C}D_b^{\alpha} x(t)$ существуют почти всюду на $[a, b]$ и

$$ {}_{C}D_a^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{-\alpha} x'(\xi) d\xi, \ t > a, $$

$$ {}_{C}D_b^{\alpha} x(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b (\xi - t)^{-\alpha} x'(\xi) d\xi, \ t < b, $$

Отдельный интерес представляют инволюционные преобразования аргумента. Инволюция – это отображение $\phi: D \to D$, для которого $\phi\big(\phi(t)\big) = t$. Наиболее известным примером в задачах по времени является отражение вида $\phi(t) = T - t$, связывающее значения решения в симметричных относительно середины отрезка точках. Такие преобразования возникают в задачах с симметрией, обратной связью, а также в ряде спектральных и краевых задач.

Сочетание дробных производных и инволюционных членов $(Jx)(t) = x\big(\phi(t)\big)$ открывает новые возможности моделирования. Оно объединяет неместные эффекты памяти, присущие дробным операторам, и симметричную взаимосвязь значений решения, задаваемую инволюцией. Математический анализ таких моделей осложняется тем, что инволюционные члены могут связывать значения функции, удаленные как по времени, так и по сетке в численных схемах. Это требует модификации существующих методов и разработки специальных алгоритмов.

Исследования в данном направлении рассматриваются в работах многих авторов. Проблемам существования и единственности решений дифференциальных уравнений с инволюцией посвящен ряд фундаментальных исследований. Так, в работах Przeworska-Rolewicz [2] и J. Wiener [3] исследованы дифференциальные и дифференциально-операторные уравнения с инволюцией методами функционального анализа и разделения переменных. Построение функций Грина для одномерных уравнений с инволюцией представлено в работе Alberto Cabada и F. Tojo [4].

Корректность, качественные свойства решений, а также спектральные задачи для дифференциальных уравнений с различными видами инволютивных преобразований освещаются в работах [5–7]. В [8] показано, что задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка на середине заданного отрезка имеет единственное решение. В работе [9] рассмотрена смешанная задача для уравнения четвертого порядка с дробной производной Капуто и инволюционным преобразованием аргумента. Авторы с помощью метода разделения переменных построили биортонормальную систему собственных функций и доказали существование и единственность решения. Задачи смешанного типа для волнового уравнения с отклоняющими аргументами рассмотрены в работе [10]. С помощью метода разделения переменных доказаны существование и единственность решения для поставленной задачи. В [11] рассматривается нелинейное параболическое дифференциальное уравнение с инволюцией. Найдены собственные значения и собственные функции спектральных задач, получено обобщенное решение нелинейной смешанной задачи в виде ряда Фурье. В работе [12] изучены два класса некорректных задач, описываемых неклассическим дробным уравнением теплопроводности с инволюционным возмущением. Для получения устойчивого решения был применен модифицированный метод псевдопараболической регуляризации.

Несмотря на значительный прогресс в исследовании таких уравнений, многие вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач остаются открытыми. В частности, не всегда ясно, при каких условиях можно гарантировать существование решения. Настоящая работа направлена на исследование одной из таких задач с использованием метода параметризации, позволяющего установить условия разрешимости для краевых задач с инволютивными преобразованиями.

Материалы и методы

В работе на отрезке $[0, T]$ исследуется разрешимость краевой задачи неоднородного дробного интегро-дифференциального уравнения $0 < \alpha < 1$ с инволютивным преобразованием:

$$ {}_C D^{\alpha} x(t) + \varepsilon\, {}_C D^{\alpha} x(T-t) = \lambda \int_0^T K(t,s) x(s)\, ds + f(t), \tag{1}$$

$$ bx(0) + cx(T) = d, \tag{2}$$

где функции $f(t)$ и ядро $K(t,s)$ непрерывны на соответствующих интервалах. $\varepsilon,\ \lambda,\ b,\ c,\ d \in R$.

Замечание. В уравнении (1) и далее в этой работе

$$ {}_C D^{\alpha} x(T-t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{T-t} (T-t-\xi)^{1-\alpha} x'(\xi)\, d\xi. $$

Будем исследовать разрешимость краевой задачи (1), (2) с помощью метода параметризации, предложенного профессором Д. Джумабаевым [13], который изначально был применен для исследования однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений. В дальнейшем метод параметризации был применен для исследования разрешимости различных краевых задач [14,15]. В работах [16–18] с помощью метода параметризации исследованы краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнении с инволютивными преобразованиями.

Вводя обозначение $\mu = x(0)$ и применяя подстановку $x(t) = u(t) + \mu$, краевая задача (13), (14) сводится к следующей эквивалентной краевой задаче:

$$ {}_C D^{\alpha} u(t) + \varepsilon\, {}_C D^{\alpha} u(T-t) = \lambda \int_0^T K(t,s)[u(s) + \mu]\, ds + f(t), \tag{3}$$

$$ u(0) = 0, \tag{4}$$

$$ (b+c)\mu + cu(T) = d. \tag{5}$$

Лемма 1. Задачи (1), (2) и (3)–(5) являются эквивалентными.

Доказательство. Предположим, что $x(t)$ – решение краевой задачи (1), (2). Тогда $u(t) = x(t) - \mu$ удовлетворяет (3) – (5), где $\mu = x(0)$.

Так как ${}_CD^{\alpha}u(t) = {}_CD^{\alpha}x(t)$, ${}_CD^{\alpha}u(T-t) = {}_CD^{\alpha}x(T-t)$, то

$$ {}_CD^{\alpha}u(t) + \varepsilon\, {}_CD^{\alpha}u(T-t) - \lambda\int_0^T K(t,s)[u(s)+\mu]ds - f(t) = $$

$$ = {}_CD^{\alpha}x(t) + \varepsilon\, {}_CD^{\alpha}x(T-t) - \lambda\int_0^T K(t,s)x(s)ds - f(t) = 0, $$

т.е. $u(t) = x(t) - \mu$ удовлетворяет уравнениям (3). Имея в виду, что $\mu = x(0)$, получаем $u(0) = x(0) - \mu = 0$. Выполнение условия (5) следует из

$$ (b+c)\mu + cu(T) - d = bx(0) + cx(T) - d = 0. $$

Обратно, пусть пара $(u(t),\ \mu)$ решение задачи (3) – (5). Тогда определяемая в виде $x(t) = u(t) + \mu$ функция удовлетворяет (1), (2). Так как ${}_CD^{\alpha}x(t) = {}_CD^{\alpha}u(t)$, ${}_CD^{\alpha}x(T-t) = {}_CD^{\alpha}u(T-t)$, то

$$ {}_CD^{\alpha}x(t) + \varepsilon\, {}_CD^{\alpha}x(T-t) - \lambda\int_0^T K(t,s)x(s)ds - f(t) = $$

$$ = {}_CD^{\alpha}u(t) + \varepsilon\, {}_CD^{\alpha}u(T-t) - \lambda\int_0^T K(t,s)[u(s)+\mu]ds - f(t) = 0. $$

т.е. решение $x(t) = u(t) + \mu$, определяемое парой $(u(t),\mu)$ удовлетворяет (1).

Покажем, что $x(t)$ удовлетворяет и краевым условиям (2).

Действительно,

$$ bx(0) + cx(T) - d = (b+c)\mu + cu(T) - d = 0. $$

Методология исследования

Рассмотрим уравнение (3) в точках $t* = T - t$, тогда:

$$ {}_CD^{\alpha}u(T-t) + \varepsilon\, {}_CD^{\alpha}u(t) = \lambda\int_0^T K(T-t,s)[u(s)+\mu]ds + f(T-t). \tag{6} $$

Умножим (6) на $-\varepsilon$ и, складывая с уравнением (3), получим

$$ (1-\varepsilon^2)\, {}_CD^{\alpha}u(t) = \lambda\int_0^T K^*(t,s)[u(s)+\mu]ds + f^*(t), \tag{7} $$

$$ u(0) = 0, \tag{8} $$

где $K^*(t,s) = K(t,s) - \varepsilon K(T-t,s)$, $f^*(t) = f(t) - \varepsilon f(T-t)$.

Предположим, что $\varepsilon \neq \pm 1$, тогда решение задачи Коши (7), (8) определяется в виде

$$ u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\left[\lambda\int_0^T K^*(\xi,s)[u(s)+\mu]ds + f^*(\xi)\right]d\xi . $$

Пусть $K(t,s) = \varphi(t)\psi(s)$, тогда $K^*(t,s) = (\varphi(t) - \varepsilon\varphi(T-t))\psi(s) = \varphi^*(t)\psi(s)$ и

$$u(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi\int_0^T \psi(s)u(s)ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi\int_0^T \psi(s)ds\cdot\mu + + \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}f^*(\xi)d\xi\ . \tag{9}$$

Считая, что $1-\lambda\varphi_\alpha \neq 0$ и применяя теорию Фредгольма к уравнению (9), получим

$$u(t) = \frac{\lambda\mu}{\Gamma(\alpha)(1-\lambda\varphi_\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi\int_0^T \psi(s)ds + \frac{\lambda f_\alpha}{\Gamma(\alpha)(1-\lambda\varphi_\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi + + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\varepsilon^2\right)}\int_0^t \left(t-\xi\right)^{\alpha-1} f^*\left(\xi\right)d\xi\ , \tag{10}$$

где

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T \psi(\tau)\int_0^\tau (\tau-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi d\tau,$$

$$f_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T \psi(\tau)\int_0^\tau (\tau-\xi)^{\alpha-1}f^*(\xi)d\xi d\tau.$$

Подставляя решение задачи Коши (10) в условие (5), определяем значение параметра μ :

$$\left(b+c+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)(1-\lambda\varphi_\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi\int_0^T \psi(s)ds\right)\mu = d - -\frac{\lambda f_\alpha}{\Gamma(\alpha)(1-\lambda\varphi_\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi - \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1}f^*(\xi)d\xi\ . \tag{11}$$

Введем обозначение

$$q_\alpha = \left[b+c+\frac{\lambda c}{\Gamma(\alpha)(1-\lambda\varphi_\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi\int_0^T \psi(s)ds\right].$$

Результаты и обсуждение

Теорема 1. Пусть $1-\lambda\varphi_\alpha \neq 0$ и $\varepsilon \neq \pm 1$. Тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $q_\alpha \neq 0$.

Доказательство. Пусть $1-\lambda\varphi_\alpha$ и $\varepsilon \neq \pm 1$. Если $q_\alpha \neq 0$, то из уравнения (11) находим единственное значение параметра μ

$$\mu = \frac{1}{q_\alpha}\left(d - \frac{\lambda f_\alpha}{\Gamma(\alpha)(1-\lambda\varphi_\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi - \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)}\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1}f^*(\xi)d\xi\right).$$

Так как задача Коши (3), (4) имеет единственное решение, то на основании леммы 1 найдем единственное решение исходной краевой задачи (1), (2) в виде $x(t) = u(t) + \mu$.

Обратно, если краевая задача (1), (2) однозначно разрешима и $x(t)$ ее решение, то, введя обозначения $\mu = x(0)$ и используя замену $u(t) = x(t) - \mu$ от краевой задачи (1), (2), перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами (3) – (5). Пусть $q_\alpha \neq 0$, тогда найдется по крайней мере два значения μ_1, μ_2 и $x(0) = \mu_1 \neq \mu_2 = x(0)$. Но это противоречит однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2). Отсюда следует, что $q_\alpha \neq 0$.

Теорема 2. Пусть $1 - \lambda\varphi_\alpha \neq 0$ и $\varepsilon \neq \pm 1$. Если $q_\alpha = 0$, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\Gamma(\alpha)(1 - \lambda\varphi_\alpha)(1 - \varepsilon^2)d = \int_0^T (T - \xi)^{\alpha-1}\big(\lambda f_\alpha \cdot \varphi^*(\xi) + (1 - \lambda\varphi_\alpha)f^*(\xi)\big)d\xi \ . \qquad (12)$$

$$f^*(t) = f(t) - \varepsilon f(T - t), \varphi^*(t) = \varphi(t) - \varepsilon\varphi(T - t),$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)} \int_0^T \psi(\tau) \int_0^\tau (\tau - \xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi d\tau,$$
$$f_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - \varepsilon^2)} \int_0^T \psi(\tau) \int_0^\tau (\tau - \xi)^{\alpha-1} f^*(\xi)d\xi d\tau.$$

Доказательство. Пусть $1 - \lambda\varphi_\alpha \neq 0$ и $\varepsilon \neq \pm 1$. Если $x(t) = u(t) + \mu$ и выполняется условие (12), то решение краевой задачи (1), (2) определяем в виде $x(t) = u(t) + \mu$, где $q_\alpha = 0$ является свободным параметром.

Предположим, что краевая задача имеет решение и $q_\alpha = 0$, но условие (12) не выполняется, т.е.

$$d - \frac{\lambda f_\alpha}{\Gamma(\alpha)\,(1 - \lambda\varphi_\alpha)(1 - \varepsilon^2)} \int_0^T (T - \xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi -$$
$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\varepsilon^2)} \int_0^T (T - \xi)^{\alpha-1} f^*(\xi)d\xi \neq 0. \qquad (13)$$

По лемме 1 краевая задача (1), (2) и краевая задача с параметрами (3)–(5) эквивалентны. Единственное решение задачи Коши (3), (4) определяется в виде (10). Подставляя (10) в условие (5), получим

$$d - \frac{\lambda f_\alpha}{\Gamma(\alpha)(1 - \lambda\varphi_\alpha)(1 - \varepsilon^2)} \int_0^T (T - \xi)^{\alpha-1}\varphi^*(\xi)d\xi - \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - \varepsilon^2)} \int_0^T (T - \xi)^{\alpha-1} f^*(\xi)\,d\xi \ = 0.$$

Данное противоречие доказывает, что если $q_\alpha = 0$, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) достаточно выполнение условия (12).

Пример. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим следующую краевую задачу

$$_C D^{\frac{1}{3}} x(t) - 2\,_C D^{\frac{1}{3}} x(1-t) = \int_0^1 x(s)ds - 1, \qquad (14)$$

$$x(0) - x(1) = 0. \qquad (15)$$

Введем обозначение $\mu = x(0)$ и, применяя подстановку $x(t) = u(t) + \mu$, от краевой задачи (14), (15) перейдем к эквивалентной краевой задаче

$$_C D^{\frac{1}{3}} u(t) - 2\,_C D^{\frac{1}{3}} u(1-t) = \int_0^1 u(s)ds + \mu - 1, \qquad (16)$$

$$u(0) = 0, \qquad (17)$$

$$u(1) = 0. \qquad (18)$$

Рассмотрим уравнение (16) в точках $t* = 1 - t$, тогда

$$ {}_{C}D^{\frac{1}{3}}u(1-t)-2\,{}_{C}D^{\frac{1}{3}}u(t)=\int_{0}^{1}u(s)\,ds+\mu-1, \tag{19}$$

Умножая уравнение (19) на -2 и складывая с уравнением (16), получим

$$ {}_{C}D^{\frac{1}{3}}u(t)=-\int_{0}^{1}u(s)\,ds-\mu+1,$$

т.е. задачу Коши (16), (17) можно записать в виде

$$ {}_{C}D^{\frac{1}{3}}u(t)=-\int_{0}^{1}u(s)\,ds-\mu+1, \tag{20}$$

$$u(0)=0, \tag{21}$$

решение которой эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$u(t)=-\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\int_{0}^{1}u(s)\,ds+\mu-1\right). \tag{22}$$

Применяя теорию Фредгольма к интегральному уравнению (22), получим

$$u(t)=-\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)+1\right)}(\mu-1). \tag{23}$$

Подставляя (23) в краевое условие (18), получим $\mu=1$, т.е. $x(t)=1,$ что является решением краевой задачи (14), (15).

Заключение

В работе исследована краевая задача для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка с инволютивным преобразованием. Метод параметризации профессора Д. Джумабаева позволил разложить задачу на решение задачи Коши и последующее получение линейного уравнения относительно введенного параметра. Показано, что при ненулевом коэффициенте этого уравнения краевая задача имеет единственное решение. Установлена связь между разрешимостью задачи и коэффициентом полученного линейного уравнения. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с дробной производной и задач с частными производными.

Информация о финансировании. Данное исследование было профинансировано Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP23488086).

ЛИТЕРАТУРА

1 Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. Theory and applications of fractional differential equations (Elsevier, 2006), pp. 204.

2 Przeworska-Rolewicz, D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach, 1st ed. (Elsevier Scientific: Amsterdam, The Netherlands, 1973).

3 Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations, 1st ed. (World Scientific: Singapore; River Edge NJ, USA; London, UK; Hong Kong, China, 1993).

4 Cabada, A., Tojo, F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed. (Atlantis Press: Paris, France, 2015), ISBN 978-94-6239-120-8.

5 Al-Salti, N., Kerbal, S., Kirane, M. Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. Math. Model. Nat. Phenomena, 14, 312 (2019).

6 Sarsenbi, A., Sarsenbi, A. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. Symmetry, 13, 1972 (2021).

7 Turmetov, B., Karachik, V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple Involution. Symmetry, 13, 1981 (2021).

8 Dildabek, G., Ivanova, M.B., Sadybekov, M.A. On root functions of nonlocal differential second-order operator with boundary conditions of periodic type. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 112(4), 29–44 (2021).

9 Kirane, M., Sarsenbi, A.A. Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative. Fractal and Fractional, 7(2), 131 (2023).

10 Mussirepova, E., Sarsenbi, A.A., Sarsenbi, A.M. Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(17), 11262–11271 (2022).

11 Yuldashev, T.K. Mixed problem for a nonlinear parabolic equation with involution. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44(12), 5519–5527 (2023).

12 Benabbes, F., Boussetila, N., Lakhdari, A. The modified fractional- order quasi- reversibility method for a class of direct and inverse problems governed by time- fractional heat equations with involution perturbation. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47(12), 9524–9555 (2024).

13 Dzhumabayev, D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Comput. Maths Math. Phys., 29(34), 34–46 (1989).

14 Assanova, A.T., Bakirova, E.A., Kadirbayeva, Z.M. Numerical Solution to a Control Problem for Integro-Differential Equations. Comput. Math. and Math. Phys., 60(2), 203–221 (2020).

15 Dzhumabaev, D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 53(6), 736–758 (2013).

16 Nazarova, K., Usmanov, K. On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. International Journal of Applied Mathematics, 34(2), 225–235 (2021).

17 Usmanov, K., Nazarova, K., Yerkisheva, Z. On the unique solvability of a boundary value problem for systems of loaded integro-differential equations with Involution. Lobachevskii Journal of Mathematics, 42(12), 3022–3034 (2021).

18 Nazarova, K., Usmanov, K. Unique solvability of boundary value problem for functional differential equations with involution. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics, 3(103), 68–75 (2021).

[1]Усманов К.И.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807,
e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[1]Назарова К.Ж.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,
e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz
[1]*Еркишева Ж.С.,
PhD, ORCID ID: 0009-0005-7507-4535,
*e-mail: zhazira.erkisheva@ayu.edu.kz

[1]Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті,
Түркістан қ., Қазақстан.

ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР БӨЛШЕК РЕТТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Аңдатпа

Бұл мақалада инволютивті түрлендіруі бар $0<\alpha<1$ бөлшек ретті интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шекаралық есеп қарастырылады. Шекаралық есептің шешілуін зерттеу үшін біз профессор

Д. Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісін қолданамыз. Осы мақсатта $\mu = x(0)$ параметрі енгізіліп, $x(t) = u(t) + \mu$ айнымалылардың алмастыруы қолданылады. Енгізілген алмастыру есепті формальды түрде екіге бөледі: инволютивті түрлендіруі бар $0 < \alpha < 1$ бөлшек ретті интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі және енгізілген параметрге қатысты сызықтық теңдеу. Инволютивті түрлендіруі бар $0 < \alpha < 1$ бөлшек ретті интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің шешімін анықтап, оны шеттік шартқа қою арқылы енгізілген параметрге қатысты сызықтық теңдеу аламыз. Бұл теңдеудің коэффициенті нөлге тең емес деп есептеп, шеттік есептің жалғыз шешімін табамыз. Есептің шешімділігі мен алынған теңдеудің коэффициенті арасында байланыс орнатылады.

Тірек сөздер: инволюция, шекаралық есеп, параметрлеу әдісі, параметр, Коши есебі, шешілімділік.

[1]Usmanov K.I.,
Cand. Phys.-Math. Sc., Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0002-4311-5807
e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[1]Nazarova K.Zh.,
Cand. Phys.-Math. Sc., Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,
e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz
[1]*Yerkisheva Zh.S.,
PhD, ORCID ID: 0009-0005-7507-4535,
*e-mail: zhazira.erkisheva@ayu.edu.kz

[1]International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yasawi,
Turkestan, Kazakhstan.

SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION

Abstract

This paper considers a boundary value problem for a fractional-order integro-differential equation 0<α<1 with an involutivity transformation. To investigate the solvability of the boundary value problem, we use the parameterization method proposed by Professor D. Dzhumabaev. This is done by introducing a parameter $\mu = x(0)$ and changing variables. $x(t) = u(t) + \mu$ This change of variables formally divides the problem into two parts: a Cauchy problem for a fractional-order integro-differential equation with an involutive transformation $0 < \alpha < 1$ and a linear equation with respect to the introduced parameter. By determining the solution to the Cauchy problem for a fractional-order integro-differential equation with an involutive transformation $0 < \alpha < 1$ and substituting it into the boundary condition, we obtain a linear equation with respect to the introduced parameter. Assuming that the coefficient of this equation is nonzero, we find a unique solution to the boundary value problem. A relationship is established between the solvability of the problem and the coefficient of the resulting equation.

Key words: involution, boundary value problem, parameterization method, parameter, Cauchy problem, solvability.

Received: December 13, 2025; revised: January 26, 2026; accepted: January 29, 2026.