

ӨОЖ 517.928
FTAXP 27.31.21

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-4-324-339>

^{1*}**Төлеубай А.М.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0002-5490-8212,
*e-mail: altyn.15.94@mail.ru
²**Кәріпова А.Т.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0008-7837-1801,
e-mail: karipova-aidana@mail.ru

¹«Шәкәрім университеті» КеАҚ, Семей қ., Қазақстан
²Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан

ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОБЛЫСТА ЧЭФИ-ИНФАНТЕ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ АТТРАКТОРЛАРЫНЫҢ ОРТАШАЛАНУЫ

Аңдатпа

Бұл жұмыста микро біртекті емес ортада Чэфи-Инфанте теңдеуінің орташалау есебі қарастырылады. Зерттеу барысында жылдам тербелмелі мүшелері мен диссипациясы бар Чэфи-Инфанте теңдеулері жан-жақты талданады. Модельге кіші параметр енгізіліп, оның шекті мәндеріне байланысты орташаланған (шекте) есеп алынады. Бастапқы теңдеудің траекториялық аттракторларының орташаланған теңдеудің аттракторына жинақталатыны дәлелденіп, тиісті теорема тұжырымдалады. Сонымен қатар, бірегей шешімдер жағдайында глобалды аттракторлардың жинақталуы зерттеледі, ол үшін теңдеудің сызықтық емес мүшелеріне қосымша шарттар қойылады. Жұмыста перфорацияланған облыстардағы және олардың қуыстарының шекараларындағы күрделі шекаралық шарттары бар сингулярлы есептер де қарастырылады. Мұндай жағдайда бастапқы теңдеуден құрылымы өзгеше орташаланған (шекте) теңдеу алынады. Бұл теңдеу жүйенің тиімді орташа сипаттамасын бейнелейді және оның құрамында қосымша потенциалдық мүше пайда болуы мүмкін. Кіші параметр нөлге ұмтылған кезде аттракторлардың Хаусдорф мағынасындағы жинақталуы дәлелденеді. Жалпы нәтиже ретінде, орташаланған аттракторлар сипатталып, бастапқы жүйенің аттракторларының шекте теңдеудің аттракторларына жинақталатыны көрсетіледі. Бұл жұмыста периодты перфорацияланған ортадағы Чэфи-Инфанте теңдеулерін орташалау мәселесі алғаш рет талданып, нәтижелердің ғылыми жаңалығы мен өзектілігі негізделеді. Бұл зерттеу дифференциалдық операторларды орташалау теориясының әдістерін дамытуға және сызықтық емес дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін зерттеуде қолданыс табуы мүмкін.

Тірек сөздер: Чэфи-Инфанте теңдеулері, кеуекті орта, аттракторлар, перфорацияланған облыс, орташалау.

Кіріспе

Перфорацияланған материалдар мен кеуекті орталардағы процестерді математикалық модельдеу – азаматтық, авиациялық және ғарыштық инженерияда, сондай-ақ жаңа материалдар өндіру саласында маңызды ғылыми мәселе. Мұндай модельдер, әдетте, перфорацияланған облыстарда қойылған шекаралық есептердің асимптотикалық талдауына алып келеді. Бұл тәсілді қолдану үшін алдымен орташаланған (яғни, шекте) есепті құрып, шешімдердің жинақталу теоремаларын дәлелдеу қажет. Егер есептің шешімі бірегей болмаса, мәселе күрделене түседі – бұл жағдайда траекториялық аттракторлардың жинақталуын дәлелдеу қажет (толығырақ [1–4] қараңыз).

Мақалада перфорацияланған облыстар мен олардың қуыстарының шекарасында берілген шекаралық шарттары бар сингулярлы қиын есептер зерттеледі [5–7]. Мұндай жағдайда бастапқы теңдеуге қарағанда құрылымы өзгеше болатын орташаланған (шекте) теңдеу алы-

нады. Бұл теңдеу модельдің тиімді (орташа) сипаттамасын бейнелейді және оның құрамында қосымша потенциалдық мүше пайда болуы мүмкін. Осы шағын параметр нөлге ұмтылған кезде аттракторлардың Хаусдорф мағынасындағы жинақталуы дәлелденеді. Нәтижесінде, орташаланған аттракторлар анықталып, бастапқы жүйенің аттракторларының шектік (орташаланған) теңдеудің аттракторларына жинақталуы көрсетіледі.

Жұмыста перфорацияланған облыстардағы Чэфи-Инфанте теңдеулері үшін аралас (бастапқы-шекаралық) есеп қарастырылады. Соңғы жылдары кеуекті орталарда қойылған есептердің орташалануы мен асимптоталық талдауына арналған көптеген зерттеулер жарық көрді (мысалы, [8–11]). Периодты, локальды периодты, квази-периодты және кездейсоқ құрылымдар үшін әртүрлі орташалануы теоремалары дәлелденген. Бұл бағыттағы кешенді шолулар мен библиографияны [11–14] еңбектерінен табуға болады.

Аттракторлар теориясы туралы жан-жақты мәліметтер [14, 20–22] монографияларында және ондағы сілтемелерде ұсынылған. Аттракторларды орташалау мәселелері [15, 18–22] еңбектерінде, сондай-ақ [18, 19] жұмыстарында зерттелген. [23, 24] параболалық теңдеулер үшін орташалау әдістері жан-жақты талданып, олардың Чэфи-Инфанте типті теңдеуге қолданылу мүмкіндіктері көрсетілген. Бұған дейін Чэфи-Инфанте типті теңдеулер үшін орташалау тек классикалық біртекті облыстарда қарастырылған болатын. Бұл жұмыста алғаш рет перфорацияланған орта жағдайында орташаланған траекториялық аттракторлардың бар болуы және олардың шектік аттракторға жинақталуы дәлелденді.

Мақалада ε параметріне тәуелді перфорацияланған облыстағы Чэфи-Инфанте теңдеуі үшін анықталған траекториялық аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ -ның $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде әлсіз мағынада тиісті функционалдық кеңістіктегі орташаланған теңдеудің траекториялық аттракторына $\mathcal{A}$ жинақталатыны дәлелденеді. Мұндағы ε – перфорацияланған ортадағы қуыстардың диаметрі мен олардың арасындағы арақашықтықты сипаттайтын шағын параметр. Сонымен қатар, теңдеу коэффициенттеріне белгілі бір қосымша шарттар орындалған жағдайда глобалдық аттракторлардың да жинақталуы көрсетіледі. Сондай-ақ, шектік теңдеуде пайда болатын «бөгде мүше» – потенциалдық мүше – туралы айтылады (бұл құбылыс алғаш рет [1, 2] еңбектерінде зерттелген).

Материалдар мен әдістер

Зерттеу жұмысының бұл бөлімінде автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторлары туралы негізгі ұғымдар анықталады және теоремалар тұжырымдалады.

Бұл бөлімде автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторларын құрудың жалпы сызбасы көрсетілген. Келесі нәтижелерді алу үшін бұл нәтижелер перфорацияланған облыста Чэфи-Инфанте теңдеулерінің траекториялық аттракторларын сол теңдеулерде және шекаралық шарттарында тез тербелмелі мүшелері қарастырылады және сәйкес орташаланған теңдеумен зерттеу үшін қолданылады.

Абстрактті автономды эволюциялық теңдеуді қарастырамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), t \geq 0 \quad (1)$$

Сызықтық емес оператор $A(\cdot): E_1 \rightarrow E_0$ берілген, мұнда E_1, E_0 – Банах кеңістіктері және $E_1 \subseteq E_0$. Мысалы, $A(u) = \Delta u - f(u) + g(\cdot)$ (1.2-ші бөлімді қараңыз).

(1) теңдеуінің шешімі деп L_2 -гі функцияларды атаймыз, егер оларды (1)-ге қойып алынған кезде D' жалпыланған функциялар мағынасында тепе-теңдік болып алынады.

Біз (1) теңдеудің $u(s)$ шешімдерін, толығымен $s \in \mathbb{R}_+$ айнымалының функциялары ретінде зерттейміз. Мұнда $s \equiv t$ уақыттың айнымалысын білдіреді. (1) теңдеудің шешімдерінің жиынын $\mathcal{K}^+$ траекторияларының кеңістігі деп атаймыз. $\mathcal{K}^+$ траекторияларының кеңістігін толығырақ сипаттайық.

Ең алдымен, $\mathbb{R}$ -гі бекітілген $[t_1, t_2]$ уақыт аралығында анықталған (1) теңдеудің $u(s)$ шешімдерін қарастырамыз.

t_1 мен t_2 -ге тәуелді, $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ Банах кеңістігіне жататын (1) теңдеуінің шешімдерін зерттейміз. $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ кеңістігі $f(s)$, $s \in [t_1, t_2]$ функцияларынан тұрады, мысалы, $f(s) \in E$ барлық дерлік үшін $s \in [t_1, t_2]$, мұндағы E – Банах кеңістігі. $E_1 \subseteq E \subseteq E_0$ деп саналады.

Мысалы, $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ кеңістігі $C([t_1, t_2]; E)$ кеңістігі немесе $L_p(t_1, t_2; E)$ кеңістігі болуы мүмкін, $p \in [1, \infty]$ үшін, немесе осындай кеңістіктердің қиылысуы (1.2 бөлімді қараңыз [25]).

$$\Pi_{t_1, t_2} \mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2} \subseteq \mathcal{F}_{t_1, t_2}$$

және

$$\|\Pi_{t_1, t_2} f\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} \leq C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \|f\|_{\mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2}}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2}, \quad (2)$$

мұнда $[t_1, t_2] \subseteq [\tau_1, \tau_2]$ және $\Pi_{t_1, t_2} [t_1, t_2]$ кесіндісіндегі оператордың сығылуын білдіреді. $C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$ тұрақтысы f функциясына тәуелді емес. Әдетте кеңістіктердің біртекті жағдайы қарастырылады, онда $C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) = C(t_2 - t_1, \tau_2 - \tau_1)$.

Айталық, $h \in \mathbb{R}$ үшін $S(h)$ жылжыту операторын білдіреді

$$S(h)f(s) = f(h + s).$$

Егер $f(\cdot)$ функцияның s аргументі $[t_1, t_2]$ кесіндісінде жататын болса, онда $h \in \mathbb{R}$ үшін $S(h)f(\cdot)$ функциясының s аргументі $[t_1 - h, t_2 - h]$ кесіндісінде жатады. Айталық, $S(h)$ бейнелеуі F_{t_1, t_2} – тің $F_{t_1 - h, t_2 - h}$ -гі изоморфизмі болып табылады және

$$\|S(h)f\|_{\mathcal{F}_{t_1 - h, t_2 - h}} = \|f\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}. \quad (3)$$

Бұл тұжырым толығымен орынды, мысалы, біртекті кеңістіктер үшін.

Егер $f(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, онда $A(f(s)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, мұндағы $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. $\frac{\partial f(t)}{\partial t} \in D'((t_1, t_2); E_0)$ мәндері E_0 жататын жалпыланған функция және $\mathcal{D}_{t_1, t_2} \subseteq D'((t_1, t_2); E_0)$ барлық $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ үшін орындалсын дейік. Егер $D'((t_1, t_2); E_0)$ кеңістігіндегі $\frac{\partial u}{\partial t}(s) = A(u(s))$ жалпыланған функциялар мағынасында орындалса, онда $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$ функциясын (1) теңдеуінің $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ кеңістігіндегі шешімі $((t_1, t_2)$ интервалындағы) деп атаймыз.

Айталық,

$$\mathcal{F}_+^{loc} = \{f(s), s \in \mathbb{R}_+ \mid \Pi_{t_1, t_2} f(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}, \quad \forall [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+\}. \quad (4)$$

Мысалы, егер $\mathcal{F}_{t_1, t_2} = C([t_1, t_2]; E)$, онда $\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+; E)$, ал егер $\mathcal{F}_{t_1, t_2} = L_p(t_1, t_2; E)$, онда $\mathcal{F}_+^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$.

Егер $\Pi_{t_1, t_2} u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$ және $\Pi_{t_1, t_2} u(s)$ функциясы кез келген $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$ уақыт аралығы үшін (1) теңдеудің шешімі болып табылса, онда $u(s) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ функциясы $\mathcal{F}_+^{loc}$ -гі (1) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Айталық, $\mathcal{K}^+$ бұл $\mathcal{F}_+^{loc}$ -не тиісті (1) теңдеуінің шешімдерінің кейбір жиыны болсын, $\mathcal{F}_+^{loc}$ -не тиісті болатын, бірақ (1) теңдеуінің барлық шешімдерінің жиыны емес болуы мүмкін. $\mathcal{K}^+$ кеңістігінің өзі бұл (1) теңдеуінің траекторияларының кеңістігі болса, онда $\mathcal{K}^+$ жиынының элементі траектория деп аталады.

$\mathcal{K}^+$ траекторияларының кеңістігі келесі мағынада трансляциялы-инвариантты деп саналады: егер $u(s) \in \mathcal{K}^+$ болса, онда кез келген $h \geq 0$ үшін $u(h + s) \in \mathcal{K}^+$. Бұл шарт біртекті кеңістіктерінде автономды теңдеу шешімдерінің нақты қасиеті болып табылады.

Енді $\mathcal{F}_+^{loc}$ – $\text{deg } S(h)$ жылжыту операторларын қарастырайық:

$$S(h)f(s) = f(s + h), \quad h \geq 0.$$

$\{S(h), h \geq 0\}$ бейнелеуінің жиыны $h_1, h_2 \geq 0$ үшін $\mathcal{F}_+^{loc}$: $S(h_1)S(h_2) = S(h_1 + h_2)$ жартылай группаны бейнелейді және $S(0) = I$, мұнда I тепе-тең бейнелеу болатыны айқын. h -айнымалысын t уақыт айнымалысына ауыстырамыз. $\{S(t), t \geq 0\}$ жартылай группасы жылжытулардың жартылай группасы деп аталады. Жасалған болжамға байланысты жылжытулардың жартылай группасы $\mathcal{K}^+$ траекториясының кеңістігін өз-өзіне бейнелейді:

$$S(t)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+, \quad \forall t \geq 0.$$

Әрі қарай, $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ траекториялар кеңістігіне әсер ететін $\{S(t)\}$ жылжытулардың жартылай группасының тартылу қасиеттері зерттеледі. $\mathcal{F}_+^{loc}$ кеңістігінде кейбір топологияны анықтайық.

Айталық, $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ – барлық $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ кесінділері үшін $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ кеңістігінде анықталған метрика, төменгі шарттарды қанағаттандырады

$$\rho_{t_1, t_2}(\Pi_{t_1, t_2} f, \Pi_{t_1, t_2} g) \leq D(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \rho_{\tau_1, \tau_2}(f, g),$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2}, \quad [t_1, t_2] \subseteq [\tau_1, \tau_2],$$

$$\rho_{t_1 - h, t_2 - h}(S(h)f, S(h)g) = \rho_{t_1, t_2}(f, g),$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}, \quad [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Θ_{t_1, t_2} арқылы $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ -гі кеңістігіндегі сәйкес метрикалық кеңістікті белгілейміз. Мысалы, $\rho_{t_1, t_2} - \mathcal{F}_{t_1, t_2}$ Банах кеңістігіндегі $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}}$ нормамен туындайтын метрика болуы мүмкін. Сонымен қатар, қосымшада $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ Банах кеңістігіндегі күшті жинақтылыққа қарағанда ρ_{t_1, t_2} метрикасы Θ_{t_1, t_2} топологиясын әлсіз мағынада туындатады.

Кез-келген $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$ үшін Θ_{t_1, t_2} -ны локальды жинақты топологиямен жабдықталған $\mathcal{F}_+^{loc}$ кеңістігін Θ_+^{loc} арқылы белгілейміз. Дәлірек айтсақ, $\{f_k(s)\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ функцияларының тізбегі анықтама бойынша $k \rightarrow \infty$ Θ_+^{loc} – да $f(s) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ функциясына жинақталады, егер $(\rho_{t_1, t_2}(\Pi_{t_1, t_2} f_k, \Pi_{t_1, t_2} f) \rightarrow 0$ болса) $k \rightarrow \infty$ болса, кез келген $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$ кесінді үшін. Мысалы, Θ_+^{loc} топологиясы Фреше метрикасы арқылы өлшенетінін дәлелдеу қиын емес

$$\rho_+(f_1, f_2) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \frac{\rho_{0, m}(f_1, f_2)}{1 + \rho_{0, m}(f_1, f_2)}.$$

Егер барлық Θ_{t_1, t_2} метрикалық кеңістіктері толық болса, онда Θ_+^{loc} метрикалық кеңістігі толық болатыны айқын.

$\{S(t)\}$ жылжытулардың жартылай тобы Θ_+^{loc} топологиясында үзіліссіз болатынына назар аударайық. Бұл Θ_+^{loc} топологиялық кеңістігінің анықтамасынан тікелей туындайды.

Сонымен қатар, келесідей Банах кеңістігін анықтаймыз

$$\mathcal{F}_+^b := \{f(s) \in \mathcal{F}_+^{loc} \mid \|f\|_{\mathcal{F}_+^b} < +\infty\}, \quad (5)$$

мұнда норма

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} := \sup_{h \geq 0} \|\Pi_{0,1} f(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}}. \quad (6)$$

Мысалы, егер $\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+; E)$, онда $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+; E)$ кеңістігі нормасымен $\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} = \sup_{h \geq 0} \|f(h)\|_E$, ал егер, $\mathcal{F}_+^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$ болса, онда $\mathcal{F}_+^b = L_p^b(\mathbb{R}_+; E)$ нормасымен $\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} = \left(\sup_{h \geq 0} \int_h^{h+1} \|f(s)\|_E^p ds \right)^{1/p}$ анықталады.

Келесі $\mathcal{F}_+^b \subseteq \Theta_+^{loc}$ орындалады. $\mathcal{F}_+^b$ Банах кеңістігі $\mathcal{K}^+$ траекториялық кеңістіктің ішіндегі шектеулі жиындарды анықтау үшін қажет. $\mathcal{K}^+$ траекториялық аттракторын салу барысында біз $\mathcal{F}_+^b$ Банах кеңістігінің топологиясындағы сәйкес бірмәнді жинақтылықты қарастырмаймыз. Оның орнына әлдеқайда әлсіз, Θ_+^{loc} локальды жинақтылық топологиясын пайдаланамыз.

$\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{F}_+^b$, яғни (1) теңдеудің $u(s) \in \mathcal{K}^+$ кез-келген траекториясының ақырлы (8) нормасы бар деп есептейік. $\mathcal{K}^+$ — на әсер ететін $\{S(t)\}$ жылжытулардың жартылай группасының траекториялық аттракторының және тартылатын жиынның анықтамаларын тұжырымдаймыз.

Анықтама 1. $\mathcal{P} \subseteq \Theta_+^{loc}$ жиыны Θ_+^{loc} топологиясында $\mathcal{K}^+$ — на әсер ететін $\{S(t)\}$ жылжытулардың жартылай группасының тартатын жиыны деп аталады, егер Θ_+^{loc} топологиясында $\mathcal{F}_+^b$ -де кез келген $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$ шектелген жиынында $\mathcal{P}$ жиыны $S(t)\mathcal{B}$, $t \rightarrow +\infty$ тартса, яғни кез-келген $t \geq t_1$ $S(t)\mathcal{B} \subseteq O_\varepsilon(\mathcal{P})$ болатындай Θ_+^{loc} — ғы кез келген $O_\varepsilon(\mathcal{P})$ — ε аймағында $t_1 \geq 0$ табылса. $\mathcal{P}$ — ның тартатын қасиеті келесідей эквивалентті түрде тұжырымдалуы мүмкін:

$\mathcal{F}_+^b$ — де кез келген жиыны $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$ шенелген және кез келген $M > 0$ үшін

$$\text{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} S(t)\mathcal{B}, \Pi_{0,M} \mathcal{P}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

мұнда

$$\text{dist}_{\mathcal{M}}(X, Y) := \sup_{x \in X} \text{dist}_{\mathcal{M}}(x, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \rho_{\mathcal{M}}(x, y)$$

$\mathcal{M}$ метрикалық кеңістігіндегі X жиынынан Y жиынына дейінгі Хаусдорфтың жартылай кашықтығын білдіреді.

Анықтама 2. [1, б. 351–359]. Егер

- (i) $\mathcal{A}$ жиыны $\mathcal{F}_+^b$ -де шенелген және Θ_+^{loc} -да компактті болса,
- (ii) $\mathcal{A}$ жиыны жартылай группалардың жылжытуларына қатысты қатаң инвариантты болса :

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \text{барлығы үшін } t \geq 0,$$

- (iii) $\mathcal{A}$ жиыны Θ_+^{loc} топологиясында $\mathcal{K}^+$ -да, кез келген $M > 0$, $\{S(t)\}$ жартылай группаның жылжытуларының тартатын жиыны болса,
- онда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}^+$ жиыны Θ_+^{loc} топологиясында $\mathcal{K}^+$ -да $\{S(t)\}$ жартылай группаның жылжытуларының траекториялық аттракторы деп аталады

$$\text{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} S(t)\mathcal{B}, \Pi_{0,M} \mathcal{A}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Ескерту 1. [13, б. 635–677] жұмысының терминологиясын пайдаланып, егер $(\mathcal{F}_+^b, \Theta_+^{loc})$ - $\mathcal{K}^+$ -не әсер етуші, $\mathcal{A}$ аттракторы Θ_+^{loc} топологиясында $t \rightarrow +\infty$ кезде $S(t)\mathcal{B}$ жиынын тартса, $\{S(t)\}$ жартылай группаның жылжытуының $\mathcal{A}$ траекториялық аттракторы глобальды болады:

$$\text{dist}_{\Theta_+^{loc}}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

мұнда $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$ -гі кез келген шенелген $(\mathcal{F}_+^b, \Theta_+^{loc})$ жиын.

(1)-ші теңдеудің траекториялық аттракторының құрылымын және негізгі бар болу теоремасын тұжырымдаймыз.

Теорема 1 ([14–18]). Айталық, $\mathcal{K}^+$ траекторияларының кеңістігі, (1) теңдеуге сәйкес, $\mathcal{F}_+^b$ -кеңістігінде тұйық және (5)-ші шарт орындалсын. Айталық, $\mathcal{F}_+^b$ – де шенелген және Θ_+^{loc} – да компактiлi, $\{S(t)\}$ жартылай группаның жылжытуының $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}^+$ тартылатын жиыны бар болсын. Онда $\mathcal{K}^+$ – на әсер етуші $\{S(t), t \geq 0\}$ жылжытудың жартылай группасының $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$ траекториялық аттракторы бар болады. $\mathcal{U}$ жиыны $\mathcal{F}_+^b$ –де шенелген және Θ_+^{loc} – де компактiлi болады.

(1)-ші теңдеудің $\mathcal{U}$ траекториялық аттракторының құрылымын осы теңдеудің толық траекториялары тұрғысынан бейнелейік. Уақыттың барлық сандық осінде (1)-ші теңдеуді қарастырайық

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Бұл анықтаманы барлық $\mathbb{R}$ осіне жалпылайық. Егер $f(s)$, $s \in \mathbb{R}$ функциясы барлық уақыт осінде берілсе, онда $S(h)f(s) = f(s+h)$ жылжытулары теріс h сандар үшін анықталады. Егер $\Pi_+ u(s+h) \in \mathcal{K}^+$ кез-келген $h \in \mathbb{R}$ үшін $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$ функциясы (7) теңдеудің толық траекториясы деп аталады.

Мұнда $\Pi_+ = \Pi_{0,\infty}$ операторының жарты осьте $\mathbb{R}_+$ шектелуін білдіреді.

Сәйкесінше $\mathcal{F}_+^{loc}, \mathcal{F}_+^b$ – нен және Θ_+^{loc} – нан $\mathcal{F}^{loc}, \mathcal{F}^b$ және Θ^{loc} кеңістіктерін анықтаймыз:

$$\mathcal{F}^{loc} := \{f(s), s \in \mathbb{R} \mid \Pi_{t_1, t_2} f(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2} \quad \forall [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}\};$$

$$\mathcal{F}^b := \{f(s) \in \mathcal{F}^{loc} \mid \|f\|_{\mathcal{F}^b} < +\infty\},$$

мұнда

$$\|f\|_{\mathcal{F}^b} := \sup_{h \in \mathbb{R}} \|\Pi_{0,1} f(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}} \quad (8)$$

Θ^{loc} топологиялық кеңістік (жиын ретінде) $\mathcal{F}^{loc}$ – мен сәйкес келеді, және Θ^{loc} – нан анықтама бойынша $f_k(s) \rightarrow f(s)$ ($k \rightarrow \infty$), егер Θ_{t_1, t_2} – де кез келген $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ үшін $\Pi_{t_1, t_2} f_k(s) \rightarrow \Pi_{t_1, t_2} f(s)$ ($k \rightarrow \infty$). Θ^{loc} - Θ_+^{loc} сияқты метрикалық кеңістік болып табылатыны айқын

Анықтама 3. (9) теңдеуінің $\mathcal{F}^b$ кеңістігіндегі $\mathcal{K}$ өзегі (9) теңдеуінің $\mathcal{F}^b$ нормасында шенелген барлық толық $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$ траекторияларының бірігуі болады:

$$\|\Pi_{0,1} u(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}} \leq C_u, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2. Айталық, 1-ші теореманың шарттары орындалсын. Онда

$$\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}$$

$\mathcal{K}$ жиыны Θ^{loc} топологиясында компактiлi және $\mathcal{F}^b$ кеңістігінде шенелген.

Толық дәлелдеуі [13, б. 635–677; 18, б. 215–235]-да ұсынылған.

Келесі бөлімде $\varepsilon > 0$ кіші параметріне тәуелді болатыны Чэфи-Инфанте теңдеулерінің және олардың траекториялық аттракторлары зерттеледі.

Анықтама 4. Θ_+^{loc} топологиялық кеңістігінде $\mathcal{U}_\varepsilon$ траекториялық аттракторы $\varepsilon \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\overline{\mathcal{U}}$ траекториялық аттракторына жинақталады дейміз, егер Θ_+^{loc} – ның кез-келген $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ маңайында $\varepsilon_1 \geq 0$ болса, кез-келген $\varepsilon < \varepsilon_1$ үшін $\mathcal{U}_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{U})$ болатындай табылса, яғни, кез-келген $M > 0$ үшін

$$\text{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} \mathcal{U}_\varepsilon, \Pi_{0,M} \overline{\mathcal{U}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Есептің қойылымы

Келесі шенелген облысты қарастырайық:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3.$$

Айталық, $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$ түріндегі бекітілген ұяшық берілсін. Мұнда тегіс шекарасы бар $G_0 \subset Y$ – жиыны қарастырылады.

Кез келген $\delta > 0$ үшін $B \subset \mathbb{R}^n$ жиыны келесідей түрде енгізіледі:

$$\delta B = \{x \in \mathbb{R}^n: \delta^{-1}x \in B\}.$$

Ары қарай, $\varepsilon > 0$ жеткілікті аз деп есептейміз, сонда :

$$\varepsilon^{n/(n-2)} G_0 \subset \varepsilon Y.$$

$j \in \mathbb{Z}^n$ жиыны үшін төмендегідей түрде енгіземіз:

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, Y_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon Y, G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^{n/(n-2)} G_0.$$

Төмендегідей белгілеулер енгізейік:

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega: \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{n\varepsilon}\},$$

Және индекстердің рұқсат етілген жиыны:

$$Y_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n: G_\varepsilon^j \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon \neq \emptyset\}.$$

Сондай-ақ $|Y_\varepsilon| \approx d\varepsilon^{-n}$, мұндағы $d > 0$ – тұрақты.

Келесідей перфорацияланған облысты қарастыралық:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}, \text{ мұнда } G_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (\varepsilon k + \varepsilon^{n/(n-2)} G_0) \cap \Omega,$$

ал, сондай-ақ, $S_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$ – ішкі шекара.

Келесідей белгілеулер енгіземіз:

$$Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, +\infty), Q = \Omega \times (0, +\infty).$$

Келесідей аралас (бастапқы-шекаралық) есепті қарастырайық:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \Delta u_\varepsilon - \sum_{j=0}^N b_j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon^j + g(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\theta q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = 0, & x \in S_\varepsilon, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon(x, 0) = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (9)$$

Мұнда, $N = 2\ell + 1$ -тақ сан.

$b_j(z) \in C_b(\mathbb{R}^n)$ ($z = (z_1, \dots, z_n)$) деп белгілейміз және

$$b_N(z) \geq \beta_N > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

осындай шарт қоямыз.

Осыдан, төмендегідей орташалау орындалады.

$$b_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \bar{b}_j \quad L_{\infty, \text{weak}}(\Omega) \text{ — де } (j = 0, \dots, N). \quad (11)$$

$q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ функциясының $V' = H^{-1}(\Omega)$ – кеңістігінде $\bar{q}(x)$ орташалауы бар деп ұйғарамыз:

$q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \bar{q}(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \quad V'$ – де әлсіз мағынада.

Кеңістіктер үшін келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$\begin{aligned} H &:= L_2(\Omega), & H_\varepsilon &:= L_2(\Omega_\varepsilon), \\ V &:= H_0^1(\Omega), & V_\varepsilon &:= \{v: H_0^1(\Omega_\varepsilon): v|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

$$\begin{aligned} \|v\|_H^2 &= \int_\Omega |v(x)|^2 dx, & \|v\|_{H_\varepsilon}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x)|^2 dx, \\ \|v\|_V^2 &= \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, & \|v\|_{V_\varepsilon}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ескерту 2. $V' = H^{-1}(\Omega)$ - түйіндес кеңістігі, сәйкесінше $V'_\varepsilon = H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ түйіндес кеңістігі. $u_\varepsilon \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}_+; H_\varepsilon) \cap L_2(\Omega)(\mathbb{R}_+; V_\varepsilon) \cap L_{2(l+1)}^\infty(\mathbb{R}_+; L_{2(l+1)}(\Omega_\varepsilon))$ функциясы (9) есебінің әлсіз шешімі деп аталады, егер кез келген $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; H_\varepsilon)$ үшін

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi dx dt + \sum_{j=0}^N \int_{Q_\varepsilon} b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon^j \psi dx dt \\ + \varepsilon^{\theta-1} \int_{S_\varepsilon} q \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon \psi d\sigma dt = \int_{Q_\varepsilon} g(x) \psi dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

u_ε – (9) мағынасындағы әлсіз шешім болсын. Онда $u_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+; H_\varepsilon)$ және дерлік барлық $t > 0$ үшін

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(t)\|_{H_\varepsilon}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |u_\varepsilon|^2 d\sigma_+ \\ + \sum_{j=0}^N \int_{\Omega_\varepsilon} b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) |u_\varepsilon|^{j+1} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) u_\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Осыдан стандартты тәсілмен априорлық бағалаулар алынады.

Ескерту 2. $U \in H_\varepsilon$ болсын және $\varepsilon > 0$ бекітейік. $u(x, 0) = U(x)$ болсын, онда (9) бастапқы-шекаралық есебі үшін әлсіз шешімнің бар екендігі дәлелденеді. Дәлелдеу стандартты Галеркин әдісіне негізделген (қараңыз, мысалы, [9]). Негізгі лемма (априорлық бағалауларды [10] қараңыз).

Лемма 1. Айталық, $u_\varepsilon(x, t) \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V_\varepsilon) \cap L_{2(l+1)}^{loc}(\mathbb{R}_+; L_{2(l+1)}(\Omega_\varepsilon))$ – Чэфи-Инфанте есептерінің әлсіз шешімі болсын. Сонда, барлық дерлік $T > 0$ үшін келесідей қасиеттер орындалады:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi dx dt + \sum_{j=0}^N \int_{\Omega_\varepsilon} b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon^j \psi dx dt \\ + \varepsilon^{\theta-1} \int_{S_\varepsilon} q \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon \psi d\sigma dt = \int_{Q_\varepsilon} g(x) \psi dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

ε -ді бекітейік. Кейінгі талдауда, егер түсінікті болса, кеңістіктердің белгілерінде ε индексін тастап отырамыз. Енді біз 1-бөлімде сипатталған сызбаларды қолданып, (9) есеп үшін траекториялық аттрактор құрамыз; ол (1) түрге ие болады, егер $E_1 = L_{2l+1} \cap H_0^1(\Omega)$, $E_0 = H^{-r}$, $E = L_2(\Omega)$ және $A(u) = -\Delta u + f(u) - g(\cdot, \cdot)$.

(9)-ы есеп үшін $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ траекториясының кеңістігін сипаттау кезінде 1-бөлімнің жалпы сызбасын пайдаланамыз және әр кесінді $[t_1, t_2] \in R$ үшін Банах кеңістігін анықтаймыз

$$\mathcal{F}_{t_1, t_2} := L_\infty(t_1, t_2; H) \cap L_2(t_1, t_2; V) \cap L_{2(l+1)}(t_1, t_2; L_{2(l+1)}(\Omega)) \quad (15)$$

нормамен

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} := \|v\|_{L_\infty(t_1, t_2; H)} + \|v\|_{L_2(t_1, t_2; V)} + \|v\|_{L_{2(l+1)}(t_1, t_2; L_{2(l+1)}(\Omega))}. \quad (16)$$

Алайда, (2) шарт (19)-ы нормасы үшін орындалады, ал жартылай группаның жылжытулары $\{S(h)\}$ (3)-і шартты қанағаттандырады.

$\mathcal{D}_{t_1, t_2} = L_2(t_1, t_2; V)$ қою арқылы, $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$ аламыз, ал, егер $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, онда $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Әрі қарай, (9)-ы есептің әлсіз шешімдерін 1-бөлімнің жалпы сызбасынан теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде қарастыруға болады.

Кеңістікті анықтағаннан кейін (4) біз мынаны аламыз:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+^{loc} &= L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_{2(l+1)}^{loc}(\mathbb{R}_+; L_{2(l+1)}(\Omega)) \\ \mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc} &= L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; H_\varepsilon) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V_\varepsilon) \cap L_{2(l+1)}^{loc}(\mathbb{R}_+; L_{2(l+1)}(\Omega_\varepsilon)).\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_\varepsilon^+$ арқылы (9) есептің барлық әлсіз шешімдерінің жиының белгілейміз. Назар аударайық, кез келген функция үшін $U \in H$ -ның кем дегенде $u(0) = U(x)$ орындалатындай, $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ бір траекториясы бар болады. Демек, (9) есептің $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ траекториясының кеңістігі бос емес және жеткілікті үлкен.

$\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ және $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ траекториясының кеңістігі трансляционды-инвариантты болып табылатыны айқын, яғни, егер $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, онда кез келген $h \geq 0$ үшін $u(h+s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$. Демек,

$$S(h)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+, \quad \forall h \geq 0.$$

Әрі қарай, $L_2(t_1, t_2; H)$ кеңістігінің нормасын қолдана отырып, $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ кеңістігіндегі $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ метрикасын анықтаймыз және келесідей түрде жазамыз

$$\rho_{0,M}(u, v) = \left(\int_0^M \|u(s) - v(s)\|_H^2 ds \right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0,M}.$$

Бұл метрикалар $\mathcal{F}_+^{loc}$ кеңістігінде Θ_+^{loc} топологияны туындатады (сәйкесінше $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$ – $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$). Назар аударыңыз, егер кез келген $M > 0$ $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(0,M;H)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) болса, $k \rightarrow \infty$ $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ тізбегі $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ функциясына Θ_+^{loc} – да жинақталады. Θ_+^{loc} топологиясы өлшемді (қр. (6)) және тиісті метрикалық кеңістікте толық болады. Біз (9)-есептің кеңістігінің траекториясында $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ топологияны қарастырамыз. $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ әсер ететін жартылай группаның жылжытулары $\{S(t)\}$ қарастырылып отырған Θ_+^{loc} топологиясында үзіліссіз.

1-ші бөлімнің жалпы сызбасына сәйкес, $\mathcal{F}_+^b$ Банах кеңістігін қолдана отырып, шенелген жиынды $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ анықтаймыз (қр. (7)).

$$\mathcal{F}^b = L_\infty^b(\mathbb{R}; H) \cap L_2^b(\mathbb{R}; V) \cap L_{2l+1}^b(\mathbb{R}; L_{2(l+1)}(\Omega)). \quad (17)$$

және $\mathcal{F}_+^b - \mathcal{F}_+^{loc}$ кеңістігінің ішкі кеңістігі екені айқын.

$\mathcal{K}_\varepsilon^+, S(t): \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+, t \geq 0$ – да $\{S(t)\}$ жартылай группаның жылжытуларын қарастырамыз.

Айталық, (9)-шы есептің барлық әлсіз шешімдерінен $u(s), s \in \mathbb{R}$ тұратын шенелген кеңістіктегі $\mathcal{K}_\varepsilon$ өзегін білдіреді,

$$\mathcal{F}^b = L_\infty^b(\mathbb{R}; H) \cap L_2^b(\mathbb{R}; V) \cap L_{2l+1}^b(\mathbb{R}; L_{2(l+1)}(\Omega)).$$

Бұл лемманың дәлелдеуі [24] және [18] ескере отырып, дербес жағдай үшін келтірілген [19] дәлелдеумен толығымен сәйкес келетіні туралы тұжырымдама бар.

Лемма 2. (9)-шы есептің Θ_+^{loc} топологиялық кеңістігінде $\mathcal{U}_\varepsilon$ траекториялық аттракторы бар. $\mathcal{U}_\varepsilon$ жиыны бірқалыпты ($\varepsilon \in (0, 1)$ – де) $\mathcal{F}_+^b$ кеңістігінде шенелген және Θ_+^{loc} топологиясында компактiлi. Әрі қарай,

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

мұнда (9) есебінің $\mathcal{K}_\varepsilon$ өзегі $\mathcal{F}^b$ кеңістігіне ($\varepsilon \in (0, 1)$ – де) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы, $\mathcal{F}_+^b$ кеңістігі және Θ_+^{loc} топологиясы кіші параметр ε -ға тәуелді болатынын ескереміз.

Негізгі нәтижелерді алу үшін «бөгде мүше» (потенциал) пайда болатын орташаланған Чэфи-Инфанте теңдеуін шығарып аламыз және берілген теңдеудің траекториялық аттракторлары әлсіз мағынада орташаланған теңдеудің траекториялық аттракторларына ұмтылатынын дәлелдейміз. Коэффициенттерге қосымша шарттар қойылған жағдайда, глобалдық аттрактордың да жинақталуы қолданылады.

Нәтижелер мен талқылау

Бұл бөлімде $\varepsilon \rightarrow 0$ кездегі перфорацияланған Ω_ε облысындағы Чэфи-Инфанте теңдеулерінің траекториялық аттракторлары $\mathcal{A}_\varepsilon$ -ның шектік жағдайын және олардың орташаланған теңдеудің траекториялық аттракторымен байланысын қарастырамыз.

Шектік теңдеудегі «бөгде мүше» (потенциалды) анықтау үшін келесідей көмекші есептер қарастырылады:

Потенциалды анықтау үшін көмекші есеп:

$$\begin{cases} -\Delta_y v(x, y) = 0, & y \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_y}(x, y) + q(x, y)v(x, y) = q(x, y), & y \in \partial G_0, \\ v(x, y) \rightarrow 0, & |y| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

Мұнда, x – баяу айнымалы.

Шектік потенциал төмендегідей түрде анықталады:

$$V(x) = \int_{\partial G_0} \frac{\partial v}{\partial \nu_y}(x, y) d\sigma_y.$$

Ішкі потенциал $V(x)$ – перфорацияланған облыстың микроструктуралық әсерін сипаттайтын коэффициент. Ол шектік есепте қосымша «бөгде мүше» ретінде шығады және бастапқы Чэфи-Инфанте теңдеуіндегі перфорациялардың әсерін модельдейді.

Орташаланған теңдеу келесідей түрде жазылады:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \sum_{j=0}^N \bar{b}_j(x) u^j - V(x)u + g(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = U(x), & t = 0, \end{cases} \quad (18)$$

Мұндағы $\bar{b}_j(x)$ -орташаланған коэффициенттер. $V(x)u$ – перфорацияланған микрошекарадан туындайтын ішкі диссипация немесе потенциалдық тежеліс.

(18)-ші есептің Θ_+^{loc} топологиялық кеңістігінде $\mathcal{U}_\varepsilon$ траекториялық аттракторы бар. $\mathcal{U}_\varepsilon$ жиыны $\mathcal{F}_+^b$ кеңістігінде ($\varepsilon \in (0, 1)$ – де) бірқалыпты шенелген және Θ_+^{loc} топологиясында компактiлi. Әрi қарай,

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

мұнда (18) есебiнiң $\mathcal{K}_\varepsilon$ өзегi – $\mathcal{F}_+^b$ кеңістігі ($\varepsilon \in (0, 1)$ – де) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Көмекші есептер:

Келесі шексіз $t \in \mathbb{R}$ уақыт аралығында берілген есепті қарастырайық: $u_{\varepsilon_k}(s)$, мұндағы $s \in \mathbb{R}$ келесідей есептің шешімі болсын:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial t} = \Delta u_{\varepsilon_k} - \sum_{j=0}^N b_j\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k}^j + g(x), & x \in \Omega_{\varepsilon_k}, t > 0 \\ \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} + \varepsilon_k^{\theta-1} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) u_{\varepsilon_k} = 0, & x \in S_{\varepsilon_k}, t > 0, \\ u_{\varepsilon_k} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u_{\varepsilon_k} = U(x), & x \in \Omega_{\varepsilon_k}, t = 0, \end{cases} \quad (19)$$

Шешімнің ε -ке біртекті бағалаулар алу үшін біз келесі леммаларды қолданамыз (қараңыз [21, III-тарау, § 5] және [18]).

Лемма 3. Егер

$$W(f, g) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla f(x) \nabla g(x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} q(x) f(x) g(x) dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} r(x) f(x) g(x) ds \quad (20)$$

екі сызықты форма V_ε кеңістігінде анықталған болса және $q(x) \geq 0, r(x) \geq 0$ ($q(x) \not\equiv 0$ немесе $r(x) \not\equiv 0$), онда $W(f, g)$ ішкі көбейтінді анықтайды және ол

$$(f, g)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla f(x) \nabla g(x) + f(x)g(x)) \, dx$$

көбейтіндісіне эквивалентті.

Дәлелдеуі. Функционал $W(f, g)$ айқын түрде симметриялы және екі сызықты. Сонымен қатар, $W(f, f) \geq 0$. Егер $f \equiv 0$ болмаса, онда $q(x)$ немесе $r(x)$ о болғандықтан, $W(f, f) > 0$. Осылайша, $W(f, g)$ V_ε кеңістігінде ішкі көбейтінді анықтайды. Эквиваленттілік стандартты Пуанкаре типті теңсіздіктер арқылы дәлелденеді ([15] қараңыз).

Лемма 4. (18) есебінің коэрцитивтігі бастапқы (9) есептің коэрцитивтігін қамтамасыз етеді.

Осыдан, интегралдық теңсіздік (14) және Леммалар 1, 3, 4 көмегімен мына бағалауларды аламыз:

$$\|u_{\varepsilon k}\|_{\mathcal{F}^b} \leq C, k \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

мұндағы константа C ε -ке тәуелсіз.

Толық дәлелдеулері [15] келтірілген.

Лемма 5. Барлық $\varphi(x) \in H_\varepsilon$ және t үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left| \frac{n}{\varepsilon^{n-2}} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{\partial G_\varepsilon^j} b \left(x, \frac{x - p_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}} \right) \varphi(x) \, ds - \int_{\Omega} V(x) \varphi(x) \, dx \right| \leq M \varepsilon \|\varphi\|_{H_\varepsilon}, \quad (22)$$

мұндағы M константасы ε -ке тәуелсіз.

Дәлелдеуі. (22) теңсіздіктің дәлелденуі [18]-тегі (21) леммаға сүйене отырып дәлелденеді. ([18] қараңыз.)

(22) жинақталуын алу үшін $u_\varepsilon(x, t)$ -ні (14) теңдікте сынақ функция ретінде қойып, шенелгендікті $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде аламыз.

$u_\varepsilon(x, t)$ функциясын (14) теңдеудегі тесттік функция ретінде қою арқылы келесі біртекті шектеулер алынады:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{H_\varepsilon} \leq K,$$

Сондай-ақ,

$$\sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{\partial G_\varepsilon^j} b \left(x, \frac{x - p_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}} \right) u_\varepsilon(x, t) \psi(x) \, d\sigma \leq K \varepsilon^{\frac{n}{n-2}},$$

Мұндағы, K - ε -ден тәуелсіз тұрақты.

[17]-тегі 4 және 5 леммаларды, сондай-ақ $h_\varepsilon(x) \rightarrow h(x)$ әлсіз жинақталуын V кеңістігінде $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде қолдану арқылы шектік жағдайға көшу мүмкіндігі орындалады.

$k \rightarrow \infty$ кезінде (19) нөмірлі есептің теңдеуінде шекке өте отырып, кеңістік $D'(\mathbb{R}_+; H^{-r})$ – де Лемма 5-тің дәлелдеуін және (22)-ші формуланы пайдалана отырып $\bar{u}(x, s)$ функциясы келесі есептің шешімі болатыны дәлелденеді:

$k \rightarrow \infty$ болғандағы перфорацияланған Ω_ε облысындағы есеп:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \Delta u_\varepsilon - \sum_{j=0}^N b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon^j + g(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\theta q \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \partial\Omega, t = 0, \end{cases} \quad (23)$$

орташалау және жинақталу арқылы келесі шектік есепке ауысады:

$$u(x, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_k}(x, s). \quad (24)$$

Орташаланған (шектік) есеп мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \sum_{j=0}^N \bar{b}_j u^j + g(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \bar{q}(x)u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = U(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (25)$$

Мұндағы, $\bar{b}_j$ – орташаланған (шектік) коэффициенттер мен функциялар. $\bar{q}(x)u$ – шектік теңдеуде «бөгде мүше» ретінде көрінетін, перфорацияланған микрошекаралық әсерді есепке алатын шекаралық потенциал.

Демек,

$$u(x, s) \in \mathcal{K}.$$

Төмендегідей келтірілген дәлелдеулерге сәйкес Θ_+^{loc} кеңістігінде:

$$u_{\varepsilon_k}(x, s) \rightarrow u(x, s) \quad k \rightarrow \infty \text{ үшін}$$

Тұжырым 1. Егер

$$u_{\varepsilon_k}(x, s) \notin \mathcal{O}'(\mathcal{K}) \text{ болса, онда} \\ u(x, s) \notin \mathcal{O}'(\mathcal{K})$$

және тіпті, $u(x, s) \notin \mathcal{K}$, болады, бұл алдыңғы тұжырымға қайшы келеді.

Тұжырым 2. $\mathcal{U}_\varepsilon$ және $\overline{\mathcal{U}}$ траекториялық аттракторлары $\varepsilon > 0$ -да $L_\infty(\mathbb{R}; L_\infty(\Omega)) = L_\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ кеңістіктерінде бірқалыпты шенелген.

Дәлелдеуін қараңыз [8; т. IV, 6.2 тұжырым].

Бізге кейбір қосымша анықтамалар мен белгілеулер қажет болады.

Төмендегідей белгілеулер енгізейік: $Q_T = \Omega \times]T, T + 1[, T \in \mathbb{R}$, биіктігі 1-ге тең цилиндр.

(9) және (25) теңдеулерінің әлсіз шешімдерін $u(x, t)$ қарастырамыз, мұнда

$$u(x, s) \in W_p^r(Q_T) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0\} \equiv W_{p,0}^r(Q_T) \quad \forall T \in \mathbb{R}$$

Мұндағы, $r = (2, \dots, 2, 1)$, ал $W_p^r(Q_T)$ – Никольский кеңістігін білдіреді. Айта кетелік, $W_p^r(Q_T)$ нормасын мына өрнекпен белгіленеді:

$$\|u, Q_T\|_{r,p}^p = \int_{Q_T} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial_x^\alpha u(x, s)|^p + |\partial_t u(x, s)|^p \right) dx ds$$

Никольскийдің енгізулер теоремасы төмендегідей тұжырымдалады (кр. [18]):

Егер $p > (n+2)/2$, онда

$$W_{p,0}^r(Q_T) \subseteq C^{\kappa r}(\bar{Q}_T) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0\} \equiv C_0^{\kappa r}(\bar{Q}_T) \quad (26)$$

Мұндағы, $0 < \kappa < 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n}{2}\right)$.

Демек, бекітілген $\delta, 0 < \delta < 1$ үшін, (26)-тен шығады, $\kappa = 1 - \delta$ үшін төмендегідей компактiлі енгізулер орындалады:

$$W_{p,0}^r(Q_T) \subseteq C_0^{2-2\delta, 1-\delta}(\bar{Q}_T) \quad \text{үшін } p > \frac{n+2}{2\delta}. \quad (27)$$

Бізге келесідей Солонников теоремасы қажет болады ([19]). Төмендегідей белгілеулер енгізейік $W_{2,0}^r(Q_0), Q_0 = \Omega \times]0, 1[$ функцияларының V_0 кеңістігіндегі $\{t = 0\}$ -гі іздері.

Егер $w(x, t) \in L_\infty(0, 1; L_\infty(\Omega)) \cap L_2(0, 1; H_0^1(\Omega))$ функциясы жылу өткізгіштік теңдеуінің шешімі болсын:

$$\partial_t w - \Delta w = h(x, t), (x, t) \in Q_0,$$

және бастапқы шартты қанағаттандырса

$$w|_{t=0} = w_0(x).$$

$h(x, t) \in L_\infty(0, 1; L_\infty(\Omega)) \equiv L_\infty(Q_0)$ және $w_0 \in V_0$ болжайық. Онда $w(x, t) \in W_{2,0}^r(Q_0)$ және

$$\|w, Q_0\|_{r,p} \leq C_p \left(\|h\|_{L_p(Q_0)} + \|w_0\|_{V_0} \right). \quad (28)$$

$\mathcal{W}_n^{\text{loc}}$ кеңістігін келесідей функциямен $v(x, s)$ анықталады, егер

$$\Pi_{T, T+1} v(x, s) \in W_{p,0}^r(Q_T) \quad \forall T \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Әдеттегідей, $\mathcal{W}_n^b \subset \mathcal{W}_n^{\text{loc}}$ кеңістігі төмендегідей нормамен анықталады:

$$\|v\|_{\mathcal{W}_p^b} = \sup_{T \in \mathbb{R}} \|\Pi_{T, T+1} v, Q_T\|_{r,p}. \quad (30)$$

Соңында, $\mathcal{W}_{p,w}^{\text{loc}} - \mathcal{W}_p^{\text{loc}}$ кеңістігі, бірақ, онда кез келген $T \in \mathbb{R}$ үшін $W_{p,0}^r(Q_T)$ бойынша локалды әлсіз топологияда жинақталады. (27)-тен төмендегі шығады:

$$\Theta^{\text{loc}} \in C_{0,\text{loc}}^{2-2\delta, 1-\delta}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \text{ для } p > \frac{n+2}{2\delta} \quad (31)$$

Чэфи-Инфанте бастапқы-шекаралық есебі үшін аттракторлардың жинақталуы туралы негізгі теорема төмендегідей түрде тұжырымдалады:

Теорема 3. $\varepsilon > 0$ –да (9)-шы теңдеуінің $\mathcal{A}_\varepsilon$ траекториялық аттракторы бірқалыпты $\mathcal{W}_p^b$ –де шенелген және $\mathcal{W}_{p,w}^{\text{loc}}$ –де $\varepsilon \rightarrow 0 +$ ұмтылғанда $\mathcal{A}_\varepsilon$ аттракторы (25)-ші теңдеудің $\overline{\mathcal{A}}$ траекториялық аттракторына жинақталады. Атап айтқанда, (31)-ші енгізулерден шығады

$$\text{dist}_{C^{2-2\delta, 1-\delta}(\bar{\Omega} \times [0, M])}(\Pi_M \mathcal{A}_\varepsilon, \Pi_M \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \quad \forall M > 0. \quad (32)$$

Дәлелдеуі. $u \in \mathcal{K}_\varepsilon$ және $\bar{u} \in \overline{\mathcal{K}}$ болсын. 2-ші тұжырымдаудан және $|f(v, z)| \leq C_1(|v|^{p-1} + 1) \quad \forall v \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$ теңсіздіктен төмендегідей теңдеулердің оң жақ бөліктері шығады:

$$\partial_t u - \Delta u = -b\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (33)$$

$$\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} = -\bar{b}(\bar{u}), \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (34)$$

$\varepsilon > 0$ –да бірқалыпты $L_\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ -де шенеледі. Сондықтан $\mathcal{K}_\varepsilon$ және $\overline{\mathcal{K}}$ ядролары мына жиынға жатады:

$$B_0 = \left\{ u: \|u\|_{\mathcal{W}_p^b} \leq R_0 \right\}, \quad (35)$$

мұндағы R_0 ε –нан тәуелсіз. Шынында да, (33) теңдеуін кесілген монотонды функцияға көбейтейік: $\Phi_T(t) = \Phi(t - T)$, мұнда $\Phi(s) \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $\Phi(s) = 0$ егер $s \leq -1$ және $\Phi(s) = 1$ егер $s \geq 0$. Енді $T \geq 1$ болсын. Төмендегідей теңдікті аламыз:

$$\partial_t (\Phi_T u) - \Delta (\Phi_T u) = -\Phi_T f\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \Phi'_T u. \quad (36)$$

Себебі $\Phi_T(t)u(x, t) \equiv 0$ егер $t = T - 1$, онда Солонниковтың (28) бағалауын $Q_{T-1, T+1} = \Omega \times]T - 1, T + 1[$ облысында қолдануға болады, нәтижесінде мына теңсіздік шығады:

$$\begin{aligned} & \|u, Q_T\|_{r,p} \\ & \leq \|\Phi_T u, Q_{T-1, T+1}\|_{r,p} \leq C_p \left\| -\Phi_T f\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \Phi'_T u \right\|_{L_p(Q_{T-1, T+1})} \leq R_0 \quad \forall T \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Демек, B_0 жиыны (35) $\mathcal{K}_\varepsilon$ және $\overline{\mathcal{K}}$ –ті қамтиды. B_0 жиыны $\mathcal{W}_{p,w}^{\text{loc}}$ –та компактiлi болғандықтан, стандартты пайымдауларды қолданып, $\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$ екенін аламыз, мұнда $\varepsilon \rightarrow 0 +$ кезінде $sW_{p,w}^r(\Omega \times]-M, M[)$ –де, демек, $\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ $\varepsilon \rightarrow 0 +$ да $W_{p,w}^r(\Omega \times]0, M[)$ –де орындалады, кез келген $M > 0$ үшін. Атап айтқанда, (32) орындалады.

Есептің жалғыз шешімі болған кезде Теорема 3-тен төмендегі Салдар 3 шығады:

Салдар 3: (9) және (25) теңдеулерінің $\mathcal{A}_\varepsilon$ және $\overline{\mathcal{A}}$ глобалды аттракторлары $C^{2-\delta}(\bar{\Omega})$ кеңістігінде жатады және

$$\text{dist}_{C^{2-\delta}(\bar{\Omega})}(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \quad \forall \delta \in]0, 1].$$

Глобалды аттракторлар туралы толығырақ мәліметті [10, 6, 21] әдебиеттерден табуға болады.

Қорытынды

Бұл жұмыста ε параметріне тәуелді перфорацияланған облыстағы Чэфи-Инфанте теңдеуі үшін анықталған траекториялық аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ -ның $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде әлсіз мағынада тиісті функционалдық кеңістіктегі орташаланған теңдеудің траекториялық аттракторына $\mathcal{A}$ жинақталатыны дәлелденді. Сонымен қатар, теңдеу коэффициенттеріне белгілі бір қосымша шарттар орындалған жағдайда глобалдық аттракторлардың да жинақталуы көрсетілді. Алынған нәтижелер – жаңа.

Жұмыста келесі негізгі нәтижелер алынды:

1. Перфорацияланған облыстағы Чэфи-Инфанте теңдеуінің орташаланған шектік есебі алынды;
2. Біртекті бағалаулар үшін көмекші леммалар тұжырымдалды;
3. Шектік теңдеудегі «бөгде мүше» (потенциалды) анықтау үшін көмекші есептер қарастырылды;
4. Чэфи-Инфанте теңдеуі үшін анықталған траекториялық аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ -ның $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде әлсіз мағынада тиісті функционалдық кеңістіктегі орташаланған теңдеудің траекториялық аттракторына $\mathcal{A}$ жинақталатыны дәлелденді.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (Грант №AP22684340) қаржыландырады. Авторлар құнды пікірталастар үшін ф.-м.ғ.д., профессор К.А. Бекмаганбетов пен ф.-м.ғ.д., профессор Г.А. Чечкинге алғысын білдіреді.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Bekmaganbetov, K.A., Chechkin, G.A., Chepyzhov, V.V. Attractors and a 'strange term' in homogenized equation. *C R Mec.*, 348(5), 351–359 (2020). <https://doi.org/10.5802/crmeca.15>
- 2 Bekmaganbetov, K.A., Chechkin, G.A., Chepyzhov, V.V. 'Strange term' in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain. *Chaos Solit Fractals.*, 140, Article ID 110208 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110208>
- 3 Belyaev, A.G., Piatnitski, A.L., Chechkin, G.A. Asymptotic behavior of solution for boundary-value problem in a perforated domain with oscillating boundary. *Sib Math J.*, 39(4), 730–754 (1998). <https://doi.org/10.1007/BF02677919>
- 4 Cioranescu, D., Murat, F. Un terme étrange venu d'ailleurs I & II. In: Berzis H, Lions JL, editors. *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar, Volume II & III. Research Notes in Mathematics*, 60 & 70, London: Pitman; 1982, pp. 98–138 & 154–178.
- 5 Marchenko, V.A., Khruslov, E.Y. *Boundary value problems in domains with fine-grain boundary*. Kiev: Naukova Dumka, 1974.
- 6 Chechkin, G.A., Piatnitski, A.L., Shamaev, A.S. *Homogenization: methods and applications*. Providence (RI): American Mathematical Society, 2007. ISBN: 978-0-8218-4309-6
- 7 Jikov, V.V., Kozlov, S.M., Oleinik, O.A. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Berlin: Springer, 1994. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-84659-5>
- 8 Sanchez-Palencia, É. *Homogenization techniques for composite media*. Berlin: Springer, 1987. <https://doi.org/10.1007/3-540-17616-0>
- 9 Babin, A.V., Vishik, M.I. *Attractors of evolution equations*. Amsterdam: Elsevier, 1992. [https://doi.org/10.1016/S0168-2024\(08\)70270-4](https://doi.org/10.1016/S0168-2024(08)70270-4)
- 10 Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I. *Attractors for equations of mathematical physics*. Providence (RI): American Mathematical Society, 2002. <https://doi.org/10.1051/cocv:2002056>

- 11 Temam, R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York (NY): Springer, 1988. (Applied Mathematics Series; 68). <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0313-8>
- 12 Efendiev, M., Zelik, S. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 19, 961–989 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0294-1449\(02\)00115-4](https://doi.org/10.1016/S0294-1449(02)00115-4)
- 13 Ilyin, A.A. Averaging principle for dissipative dynamical systems with rapidly oscillating right-hand sides. *Sb Math.*, 187, 635–677 (1996). <https://doi.org/10.1070/SM1996v187n05ABEH000126>
- 14 Chechkin, G.A., Chepyzhov, V.V., Pankratov, L.S. Homogenization of trajectory attractors of Ginzburg-Landau equations with randomly oscillating terms. *Discrete Continuous Dyn Syst Ser B.*, 23(3), 1133–1154 (2018). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018145>
- 15 Belyaev, A.G., Piatnitski, A.L., Chechkin, G.A. Averaging in a perforated domain with an oscillating third boundary condition. *Sb Math.*, 192(7), 933–949 (2001). <https://doi.org/10.1070/SM2001v192n07ABEH000576>
- 16 Lions, J.-L. Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, GauthierVillars, 1969. <https://www.scribd.com/document/482201537/96314508>
- 17 Diaz, J.I., Gomez-Castro, D., Shaposhnikova, T.A., et al. Classification of homogenized limits of diffusion problems with spatially dependent reaction over critical-size particles. *Appl Anal.*, 98(1–2), 232–255 (2018). <https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1441997>
- 18 Chechkin, G.A., Piatnitski, A.L. Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain. *Appl Anal.*, 71(1–4), 215–235 (1999). <https://doi.org/10.1080/00036819908840714>
- 19 Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I. Trajectory attractors for reaction-diffusion systems. *Top Meth Nonlinear Anal J Julius Schauder Center.*, 7(1), 49–76 (1996). <https://doi.org/10.12775/TMNA.1996.002>
- 20 Chepyzhov, V.V., Goritsky, A.Y., Vishik, M.I. Integral manifolds and attractors with exponential rate for nonautonomous hyperbolic equations with dissipation. *Russ J Math Phys.*, 12, 17–39 (2005).
- 21 Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I., Wendland, W.L. On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor and some averaging. *Discrete Contin Dyn Syst.*, 12, 27–38 (2005). <https://doi.org/10.3934/dcds.2005.12.27>
- 22 Vishik, M.I., Chepyzhov, V.V. Approximation of trajectories lying on a global attractor of a hyperbolic equation with an exterior force that oscillates rapidly over time. *Sb Math.*, 194, 1273–1300 (2003). <https://doi.org/10.1070/SM2003v194n09ABEH000765>
- 23 Chueshov, I., Schmalfuß, B. Averaging of Attractors and Inertial Manifolds for Parabolic PDEs with Random Coefficients. *Applied Mathematics and Optimization*, 2005 (5), 461–492, 10.1515/ans-2005-0402
- 24 Carvalho, A.N., Langa, J.A., Robinson, J.C. Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems. Springer, 2013. V. 182. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4581-4>
- 25 Solonnikov, V.A. On the boundary-value problems for linear parabolic systems of differential equations of the general type. *Trudi MIAN.* 1965. V.83.

^{1*}**Toleubay A.M.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0002-5490-8212,

*e-mail: altyn.15.94@mail.ru

²**Karipova A.T.,**

PhD student, ORCIDID: 0009-0008-7837-1801,

e-mail: karipova-aidana@mail.ru

¹«Shakarim University» NJSC, Semey, Kazakhstan

²L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

HOMOGENIZATION OF ATTRACTORS OF THE CHAFEE–INFANTE EQUATIONS IN A PERFORATED DOMAIN

Abstract

This work addresses the averaging problem for the Chafee–Infante equation in a micro-heterogeneous medium. It analyzes the equation with rapidly oscillating terms and dissipation. The model introduces a small parameter and formulates an averaged problem based on its limits. The study proves that the trajectory attractors of

the original equation converge to those of the averaged equation. It establishes the relevant theorem. In cases with unique solutions, it investigates the convergence of global attractors, adding further conditions on the nonlinear terms. The work also analyzes singular problems with nontrivial boundary conditions in perforated domains and on cavity boundaries. Here, the averaged equation differs from the original, reflecting the model's effective averaged characteristics and possibly an extra potential term. As the small parameter approaches zero, the study shows that the attractors converge in Hausdorff distance. The main result is that the attractors of the original Chafee–Infante equation converge to those of the averaged (limit) equation as the small parameter approaches zero. This work establishes this convergence for the first time in the context of homogenization in a periodically perforated medium, highlighting the scientific novelty and relevance of the findings. This research advances averaging methods for differential operators and may apply to solutions of nonlinear differential equations.

Keywords: Chafee-Infante equations, porous medium, attractors, perforated domain, homogenization.

^{1*}**Толеубай А.М.,**
PhD, ORCIDID: 0000-0002-5490-8212,
*e-mail: altyn.15.94@mail.ru
²**Карипова А.Т.,**
докторант, ORCIDID: 0009-0008-7837-1801,
e-mail: karipova-aidana@mail.ru

¹НАО «Шәкәрім университет», г. Семей, Казахстан

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ УРАВНЕНИЙ ЧЭФИ-ИНФАНТЕ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация

В данной работе рассматривается задача усреднения уравнения Чэфи-Инфанте в микронеоднородной среде. В ходе исследования подробно анализируются уравнения Чэфи-Инфанте с быстро осциллирующими членами и диссипацией. В модель вводится+ малый параметр, и в зависимости от его предельных значений формулируется усредненная (предельная) задача. Доказывается, что траекторные аттракторы исходного уравнения сходятся к аттракторам усредненного уравнения, и формулируется соответствующая теорема. Кроме того, показано, что при условиях единственности решений имеет место сходимость глобальных аттракторов, что достигается при наложении дополнительных условий на нелинейные члены. В работе также изучаются сингулярные задачи с нетривиальными граничными условиями в перфорированных областях и на границах их полостей. В этом случае получаемое усредненное (предельное) уравнение имеет иную структуру по сравнению с исходным. Оно отражает эффективные средние характеристики модели и может включать дополнительный потенциальный член. Доказано, что при стремлении малого параметра к нулю аттракторы сходятся в смысле Хаусдорфа. В качестве основного результата описаны усредненные аттракторы и показано, что аттракторы исходной системы стремятся к аттракторам предельного уравнения. В данной работе впервые рассматривается задача усреднения уравнений Чафе–Инфанте в периодически перфорированной среде, обосновываются научная новизна и актуальность полученных результатов. Данное исследование вносит вклад в развитие методов теории усреднения дифференциальных операторов и может найти применение при изучении решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: уравнения Чафе–Инфанте, пористая среда, аттракторы, перфорированная область, усреднение.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 12.09.2025