УДК 517.51
МРНТИ 27.39.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-4-295-305

[1]**Әбек А.Н.,**
PhD, ORCID ID: 0009-0004-7158-3597,
*e-mail: azhar.abekova@gmail.com
[2]**Гогатишвили А.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-3459-0355,
e-mail: gogatish@math.cas.cz
[3*]**Бокаев Н.А.,**
доктор физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0002-7071-1882,
e-mail: bokayev2011@yandex.kz
[4]**Унвер Т.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0414-8400,
e-mail: tugceunver@kku.edu.tr

[1,3]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
[2]Институт математики Академии наук Чехии, г. Прага, Республика Чехия
[4]Университет Кириккале, г. Кириккале, Турция

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ТРЕХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация

Мы изучаем трехвесовое неравенство для суперпозиции операторов Копсона, Харди и Тандори. Целью данной работы является доказательство полной характеристики ограниченности оператора, являющегося комбинацией этих трех операторов в весовых пространствах Лебега от $L_1(v)$ в $L_q(w)$. Основное внимание уделяется определению необходимых и достаточных условий, при которых это неравенство выполняется для всех неотрицательных измеримых функций на положительной вещественной оси. Существенно используется понятие фундаментальной функции борелевской меры относительно возрастающей функции. Поскольку оператор Тандори не является линейным оператором, мы не можем использовать методы двойственности, применявшиеся в более ранних работах. Для решения этой проблемы мы разрабатываем новый, упрощенный метод дискретизации, позволяющий избежать сложностей ранее известных методов. Был получен явный вид наилучшей константы в неравенстве, что демонстрирует точность и оптимальность результатов. Устанавливая необходимые и достаточные условия ограниченности этих составных операторов, мы улучшаем неравенства, ранее установленные в работах Гогатишвили А., Пик Л., Опич Б. [1]. Полученные в статье результаты расширяют и дополняют существующие исследования в области теории весовых неравенств и операторного анализа в функциональных пространствах и предлагают потенциальные приложения в теории приближений, гармоническом анализе и смежных областях.

Ключевые слова: весовое неравенство, супремальный оператор, оператор Копсона, оператор Харди, оператор Тандори, наилучшая константа, суперпозиция операторов, дискретизация.

Введение

В последние годы весовые неравенства для операторов типа Харди привлекли значительное внимание из-за их широкого применения в функциональном анализе и теории операторов. Классические результаты в этой области, такие как исследованные Bennett C. и Sharpley R. [2] заложили основу для дальнейшего прогресса в анализе ограниченности операторов в весовых пространствах. Изучение составных операторов, таких как комбинация операторов Копсона, Харди и Тандори, еще больше расширило эту теорию [3–12]. Более ранние работы, такие как работы Gogatishvili A., Pick L. [1, 13], были сосредоточены на весовых неравенствах для отдельных операторов, но отсутствовали всесторонние исследования их взаимодействия при объединении. Наше исследование устраняет этот пробел, предоставляя подробную характеристику ограниченности составного оператора, образованного операторами Харди, Копсона и Тандори в весовых пространствах Лебега. Это является естественным продолжением более ранних результатов [14–17], которые исследовали связанные семейства операторов, но не рассматривали всю сложность нелинейных членов в таких неравенствах.

Через $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ обозначим множество всех неотрицательных измеримых функций на $(0,\infty)$.

Пусть $1 \le q < \infty$ и пусть u, v и w – веса (т.е. локально интегрируемые неотрицательные функции на $(0,\infty)$), φ – строго возрастающая функция на $(0,\infty)$, а $\frac{\varphi}{U}$ – убывающая на $(0,\infty)$, где

$$U(s)=\int_0^s u(t)dt.$$

Наша цель в данной работе – охарактеризовать следующее неравенство

$$\left(\int_0^\infty\left(\sup_{t<s<\infty}\frac{1}{\varphi(s)}\int_0^s\left(\int_\tau^\infty h(y)dy\right)u(\tau)d\tau\right)^q w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\int_0^\infty h(s)v(s)ds \tag{1}$$

для всех $h\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$.

Наименьшую константу C, для которой неравенство (1) выполняется, назовем наилучшей константой.

Неравенство (1) представляет собой трехвесовое неравенство, включающее композицию выражений типа Копсона, Харди и Тандори. Внутренний интеграл нелинеен из-за структуры оператора Тандори.

Используя теорему Фубини для неотрицательных функций, имеем

$$\int_0^s u(\tau)\int_\tau^\infty h(t)dtd\tau=\int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau+U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau.$$

Следовательно, неравенство (1) эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\int_0^\infty\left(\sup_{t<s<\infty}\frac{1}{\varphi(s)}\left(\int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau+U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau\right)\right)^q w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\int_0^\infty h(\tau)v(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Следующая теорема является основным результатом данной статьи и дает критерий выполнения неравенства (2).

Теорема 1. Пусть $1 \le q < \infty$ и пусть u, v и w – веса на $(0,\infty)$. φ это U – квазивогнутая функция на $(0,\infty)$. Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что неравенство (2) выполняется для всех $h\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$C_1:=\sup_{t\in(0,\infty)}\left(\int_0^\infty\frac{w(s)ds}{(\varphi(s)+\varphi(t))^q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sup_{s\in(0,\infty)}\frac{U(t)U(s)}{(U(s)+U(t))v(s)}\right)<\infty.$$

Более того, наилучшая константа C в (2) удовлетворяет условию $C_1 \approx C$.

Всюду в статье мы всегда обозначаем через c или C положительную константу, которая не зависит от основных параметров, но может меняться от строки к строке. Однако константа с нижним индексом, такая как c_1, не меняется в разных случаях.

Мы пишем $A \lesssim B$ (или $A \gtrsim B$), если $A \le C_1 B$ (или $C_2 A \ge B$), для некоторой положительной константы C, не зависящей от соответствующих величин, входящих в выражения A и B, и $A \approx B$, если $A \lesssim B$ и $A \gtrsim B$. Всюду в этих заметках мы используем сокращение $\mathrm{LHS}(*)$ (и $\mathrm{RHS}(*)$) для левой (правой) части соотношения $(*)$.

Материалы и методы

Определение 1. Пусть a_k – последовательность положительных действительных чисел. Будем говорить, что a_k строго возрастает или строго убывает, и писать $a_k \uparrow\uparrow$ или $a_k \downarrow\downarrow$,

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \text{ или } \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

соответственно.

Определение 2. Пусть φ – непрерывная строго возрастающая функция на $[0,\infty)$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Тогда будем говорить, что φ допустима.

Пусть φ – допустимая функция. Будем говорить, что функция h является φ-квазивогнутой, если h эквивалентна возрастающей функции на $[0,\infty)$, а отношение $\frac{h}{\varphi}$ эквивалентно убывающей функции на $(0,\infty)$. Будем говорить, что φ-квазивогнутая функция h невырождена, если

$$\lim_{t\to 0+} h(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{h(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(t)}{h(t)} = 0.$$

Семейство невырожденных φ-квазивогнутых функций обозначим через Ω_φ. Будем говорить, что φ квазивогнута, когда $\varphi \in \Omega_U$ с $U(t) = t$.

Определение 3. Предположим, что φ допустима и $h \in \Omega_\varphi$. Говорят, что $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – дискретизационная последовательность для h относительно φ, если

(i) $x_0 = 1$ и $\varphi(x_k) \uparrow\uparrow$;

(ii) $h(x_k) \uparrow\uparrow$ и $\frac{h(x_k)}{\varphi(x_k)} \downarrow\downarrow$;;

(iii) существует разложение $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2$ такое, что $\mathbb{Z}_1 \cap \mathbb{Z}_2 = \emptyset$ и для любого $t \in [x_k, x_{k+1}]$

$$h(x_k) \approx h(t) \text{ if } k \in \mathbb{Z}_1$$
$$\frac{h(x_k)}{\varphi(x_k)} \approx \frac{h(t)}{\varphi(t)} \text{ if } k \in \mathbb{Z}_2.$$

Определение 4. Пусть φ – допустимая функция, а ν – неотрицательная борелевская мера на $[0,\infty)$. Будем говорить, что функция h, определяемая формулой

$$h(t) = \varphi(t) \int_{[0,\infty)} \frac{d\nu(s)}{\varphi(s) + \varphi(t)}, t \in (0,\infty)$$

является фундаментальной функцией меры ν относительно φ. Будем также говорить, что ν является мерой представления h относительно φ.

Будем говорить, что ν невырождена, если для каждого $t \in (0,\infty)$ выполняются следующие условия:

$$\int_{[0,\infty)} \frac{d\nu(s)}{\varphi(s) + \varphi(t)} < \infty, t \in (0,\infty) \quad \text{и} \quad \int_{[0,1]} \frac{d\nu(s)}{\varphi(s)} = \int_{[1,\infty)} d\nu(s) = \infty.$$

Следующая лемма: устойчивость супремума и сумм по дискретизациям имеет решающее значение для согласованных эквивалентностей нормы.

Лемма 1. [13, Лемма 3.7] Пусть $q \in (0,\infty)$. Предположим, что φ – допустимая функция, ν – невырожденная положительная борелевская мера на $[0,\infty)$, h –фундаментальная функция ν относительно U^q, и $f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$. Если $\{x_k\}$ дискретизационная последовательность для h относительно φ^q, то

$$\int_{[0,\infty)} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,\infty)} \frac{|f(y)|}{\varphi(x)+\varphi(y)} \right)^q d\nu(x) \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,\infty)} \frac{|f(y)|}{\varphi(x_k)+\varphi(y)} \right)^q \varphi(x_k)$$
$$\approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname*{ess\,sup}_{x_k\le y<x_{k+1}} |f(y)|^q \varphi^{-q}(y) h(y).$$

Лемма 2. [13, лемма 3.9] Пусть u – допустимая функция и $\varphi \in \Omega_U$. Пусть $\{x_k\}$ – дискретизационная последовательность для φ относительно U. Тогда

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \varphi(x) \sup_{0<y<\infty} \frac{|f(y)|}{U(x)+U(y)} \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x_k) \sup_{0<y<\infty} \frac{|f(y)|}{U(x_k)+U(y)} \approx$$
$$\approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x_k) U(x_k)^{-1} \sup_{x_{k-1}<y<x_k} |f(y)| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x_k) \sup_{x_k<y<x_{k+1}} |f(y)| U(y)^{-1} \approx$$
$$\approx \sup_{k\in\mathbb{Z}_1} \varphi(x_k) \sup_{x_k\le y<x_{k+1}} |f(y)| U(y)^{-1} + \sup_{k\in\mathbb{Z}_2} \varphi(x_k) U(x_k)^{-1} \sup_{x_k<y<x_{k+1}} |f(y)|$$
$$\approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x_k\le y<x_{k+1}} |f(y)| U(y)^{-1} \varphi(y).$$

Лемма 3. Пусть $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – произвольные последовательности неотрицательных чисел, $\tau_k \downarrow\downarrow$, $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$. Тогда для любого $q > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^{x_k} h \right)^q \tau_k \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} h \right)^q \tau_k,$$
$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^{x_k} h \right)^q \tau_k \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} h \right)^q \tau_k,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{\infty} h \right)^q \tau_k^{-1} \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} h \right)^q \tau_k^{-1},$$
$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{\infty} h \right)^q \tau_k^{-1} \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} h \right)^q \tau_k^{-1}.$$

Лемма 4. Пусть. $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – произвольные последовательности неотрицательных чисел. $\tau_k \downarrow$ и $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$. Тогда

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le x_k} h(t) \right) \tau_k \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_{k-1}\le t\le x_k} h(t) \right) \tau_k,$$
$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_k\le t\le\infty} h(t) \right) \tau_k^{-1} \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_k\le t\le x_{k+1}} h(t) \right) \tau_k^{-1}.$$

Результаты и обсуждение

Мы начинаем этот раздел с замечания, что неравенство (2) эквивалентно дискретному неравенству, и представляем его характеристику в дискретной форме, что само по себе заслуживает внимания.

Пусть $q \in (0,\infty)$ и

$$G(t) = \left(\int_0^t w(s)ds + \varphi(t)^q \int_t^\infty \varphi^{-q}(s)w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

Лемма 5. Пусть $q \in (0,\infty)$, и пусть $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, w – вес на $(0,\infty)$. U и φ допустимые функции на $(0,\infty)$ и $\frac{\varphi}{U}$ убывает. G определена в (3) и пусть $\{x_k\}$ дискретизационная последовательность G относительно φ. Тогда из левой части (2) следует, что

$$\int_0^\infty \left(\sup_{t<s<\infty} \frac{1}{\varphi(s)}\left(\int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau\right)\right)^q w(t)dt \approx$$
$$\approx \sum_{k\in Z} G(x_k)\left[\sup_{x_k<t<\infty} \frac{1}{\varphi(t)}\left(\int_0^t U(\tau)h(\tau)d\tau + U(t)\int_t^\infty h(\tau)d\tau\right)\right]^q$$
$$\approx \sum_{k\in Z}\left[\sup_{x_k<t<x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^t U(\tau)h(\tau)\,d\tau + U(t)\int_t^{x_{k+1}} h(\tau)d\tau\right)\right]^q. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим

$$H(t) := \varphi(t)\sup_{t<s<\infty}\frac{1}{\varphi(s)}\left(\int_0^s U(t)h(t)dt + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau\right)$$
$$= \sup_{t<s<\infty}\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\left(\int_0^s U(t)h(t)dt + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau\right).$$

Мы имеем

$$H(t) = \sup_{0<s<\infty}\min\left(1,\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\right)\left[\int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau\right].$$

Следовательно, $H\uparrow$ и $\frac{H}{\varphi}\downarrow$, то есть $H\in\Omega_\varphi$. Используя элементарные неравенства

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)+\varphi(t)} < \min\left(1;\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\right) < \frac{2\varphi(t)}{\varphi(s)+\varphi(t)},$$

получаем

$$H(t) \approx \sup_{0<s<\infty}\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)+\varphi(t)}\left[\int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau\right] = \sup_{0<s<\infty}\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)+\varphi(t)}f(s).$$

Используя Лемму 1 для функции $f(s) = \int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau$, имеем:

$$\int_0^\infty H(t)^q\varphi^q(t)w(t)dt \approx\approx \int_0^\infty \left[\sup_{0<s<\infty}\frac{\int_0^s U(\tau)h(\tau)d\tau + U(s)\int_s^\infty h(\tau)d\tau}{\varphi(s)+\varphi(t)}\right]^q \varphi^q(t)w(t)dt$$
$$\approx \sum_{k\in Z} G(x_k)\left[\sup_{x_k<t<\infty}\frac{1}{\varphi(t)}\left(\int_0^t U(\tau)h(\tau)d\tau + U(t)\int_t^\infty h(\tau)d\tau\right)\right]^q$$
$$\approx \sum_{k\in Z}\left[\sup_{x_k<t<x_{k+1}}\left(\int_0^t U(\tau)h(\tau)d\tau + U(t)\int_t^\infty h(\tau)d\tau\right)\frac{G(t)}{\varphi(t)}\right]^q$$
$$\approx \sum_{k\in Z}\left[\sup_{x_k<t<x_{k+1}}\left(\int_{x_k}^t U(\tau)h(\tau)d\tau + U(t)\int_t^{x_{k+1}} h(\tau)d\tau\right)\frac{G(t)}{\varphi(t)}\right]^q$$
$$+\sum_{k\in Z}\left[\sup_{x_k<t<x_{k+1}}\frac{G(t)}{\varphi(t)}\int_0^{x_k} U(\tau)h(\tau)d\tau\right]^q$$

$$+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{x_k<t<x_{k+1}}\frac{G(t)U(t)}{\varphi(t)}\int_{x_{k+1}}^{\infty}h(\tau)d\tau\right]^q =: I_1+I_2+I_3.$$

Поскольку $\frac{G(x_k)}{\varphi(x_k)}\downarrow\downarrow$, используя Лемму 3, получаем

$$I_2\approx\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{G(x_k)}{\varphi(x_k)}\int_0^{x_k}U(\tau)h(\tau)d\tau\right]^q\approx\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{G(x_k)}{\varphi(x_k)}\int_{x_{k-1}}^{x_k}U(\tau)h(\tau)d\tau\right]^q\le$$
$$\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{x_{k-1}<t<x_k}\frac{G(t)}{\varphi(t)}\int_{x_{k-1}}^{t}U(\tau)h(\tau)d\tau\right]^q\le I_1.$$

Так как $\frac{U(x_{k+1})}{\varphi(x_{k+1})}\uparrow$ и $G(x_{k+1})\uparrow\uparrow$, то $\frac{G(x_{k+1})U(x_{k+1})}{\varphi(x_{k+1})}\uparrow\uparrow$, и используя Лемму 3, получаем

$$I_3=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{G(x_{k+1})U(x_{k+1})}{\varphi(x_{k+1})}\int_{x_{k+1}}^{\infty}h(\tau)d\tau\right]^q\approx\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{G(x_{k+1})U(x_{k+1})}{\varphi(x_{k+1})}\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}h(\tau)d\tau\right]^q$$

$$\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{x_{k+1}<t<x_{k+2}}\frac{G(t)U(t)}{\varphi(t)}\int_{t}^{x_{k+2}}h(\tau)d\tau\right]^q\le I_1.$$

Таким образом, все части управляются I_1, и мы получаем:

$$I_1+I_2+I_3\approx I_1$$

что доказывает эквивалентность (8). Лемма 8 доказана.

Предложение 1. Пусть $1\le q<\infty$, и пусть u, v и w – веса на $(0,\infty)$, U и φ допустимые функции на $(0,\infty)$ и $\frac{\varphi}{U}$ убывает. G определена в (3), и пусть $\{x_k\}$ дискретизационная последовательность G относительно φ. Тогда неравенство (2) выполняется для всех $h\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$, тогда и только тогда, когда существует положительная константа $\mathcal{C}$ такая, что

$$\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{x_k<t<x_{k+1}}\frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^{t}U(\tau)h(\tau)d\tau+U(t)\int_t^{x_{k+1}}h(\tau)d\tau\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\le$$
$$\le\mathcal{C}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}h(\tau)v(\tau)d\tau \qquad (5)$$

выполняется для всех $h\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$. Более того, наилучшие константы в неравенствах (2) и (5) удовлетворяют условию $C\approx\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $\{x_k\}_{k=N}^{\infty}$ дискретизационная последовательность функции G. Применяя (4), получаем, что

$$\mathrm{LHS}(2)\approx\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{x_k<t<x_{k+1}}\frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^{t}U(\tau)h(\tau)d\tau+U(t)\int_t^{x_{k+1}}h(\tau)d\tau\right)\right]^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

и

$$\mathrm{RHS}(2)=\int_0^{\infty}h(\tau)v(\tau)d\tau=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}h(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Тогда ясно, что существует положительная константа C, такая, что неравенство (2) выполняется для всех $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, тогда и только тогда, когда существует положительная константа $\mathcal{C}$, такая, что (5) выполняется для всех $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$. Более того, $C \approx \mathcal{C}$. Предложение 1 доказано.

Для исследования неравенства (5) нам понадобятся следующие обозначения: сначала обозначим через $M(x_k, x_{k+1})$ наилучшую константу весовых итерированных неравенств Копсона и Харди, то есть

$$M(x_k,x_{k+1}) = \sup_{h\geq 0} \frac{\sup\limits_{x_k<t<x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^t U(\tau)h(\tau)d\tau + U(t)\int_t^{x_{k+1}} h(\tau)d\tau\right)}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} h(\tau)v(\tau)d\tau}. \tag{6}$$

Используя характеристики весовых итерационных неравенств Копсона и Харди (см., [17, теорема 5.3.1]), имеем

$$M(x_k,x_{k+1}) \approx \sup_{x_k<t<x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\sup_{x_k<s<t}\frac{u(s)}{v(s)} + U(t)\sup_{t<s<x_{k+1}}\frac{1}{v(s)}\right). \tag{7}$$

Предложение 2. Пусть $1 \le q < \infty$, и пусть u, v и w – веса на $(0,\infty)$, U и φ допустимые функции на $(0,\infty)$ и $\frac{\varphi}{U}$ vбывает. G определена в (3), а $\{x_k\}$ – дискретизационная последовательность G относительно φ. $M(x_k,x_{k+1})$ определена в (6), Тогда неравенство (5) выполняется для всех $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, тогда и только тогда, если существуют положительные константы $\mathcal{C}'$, такие, что

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q M(x_k,x_{k+1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \mathcal{C}'\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k, \tag{8}$$

выполняется для всех последовательностей неотрицательных чисел $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Более того, наилучшие константы в неравенствах (5) и (8) удовлетворяют условию $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$.

Доказательство. Предположим, что (5) выполняется для всех $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$. По определению $M(x_k,x_{k+1})$ существует функция $h_k \ge 0$, такая, что

$$\operatorname{supp} h_k \subset (x_k,x_{k+1}), \qquad \int_{x_k}^{x_{k+1}} h_k(\tau)v(\tau)d\tau = 1$$

и

$$\sup_{x_k<t<x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^t U(\tau)h_k(\tau)d\tau + U(t)\int_t^{x_{k+1}} h_k(\tau)d\tau\right) \ge \frac{1}{2}M(x_k,x_{k+1}).$$

Если подставим функцию

$$h(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_k(s)$$

в (5), где $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ любая последовательность неотрицательных чисел, то из (5) следует (8). Более того, $\mathcal{C}' \lesssim \mathcal{C}$. Обратно, сначала заметим, что для каждого $h \in \mathcal{M}^+(0,\infty)$

$$M(x_k,x_{k+1}) \ge \frac{\sup\limits_{x_k<t<x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^t U(\tau)h(\tau)d\tau + U(t)\int_t^{x_{k+1}} h(\tau)d(\tau)\right)}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} h(\tau)v(\tau)d\tau}.$$

Затем (5) следует при подставлении

$$a_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} h(\tau)v(\tau)d\tau$$

в (8) и $\mathcal{C} \le \mathcal{C}'$. Далее, мы имеем $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$. Предложение 2 доказано.

Лемма 6. [13, предл. 4.1] Пусть $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, последовательность положительных действительных чисел и $1 \le q < \infty$. Предположим, что неравенство

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q v_k^q\right)^{1/q} \lesssim B\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \tag{9}$$

выполняется для любой последовательности положительных действительных чисел $\{a_k\}$ тогда и только тогда, когда

$$B_1 := \sup_{k\in\mathbb{Z}} v_k < \infty.$$

Более того, наилучшая константа в неравенстве (9) удовлетворяет условию $B \approx B_1$.

Следующая теорема 2 дискретизирует непрерывную задачу в последовательность локальных весовых неравенств на интервалах $[x_k, x_{k+1}]$.

Теорема 2. Пусть $1 \le q < \infty$ и пусть u, v и w – веса на $(0,\infty)$, φ – U-квазивогнутая функция на $(0,\infty)$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что неравенство (2) выполняется для всех $h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$A_1 := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x_k\le t\le x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(x_k,t)} \frac{U(s)}{v(s)} + U(t)\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(t,x_{k+1})} \frac{1}{v(s)}\right) < \infty.$$

Более того, наилучшая константа в неравенстве (2) удовлетворяет условию $C \approx A_1$.

Доказательство. Используя Предложения 1 и 2, наилучшая константа в (2) удовлетворяет условию $C \approx \mathcal{C}'$, где $\mathcal{C}'$ – наилучшая константа в неравенстве (8). Следовательно, применяя лемму 6 и используя (7), получаем результат.

Доказательство теоремы 1.

Используя теорему 2, достаточно показать, что

$$A_1 \approx C_1.$$

Отметим, что для функций U и V из (7) имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,t)} \frac{U(s)}{v(s)} + U(t)\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(t,\infty)} \frac{1}{v(s)} \approx \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)} \frac{U(t)U(s)}{\big(U(s)+U(t)\big)v(s)}. \tag{10}$$

Действительно, используем следующие простые оценки

$$\frac{U(t)U(s)}{\big(U(s)+U(t)\big)v(s)} \le \min(U(s),U(t)) \le \frac{2U(t)U(s)}{\big(U(s)+U(t)\big)v(s)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,t)} \frac{U(s)}{v(s)} + U(t)\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(t,\infty)} \frac{1}{v(s)} = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)} \min\big(U(s),U(t)\big)\frac{1}{v(s)}$$

$$\approx \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)} \frac{U(t)U(s)}{U(s)+U(t)}\frac{1}{v(s)}.$$

По лемме 2, лемме 4 и (10) имеем

$$
\begin{aligned}
A_1 := &\sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x_k\le t\le x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\operatorname*{esssup}_{s\in(x_k,t)} \frac{U(s)}{v(s)} + U(t) \operatorname*{esssup}_{s\in(t,x_{k+1})} \frac{1}{v(s)}\right)\\
&\approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x_k\le t\le x_{k+1}} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\operatorname*{esssup}_{s\in(0,t)} \frac{U(s)}{v(s)} + U(t) \operatorname*{esssup}_{s\in(t,\infty)} \frac{1}{v(s)}\right)\\
&= \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\operatorname*{esssup}_{s\in(0,t)} \frac{U(s)}{v(s)} + U(t) \operatorname*{esssup}_{s\in(t,\infty)} \frac{1}{v(s)}\right)\\
&\approx \sup_{t\in(0,\infty)} \left(\int_0^\infty \frac{w(s)ds}{(\varphi(s)+\varphi(t))^q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\operatorname*{esssup}_{s\in(0,\infty)} \frac{U(t)U(s)}{\big(U(s)+U(t)\big)v(s)}\right) = C_1.
\end{aligned}
$$

Теорема 1 доказана.

Заключение

В данной работе рассмотрено весовое неравенство для оператора, состоящего из суперпозиции операторов Харди, Копсона и Тандори на классе неотрицательных измеримых функций. Получены необходимые и достаточные условия выполнения (справедливости) весового неравенства для суперпозиции рассматриваемых операторов. Получены критерии справедливости такого неравенства при условии $1 \le q < \infty$. Для доказательства основной теоремы использовались методы дискретизации: сведение интегральных неравенств к неравенствам для суммы, критерии дискретизации для последовательностей и дискретное эквивалентное условие для неравенства (2). Установлен точный вид наилучшей константы в соответствующем неравенстве, что подтверждает точность и оптимальность полученных результатов. При доказательстве основных утверждений существенно использован метод дискретизации, ранее рассмотренный в работе Gogatishvili A., Pick L. [1, 13]. Более того, наш подход использует методы дискретизации, технику, введенную в более ранних работах [1, 13], которая позволяет нам эффективно обрабатывать нелинейности в операторе Тандори.

Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории весовых неравенств и операторного анализа в функциональных пространствах, а также демонстрируют потенциал для дальнейшего применения в теории операторов в функциональных пространствах, гармоническом анализе и смежных областях математического анализа.

Информация о финансировании

Исследование А.Н. Абек и А.Гогатишвили выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект № AP22686420).

Исследование Н.А. Бокаев, А.Н. Абек, А.Гогатишвили выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект № AP26196065).

Исследование А. Гогатишвили частично поддержано грантом проекта 23-04720S Чешского научного фонда (GA ČR), Институт математики CAS поддержан RVO:67985840, Национальным научным фондом имени Шота Руставели (SRNSF), номер гранта: FR22-17770.

ЛИТЕРАТУРА

1 Gogatishvili, A., Pick, L., Opic, B. Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema. Collectanea Mathematica, 57 (3), 227–255 (2006). https://raco.cat/index.php/CollectaneaMathematica/article/view/56609/67919.

2 Bennett, C., Sharpley, R. Interpolation of Operators. Pure and Applied Mathematics 129, Academic Press, Boston, MA, 1988, p. 469.

3 Křepela, M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema. Collectanea Mathematica, 68, 21–50 (2017). https://doi.org/10.1007/s13348-016-0170-6.

4 Gogatishvili, A., Mustafayev, R.C. Iterated Hardy-type inequalities involving suprema. Mathematical Inequalities & Applications, 20, 901–927 (2017). https://doi.org/10.7153/mia-2017-20-57.

5 Astashkin, S.V., Maligranda, L. Structure of Cesaro function spaces: A survey. Banach Center Publications, 102, 13–40 (2014). https://doi.org/10.4064/bc102-0-1.

6 Kolyada, V.I. On Cesaro and Copson norms of nonnegative sequences. Ukrainian Mathematical Journal, 71 (2), 248–258 (2019). https://doi.org/10.1007/s11253-019-01642-7.

7 Stepanov, V.D., Shambilova, G.É. On weighted iterated Hardy-type operators. Anal. Math., 44 (2), 273–283 (2018). https://doi.org/10.1007/s10476-018-0211-3.

8 Stepanov, V.D., Shambilova, G.É. On iterated and bilinear integral Hardy-type operators. Math. Inequal. Appl., 22 (4), 1505–1533 (2019). https://doi.org/10.7153/mia-2019-22-105.

9 Stepanov, V.D., Shambilova, G.É. On the Iterated Integral Operators on the Cone of Monotone Functions. Sib Math J., 66, 345–363 (2025). https://doi.org/10.1134/S0037446625020119.

10 Křepela, M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema. Collectanea Mathematica, 68, 21–50 (2017). https://doi.org/10.1007/s13348-016-0170-6.

11 Mustafayev, R.Ch., Bilgicli, N. Generalized fractional maximal functions in Lorentz spaces A. Journal of Mathematical Inequalities, 12 (3), 827–851 (2018).

12 Bakhtigareeva, E.G., Goldman, M.L. On the relationship between embeddings and coverings of cones of functions, Mat. Sb., 216 (3), 26–48 (2025). https://doi.org/10.4213/sm10199.

13 Gogatishvili, A., Pick, L. Discretization and anti-discretization of rearrangementinvariant norms. Publicacions Matematiques, 47 (2), 311–358 (2003).

14 Bokayev, N.A, Gogatishvili, A., Abek, A.N. Cones of monotone functions generated by generalized fractional maximal function. TWMS Journal of Pure and Applies Mathematics, 15 (1), 127–141 (2024). https://doi.org/10.30546/22191259.15.1.2024.2487.

15 Unver, T. Embeddings between weighted Cesaro function spaces. Mathematical Inequalities and Applications, 23 (3), 925–942 (2020). http://dx.doi.org/10.7153/mia-2020-23-72.

16 Unver, T. Embeddings between weighted Tandori and Cesaro function spaces. Commun. Faculty of Sciences Univ. of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70 (2), 837–848 (2021).

17 Evans, W.D., Gogatishvili, A., Opic, B. Weighted inequalities involving ρ-quasiconcave operators. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., Hackensack, NJ. 2018. ISBN:978-981-3239-62-3.

[1]*Әбек А.Н.,
PhD, ORCID ID: 0009-0004-7158-3597,
*e-mail: azhar.abekova@gmail.com
[2]Гогатишвили А.,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-3459-0355,
e-mail: gogatish@math.cas.cz
[3]Бокаев Н.А.,
ф.-м.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0002-7071-1882,
e-mail: bokayev2011@yandex.kz
[4]Унвер Т.,
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0414-8400,
e-mail: tugceunver@kku.edu.tr

[1,3]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан
[2]Чехия ғылым Академиясының математика институты, Прага қ., Чехия
[4]Кириккале университеті, Кириккале қ., Түркия

ҮШ ОПЕРАТОРДЫҢ СУПЕРПОЗИЦИЯСЫ ҮШІН САЛМАҚТЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аңдатпа

Копсон, Харди және Тандори операторларының суперпозициясы үшін үш салмақтық теңсіздікті зерттейміз. Бұл жұмыстың мақсаты – $L_1(v)$-ден $L_q(w)$ дейінгі салмақты Лебег кеңістіктеріндегі осы үш оператордың комбинациясы болатын оператордың шенелгендігінің толық сипаттамасын дәлелдеу. Негізгі назар оң нақты осьтегі барлық теріс емес өлшемді функциялар үшін осы теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын анықтауға бағытталған. Өспелі функцияға қатысты Борел өлшемінің іргелі функциясының түсінігі айтарлықтай қолданылады. Тандори операторы сызықтық оператор болмағандықтан, біз бұрынғы жұмыстарда қолданылған екі жақтылық әдістерін пайдалана алмаймыз. Бұл мәселені шешу үшін біз бұрын белгілі әдістердің күрделілігін болдырмайтын жаңа жеңілдетілген дискретизация әдісін әзірлейміз. Нәтижелердің дәлдігі мен оңтайлылығын көрсететін теңсіздіктегі ең жақсы тұрақтының айқын түрі алынды. Осы құрама операторлардың шенелгендігі үшін қажетті және жеткілікті шарттарды орнату арқылы біз Гогатишвили А., Пик Л., Опич Б. [1] еңбектерінде бұрын белгіленген теңсіздіктерді жақсартамыз. Жұмыста алынған нәтижелер функционалдық кеңістіктердегі салмақты теңсіздіктер және операторлық талдау саласындағы бар зерттеулерді кеңейтеді және толықтырады және жуықтау теориясында, гармоникалық талдауда және қатысты салаларда әлеуетті қолданбаларды ұсынады.

Тірек сөздер: салмақты теңсіздік, супремалды оператор, Копсон операторы, Харди операторы, Тандори операторы, ең жақсы тұрақты, операторлардың суперпозициясы, дискретизация.

[1]***Abek A.N.,**
PhD, ORCID ID: 0009-0004-7158-3597,
*e-mail: azhar.abekova@gmail.cm
[2]**Gogatishvili A.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-3459-0355,
e-mail: gogatish@math.cas.cz
[3]**Bokayev N.A.,**
Dr. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0002-7071-1882,
e-mail: bokayev2011@yandex.kz
[4]**Ünver T.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0414-8400,
e-mail: tugceunver@kku.edu.tr

[1,3]L.N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic
[4]Kirikkale University, Kirikkale, Turkey

WEIGHTED INEQUALITIES FOR A SUPERPOSITION OF THE THREE OPERATORS

Abstract

We study a three-weight inequality for a superposition of the Copson, Hardy, and Tandori operators. The goal of this paper is to prove a complete characterization of the boundedness of the operator that is a combination of these three operators in weighted Lebesgue spaces from $L_1(v)$ to $L_q(w)$. The main focus is on determining necessary and sufficient conditions under which this inequality holds for all non-negative measurable functions on the positive real axis. The notion of a fundamental function of a Borel measure with respect to an increasing function is used substantially. Since the Tandori operator is not a linear operator, we cannot use the duality methods used in earlier works. To solve this problem, we develop a new, simplified discretization method that avoids the complexities of previously known methods. An explicit form of the best constant in the inequality is obtained, demonstrating the accuracy and optimality of the results. By establishing necessary and sufficient conditions for the boundedness of these composite operators, we improve the inequalities previously established in the works of Gogatishvili A., Pick L., Opic B. [1]. The results obtained in the paper extend and complement existing research in the field of weighted inequalities and operator analysis in function spaces and offer potential applications in approximation theory, harmonic analysis and related areas.

Keywords: weighted inequality, supremal operator, Copson operator, Hardy operator, Tandori operator, best constant, superposition of operators, discretization.

Дата поступления статьи в редакцию: 18.08.2025