УДК 517.5
МРНТИ 27.39.29

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-4-313-323

[1]*Басаров С.Ж.,
магистр, м.н.с., ORCID ID: 0000-0001-5422-2424,
*e-mail: bassarov.serzhan98@gmail.com
[2]Нурсултанов Е.Д.,
д.ф.-м.н., профессор, ORCID ID: 0000-0003-3879-2261,
e-mail: er-nurs@yandex.kz

[1]ТОО «Geometry», г. Астана, Казахстан
[2]Казахстанский филиал Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, г. Астана, Казахстан

ВОССТАНАВЛИВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация

Линейная аппроксимация – это приближение функции из некоторого класса элементами фиксированного конечного подпространства этого же класса. Например, для одномерных периодических функций такими элементами служат тригонометрические полиномы. В интересующем нас многомерном случае для функций, периодических по каждой переменной, в качестве такого подпространства выступает множество тригонометрических полиномов со спектром из ступенчатого гиперболического креста. При этом возникает вопрос выбора коэффициентов для этих полиномов. В данной статье представлен аппарат, восстанавливающий функции из пространств Соболева с доминирующей смешанной производной по заданным точкам и получены оценки погрешности восстановления. Метод основан на построении восстанавливающей функции в виде полинома со спектром из ступенчатого гиперболического креста, коэффициенты которого вычисляются по заданным точкам. Погрешность приближения имеет порядок ортопоперечника, что является оптимальным результатом для таких полиномов. Предложенный метод точен для полиномов со спектром из ступенчатого гиперболического креста. Также получен функционал, восстанавливающий коэффициенты Фурье для функций из указанных пространств. Благодаря явному выражению восстанавливающей функции полученная формула может быть использована для решения прикладных задач.

Ключевые слова: много переменных, теория функций, пространство Соболева, смешанная производная, гиперболический крест.

Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}, 1 \le q < \infty$. Пространство Лебега $L_q = L_q[0,1]^n$ будем называть множество измеримых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых

$$\|f\|_{L_q} = \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_n)|^q dx_1 \dots dx_n \right)^{1/q} < \infty.$$

В случае $q = \infty$:

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess} \sup_{x \in [0,1]^n} |f(x_1, \dots, x_n)| < \infty.$$

Определение 1. Пусть $\alpha > 0, 1 \le q \le \infty$. Пространство Соболева $W_q^\alpha = W_q^\alpha[0,1]^n$ с доминирующей смешанной производной будем называть множеством измеримых функций f таких, что ряд Фурье функции $f^\alpha \in L_q$ (производная по Вейлю) совпадает с рядом $\sum_{k \in Z^n} \overline{k^\alpha} \hat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)}$, где $\overline{k^\alpha} = \prod_{j=1}^n \overline{k_j^\alpha}$, $\overline{k_j^\alpha} = \max(|k_j^\alpha|, 1)$, $\hat{f}(k)$ – коэффициент Фурье функции f, $(k, x) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$. К тому же норма определяется следующим образом:

$$\|f\|_{W_q^\alpha} = \|f^\alpha\|_{L_q}.$$

Определение 2. [1] Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $p > 1$ – простое. Множество

$$G_m = \bigcup_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_n \le m,\\ \nu_j=0,\dots m}} \rho(\nu_1, \dots, \nu_n),$$

$$\rho(\nu_1, \dots, \nu_n) = \{(\mu_1, \dots \mu_n) \in \mathbb{Z}^n : [p^{\nu_j - 1}] \le |\mu_j| < p^{\nu_j}, j = 1, \dots n\}$$

будем называть ступенчатый гиперболический крест.

Определение 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $p > 1$ – простое. Функцию

$$S_{G_m}(x; f) = \sum_{\mu \in G_m} \hat{f}(\mu) e^{2\pi i (\mu, x)}$$

будем называть полиномом со спектром из ступенчатого гиперболического креста.

Примечание. Особенность этих полиномов в том, что их погрешности достигают по порядку ортопоперечника для пространств с доминирующей смешанной производной (см. теорему А. ниже) – в частности, для пространств Соболева. Полиномов такого вида можно рассматривать как аналог одномерной частной суммы ряда Фурье, но только для многомерных.

Определение 4. [2] Пусть H – нормированный класс функций, $\{u_j\}_{j=1}^M$ – ортонормальная система и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Определим ортопоперечник как величину

$$\varphi_M(H)_q = \inf_{u_1, \dots, u_M} \sup_{f \in H} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} \langle f, u_j \rangle u_j \right\|_{L_q}.$$

Теорема А. [2-7] Пусть $p > 1$ – простое, $1 < q \le \tau < \infty, \alpha > 1/q - 1/\tau$. Тогда

$$\varphi_M(W_q^\alpha)_\tau \asymp E_{G_m}(W_q^\alpha)_\tau \asymp \frac{1}{p^{\left(\alpha - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau}\right)m}} \asymp \left(\frac{\log^{n-1} M}{M}\right)^{\alpha - 1/q + 1/\tau},$$

где $M \asymp m^{n-1} p^m$, $E_{G_m}(W_q^\alpha)_\tau = \inf_{t \in T(G_m)} \sup_{\|f\|_{W_q^\alpha} = 1} \|f - t\|_{L_\tau}$, $T(G_m)$ – множество полиномов со спектром из ступенчатого гиперболического креста.

Цель данной статьи – получить погрешность восстанавливающей функции для пространств Соболева W_q^α. А именно получить оценку

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha} = 1} \|f - F_m(\cdot; f)\|_{L_\tau} \asymp g(m),$$

где $F_m(x; f)$ – восстанавливающая функция, $g(m) \to 0$ при $m \to \infty$, константы, входящие в неравенства, не зависят от f, m.

Задача о восстановлении функции имеет богатую историю. С прошлого столетия было опубликовано много работ по этому вопросу, которые сделали значительный прогресс в области теории аппроксимации. В частности, для задач о восстановлении функции для пространств с доминирующей смешанной производной алгоритм Смоляка достигает по порядку ортопоперечника [8–16, а также ссылки, приведенные в них], что является оптимальным для параметров $1 < q < \tau < \infty$. В работе [17] была приведена восстанавливающая функция для пространств Соболева, используя техники гармонического анализа (для полного списка результатов и истории развития по теме восстановления функции см. обзор [18]).

Материалы и методы

Приведем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. [19] Пусть $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}^n$, $B = B_1 \times \ldots \times B_n \in \mathbb{Z}^n$ – сегмент, $d_j > |B_j|, j = 1, \ldots, n$,

$$I = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^n} (B_1 + r_1 d_1) \times \ldots \times (B_n + r_n d_n).$$

Если $f \in L_1[0,1]^n$ и $f(x) \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(r) e^{2\pi i (r,x)}$, тогда для функции

$$\frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_n} \sum_{s_1=0}^{d_1-1} \ldots \sum_{s_n=0}^{d_n-1} f\left(x_1 + \frac{s_1}{d_1}, \ldots x_n + \frac{s_n}{d_n}\right) D_B\left(\frac{s_1}{d_1}, \ldots \frac{s_n}{d_n}\right),$$

где $D_B(x) = \sum_{k \in B} e^{-2\pi i (k,x)}$ – ядро Дирихле по сегменту B ее рядом Фурье является

$$\sum_{r \in I} \hat{f}(r) e^{2\pi i (r,x)}.$$

Лемма 2. [20, Лемма 4.3] Пусть $p > 1$—простое, $b = \{b_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l_1$. Тогда

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{p^{k-1}(pr+j)}.$$

Следствие 1. [20, Лемма 4.4] Пусть $p > 1$—простое, $b = \{b_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l_1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{\operatorname{sign} k}}{(p-1)^{1-\operatorname{sign} k}} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{p^{k-1}(pr+j)} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_{p^m r}.$$

Результаты и обсуждения

Рассмотрим следующий функционал

$$T_{m,\nu}(f) = T_{m,\nu}(f; p)$$
$$= \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\cdots k_n+\nu_n=m, \\ k_j=0,\ldots m}} \sum_{r_1=0}^{p^{k_1+\nu_1}-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{p^{k_n+\nu_n}-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{l=1}^{p-1} e^{2\pi i \left(\frac{2lr_j}{p} + \operatorname{sign} k_j\right)}}{(p-1)^{1-\operatorname{sign} k_j}} f\left(\frac{r_1}{p^{k_1+\nu_1}}, \ldots \frac{r_n}{p^{k_n+\nu_n}}\right),$$

где $p > 1$—простое, $m \in \mathbb{N}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n = \{0, 1, \ldots\}^n$, $\nu_1 + \cdots + \nu_n \leq m$.

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}, f \in L_1[0,1]^n$ и ряд Фурье функции f абсолютно сходится. Тогда

$$T_{m,\nu}(f) = \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\cdots k_n+\nu_n=m, \\ k_j=0,\ldots m}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{\operatorname{sign} k_j}}{(p-1)^{1-\operatorname{sign} k_j}} \sum_{\beta_1=1}^{p-1} \ldots \sum_{\beta_{n-1}=1}^{p-1} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\big(p^{k_1-1}(pr_1$$
$$+ \operatorname{sign} k_1, \ldots, p^{k_{n-1}-1}(pr_{n-1} + \operatorname{sign} k_{n-1}), p^{k_n} r_n\big).$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично [20, лемма 4.2].

Лемма 4. Пусть $n \in \mathbb{N}, f \in L_1[0,1]^n$ и ряд Фурье функции f абсолютно сходится. Тогда

$$T_{m,\nu}(f) = \hat{f}(0, \dots 0) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\dots k_l+\nu_l+\dots+\nu_n=m,\\ k_{l+1}=\dots=k_n=0,\ k_j=0,\dots m}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{(-1)^{\operatorname{sign} k_j}}{(p-1)^{1-\operatorname{sign} k_j}} \sum_{\beta_1=1}^{p-1} \dots \sum_{\beta_{l-1}=1}^{p-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^l,\\ r_l\neq 0}} \hat{f}\big(p^{k_1-1}(pr_1 + \operatorname{sign} k_1), \dots, p^{k_{l-1}-1}(pr_{l-1} + \operatorname{sign} k_{l-1}), p^{k_l} r_l, 0, \dots 0\big).$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично [20, теорема 3.1].

Рассмотрим функционал

$$P_{m,\nu}(\mu; f) = T_{m,\nu}\left(f e^{2\pi i\left(\frac{r}{p^{k+\nu}},\cdot\right)}\right) = \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\dots k_n+\nu_n=m,\\ k_j=0,\dots m}} \sum_{r_1=0}^{p^{k_1+\nu_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{p^{k_n+\nu_n}-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{l=1}^{p-1} e^{2\pi i\left(\frac{2lr_j}{p}+\operatorname{sign} k_j\right)}}{(p-1)^{1-\operatorname{sign} k_j}} \times f\left(\frac{r_1}{p^{k_1+\nu_1}}, \dots \frac{r_n}{p^{k_n+\nu_n}}\right) e^{2\pi i\left(\frac{r_1\mu_1}{p^{k_1+\nu_1}}+\dots\frac{r_n\mu_n}{p^{k_n+\nu_n}}\right)},$$

где $p > 1$ – простое, $m \in \mathbb{N}, \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \nu_1 + \dots + \nu_n \le m, \mu \in \rho(\nu)$.

Из Леммы 4 следует выражение для функционала $P_{m,\nu}(\mu; f)$ в терминах коэффициентов Фурье (см. ниже).

Следствие 2. Пусть $p > 1$ – простое, $m, n \in \mathbb{N}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\nu_1 + \dots + \nu_n \le m$, $\mu \in \rho(\nu)$. Тогда

$$P_{m,\nu}(\mu; f) = \hat{f}(\mu_1, \dots \mu_n) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\dots k_l+\nu_l+\dots\nu_n=m,\\ k_j=0,\dots m,\ j=1,\dots l}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{(-1)^{\operatorname{sign} k_j}}{(p-1)^{1-\operatorname{sign} k_j}} \sum_{\beta_1=1}^{p-1} \dots \sum_{\beta_{l-1}=1}^{p-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^l,\\ r_l\neq 0}} \hat{f}\big(p^{k_1+\nu_1-1}(pr_1 + \beta_1 \operatorname{sign} k_1) + \mu_1, \dots, p^{k_{l-1}+\nu_{l-1}-1}(pr_{l-1} + \beta_{l-1} \operatorname{sign} k_{l-1}) + \mu_{l-1}, p^{k_l+\nu_l} r_l + \mu_l, \mu_{l+1}, \dots \mu_n\big).$$

Следствие 3. Пусть $p > 1$ – простое, $m, n \in \mathbb{N}$. И пусть $S_{G_m}(x) = S_{G_m}(x; f)$ – полином со спектром из ступенчатого гиперболического креста. Тогда

$$P_{m,\nu}(\mu; S_{G_m}) = \hat{f}(\mu), \qquad \mu \in \rho(\nu), \qquad \nu_1 + \dots + \nu_n \le m.$$

Доказательство. Из следствия 2 следует

$$P_{m,\nu}(\mu; S_{G_m}) = \hat{f}(\mu_1, \dots \mu_n) + R_m.$$

Однако множество ступенчатого гиперболического креста G_m и множество индексов коэффициентов Фурье, входящих в R_m, не имеют общих точек, т.е. коэффициенты Фурье функции S_{G_m} $\widehat{S_{G_m}}(\mu) = 0$, где μ взяты из R_m. Из чего следует $R_m = 0$.

Теорема 1. Пусть $p > 1$ – простое, $m, n \in \mathbb{N}, \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\nu|_1 = \nu_1 + \dots + \nu_n \le m$, $\mu \in \rho(\nu)$.

Если $1 \le q \le \infty, \alpha > 1/\tilde{q} = \max(1/q\,, 1/2)$, $f \in W_q^\alpha$. Тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha}=1} \left|\hat{f}(\mu_1, \dots \mu_n) - P_{m,\nu}(\mu; f)\right| \le c\frac{(\max(m - |\nu|_1, 1))^{\frac{n-1}{\tilde{q}}}}{p^{\alpha m}}. \quad (1)$$

В случае $2 \le q < \infty$:

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha}=1} \left|\hat{f}(\mu_1, \dots \mu_n) - P_{m,\nu}(\mu; f)\right| \asymp \frac{(\max(m - |\nu|_1, 1))^{\frac{n-1}{2}}}{p^{\alpha m}}, \quad (2)$$

где $A \asymp B$ означает $c_1 B \le A \le c_2 B$.

Определим функцию

Теорема 2. Пусть $p > 1$ – простое, $m, n \in \mathbb{N}$, $N \asymp m^{n-1}p^m$ – количество узлов сетки в $F_m(x; f)$.

Если $1 < q \le 2 < \tau < \infty$, $\alpha > 1/q$, то

$$F_m(x; f) = \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_n \le m,\\ \nu_i \in \mathbb{Z}_+,\ i=1,\dots,n}} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} P_{m,\nu}(\mu; f) e^{2\pi i(\mu, x)}. \quad (3)$$

Примечание. Идея поставить вместо коэффициентов Фурье частичной суммы функционал, основанный на значениях функции в некоторых точках, не новая. Альтернативным методом к формуле $F_m(x; f)$ является метод решеток [21] и приложение его к быстрому преобразованию Фурье [22, глава 8]. В работе [23] были получены верхние оценки погрешности восстанавливающей функции на методе решетках ранга-1 для пространств W_2^α в метрике L_2, которая близка к оптимальной с вероятностью $1 - 4/|\Gamma(R)|$, $\Gamma(R) = \{k \in \mathbb{Z}^n : \prod_{j=1}^n max(1, |k_j|) \le R\}$ – гиперболический крест.

Преимуществом функции $F_m(x; f)$ является простота формулы и то, что по порядку погрешность функции $F_m(x; f)$ совпадает с ортопоперечником.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся следствием 2.

$$\left|\hat{f}(\mu_1, \dots \mu_n) - P_{m,\nu}(\mu; f)\right| \le \sum_{k \in H_{m,\nu}} \left|\hat{f}(k)\right|,$$

где

$$H_{m,\nu,\mu} = \bigcup_{l=1}^{n} \bigcup_{\substack{k_1+\nu_1+\dots k_l+\nu_l+\dots \nu_n=m,\\ k_j=0,\dots m,\ j=1,\dots l}} \{(p^{k_1+\nu_1-1}(pr_1 + \beta_1 sign\, k_1) + \mu_1, \dots, p^{k_{l-1}+\nu_{l-1}-1}(pr_{l-1} + \beta_{l-1} sign\, k_{l-1}) + \mu_{l-1}, p^{k_l+\nu_l} r_l + \mu_l, \mu_{l+1}, \dots \mu_n) : \mu \in \rho(\nu), \beta_j = 1, \dots p-1, = 1, \dots l-1\}.$$

Пусть $\bar{t} = max(|t|, 1)$ и $1 < q \le \infty$. Применим неравенство Гельдера, неравенство Хаусдорфа-Юнга и свойство пространств Лебега соответственно

$$\left|\hat{f}(\mu_1, \dots \mu_n) - P_{m,\nu}(\mu; f)\right| \le \sum_{k \in H_{m,\nu,\mu}} \frac{\bar{k}^\alpha \left|\hat{f}(k)\right|}{\bar{k}^\alpha} \le \left(\sum_{k \in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} \left(\sum_{k \in H_{m,\nu,\mu}} \left(\bar{k}^\alpha \left|\hat{f}(k)\right|\right)^{\tilde{q}'}\right)^{1/\tilde{q}'}$$

$$\le \|f^\alpha\|_{L_{\tilde{q}}} \left(\sum_{k \in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} \le \|f^\alpha\|_{L_q} \left(\sum_{k \in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} = \|f\|_{W_q^\alpha} \left(\sum_{k \in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}}.$$

Оценим

$$\left(\sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}}.$$

Рассмотрим отдельно

$$\sum_{\beta_j=1}^{p-1} \overline{p^{k_j+\nu_j-1}(pr_j+\beta_j sign\, k_j)+\mu_j}^{-\alpha\tilde{q}}, \qquad j=1,\dots l-1.$$

Учитывая, что $p^{\nu_j-1} \le |\mu_j| < p^{\nu_j},\ j=1,\dots n,$ получаем

$$\sum_{\beta_j=1}^{p-1} \overline{p^{k_j+\nu_j-1}(pr_j+\beta_j sign\, k_j)+\mu_j}^{-\alpha\tilde{q}} \le \sum_{\beta_j=1}^{p-1} \overline{p^{k_j+\nu_j-1}(pr_j+\beta_j sign\, k_j)-p^{\nu_j}}^{-\alpha\tilde{q}} \le \left(p^{k_j+\nu_j-2}\overline{r_j}\right)^{-\alpha\tilde{q}}.$$

Отсюда получаем

$$\left(\sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} \le c\frac{1}{p^{\alpha m}}\left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\dots k_l+\nu_l+\dots+\nu_n=m,\\ k_j=0,\dots m,\ j=1,\dots l}} \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \bar{r}^{-\alpha\tilde{q}}\right)^{1/\tilde{q}}.$$

Ряд $\sum_{r\in\mathbb{Z}^l}\bar{r}^{-\alpha\tilde{q}}$ ввиду условия $\alpha\tilde{q}>1$ сходится и ввиду оценки [24]

$$\sum_{\substack{z_1+\dots+z_n=m,\\ z_j=0,\dots,m,\ j=1,\dots,n}} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \asymp m^{n-1},$$

где $A \asymp B$ означает $c_1B \le A \le c_2B$, получаем

$$\left(\sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^{\alpha\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} \le c\frac{(max(m-|\nu|_1,1))^{\frac{n-1}{\tilde{q}}}}{p^{\alpha m}}.$$

Для случая $q=1$ применим вложение $W_1^\alpha \hookrightarrow E^\alpha,\ \alpha>0,$ где E^α – пространство Коробова.

$$|\hat{f}(\mu_1,\dots\mu_n)-P_{m,\nu}(\mu;f)| \le \sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{\bar{k}^\alpha|\hat{f}(k)|}{\bar{k}^\alpha} \le \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha|\hat{f}(k)| \sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^\alpha} = \|f\|_{E^\alpha} \sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^\alpha}$$
$$\le \|f\|_{W_1^\alpha} \sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \frac{1}{\bar{k}^\alpha} \le c\frac{(max(m-|\nu|_1,1))^{n-1}}{p^{\alpha m}}\|f\|_{W_1^\alpha}.$$

Объединяя полученные оценки, выполняется неравенство (1).
Пусть $2 \le q < \infty$. Докажем (2). Оценка сверху следует из (1). Докажем оценку снизу.
Введем пробную функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{p^{\alpha m}\overline{m-|\nu|_1}^{(n-1)/2}} \sum_{\substack{k_1+\nu_1+\dots k_n+\nu_n=m+1,\\ k_j=0,\dots,m}} e^{2\pi i\sum_{j=1}^n p^{k_j+\nu_j}x_j},$$

где $\overline{m-|\nu|_1} = max(m-|\nu|_1, 1)$.

Применим неравенства Литтлвуда-Пэли к норме

$$\|f_0\|_{W_q^\alpha} \asymp \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \left| \sum_{\mu\in\rho(k)} \bar{\mu}^\alpha \hat{f}_0(\mu) e^{2\pi i(\mu,\cdot)} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_q} \asymp 1.$$

Применяя теорему 1 и вложение $W_q^\alpha \hookrightarrow W_2^{\alpha-\varepsilon}$ где $\varepsilon = 1/q - 1/2$, $1 < q \le 2$, получим

$$I_2 \le c \left(\sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_n\le m,\\ \nu_j=0,\dots,m}} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} \bar{\mu}^{\frac{2}{\tau}-1} \frac{\overline{m-|\nu|_1}^{n-1}}{p^{2(\alpha-\varepsilon)m}} \sum_{k\in H_{m,\nu,\mu}} \left(\bar{k}^\alpha \left|\hat{f}(k)\right|\right)^2 \right)^{1/2} \le c \frac{1}{p^{\left(\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau}\right)m}} \|f\|_{W_2^{\alpha-\varepsilon}}$$

$$\le c \frac{1}{p^{\left(\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau}\right)m}} \|f\|_{W_q^\alpha} \asymp \left(\frac{log^{n-1} N}{N}\right)^{\alpha-1/q+1/\tau} \|f\|_{W_q^\alpha}.$$

Для I_1 (см. теорему А):

$$I_1 \asymp \left(\frac{\log^{n-1} N}{N}\right)^{\alpha-1/q+1/\tau} \|f\|_{W_q^\alpha}.$$

Для I_2 оценка снизу получается ввиду того, что $F_m(x;f)$ – полином со спектром из ступенчатого гиперболического креста, т.е.

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha}=1} \|f - F_m(\cdot;f)\|_{L_\tau} \ge E_{G_m}\left(W_q^\alpha\right)_\tau = \inf_{t\in T(G_m)} \sup_{\|f\|_{W_q^\alpha}=1} \|f-t\|_{L_\tau},$$

где $T(G_m)$ – множество полиномов со спектром из ступенчатого гиперболического креста. Но ввиду

$$E_{G_m}\left(W_q^\alpha\right)_\tau \asymp \frac{1}{p^{\left(\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau}\right)m}} \asymp \left(\frac{\log^{n-1} N}{N}\right)^{\alpha-1/q+1/\tau}$$

получаем

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha}=1} \|f - F_m(\cdot;f)\|_{L_\tau} \ge \left(\frac{\log^{n-1} N}{N}\right)^{\alpha-1/q+1/\tau}.$$

Теорема доказана.

Заключение

В данной статье была приведена новая восстанавливающая функция для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной. Было доказано, что восстанавливающая функция точна для полиномов со спектром из соответствующего ступенчатого гиперболического креста. Были получены оценки погрешности восстанавливающей функции, имеющей порядок ортопоперечника, что является оптимальным для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной.

Информация о финансировании

Данная статья финансирована Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP 23488613).

ЛИТЕРАТУРА

1 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 1986. – Т. 178. – С. 3–113.

2 Темляков В.Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267. – № 2. – С. 314–317.

3 Темляков В.Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1985. – Т. 49, №5. – С. 986–1030. https://doi.org/10.1070/IM1986v027n02ABEH001179.

4 Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций. – Тр. МИАН СССР –1989. – Т. 189. – С. 138–168.

5 Темляков В.Н. Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 301. – С. 288–291.

6 Галеев Э.М., Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Матем. заметки. – 1978. –Т. 23. – № 2. – С. 197–212. https://doi.org/10.1007/BF01153149.

7 Никольская Н.С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике Lp // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 15. – № 2. – С. 395–412. https://doi.org/10.1007/BF00968291.

8 Byrenheid G. and Ullrich T. Optimal sampling recovery of mixed order Sobolev embeddings via discrete Littlewood–Paley type characterizations // Anal Math. – 2017. – Vol. 43. – P. 133–191. https://doi.org/10.1007/s10476-017-0303-5.

9 Dinh Dung and Ullrich T. Lower bounds for the integration error for multivariate functions with mixed smoothness and optimal Fibonacci cubature for functions on the square // Math. Nachr. – 2015. – Vol. 288. – P. 743–762. https://doi.org/10.1002/mana.201400048.

10 Krieg D. et al. Sampling recovery in $ L_2 $ and other norms // arXiv preprint arXiv:2305.07539. – 2023.

11 Kolomoitsev Y., Lomako T. and Tikhonov S., Sparse grid approximation in weighted Wiener spaces // J. Fourier Anal. Appl. – 2023. – Vol. 29. – No. 2. – P. 19. https://doi.org/10.1007/s00041-023-09994-2.

12 Byrenheid G., Sparse representation of multivariate functions based on discrete point evaluations : Diss. – Universitäts-und Landesbibliothek Bonn, 2019.

13 Kolomoitsev Y. Approximation by quasi-interpolation operators and Smolyak's algorithm // J. Complexity. – 2022. – Vol. 69. – P. 101601. https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101601.

14 Dinh Dung B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness // J. Complexity. – 2011. – Vol. 27. – P. 541–467. https://doi.org/10.1016/j.jco.2011.02.004.

15 Triebel H. Bases in function spaces, sampling, discrepancy, numerical integration, European Math. Soc. Publishing House, Zürich, 2010.

16 Krieg D. and Ullrich M. Function values are enough for L 2-approximation // Found. Comput. Math. – 2021. – Vol. 21. – No. 4. – P. 1141–1151. https://doi.org/10.1007/s10208-020-09481-w.

17 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О восстановлении мультипликативных преобразований функций из анизотропных пространств // Сибирский математический журнал. – 2014. – Т. 55. – № 3. – С. 592-609. https://doi.org/10.1134/S0037446614030100.

18 Dũng D., Temlyakov V., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation. – Springer, 2018.

19 Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Математические заметки. – 1998. – Т. 63. – № 2. – С. 235–247. https://doi.org/10.4213/mzm1270.

20 Bassarov S., Nursultanov E. New Cubature Formulas for Sobolev Spaces with Dominant Mixed Derivative // J. Math. Sci. – 2025. – Vol. 291. – P. 4–19. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07774-5.

21 Dick J., Kritzer P., Pillichshammer F. Lattice rules. – Springer, Cham, 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-031-09951-9.

22 Plonka G. et al. Numerical fourier analysis. – New York : Springer International Publishing, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35005-4

23 Bartel F. et al. On the reconstruction of functions from values at subsampled quadrature points // Math. Comput. – 2024. – Vol. 93. – № 346. – P 785–809.

24 Sickel W., Ullrich T. Smolyak's algorithm, sampling on sparse grids and function spaces of dominating mixed smoothness. – Univ., 2006.

REFERENCES

1 Temlyakov, V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative, Proc. Steklov Inst. Math., 178, 3–113 (1986).

2 Temlyakov, V.N. Widths of some classes of functions of several variables, Soviet Math Dokl., 267(2), 314–317 (1982).

3 Temlyakov, V.N. Approximation of periodic functions of several variables by trigonometric polynomials, and widths of some classes of functions, Math. USSR-Izv., 49(5), 986–1030 (1985). https://doi.org/10.1070/IM1986v027n02ABEH001179.

4 Temlyakov, V.N. Estimates for the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference, Proc. Steklov Inst. Math., 189, 138–168 (1989).

5 Temlyakov, V.N. On Estimates of ε-Entropy and Widths of Classes of Functions with Bounded Mixed Derivative or Difference, Soviet Math. Dokl., 301, 288–291 (1988).

6 Galeev, A.M., Approximation by Fourier sums of classes of functions with several bounded derivatives, Math. Notes, 23(2), 109–117 (1978),). https://doi.org/10.1007/BF01153149. (in Russian).

7 Nikolskaya, N.S. Approximation of differentiable functions of several variables by Fourier sums in the Lp metric. Siberian Math. J.,15 (2), 282–295 (1974). https://doi.org/10.1007/BF00968291. (in Russian).

8 Byrenheid, G. and Ullrich, T. Optimal sampling recovery of mixed order Sobolev embeddings via discrete Littlewood–Paley type characterizations, Anal Math., 43, 133–191 (2017). https://doi.org/10.1007/s10476-017-0303-5

9 Dinh Dung and Ullrich T., Lower bounds for the integration error for multivariate functions with mixed smoothness and optimal Fibonacci cubature for functions on the square, Math. Nachr., 288, 743–762 (2015). https://doi.org/10.1002/mana.201400048.

10 Krieg, D. et al. Sampling recovery in $ L_2 $ and other norms, arXiv preprint arXiv:2305.07539, 2023.

11 Kolomoitsev, Y., Lomako, T. and Tikhonov, S. Sparse grid approximation in weighted Wiener spaces, J. Fourier Anal. Appl., 29 (2), 1–19 (2023). https://doi.org/10.1007/s00041-023-09994-2.

12 Byrenheid, G., Sparse Representation of Multivariate Functions Based on Discrete Point Evaluations, Universitäts-und Landesbibliothek Bonn, 2019.

13 Kolomoitsev, Y. Approximation by quasi-interpolation operators and Smolyak's algorithm, J. Complexity, 69, 101601 (2022). https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101601.

14 Dinh Dung B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness, J. Complexity, 27, 541–467 (2011). https://doi.org/10.1016/j.jco.2011.02.004.

15 Triebel, H. Bases in Function Spaces, Sampling, Discrepancy, Numerical Integration, European Math. Soc. Publishing House, Zürich, 2010.

16 Krieg, D. and Ullrich, M. Function values are enough for L 2-approximation Found. Comput. Math., 21(4), 1141–1151 (2021). https://doi.org/10.1007/s10208-020-09481-w.

17 Nursultanov, E.D., Tleukhanova, N.T. On the reconstruction of multiplicative transformations of functions from anisotropic spaces, Siberian Math. J., 55(3), 482–497 (2014). https://doi.org/10.1134/S0037446614030100 (in Russian).

18 Dũng, D., Temlyakov, V., Ullrich, T. Hyperbolic Cross Approximation. Springer, 2018.

19 Nursultanov, E.D. On the multipliers of Fourier series with respect to the trigonometric system, Math. Notes, 63(2), 205–214 (1998). https://doi.org/10.4213/mzm1270.

20 Bassarov, S., Nursultanov, E. New Cubature Formulas for Sobolev Spaces with Dominant Mixed Derivative. J Math Sci., 291, 4–19 (2025). https://doi.org/10.1007/s10958-025-07774-5

21 Dick, J., Kritzer, P., Pillichshammer, F. Lattice Rules. Springer. Cham. 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-031-09951-9.

22 Plonka, G. et al. Numerical Fourier Analysis. Springer International Publishing. New York. 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35005-4.

23 Bartel, F. et al. On the reconstruction of functions from values at subsampled quadrature points, Math. Comput., 93 (346), 785–809 (2024).

24 Sickel, W., Ullrich, T. Smolyak's algorithm, sampling on sparse grids and function spaces of dominating mixed smoothness. Univ., 2006.

[1]***Басаров С.Ж.,**
магистр, к.ғ.қ., ORCID ID: 0000-0001-5422-2424,
*e-mail: bassarov.serzhan98@gmail.com
[2]**Нурсултанов Е.Д.,**
ф.-м.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0003-3879-2261,
e-mail: er-nurs@yandex.kz

[1]«Geometry» ЖШС, Астана қ., Қазақстан
[2]М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің
Қазақстан филиалы, Астана қ., Қазақстан

СОБОЛЕВ КЕҢІСТІКТЕРІ ҮШІН БАСЫМ АРАЛАС ТУЫНДЫСЫ БАР ҚАЛПЫНА КЕЛТІРЕТІН ФУНКЦИЯ

Аңдатпа

Сызықтық аппроксимация – бұл белгілі бір кластағы функцияны осы кластың бекітілген ақырлы өлшемді ішкі кеңістігінің элементтерімен жуықтау. Мысалы, бір айнымалылы периодты функциялар үшін мұндай элементтер ретінде тригонометриялық көпмүшелер алынады. Бізді қызықтыратын көпөлшемді жағдайда, яғни әр айнымалы бойынша периодты функциялар үшін, аталған ішкі кеңістік рөлін жиілігі баспалдақты гиперболалық крестен тұратын тригонометриялық көпмүшелер жиыны атқарады. Дегенмен, бұл көпмүшелердің коэффициенттерін таңдау мәселесі туындайды. Бұл мақалада берілген нүктелер бойынша басым аралас туындысы бар Соболев кеңістігіндегі функцияларды қалпына келтіру аппараты ұсынылып, қалпына келтіру қателігіне бағалаулар алынды. Әдіс қалпына келтіруші функцияны жиілігі баспалдақты гиперболалық креске жататын, ал коэффициенттері берілген нүктелер арқылы есептелетін көпмүше түрінде құруға негізделген. Жуықтау қателігінің реті ортогональ көлденеңмен шамалас, бұл – мұндай көпмүшелер үшін оңтайлы нәтиже. Ұсынылған әдіс жиілігі баспалдақты гиперболалық креске жататын көпмүшелер үшін дәл нәтиже береді. Сондай-ақ, аталған кеңістіктердегі функциялардың Фурье коэффициенттерін қалпына келтіретін функционал алынған. Қалпына келтіру функциясының нақты өрнегінің арқасында алынған формуланы қолданбалы есептерді шешуде пайдалануға болады.

Тірек сөздер: көп айнымалы, функциялар теориясы, Соболев кеңістігі, аралас туынды, гиперболалық жиілік.

[1]***Bassarov S.Zh.,**
MSc., j.r.a., ORCID ID: 0000-0001-5422-2424,
*e-mail: bassarov.serzhan98@gmail.com
[2]**Nursultanov E.D.,**
Dr. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0003-3879-2261,
e-mail: er-nurs@yandex.kz

[1]«Geometry» LLP, Astana, Kazakhstan
[2]Kazakhstan Branch of M. V. Lomonosov Moscow State University Branch,
Astana, Kazakhstan

RECOVERY FUNCTION FOR SOBOLEV SPACES WITH DOMINATING MIXED DERIVATIVE

Abstract

Linear approximation is the approximation of a function from a certain class by elements of a fixed finite-dimensional subspace of that same class. For instance, for one-dimensional periodic functions, such elements are trigonometric polynomials. In the multidimensional case of interest, for functions periodic in each variable, this subspace is the set of trigonometric polynomials with a spectrum from a step hyperbolic cross. However, the question of selecting coefficients for these polynomials arises. This paper presents an apparatus for recovering functions from

Sobolev spaces with a dominating mixed derivative based on given points, and establishes error estimates for the recovery. The method is based on constructing a recovery function in the form of a polynomial with a spectrum from a step hyperbolic cross, where the coefficients are calculated using the given points. The approximation error is of the order of the orthowidth, which is an optimal result for such polynomials. The proposed method is exact for polynomials with a spectrum from a step hyperbolic cross. Additionally, a functional that recovers the Fourier coefficients for functions from the indicated spaces is derived. Due to the explicit expression of the recovery function, the obtained formula can be used to solve applied problems.

Keywords: multiple dimension, function theory, Sobolev spaces, mixed derivative, hyperbolic cross.

Дата поступления статьи в редакцию: 08.10.2025