ӘОЖ 517.928.2
FТАХР 27.29.23

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-220-230

[1]***Буканай Н.Ұ.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0009-2206-2302
*e-mail: nbukanay@gmail.com
[1]**Мирзакулова А.Е.,**
PhD, доцент, ORCID ID: 0000-0001-6445-6371
e-mail: aziza.mirzakulova@bk.ru
[2]**Асанова А.Т.,**
ф.-м.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0001-8697-8920
e-mail: anartasan@gmail.com

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

# КІШІ ПАРАМЕТРЛІ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ

**Аңдатпа**

Кіші параметрлі теңдеулер теориясында қарастырылатын сызықты интегро-дифференциалдық теңдеудің біртекті бөлігіне сәйкес құрылатын сипаттаушы теңдеу түбірлері қарама-қарсы таңбалы болатын, сонымен қатар интеграл астындағы туындының реті екіге дейін жететін нөл нүктесіндегі Коши есебі бұрын қарастырылмаған. Сипаттаушы теңдеу түбірлері қарама-қарсы болған жағдайда, есеп шешімінің шексіздікке ұмтылып кету қаупі бар екені мәлім. Мысалы, үлкен екі туындысының алдында кіші параметрі бар сипаттаушы теңдеу түбірі оң және теріс болғанда, кіші параметрлі дифференциалдық теңдеуге арналған Коши есебінің шешімі анықталмай қалады. Ал егер дифференциалдық теңдеудің оң жағына интегралдық бөлікті қосып, оны интегро-дифференциалдық теңдеу түрінде қарастырсақ, есеп шешімінің аналитикалық формуласын алуға болады. Бұл жұмыста берілген кіші параметрлі есепке сәйкес ауытқымаған есеп құрылған. Ауытқымаған есепте сыртқы дифференциалдық оператордың реті ішкі оператордың ретінен бірге кем. Есептің бұл түрі стандартты емес жағдайға жатады және қосымша зерттеуді талап етеді. Соған орай, ауытқымаған есепке қатысты қосымша зерттеулер жүргізіліп, оның шешімінің аналитикалық формуласы алынды. Сонымен қатар кіші параметрлі ауытқыған есеп пен ауытқымаған есеп арасындағы байланыс орнатылып, нақты мысалмен негізделген. Шектік ауысу теоремасы тұжырымдалып, ұсынылды.

**Тірек сөздер:** кіші параметрлі интегро-дифференциалдық теңдеулер, асимтотикалық сипат, Коши функциясы, кіші параметр, асимптотикалық жинақтылық, шектік көшу.

## Кіріспе

Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеулері механика, астрономия, электростатика, басқару теориясы, потенциалдар теориясы, сұйықтар динамикасы, қолданбалы математика, сондай-ақ химиялық кинетика сынды көптеген ғылыми құбылыстардың математикалық моделін құруда пайда болады. Негізінен, интегро-дифференциалдық теңдеулердің қолданылу аясы ауқымды; әсіресе жаратылыстану және техника ғылымдарында үлкен маңызға ие. Сонымен қатар, бұл теңдеулер эпидемиялардың кеңістіктік-уақыттық дамуын математикалық модельдеуде де кеңінен қолданылады. Кіші параметрлі Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі, әдетте, кіші параметрдің жоғарғы ретті туындылардың алдында көбейткіш ретінде тұруымен сипатталады. Мұндай есептердің шешімі шекараға жақын өте кіші облыста немесе анықталу облысының ішінде шұғыл өзгеріске ұшырайды. Сондықтан кіші параметр нөлге ұмтылғанда, шешімнің асимптотикалық бағалауын алу белгілі бір қиындықтар туғызады. Бұл теңдеулер диффузия, эпидемия динамикасы, жылу тасымалдау есептері сияқты әртүрлі құбылыстардың математикалық модельдерін жасау кезінде туындайды

## Материалдар мен әдістер

Кіші параметрлі дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің негізгі әдістерінің бірі – асимптотикалық әдіс, соның ішінде шекаралық қабат функциялары әдісі. Асимптотикалық әдіс деп, әдетте, шешімді кіші параметрдің дәрежелік қатары түрінде құру әдісін айтады. Бұл әдістің тәжірибелік мағынасы – шешімді қарапайым теңдеулер арқылы тиімді түрде тұрғызу. Сандық әдіс пен асимптотикалық әдіс бір-бірін жоққа шығармайды; керісінше, бірін-бірі толықтырады. Мысалы, көптеген жағдайда асимптотикалық өрнекті сандық есептеуде нөлдік жуықтау ретінде қолдануға болады. Алғаш рет А. Тихоновтың [1] жұмысында дифференциалдық теңдеу шешімінің кіші параметрге тәуелділігі көрсетілген. Кейіннен бұл саладағы зерттеулер А. Васильева, В. Бутузов [2], К. Касымов [3], Д. Нургабыл [4], М. Дауылбаев [5], М. Бодожанов, Б. Калимбетов, В. Сафонов [6], М. Стайнс, Р. Келлог [7] және басқа да ғалымдардың еңбектерінде жиі кездеседі. Бұл жұмыстарда есеп шешімі аналитикалық әдіс арқылы ізделсе, келесі жұмыстарда сандық әдістер қолданылған: А. Олжира, М. Уолдарегай [8], М. Дурмаз, М. Чакир, И. Амирали, Г. Амиралиев [9], А. Ратхор, В. Шанти [10], А. Панда, Дж. Мхопатра, И. Амирали, М. Дурмаз, Г. Амиралиев [11], Е. Шринивас, К. Фаниндра [12].

## Нәтижелер мен талқылау

Кіші параметрлі интегро-дифференциалдық теңдеуді

$$\varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_2(t) y'' + A_1(t) y' + A_0(t) y = \quad (1)$$

$$= F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H_j(t,x) y^{(j)}(x,\varepsilon) dx \quad (2)$$

келесі бастапқы шарттармен

$$y^{(i)}(0,\varepsilon) = \alpha_i, \qquad i = \overline{0,2} \quad (3)$$

қарастырайық,

мұндағы $\varepsilon$ – кіші параметр, $\alpha_i$, $i = \overline{0,2}$ – белгілі тұрақты шамалар.

Бастапқы берілген біртекті емес кіші параметрлі интегро-дифференциалдық теңдеуге (1), (2) сәйкес біртекті кіші параметрлі теңдеуді қарастырайық:

$$\varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_2(t) y'' + A_1(t) y' + A_0(t) y = 0.$$

Бұл теңдеудің іргелі шешімдер жүйесін

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots$$

түрінде іздейміз.

Бұл қатарды (3) біртекті теңдеуге қойып, $\varepsilon$ кіші параметрінің $0$-ші дәрежесінің алдын теңестірсек

$$A_1(t) y_0' + A_0(t) y_0 = 0,$$
$$y_0(0) = 1$$

түріндегі ауытқымаған теңдеуді аламыз.
(3) теңдеудің қалған шешімдерін табу үшін берілген біртекті теңдеуге сәйкес сипаттаушы теңдеу құрайық:

$$\varepsilon^2\lambda^3 + \varepsilon A_2(t)\lambda^2 + A_1(t)\lambda + A_0(t) = 0 \tag{4}$$

(4) теңдеудің екі жағын $\varepsilon$ кіші параметріне көбейтіп, $\varepsilon\lambda = \mu$ деп белгілеп алып, (3) теңдеуге сәйкес қосымша сипаттаушы теңдеу құрамыз:

$$\mu^3 + A_2(t)\mu^2 + A_1(t)\mu + \varepsilon A_0(t) = 0,$$

$$\varepsilon^0:\ \ \mu_0^3 + A_0(t)\mu_0^2 + A_1(t)\mu_0 = 0,$$

$$\mu_0^2 + A_0(t)\mu_0 + A_1(t) = 0 \tag{5}$$

(5) теңдеуінің түбірлері $\mu_0^1(t),\ \mu_0^2(t)$ болсын. Олай болса

$$\mu_1(t,\varepsilon) = \mu_1(t) + O(\varepsilon), \qquad \mu_1(t) \equiv \mu_0^1(t),$$

$$\mu_2(t,\varepsilon) = \mu_2(t) + O(\varepsilon), \qquad \mu_2(t) \equiv \mu_0^2(t),$$

$$\lambda_1(t,\varepsilon) = \frac{\mu_1(t) + O(\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad \mu_1(t) < 0,$$

$$\lambda_2(t,\varepsilon) = \frac{\mu_2(t) + O(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \mu_2(t) > 0,$$

$\mu_1(t,\varepsilon),\ \mu_2(t,\varepsilon)$ – (5) сәйкес қосымша сипаттаушы теңдеу түбірлері, $\lambda_1(t,\varepsilon),\ \lambda_2(t,\varepsilon)$ – (4) сипаттаушы теңдеудің түбірлері.
Төмендегі шарттар орындалсын:

1. $A_i(t),\ i = \overline{0,2}$ және $F(t)$ функциялары $0 \le t \le 1$ аралығында үзіліссіз дифференциалдансын және $H_i(t,x),\ i = \overline{0,2}$ функциялары $D = \{0 \le t \le 1,\ \ 0 \le x \le 1\}$ облысында үзіліссіз дифференциалдансын.
2. Сәйкес қосымша сипаттаушы теңдеудің $\mu^2 + A_2(t)\mu + A_1(t) = 0$ түбірлері $\mu_1(t) \neq \mu_2(t), Re\mu_1(t) < -\gamma_1, Re\mu_2(t) > \gamma_2 > 0$ болсын.
3. $H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні 1 санына тең болмасын.

(1), (2) бастапқы есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы [13] жұмыста алынған, $\varepsilon \to 0$:

$$\left|y^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(|\alpha_0| + \varepsilon|\alpha_1| + \varepsilon^2|\alpha_2| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}\gamma_1}\left(|\alpha_0| + |\alpha_1| + \varepsilon^2|\alpha_2| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\frac{1-t}{\varepsilon}\gamma_2}\left(|\alpha_0| + |\alpha_1| + \varepsilon^2|\alpha_2| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right),\ \ j = 0,1,2 \tag{6}$$

түрінде болады.

Берілген кіші параметрлі (1), (2) бастапқы есепке байланысты сингулярлы ауытқымаған $(\varepsilon = 0)$ бірінші ретті біртекті емес интегро-дифференциалдық теңдеуді

$$A_1(t)\bar{y}' + A_2(t)\bar{y} = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H_j(t,x)\bar{y}^{(j)}(x)dx \qquad (7)$$

шартымен

$$\bar{y}(0) = \alpha_0 \qquad (8)$$

қарастырайық.

Теорема 1. Егер 1–5 шарттар орындалса, (7), (8) ауытқымаған есебінің $0 \le t \le 1$ аралығында шешімі бар, жалғыз болады және

$$\bar{y}(t) = \eta(t) + D_0\eta_0(t)$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеуі: (7) теңдеуде сыртқы дифференциалдық оператордың реті ішкі дифференциалдық оператордың ретінен бірге кем болып тұр. Бұл стандартты емес жағдай болып есептеледі және қосымша зерттеуді талап етеді. Сол үшін (7) теңдеудің екі жағынан да 1 рет $t$ айнымалысы бойынша туынды аламыз:

$$\left(A_1(t)\bar{y}'(t)\right)' + \left(A_0(t)\bar{y}(t)\right)' = F'(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H'_{jt}(t,x)\bar{y}^{(j)}(x)dx.$$

Соңғы теңдеуді кері қарай $[0,t]$ аралығында 1 рет интегралдаймыз:

$$\int_0^t \left(A_1(s)\bar{y}'(s)\right)' ds + \int_0^t \left(A_0(s)\bar{y}(s)\right)' ds = \int_0^t F'(s)ds + \int_0^t \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H'_{js}(s,x)\bar{y}^{(j)}(x)dx,$$

$$A_1(t)\bar{y}'(t) + A_0(t)\bar{y}(t) = F(t) + D_0 + \int_0^t Q[\bar{y}(s)]\,ds \qquad (9)$$

мұндағы

$$D_0 = A_1(0)\bar{y}'(0) + A_0(0)\bar{y}(0) - F(0),$$

$$Q[\bar{y}(s)] = \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H'_{js}(s,x)\bar{y}^{(j)}(x)dx.$$

$D_0$ тұрақтысы

$$D_0 = \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H'_{jt}(0,x)\bar{y}^{(j)}(x)dx \qquad (10)$$

(7) және (9) теңдеулерінің пара-парлығы (10) шартымен қамтамасыз етіледі. Осы себепті (9) теңдеуді (8) бастапқы шартымен бірге қарастыра аламыз.

(9) есебінің шешімі

$$\bar{y}(t) = CK_1(t,0) + \varphi(t) + D_0\varphi_0(t) + \int_0^t \frac{\bar{K}_1(t,s)}{A_1(t)} Q[\bar{y}(s)]ds \qquad (11)$$

түрінде болады, мұндағы

$$K_1(t,0) = e^{-\int_0^t \frac{A_0(p)}{A_1(p)}dp}, \qquad \varphi(t) = \int_0^t \frac{\bar{K}_1(t,s)}{A_1(t)} F(s)ds,$$

$$\varphi_0(t) = \int_0^t \frac{\bar{K}_1(t,s)}{A_1(t)} ds, \quad \bar{K}_1(t,s) = \int_s^t K_1(t,p)\, dp \tag{12}$$

$\bar{K}_1(t,s)$ функциясы

$$A_1(t)\bar{K}_1'(t,s) + A_0(t)\bar{K}_1(t,s) = 1, \\ \bar{K}_1(s,s) = 0 \tag{13}$$

есебінің шешімі болады.
(8) шартынан $C = \alpha_0$, онда (11) шешім келесі түрде жазылады:

$$\bar{y}(t) = \alpha_0 K_1(t,0) + \varphi(t) + D_0\varphi_0(t) + \int_0^t \frac{\bar{K}_1(t,s)}{A_1(t)} Q[\bar{y}(s)]ds, \tag{14}$$

$K_1(t,0), \varphi(t), \varphi_0(t), \bar{K}_1(t,s)$ функциялары (12), (13) формулалардан табылады.
(14) сызықты интегралдық теңдеудің екі жағына да $Q$ операторымен әсер етеміз.

$$u(t) = Q[\bar{y}(t)], \;\; \tilde{K}_1(t,0) = Q[K_1(t,0)], \omega(t) = Q[\varphi(t)], \omega_0(t) = Q[\varphi_0(t)], \tag{15}$$

$$Q\left[\int_0^t \frac{\bar{K}_1(t,s)}{A_1(t)} Q[\bar{y}(s)]ds\right] = \int_0^1 M(t,s)\, Q[\bar{y}(s)]ds,$$

$$M(t,s) = \int_s^1 \sum_{j=0}^{2} H_{jt}'(t,x)\bar{K}_1^{(j)}(x,s)dx + H_{2t}'(t,s).$$

Олай болса, (14) шешім

$$u(t) = \alpha_0\tilde{K}_1(t,0) + \omega(t) + D_0\omega_0(t) + \int_0^1 M(t,s)\, u(s)ds \tag{16}$$

түрінде жазылады.

4. 1 саны $M(t,s)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.
Келесі түрдегі операторды енгіземіз:

$$R[v(t)] = v(t) + \int_0^1 \bar{R}(t,s)\, v(s)ds \tag{17}$$

мұндағы $\bar{R}(t,s)$ – $M(t,s)$ өзегінің резольвентасы, 4 шарттың көмегімен (16) интегралдық теңдеудің шешімі бар, жалғыз болады және келесідей өрнектеледі:

$$z(t) = \alpha_0 R\left[\tilde{K}_1(t,0)\right] + R[\omega(t)] + D_0 R[\omega_0(t)] \tag{18}$$

$R$ операторы және $\tilde{K}_1(t,0), \omega(t), \omega_0(t)$ функциялары (15),(17) формуладан табылады.
(18) шешімді (14) теңдікке қойып, (7),(8) ауытқымаған есеп шешімін аламыз.

$$\bar{y}(t) = \alpha_0\tilde{K}_1(t,0) + \varphi(t) + D_0\varphi_0(t) + \\ + \int_0^t \frac{\bar{K}_1(t,s)}{A_1(t)} (R[\omega(s)] + R[\omega_0(s)])ds \tag{19}$$

мұндағы

$$\breve{K}_1(t,0) = K_1(t,0) + \int_0^t \frac{\overline{K}_1(t,s)}{A_1(t)} R[\breve{K}_1(s,0)].$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$\eta(t) = \alpha_0 \breve{K}_1(t,0) + \varphi(t) + \int_0^t \frac{\overline{K}_1(t,s)}{A_1(t)} R[\omega(s)]ds,$$

$$\eta_0(t) = \varphi_0(t) + \int_0^t \frac{\overline{K}_1(t,s)}{A_1(t)} R[\omega_0(s)]ds, \qquad (20)$$

онда (19) шешімі

$$\bar{y}(t) = \eta(t) + D_0 \eta_0(t) \qquad (21)$$

түрінде болады.

Егер (20) формуладағы $\eta(t), \eta_0(t)$ функцияларына $Q$ операторын қолдансақ,

$$R[\omega(t)] = Q[\eta(t)], \quad R[\omega_0(t)] = Q[\eta_0(t)] \qquad (22)$$

теңдіктерін аламыз, мұндағы $R$ операторы (17) формуламен анықталады.

(20) және (22) формулаларды ескере отырып, (21) функциясы (14) теңдеуді қанағаттандыратынын оңай тексеруге болады. Бұл функция (7) теңдеудің шешімі болу үшін $D_0$ тұрақтысы (10) шартқа бағыну керек. (10) шартқа (21) шешімді қойсақ, $D_0$ шамасы

$$D_0 = \frac{\int_0^1 \sum_{j=0}^2 H'_{jt}(0,x)\eta^{(j)}(x)dx}{1 - \int_0^1 \sum_{j=0}^2 H'_{jt}(0,x)\eta_0^{(j)}(x)dx}$$

түрінде анықталады.

4. $\int_0^1 \sum_{j=0}^2 H'_{jt}(0,x)\eta_0^{(j)}(x)dx \neq 1$

5 шарт орындалса, онда $D_0$ тұрақтысы бірмәнді анықталады. Теорема 1 дәлелденді.

Теорема 2. 1–5 шарттар орындалса, (1), (2) бастапқы есеп шешімі $y(t,\varepsilon)$ үшін келесі теңдіктер орынды:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} y''(t,\varepsilon) = \bar{y}''(t), \quad 0 < t < 1.$$

мұндағы $\bar{y}(t)$ функциясы (21) арқылы өрнектелген (7),(8) есеп шешімі.

Дәлелдеуі: Кіші параметрлі есеп пен ауытқымаған есеп айырымын $u$ параметрі арқылы белгілейік:

$$u(t,\varepsilon) = y(t,\varepsilon) - \bar{y}(t) \Rightarrow y(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) + \bar{y}(t) \qquad (23)$$

мұндағы $y(t,\varepsilon)$ – (1), (2) кіші параметрлі бастапқы есебінің шешімі және $\bar{y}(t)$ – сәйкес (7), (8) ауытқымаған есеп шешімі.

(23) формуланы (1), (2) теңдеуге апарып қойсақ, $u(t,\varepsilon)$ функциясына байланысты келесі есебін аламыз:

$$\varepsilon^2 u''' + \varepsilon A_2(t)u'' + A_1(t)u' + A_0(t)u =$$

$$= -\varepsilon^2\bar{y}''' - \varepsilon A_2(t)\bar{y}'' + \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H_j(t,x)u^{(j)}(x,\varepsilon)dx, \tag{24}$$

$$u(0,\varepsilon) = 0, \quad u'(0,\varepsilon) = \alpha_1 - \bar{y}'(0), \quad u''(0,\varepsilon) = \alpha_2 - \bar{y}''(0)\,. \tag{25}$$

(24), (25) есебі (1),(2) есебімен ұқсас болғандықтан, (6) асимптотикалық бағалауларын $u(t,\varepsilon)$ функциясы үшін қолданып, келесіні аламыз.

$$\left|u^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \leq C\left(\varepsilon\left|\alpha_1 - \bar{y}'(0)\right| + \varepsilon^2\left|\alpha_2 - \bar{y}''(0)\right| + \max_{0\leq t\leq 1}\left|\varepsilon^2\bar{y}''' + \varepsilon A_2(t)\bar{y}''\right|\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}\gamma_1} + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\frac{1-t}{\varepsilon}\gamma_2}\right), \quad j = \overline{0,2}$$

Алынған бағалаудан $u(t,\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ ұмтылатыны шығады және Теорема 2 орынды болады. Теорема 2 дәлелденді.

Мысал. Үшінші ретті кіші параметрлі сызықты интегро-дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есебін қарастырамыз:

$$\varepsilon^2 y''' - \varepsilon y'' - 2y' = 1 + \delta\int_0^1 y''(x)dx, \tag{26}$$

$$y(0,\varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(0,\varepsilon) = \alpha_1, \quad y''(0,\varepsilon) = \alpha_2. \tag{27}$$

Біртекті үшінші ретті дифференциалдық теңдеудің $\varepsilon^2 y''' - \varepsilon y'' - 2y' = 0$ іргелі шешімдер жүйесі

$$y_1(t,\varepsilon) = 1, \quad y_2(t,\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}, \quad y_3(t,\varepsilon) = e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}.$$

түрінде болады.

(26) теңдеудің оң жағын $z$ айнымалысы арқылы белгілейік:

$$z = 1 + \delta\int_0^1 y''(x)dx. \tag{28}$$

(26) теңдеудің шешімі

$$y(t,\varepsilon) = C_1 + C_2e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + C_3e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)} - \frac{z}{2}t,$$

$$y'(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}C_2e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + \frac{2}{\varepsilon}C_3e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)} - \frac{z}{2},$$

$$y''(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^2}C_2e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + \frac{4}{\varepsilon^2}C_3e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}$$

түрінде болады, мұндағы $C_i$, $i = \overline{1,3}$ белгісіз тұрақтылар, $z(\varepsilon)$ – белгісіз функция.

Алынған шешімді (28) формулаға қою арқылы, $z(\varepsilon)$ белгісіз функциясын табамыз:

$$z(\varepsilon) = 1 + \delta\left(\frac{1}{\varepsilon}C_2\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right) + \frac{2}{\varepsilon}C_3\left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)\right).$$

(26) теңдеудің шешімін (27) шартқа қою арқылы, $C_i$, $i = \overline{1,3}$ тұрақтыларын табамыз:

$$C_1(\varepsilon) = \frac{\alpha_0\left(\delta\left(2e^{-\frac{3}{\varepsilon}} - 3e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 1\right) - 6e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right) - 3\varepsilon(\alpha_1 + 0{,}5)e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\delta\left(2e^{-\frac{3}{\varepsilon}} - 3e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 1\right) - 6e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2\alpha_2\left(3e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - \delta\left(1 - 1{,}5e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 0{,}5e^{-\frac{3}{\varepsilon}}\right)\right)}{\delta\left(2e^{-\frac{3}{\varepsilon}} - 3e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 1\right) - 6e^{-\frac{2}{\varepsilon}}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_1(\varepsilon) = \alpha_0,$$

$$C_2(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}(\alpha_1 + 0{,}5) - \varepsilon^2\alpha_2\left(2e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - \delta\left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)\right)}{\delta\left(2e^{-\frac{3}{\varepsilon}} - 3e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 1\right) - 6e^{-\frac{2}{\varepsilon}}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_2(\varepsilon) = 0,$$

$$C_3(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon(\alpha_1 + 0{,}5) + \varepsilon^2\alpha_2\left(0{,}5\delta\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right) - 1\right)}{\delta\left(2e^{-\frac{3}{\varepsilon}} - 3e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 1\right) - 6e^{-\frac{2}{\varepsilon}}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_3(\varepsilon) = 0.$$

Олай болса (26), (27) есеп шешімі

$$y(t,\varepsilon) = \alpha_0 - \frac{1}{2}t \tag{29}$$

түрінде өрнектеледі.

Енді (26), (27) есебіне сәйкес $\varepsilon \to 0$ ауытқымаған есебін құрамыз:

$$-2\bar{y}' = 1 + \delta\int_0^1 \bar{y}''(x)dx, \tag{30}$$

$$\bar{y}(0) = \alpha_0. \tag{31}$$

(30) теңдеудің оң жағын $\bar{z}$ айнымалысы арқылы белгілейік:

$$\bar{z} = 1 + \delta\int_0^1 \bar{y}''(x)dx. \tag{32}$$

(30) теңдеудің шешімі келесідей болады:

$$\bar{y}(t) = -\frac{\bar{z}}{2}t + C. \tag{33}$$

(33) формуланы (32) формулаға қою арқылы $\bar{z}$ табамыз:

$$\bar{z} = 1 + \delta\int_0^1 \bar{y}''(x)dx = 1, \quad \bar{z} = 1.$$

Алынған нәтиже арқылы (30) есеп шешімін келесі түрде жазамыз:

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{2}t + C.$$

(31) шартты қолданып, тұрақтыны табамыз, $C = \alpha_0$.

Олай болса (30), (31) есеп шешімі келесідей болады:

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{2}t + \alpha_0. \tag{34}$$

Сонымен, (29) және (34) шешімдерден келесі шектік көшулер орындалатынын оңай көруге болады:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \alpha_0 - \frac{t}{2} \equiv \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y'(t,\varepsilon) = -\frac{1}{2} \equiv \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y''(t,\varepsilon) = 0 \equiv \bar{y}''(t), \quad 0 < t < 1.$$

**Қорытынды**

Бұл жұмыста қосымша сипаттаушы теңдеудің түбірлері қарама-қарсы болған жағдайдағы кіші параметрлі интегро-дифференциалдық теңдеуге арналған Коши есебі қарастырылған. Кіші параметрлі интегро-дифференциалдық теңдеуге арналған Коши есебіне сәйкес ауытқымаған есеп құрылған және ауытқымаған есеп шешімінің аналитикалық формуласы алынған. Кіші параметрлі ауытқыған есеп пен сәйкес құрылған ауытқымаған есеп арасындағы байланыс көрсетілген. Нәтижесінде шектік көшу теоремасы тұжырымдалып, ұсынылған және мысалмен негізделген.

**ӘДЕБИЕТТЕР**

1 Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. – 1948. – Т. 22. – Вып. 2. – С. 193–204.

2 Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973.

3 Kassymov K.A., Dauylbayev M.K. Estimates of solutions of the Cauchy problem with an arbitrary-order initial jump for linear singularly perturbed integro-differential equations // Differential Equations. – 1999. – P. 822–830.

4 Nurgabyl D. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump // Journal of Applied Mathematics. – 2014. – P. 956402.

5 Dauylbayev M.K. The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations // Siberian Mathematical Journal. – 2000. – 41(1). – P. 49–60.

6 Bobodzhanova M.A., Kalimbetov B.T., Safonov V.F. Singularly perturbed integro differential equations with degenerate Hammerstein's kernel // Bulletin of the Karaganda University. – Mathematics Series. – 2024. – 4(116). – P. 57–68. https://doi.org/10.31489/2024M4/57-68.

7 Kellogg R.B., Stynes M. A singularly perturbed convection-diffusion problem in a half-plane // Appl. Anal. – 2006. – 85(12). – P. 1471–1485. http://dx.doi.org/10.1080/00036810601066574.

8 Oljira A.F., Woldaregay M.M. A fitted operator numerical method for singularly perturbed Fredgolm integro-differential equation with integral initial condition. // BMC Research Notes. – 2024. – 17(1). – P. 23. http://dx.doi.org/10/1186/s13104-023-06649-9.

9 Durmaz M.E., Cakir M., Amirali I., Amiraliyev G.M. Numerical solution of singularly perturbed Fredgolm integro-differential equations by homogeneous second order difference method // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – 412(1). – P. 114327. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114327.

10 Rathore A.S., Shanthi V. A numerical solution of singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with discontinuous source term // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – P 446, 115858. https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.115858.

11 Panda A., Mohapatra J., Amirali I., Durmaz M.E., Amiraliyev G.M. A numerical technique for solving nonlinear singularly perturbed Fredholm integro-differential equations // Mathematics and Computers in Simulation. – 2024. – 220. – P. 618–629. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2024.02.011.

12 Srinivas E., Phaneendra K. A Novel Numerical Scheme for a Class of Singularly Perturbed Differential-Difference Equations with a Fixed Large Delay // Bulletin of the Karaganda University. – Mathematics Series. – 2024. – 1(113). – P. 194–207. https://doi.org/10.31489/2024M1/194-207.

13 Bukanay N.U., Mirzakulova A.E., Assanova A.T. Asymptotic estimations of the solution for singularly perturbed Cauchy problem // Bulletin of the Karaganda University. – 2025. – Mathematics Series. – No. 2(118). – P. 44–51. https://doi.org/10.31489/2025M2/44-51.

**REFERENCES**

1 Tikhonov, A.N. O zavisimosti reshenii differentsialnyh uravnenii ot malogo parametra. Math. Sb., 22(2), 193–204 (1948). (in Russian).

2 Vasil'eva, A.B., Butuzov, V.F. Asimptoticheskie razlojeniya reshenii singuliyarno vozmushennyh uravnenii (Moscow: Nauka, 1973). (in Russian).

3 Kassymov, K.A., Dauylbayev, M.K. Estimates of solutions of the Cauchy problem with an arbitrary-order initial jump for linear singularly perturbed integro-differential equations. Differential Equations, 822–830 (1999).

4 Nurgabul, D. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump. Journal of Applied Mathematic, 956402 (2014).

5 Dauylbaev, M.K. The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations. Siberian Mathematical Journal, 41(1), 49–60 (2000).

6 Bobodzhanova, M.A., Kalimbetov, B.T., Safonov, V.F. Singularly perturbed integro differential equations with degenerate Hammerstein's kernel. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 4(116), 57–68 (2024). https://doi.org/10.31489/2024M4/57-68.

7 Kellogg, R.B., Stynes, M. A singularly perturbed convection-diffusion problem in a half-plane. Appl. Anal., 85(12), 1471–1485 (2006). http://dx.doi.org/10.1080/00036810601066574.

8 Oljira, A.F., & Woldaregay, M.M. A fitted operator numerical method for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with integral initial condition. BMC Research Notes, 17(1), 23 (2024). http://dx.doi.org/10.1186/s13104-023-06649-9.

9 Durmaz, M.E., Cakir, M., Amirali, I., Amiraliyev, G.M. Numerical solution of singu larly perturbed Fredholm integro-differential equations by homogeneous second order difference method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 412(1), 114327 (2024). https://doi.org/ 10.1016/j.cam.2022.114327.

10 Rathore, A.S., Shanthi, V. A numerical solution of singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with discontinuous source term. Journal of Computational and Applied Mathematics, 446, 115858 (2024). https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.115858.

11 Panda, A., Mohapatra, J., Amirali, I., Durmaz, M.E., Amiraliyev, G.M. A numerical technique for solving nonlinear singularly perturbed Fredholm integro-differential equations. Mathematics and Computers in Simulation, 220, 618–629 (2024). https://doi.org/10.1016/j.matcom. 2024.02.011.

12 Srinivas, E., Phaneendra, K. A Novel Numerical Scheme for a Class of Singularly Perturbed Differential-Difference Equations with a Fixed Large Delay. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 1(113), 194–207 (2024). https://doi.org/10.31489/2024M1/194-207.

13 Bukanay, N.U., Mirzakulova, A.E., Assanova A.T. Asymptotic estimations of the solution for singularly perturbed Cauchy problem. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2(118), 44–51 (2025). https://doi.org/10.31489/2025M2/44-51.

**[1]*Bukanay N.U.,**
PhD student, ORCID ID: 0009-0009-2206-2302,
*e-mail: nbukanay@gmail.com
**[1]Mirzakulova A.E.,**
PhD, Associate Professor, ORCID ID: 0000-0001-6445-6371
e-mail: aziza.mirzakulova@bk.ru
**[2]Assanova A.T.,**
Dr. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0001-8697-8920
e-mail: anartasan@gmail.com

[1]Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Almaty, Kazakhstan

## ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF THE CAUCHY PROBLEM SOLUTION FOR AN INTEGRO–DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SMALL PARAMETER

**Abstract**

The Cauchy problem at point 0, where the characteristic equation built according to the homogeneous part of the linear integro-differential equation under consideration has both positive and negative roots, and the order of the derivative of the integral uo to 2, has never been examined before in the theory of equations with small parameters. It is well known that the problem's solution may veer towards infinity when the characteristic equation's roots are opposite. The Cauchy problem for a differential equation with a small parameter in front of two higher-order derivatives is still uncertain when the roots of the characteristic equation are opposite. This can be solved analytically by adding the integral part to the right-hand side of the differential equation and treating it as an integro-differential equation. In this paper, an unperturbed problem is constructed for a given perturbed problem with a small parameter. In the unperturbed problem the external differential operator is one order lower than the internal differential operator. This is a non-standard case and requires special consideration. In this regard, an analytical formula for the solution of the unperturbed problem is obtained, and further analysis is carried out. Moreover, the interrelation between the perturbed and unperturbed problems was established and illustrated by an example. The theorem on the limiting transition was also formulated.

**Keywords:** singularly perturbed integro-differential equation, asymptotic properties, Cauchy function, small parameter, asymptotic convergence, the passage to the limit.

*Received: October 16, 2025; revised: December 22, 2025; January 6, 2026; February 10, 2026; accepted: February 14, 2026.*

[1]***Буканай Н.Ұ.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0009-2206-2302,
*e-mail: nbukanay@gmail.com
[1]**Мирзакулова А.Е.,**
PhD, ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0001-6445-6371,
e-mail: aziza.mirzakulova@bk.ru
[2]**Асанова А.Т.,**
ф.-м.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,
e-mail: anartasan@gmail.com

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Казахстан

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

**Аннотация**

В теории уравнений с малыми параметрами задача Коши в точке 0, где характеристическое уравнение, построенное в соответствии с однородной частью рассматриваемого линейного интегро-дифференциального уравнения, имеет положительные и отрицательные корни, а также порядок производной интеграла до 2, ранее не рассматривалась. Известно, что при противоположных корнях характеристического уравнения решение задачи рискует склониться к бесконечности. Например, решение задачи Коши для дифференциального уравнения с малым параметром перед двумя большими производными остается неопределенным, когда корни характеристического уравнения противоположны, и если добавим интегральную часть к правой части дифференциального уравнения и будем рассматривать ее как интегро-дифференциальное уравнение, мы можем получить аналитическую формулу решения. В данной работе была построена невозмущенная задача для заданной возмущенной задачи с малым параметром. В невозмущенной задаче порядок внешнего дифференциального оператора меньше, чем порядок внутреннего оператора. Такой тип задачи относится к нестандартным случаям и требует дополнительного изучения. В связи с этим была получена аналитическая формула решения невозмущенной задачи и проведены дополнительные исследования. При этом установлена связь между возмущенной и невозмущенной задачами, что подтверждается соответствующим примером. Сформулирована и изложена теорема предельного перехода.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение, асимптотические свойства, функция Коши, малый параметр, асимптотическая сходимость, предельный переход.