МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICAL SCIENCES
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ӘОЖ 519.644, 517.17
ҒТАМР 27.41.17

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2026-23-1-209-219

[1]Отаров Х.Т.,
ф.-м.ғ.к., ORCID ID: 0009-0009-4471-1625,
e-mail: khassenotar@mail.ru
[1]*Туткушева Ж.С.,
PhD, ORCID ID:0000-0003-3611-9620,
*e-mail: zhailan_k@mail.ru

[1]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті,
Ақтөбе қ., Қазақстан

МАҚСАТТЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ГЛОБАЛДЫҚ ЭКСТРЕМУМЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ ЖӘНЕ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

Аңдатпа

Көпэкстремалды, көпайнымалылы функцияларды глобалды оптималдау – ғылымның әртүрлі бағыттарының дамуы үшін маңызды мәселе. Оның өзектілігі – функциялардың глобалдық экстремумдарын іздеу қажеттілігі теориялық зерттеулерде де, қолданыста да ұдайы туындап отырады. Бұл жұмыста көпэкстремалды, көпайнымалылы функцияның глобалдық минимумын анықтаудың жаңа тәсілі ұсынылады. Осы мақала авторларының бірі бұрынырақ жариялаған жұмысында мақсаттық функцияны түрлендіру арқылы «көмекші функция» деп аталған арнаулы функция құрылып, оның маңызды қасиеттері (теріс еместігі, бірқалыпты үсіліссіздігі, дифференциалдануы, монотондылығы және т.б.) зерттелген болатын. Ұсынылып отырған мақалада мақсаттық функцияның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттары қатаң тұжырымдалды және дәлелденді. Нәтижесінде көпэкстремалды және көпайнымалылы функцияның глобалдық минимумын табу есебі бір айнымалылы дөңес функцияның «ең үлкен нөлін» анықтау мәселесіне келтірілді: мақсаттық функцияның глобалдық минимумы көмекші функция нөлдерінің дәл жоғарғы шекарасына тең екендігі дәлелденді. Сонымен қатар, көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» жоғары дәлдікпен анықтау үшін белгілі сандық әдістерді рационалды қолдану мәселесі қарастырылып, салыстырмалы талдау жасалды.

Тірек сөздер: глобалдық оптималдау әдістері, көмекші функция, глобалдық минимум, сандық оптималдау әдістері.

Кіріспе

Глобалдық оптималдау мәселелері мен әдістері туралы осы уақытқа дейін белгілі болған және жарияланған мәліметтер баршылық. Мақсаттық функциялардың дербес түрлері үшін глобалдық экстремумдарды табудың әртүрлі схемалары да құрылған [1–5]. Соның өзінде глобалдық оптималдаудың сан-қилы есептерін рационалды шешу мәселелері ғылым мен техниканың көптеген салаларында зерттелуде [6–13]. Бұл, ең алдымен, аталған мәселелерді шешудің жаңа әдіс-тәсілдерін құру қажеттілігі әрдайым орын алатындығымен байланысты, өйткені оларды шешудің әмбебап алгоритмі болуы мүмкін емес.

Глобалдық оптималдау есептерінің негізгі қиындықтары, әдетте, мақсаттық функциялардың көпэкстремалды, көпайнымалылы және дөңес емес болуымен, қажетті есептеулер көлемінің үлкендігімен, бастапқы мәліметтерді таңдау тәсілімен және басқа да факторлармен байланысты болады. Сондықтан, әрине, глобалдық экстремумдарды анықтаудың тиімді әрі үнемді, яғни көп шығынды қажет етпейтін, әрі ізделінді экстремумға тезірек жинақталатын жаңа әдістерін ойлап табу, құру, негіздеу қажеттілігі әруақытта сақталады.

Мақсаттық функциялары сызықтық емес болатын оптималдау есептерін шешу қиындықтарын жеңу бағытында жарияланған ғылыми жұмыстар да аз емес [14–16].

Аталған бағыттар бойынша зерттеулердің ғылыми және технологиялық маңыздылығы әртүрлі шамалардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есептерінің ғылымда, техникада және экономикада жиі кездесетіндігімен, оларды шешу үшін жаңа, оңтайлы әдістерді дұрыс таңдаудың өзектілігімен түсіндіріледі.

Глобалдық оптималдаудың белгілі әдістерінің басым бөлігі көп шығынды қажет ететін, әрі ізделінді минимумға жылдам жинақталуды толық қамтамасыз етпейтін болғандықтан, біз n – өлшемді кеңістіктегі E жиынында берілген мақсаттық $F(x)$ функциясы бойынша «көмекші функция» деп аталған $g_m(F,\alpha)$ функциясын енгізуге негізделген жаңа әдіс ұсындық [17], $g_m(F,\alpha)$ функциясының бірнеше маңызды қасиетке ие екенін дәлелдедік. Нәтижесінде $F(x)$ функциясының глобалдық минимумын табу есебін көмекші функция нөлдерінің дәл жоғарғы шекарасын анықтауға келтіруге болатынын айқындадық.

Бұл әдісті глобалдық оптималдаудың детерминирленген заманауи тәсілдерінің қатарына жатқызуға болады. Оны аргументтерінің және локалдық экстремумдарының сандары әр түрлі үзіліссіз мақсаттық функциялардың глобалдық экстремумдарын жоғары дәлдікпен анықтау үшін тиімді қолдануға болады.

Бұл мақаланың негізгі мақсаты – көп айнымалылы, көпэкстремалды функцияның глобалдық минимумының қажетті және жеткілікті шарттарын бір айнымалылы көмекші функцияның «ең үлкен нөлі» тілінде тұжырымдап негіздеу, ұсынылған әдістің тиімділігін мақсатты функциялардың типтік түрлері арқылы көрсету.

Материалдар мен әдістер

Есептің қойылымы:

n – өлшемді евклидтік кеңістіктің ішкі E тұйық жиынында анықталған, нақты мәнді, үзіліссіз $F(x)$ мақсаттық функциясының

$$glob \min_{E} F(x) = \hat{\alpha}$$

глобалдық минимумын алдын-ала берілген ε дәлдікпен табу керек.

Берілген $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы бойынша

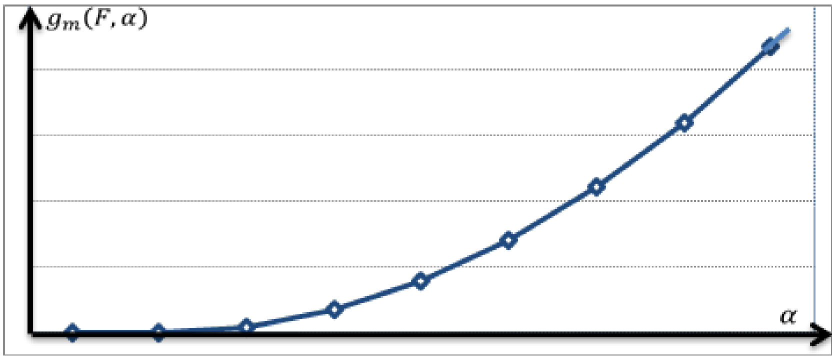
$$g_m(F,\alpha) = \int_E [|F(x) - \alpha| - (F(x) - \alpha)]^m dx, \ \ m \in N, \ \ m > 1, \quad (1)$$

функциясын құрайық.

Анықтама. (1) формуласымен анықталатын $g_m(F,\alpha)$ функциясы $F(x)$ функциясына сәйкес көмекші функция деп аталады.

Көмекші функцияның қасиеттері авторлардың алдыңғы жұмыстарында дәлелденген: $g_m(F,\alpha)$ функциясы $\forall\alpha_0 \geq \hat{\alpha}$ үшін кез-келген $(\alpha_0\ ,\ \alpha_0 + h)$, $h > 0$ шектелген аралығында бірқалыпты үзіліссіз, кез-келген натурал $m > 1$ саны үшін m рет үздіксіз дифференциалданады, монотонды өспелі, қатаң дөңес және теріс емес [18, 19].

Бұл қасиеттерден $g_m(F,\alpha)$ функциясының бір ғана ең үлкен нөлі болатындығы және оның графигі 1-суреттегідей түрде кескінделетіндігі шығады. Аталған қасиеттерді қорыта келгенде көмекші функцияның жалғыз ең үлкен нөлі болатындығы шығады.



Сурет 1 – Көмекші функция графигінің сұлбасы

Алдымен, $F(x)$ мақсаттық функциясының глобалдық минимумының қажетті шартын айқындайық.

1-лемма. Көмекші функция мынадай қасиеттерге ие [18]:

$\forall\alpha$ үшін $g_m(F,\alpha) \geq 0$;

$\forall C,\ C \geq \alpha$, үшін $g_m(C,\alpha) = 0$;

$\forall k \in R,\ k \geq 0$ және $\forall\alpha, \alpha \geq \hat{\alpha}$, үшін $g_m(kF, k\alpha) = k^m g_m(F,\alpha)$;

$\forall k \in R, k \geq 0$ и $\forall\alpha, \alpha \geq \hat{\alpha}$, үшін $g_m(k+F, k+\alpha) = g_m(F,\alpha)$;

$\forall\alpha,\ \alpha \geq \hat{\alpha}$, үшін $g_m(\alpha+F,\alpha) = g_m(F,0)$;

$\forall\alpha,\ \alpha \geq 0$, үшін $g_m(\alpha F,\alpha) = \alpha^m g_m(F,1)$.

1-теорема. Егер $glob\ \min_E F(x) = \hat{\alpha}$ болса, онда

$$g_m(F,\hat{\alpha}) = 0. \tag{2}$$

Дәлелдеуі. Ізделінді глобалдық минимум $\hat{\alpha}$-ға тең деп ұйғарсақ, онда $\forall\ x \in E$ үшін $F(x)$ мәні $\hat{\alpha}$ -дан кем емес: $F(x) \geq \hat{\alpha}$. Сондықтан, 1-лемма бойынша, $\forall C,\ C \geq \alpha$, үшін $g_m(C,\alpha) = 0$ екенін ескерсек, онда

$$g_m(F,\hat{\alpha}) = \\ = \int_E [|F(x)-\hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_E [(F(x)-\hat{\alpha}) - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = 0$$

теңдігі орындалады.

1-салдар. $F(x)$ мақсаттық функциясының глобалдық минимумы $g_m(F,\alpha)$ көмекші функцияның нөлі болып табылады, яғни $\hat{\alpha}$ саны F функциясының глобалдық минимумы болуы үшін оның $g_m(F,\alpha)$ функциясының түбірі болуы қажетті, яғни $g_m(F,\alpha)$ функциясының нөлі емес сан $F(x)$ функциясының глобалдық минимумы бола алмайды.

Глобалдық минимумның жеткілікті шарты келесі теорема түрінде тұжырымдалады.

2-теорема. Егер $\max_\alpha\{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F,\alpha) = 0\} = \hat{\alpha}$ болса, онда

$$glob\ \min_E F(x) = \hat{\alpha}\ .$$

Дәлелдеуі. Кері жорикы: $g_m(F,\hat{\alpha}) = 0$, бірақ $F(x)$ функциясының глобалдық минимумы $\widetilde{\alpha}$, яғни $glob\ \min_F F(x) = \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \neq \hat{\alpha}$ болсын.

Егер $\hat{\alpha} - \widetilde{\alpha} = 2\beta$ және $\beta > 0$ болса, және $\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha})$ жиыны $\mathrm{E}(F,\hat{\alpha})$ жиынының ішкі жиыны болады. Сондықтан $\mu\big(\mathrm{E}(F,\hat{\alpha})\big) > \mu\big(\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha})\big)$. Бұдан шығатыны:

$$g_m(F,\hat{\alpha}) =$$

$$= \int_E [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_{E \setminus E(F,\widetilde{\alpha})} [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu +$$

$$+ \int_{E(F,\widetilde{\alpha})} [|F(x) - \hat{\alpha}| - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_{E \setminus E(F,\widetilde{\alpha})} [(F(x) - \hat{\alpha}) - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu +$$

$$+ \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha})} [-(F(x) - \hat{\alpha}) - F(x) + \hat{\alpha}]^m d\mu = \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha})} \big[2\big(\hat{\alpha} - F(x)\big)\big]^m d\mu.$$

Сонымен,

$$g_m(F,\hat{\alpha}) = \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha})} \big[2\big(\hat{\alpha} - F(x)\big)\big]^m d\mu. \tag{3}$$

$\hat{\alpha} = \widetilde{\alpha} + 2\beta$ және $\hat{\alpha} > \widetilde{\alpha} + \beta > \widetilde{\alpha}$ болғандықтан, $\mathrm{E}(F,\hat{\alpha}) = \{x \in \mathrm{E} | F(x) \leq \hat{\alpha}\}$, $\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha} + \beta) = \{x \in \mathrm{E} | F(x) \leq \widetilde{\alpha} + \beta\}$ және $\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}) = \{x \in \mathrm{E} | F(x) \leq \widetilde{\alpha}\}$ жиындары үшін төмендегі қатынастар орындалады:

$$\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}) \subset \mathrm{E}(F,\tilde{\alpha} + \beta) \subset \mathrm{E}(F,\hat{\alpha}).$$

Егер $\widetilde{\alpha} < F(x) \leq \widetilde{\alpha} + \beta < \hat{\alpha}$ болса, онда $\hat{\alpha} - F(x) > \hat{\alpha} - (\widetilde{\alpha} + \beta) = \beta$ екеніне көз жеткізу қиын емес. Әрі қарай, түрлендірулер арқылы (3) интегралын төменнен бағалаймыз:

$$g_m(F,\hat{\alpha}) =$$

$$= \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha})} \big[2\big(\hat{\alpha} - F(x)\big)\big]^m d\mu = \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}) / \mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}+\beta)} \big[2\big(\hat{\alpha} - F(x)\big)\big]^m d\mu +$$

$$+ \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}+\beta)} \big[2\big(\hat{\alpha} - F(x)\big)\big]^m d\mu \geq \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}+\beta)} \big[2\big(\hat{\alpha} - F(x)\big)\big]^m d\mu >$$

$$> [2\beta]^m \int_{\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha}+\beta)} d\mu > [2\beta]^m \mu(\mathrm{E}(F,\widetilde{\alpha} + \beta)) > 0.$$

Соңғы теңсіздік (2) теңдігіне қайшы. Демек, біздің ұйғарым дұрыс емес.

Теорема дәлелденді.

2-салдар. $g_m(F,\alpha)$ функциясы нөлдерінің дәл жоғарғы шекарасы $F(x)$ функциясының глобалдық минимумына тең, яғни $glob\ \min_E F(x) = \hat{\alpha}$ болуы үшін $\max_\alpha\{\alpha \in \mathbb{R}: g_m(F,\alpha) = 0\} = \hat{\alpha}$ болуы жеткілікті.

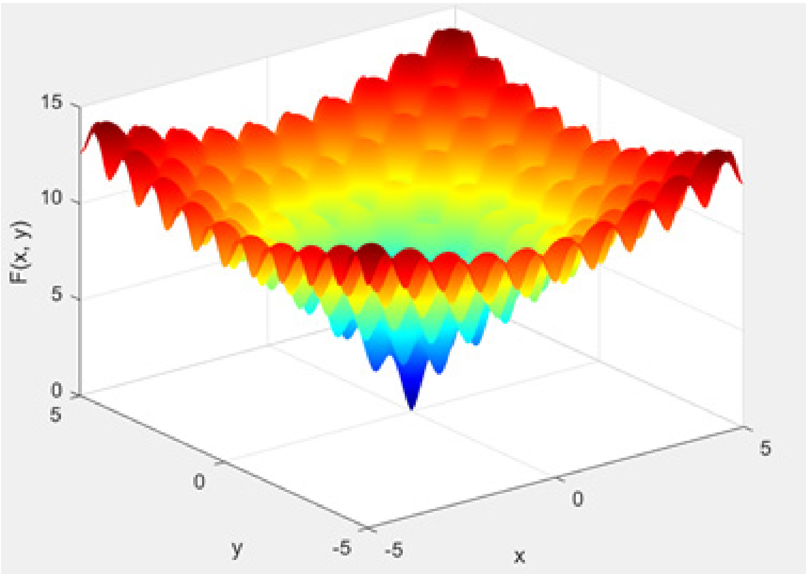
Нәтижелер мен талқылаулар

Енді ұсынылған әдістің тиімділігін көрнекі көрсету мақсатында, типтік тестік функциялар арқылы мақсаттық функцияны көмекші функцияға түрлендіру, ізделінді экстремумды жоғары дәлдікпен жуықтау үлгілерін көрсетеміз.

1-мысал. Локалдық минимумдары өте көп

$$F(x,y) = -20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20, \quad (4)$$

Экли функциясы $\{(x;y): -5 \le x \le 5,\ \ -5 \le y \le 5\}$ квадратында берілген болсын (графигі – 2-ші суретте). Оның берілген облыстағы графигі MATLAB R2023a программалау тілінде төмендегідей түрде кескінделеді:



Сурет 2 – Экли функциясы $\{(x;y): -5 \le x \le 5,\ \ -5 \le y \le 5\}$ квадратында

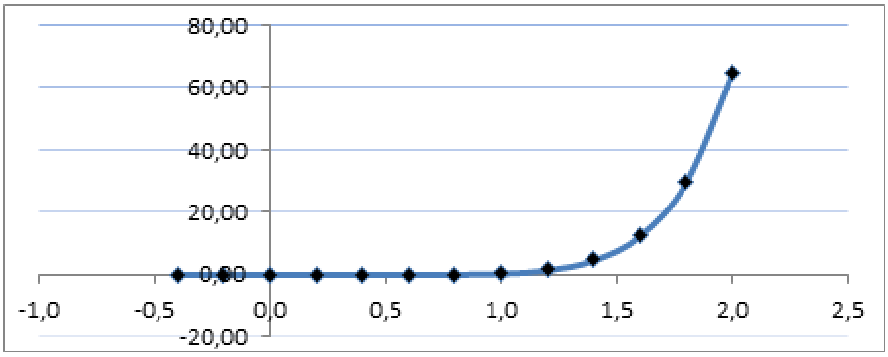
Бұл функцияға сәйкес көмекші функция $m = 6$ жағдайында мына түрде жазылады:

$$g_6(F,\alpha) =$$

$$= \int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5} \Big[\Big|-20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20 - \alpha\Big| -$$

$$-(-20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20 - \alpha)\Big]^6 dxdy \quad (5)$$

Оның графигінің сұлбасын Excel бағдарламасының көмегімен төмендегідей (3-сурет) түрде кескіндеуге болады:



Сурет 3 – Функция графигі

Экли функциясының глобалдық минимумының эталондық мәні: $F_3(0;0)=0$. Есептеу нәтижесі: $F_3(10^{-10};10^{-10})=10^{-10}$. Әдістің дәлдігі: $\varepsilon=10^{-10}$.

Тесттік функцияларды гиперболалық және экспоненциалдық потенциалдар негізінде құрудың А.В. Кузнецов пен и А.И. Рубан жұмыстарында [20–21] ұсынылған әдістемелеріне сүйеніп, біз 4-өлшемді кеңістікте бірнеше локалдық минимумы болатын тесттік функциялар құрдық. Олардың ерекшелігі – функцияның локалдық минимумдарының саны мен координаталарының алдын-ала айқындалып тұруында.

2-мысал. Гиперболалық потенциалдар негізінде құрылған,

$[-10;10]\times[-10;10]\times[-10;10]$ кубында 4 локалдық минимумы бар

$$F(x,y,z)=-\frac{1}{5\cdot(|x-3|^2+|y-4|^2+|z+1|^2)+1}-$$

$$-\frac{1}{2\cdot(|x+5|^5+|y+8|^5+|z-2|^5)+1.8}-$$

$$-\frac{1}{10\cdot(|x+5|^{2.2}+|y-6|^{2.2}+|z-9|^{2.2})+3}-$$

$$-\frac{1}{2\cdot(|x-7|^{2.5}+|y+8|^{2.5}+|z+1|^{2.5})+2.5} \qquad (6)$$

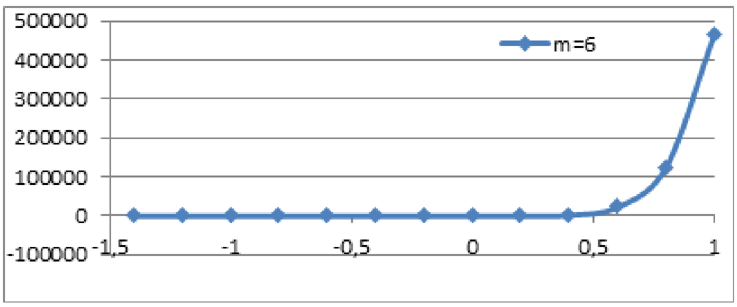
функциясын қарастырайық.

Бұл функция үшін көмекші функция $(m=6)$:

$$g_6(F,\alpha)=$$

$$=\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}[|F(x,y,z)-\alpha|-(F(x,y,z)-\alpha)]^6dxdy\,dz. \qquad (7)$$

Графигінің сұлбасын кескіндеу үшін Excel бағдарламасын қолдандық (4-сурет):



Сурет 4 – Функция графигі

1-кестеде (7) функцияның α параметрінің әрбір мәніне сәйкес мәндері келтірілген. α-ның $\hat{\alpha}$ мәніне жуықтауы дихотомия (қақ бөлу) сандық әдісімен орындалды: функция теріс емес болғандықтан, алдымен α-ның көмекші функция оң мәнге ие және нөлге тең болатын екі мәнін анықтап аламыз. (7)-ші функция үшін: $g_6(F,0)$>0 және $g_6(F,-10)\ =0$. Келесі қадамда көмекші функцияның $[-10;0]$ аралығының қақ ортасындағы мәнін есептейміз. Әрі қарай осы процесс жалғасады: функцияның мәні сол жақ шетінде 0-ге тең, оң жақ шетінде оң болатын аралық әр қадам сайын таңдалады

Кесте 1 – Функцияның α параметрінің әрбір мәніне сәйкес мәндері

№	α	$g_6(F_4,\alpha)$	№	α	$g_6(F_4,\alpha)$
1	0	7,6	22	-1,0013294221	0
2	-10	0	23	-1,0013246537	$2{,}7\cdot10^{-38}$
3	-5	0	24	-1,0013270379	0
4	-2,5	0	25	-1,0013258458	0
5	-1,25	0	26	-1,0013252498	$2{,}5\cdot10^{-41}$
6	-0,625	0,0013	27	-1,0013255478	0
7	-0,9375	$4{,}3\cdot10^{-9}$	28	-1,0013253988	$2{,}1\cdot10^{-43}$
8	-1,09375	0	29	-1,0013254733	$7{,}2\cdot10^{-46}$
9	-1,015625	0	30	-1,0013255106	$6{,}3\cdot10^{-50}$
10	-0,9765925	$1{,}5\cdot10^{-11}$	31	-1,0013255292	0
11	-0,99609375	$1{,}3\cdot10^{-15}$	32	-1,0013255199	$7{,}2\cdot10^{-57}$
12	-1,005859375	0	33	-1,0013255246	0
13	-1,0009765625	$1{,}1\cdot10^{-22}$	34	-1,0013255223	0
14	-1,0034179688	0	35	-1,0013255211	0
15	-1,0021972657	0	36	-1,0013255205	$4{,}6\cdot10^{-62}$
16	-1,0015869141	0	37	-1,0013255208	0
17	-1,0012817383	$4{,}5\cdot10^{-28}$	38	-1,0013255207	0
18	-1,0014343262	0	39	-1,0013255206	0
19	-1,0013580323	0	40	-1,00132552055	$5\cdot10^{-64}$
20	-1,0013198853	$2{,}1\cdot10^{-33}$	41	-1,00132552058	$6{,}1\cdot10^{-67}$
21	-1,0013389588	0			

Сонымен, көмекші функцияның ең үлкен нөлі m-нің әр түрлі үш мәні үшін 42 итерациядан соң $\varepsilon=10^{-10}$ дәлдігімен табылды: $\hat{\alpha}\approx-1{,}00132552058$. Функцияның ең үлкен нөлін табу алгоритмі VisualStudio ортасында жүзеге асырылды.

Қорытынды

Сонымен, біз көпайнымалылы мақсаттық функцияның глобалдық минимумын анықтау мәселесін осы функцияға сәйкес, бір параметрден тәуелді, маңызды қасиеттерге ие көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» табу есебіне келтірдік, яғни көпайнымалылы көпэкстремалды функциядан бір айнымалылы дөңес функцияға ауыстық. Нәтижесінде, глобалдық минимум табу есебінің бір ғана шешімінің бар болуы көмекші функция қасиеттері негізінде қамтамасыз етілді.

Айта кететін жәйт, еселі интеграл түрінде өрнектелетін $g_m(F,\alpha)$ функциясының $\hat{\alpha}$ «ең үлкен нөлін» анықтау үшін біз қажетті есептеулерді кубтық формулаларды қолданып орындаймыз. Дәлірек айтқанда, Соболевтің кубтық формулалары [22] пайдаланылды. Бұл тәсілді қолдануды алғаш ұсынған осы бағытта өнімді жұмыс істеп, маңызды нәтижелер [23–24] алған М.Д. Рамазанов болатын. Ал кубтық формулалар көмегімен функция мәндерін есептеуді біз арнаулы бағдарлама бойынша (Visual Studio) C++ ортасында орындаймыз.

Сонымен қатар, көмекші функцияның «ең үлкен нөлін» жоғары дәлдікпен жуықтау үшін біз дихотомия әдісі, «алтын қима» әдісі, Ньютон әдісі (жанамалар әдісі), градиентпен түсу әдісі және Вегстейн әдісі сияқты белгілі сандық әдістерді бейіндедік. Олардың бейінделген нұсқаларына тиімділік тұрғысынан салыстырмалы талдау жасадық, әрқайсысы үшін жинақталу жылдамдығын айқындадық.

Зерттеу нәтижелерін былайша түйіндеуге болады: көмекші функцияның ізделінді түбірі априорлық бағалау әдістемесі негізінде дихотомия әдісі мен «алтын қима» әдісі бойынша әлдеқайда дәлірек жуықталады. Ал, дәлдікті апостериорлық бағалауға негізделетін қалған әдістер арқылы ізделінді түбірді жуықтағанда түбірдің дәл мәнінен қаншалықты ауытқитынымызды айқын көру қиындығы туындайды, оның үстіне, алдыңғы әдістермен салыстырғанда, есептеулер үшін қажетті итерациялар саны әлдеқайда көп болады. Сонымен қатар, берілген дәлдікті қамтамасыз ету үшін қажетті итерациялар саны «алтын қима» әдісі жағдайында ең аз, ал әр итерацияға сәйкес есептеулер көлемі дихотомия жағдайында минималды (басқа әдістермен салыстырғанда) болады.

Қаржыландыру туралы ақпарат: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім Министрлігінің Ғылым Комитеті қаржыландырады (Грант №. AP25794821).

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Horst R., Pardalos P.M. Thoai N.V. Introduction to Global Optimization. – New York: Springer Science & Business Media, 2000. – 354 p.

2 Numerica A. Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction. – Cambridge University Press, 2004. – 94 p.

3 Locatelli M., Schoen F. Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications. Philadelphia. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. –666 p.

4 Floudas C.A., Pardalos P.M. Recent Advances in Global Optimization. – Princeton: Princeton University Press, 2014. – 644 p.

5 Liberti L., Maculan N. Global Optimization: From Theory to Implementation. – New York: Springer Science & Business Media, 2006. – 428 p.

6 Wu Z. The effective energy transformation scheme as a special continuation approach to global optimization with application to molecular conformation // SIAM Journal on Optimization. – 1996. – Vol. 6(3). – P. 748–768.

7 Floudas C.A., Akrotirianakis I.G., Caratzoulas S., Meyer C. A., Kallrath J. Global optimization in the 21st century: Advances and challenges // Comput. Chem. Eng. – 2005. – Vol. (29). – P. 1185–1202.

8 Pinter J.D. Global Optimization: Scientific and Engineering Case Studies. – New York: Springer Science & Business Media, 2006. – 559 p.

9 Huster W. R., Bongartz D., Mitsos A. Deterministic global optimization of the design of a geothermal organic rankine cycle // Energy Procedia, 2017. – Vol. 129. – P. 50–57.

10 Kunde C., Michaels D., Micovic J., Lutze P., Górak A., Kienle A. Deterministic global optimization in conceptual process design of distillation and melt crystallization // Chemical Engineering and Processing: Process Intensification. – 2015. – Vol. 99. – P. 132–142.

11 González-Díaz J., González-Rodríguez B., Leal M., Puerto J. Global optimization for bi-level portfolio design: economic insights from the dow jones index // Omega. – 2021. – Vol. 102. – P. 1–18.

12 Locatelli M., Schoen F. (Global) Optimization: historical notes and recent developments // EURO Journal on Computational Optimization. – 2021. – Vol. 9. – № 1. – P. 1–15.

13 Klepeis J.L., Pieja M.J., Floudas C.A. Hybrid global optimization algorithms for protein structure prediction // Alternating hybrids. Biophysical journal. – 2003. – Vol. 84(2). – P. 869–882.

14 Liberti L., Sergei K. Comparison of deterministic and stochastic approaches to global optimization // Int. Trans. Oper. Res. – 2005. – Vol. 12(3). – P. 263–285.

15 Zhigljavsky A., Zilinskas A. Stochastic Global Optimization. – New York: Springer Science & Business Media, 2007. – 262 p.

16 Zhu W., Ali M.M. Solving nonlinearly constrained global optimization problem via an auxiliary function method // Journal of computational and applied mathematics. – 2009. – Vol. 230(2). – P. 491–503.

17 Kaidasov Zh., Tutkusheva Zh. Algorithm for Calculating the Global Minimum of a Smooth Function of Several Variables // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2021. – Vol. 8. – No. 4. – P. 591–596. https://doi.org/10.18280/mmep.080412.

18 Кайракбаев А.К, Туткушева Ж.С. О свойствах одной вспомогательной функции для вычисления глобального экстремума // Вестник НИА РК. – 2024. – Т. 91. – №1. – С. 178–188. https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.17.

19 Tutkusheva Zh., Otarov Kh.T. Application of the Auxiliary Function Method to the Search for the Global Minimum of Functions of Many Variables // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2024. – Vol. 118. – № 5. – P. 1323–1329. https://doi.org/10.18280/mmep.110523.

20 Kuznetsov A.V., Ruban A.I. Search for the main minima of multiextremal functions with active consideration of inequality constraints // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies. – 2010. – Vol. 3. – P. 335–346.

21 Rouban A.I. Global optimization method based on the selective averaging coordinate with restrictions // J. Control and Computer Science. – 2013. – Vol. 1(22). – P. 114–123.

22 Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. – Новосибирск: Математический университет Соболева, 1996. – 484 с.

23 Ramazanov M.D. Theory of lattice cubature formulas with a bounded boundary layer // Ufa mathematical journal, 2010. – Vol. 2. – No. 3. – P. 63–82.

24 Рамазанов М.Д. Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемости // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – №7.– С. 71–96.

25 Tutkusheva Zh.S., Kazbekova G.N., Seilkhanova R.B., Kairakbaev A.K. Wegstein's method for calculating the global extremum // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2022. – Vol. 9. – № 2. – P. 405–410. https://doi.org/10.18280/mmep.090214.

REFERENCES

1 Horst, R., Pardalos, P.M., Thoai, N.V. Introduction to Global Optimization (New York: Springer Science & Business Media, 2000), 354 p.

2 Numerica, A. Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction (Cambridge: Cambridge University Press, 2004), 94 p.

3 Locatelli, M., Schoen, F. Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013), 666 p.

4 Floudas, C.A., Pardalos, P.M. Recent Advances in Global Optimization (Princeton: Princeton University Press, 2014), 644 p.

5 Liberti, L., Maculan, N. Global Optimization: From Theory to Implementation (New York: Springer Science & Business Media, 2006), 428 p.

6 Wu, Z. The effective energy transformation scheme as a special continuation approach to global optimization with application to molecular conformation. SIAM Journal on Optimization, 6 (3), 748–768 (1996).

7 Floudas, C.A., Akrotirianakis, I.G., Caratzoulas, S., Meyer, C.A., Kallrath, J. Global optimization in the 21st century: Advances and challenges. Computers & Chemical Engineering, 29, 1185–1202 (2005).

8 Pinter, J.D. Global Optimization: Scientific and Engineering Case Studies (New York: Springer Science & Business Media, 2006), 559 p.

9 Huster, W.R., Bongartz, D., Mitsos, A. Deterministic global optimization of the design of a geothermal organic Rankine cycle. Energy Procedia, 129, 50–57 (2017).

10 Kunde, C., Michaels, D., Micovic, J., Lutze, P., Górak, A., Kienle, A. Deterministic global optimization in conceptual process design of distillation and melt crystallization. Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, 99, 132–142 (2015).

11 González-Díaz, J., González-Rodríguez, B., Leal, M., Puerto, J. Global optimization for bi-level portfolio design: economic insights from the Dow Jones Index. Omega, 102, 1–18 (2021).

12 Locatelli, M., Schoen, F. (Global) Optimization: historical notes and recent developments. EURO Journal on Computational Optimization, 9 (1), 1–15 (2021).

13 Klepeis, J.L., Pieja, M.J., Floudas, C.A. Hybrid global optimization algorithms for protein structure prediction. Biophysical Journal, 84 (2), 869–882 (2003).

14 Liberti, L., Sergei, K. Comparison of deterministic and stochastic approaches to global optimization. International Transactions in Operational Research, 12 (3), 263–285 (2005).

15 Zhigljavsky, A., Zilinskas, A. Stochastic Global Optimization (New York: Springer Science & Business Media, 2007), 262 p.

16 Zhu, W., Ali, M.M. Solving nonlinearly constrained global optimization problem via an auxiliary function method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 230 (2), 491–503 (2009).

17 Kaidasov, Zh., Tutkusheva, Zh. Algorithm for calculating the global minimum of a smooth function of several variables. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 8 (4), 591–596 (2021). https://doi.org/10.18280/mmep.080412.

18 Kairakbaev, A.K., Tutkusheva, Zh.S. O svoistvakh odnoi vspomogatel’noi funktsii dlya vychisleniya global’nogo ekstremuma. Vestnik NIA RK, 91 (1), 178–188 (2024). https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.17 (in Russian).

19 Tutkusheva, Zh., Otarov, Kh.T. Application of the auxiliary function method to the search for the global minimum of functions of many variables. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 11 (5), 1323–1329 (2024). https://doi.org/10.18280/mmep.110523.

20 Kuznetsov, A.V., Ruban, A.I. Search for the main minima of multiextremal functions with active consideration of inequality constraints. Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies, 3, 335–346 (2010).

21 Rouban, A.I. Global optimization method based on the selective averaging coordinate with restrictions. Journal of Control and Computer Science, 1 (22), 114–123 (2013).

22 Sobolev, S.L., Vaskevich, V.L. Kubature Formulas (Novosibirsk: Sobolev Mathematical University, 1996), 484 p. (in Russian).

23 Ramazanov, M.D. Theory of lattice cubature formulas with a bounded boundary layer. Ufa Mathematical Journal, 2 (3), 63–82 (2010).

24 Ramazanov, M.D. Asymptotically optimal lattice cubature formulas with a bounded boundary layer and non-saturation property. Matematicheskii Sbornik, 204 (7), 71–96 (2013). (in Russian).

25 Tutkusheva, Zh.S., Kazbekova, G.N., Seilkhanova, R.B., Kairakbaev, A.K. Wegstein’s method for calculating the global extremum. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 9 (2), 405–410 (2022). https://doi.org/10.18280/mmep.090214.

[1]Otarov Kh.T.,
Cand. Phys.-Math. Sc., ORCID ID: 0009-0009-4471-1625,
e-mail: khassenotar@mail.ru
[1]*Tutkusheva Zh.S.,
PhD, ORCID ID:0000-0003-3611-9620,
*e-mail: zhailan_k@mail.ru

[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov,
Aktobe, Kazakhstan

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE GLOBAL EXTREMUM OF OBJECTIVE FUNCTIONS

Abstract

Global optimization of multi-extremal, multi-variable functions is an important problem for the development of various areas of science. Its relevance is that the need to search for global extremum of functions constantly arises both in theoretical research and in practice. In this work, a new method for determining the global minimum of a multi-extremal, multi-variable function is proposed. In a previously published work by one of the authors of this article, a special function called the "auxiliary function" was constructed by transforming the objective function, and its important properties (non-negativity, uniform discontinuity, differentiability, monotonicity, etc.) were studied. In the presented article, necessary and sufficient conditions for the global minimum of the objective function are rigorously formulated and proven. As a result, the problem of finding the global minimum of a multi-extremal and multi-variable function was reduced to the problem of determining the "greatest zero" of a convex function of one variable: it was proved that the global minimum of the objective function is equal to the exact upper bound of the zeros of the auxiliary function. And the problem of rational application of known numerical methods to determine the "greatest zero" of the auxiliary function with high accuracy was considered.

Keywords: global optimization methods; auxiliary function; global minimum; numerical optimization methods.

Received: October 2, 2025; revised: November 21, 2025; accepted: January 27, 2026.

[1]Отаров Х.Т.,
к.ф.-м.н., ORCID ID: 0009-0009-4471-1625,
e-mail: khassenotar@mail.ru
[1]*Туткушева Ж.С.,
PhD, ORCID ID:0000-0003-3611-9620,
*e-mail: zhailan_k@mail.ru

[1]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова,
г. Актобе, Казахстан

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация

Глобальная оптимизация многоэкстремальных функций многих переменных – важная задача развития различных направлений науки. Актуальность этой задачи подтверждается тем, что необходимость поиска глобального экстремума постоянно возникает как в теоретических исследованиях, так и на практике. В данной работе предлагается новый подход к проблеме поиска глобального минимума многоэкстремальной функции многих переменных. В опубликованной ранее работе одного из авторов данной статьи путем преобразования целевой функции была построена специальная функция, которая была названа «вспомогательной функцией». При этом были изучены важные свойства этой функции (неотрицательность, равномерная непрерывность, дифференцируемость, монотонность и другие), благодаря которым переход от целевой функции к вспомогательной обеспечивает экономию и гарантию сходимости метода поиска глобального минимума. В предлагаемой статье строго сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия глобального минимума целевой функции, и, как следствие, задача нахождения глобального минимума многоэкстремальной функции многих переменных сводится к поиску «наибольшего нуля» выпуклой функции одной переменной. При этом доказано, что глобальный минимум целевой функции совпадает с точной верхней гранью нулей вспомогательной функции. А для определения «наибольшего нуля» вспомогательной функции с высокой точностью можно рационально использовать известные численные методы.

Ключевые слова: методы глобальной оптимизации, вспомогательная функция, глобальный минимум, глобальный минимум, методы численной оптимизации.