УДК 517.54
МРНТИ 27.23.25

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-4-279-294

[1]Майер Ф.Ф.,
канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru
[1]Тастанов М.Г.,
канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]*Утемисова А.А.,
канд. пед. наук, ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260
*e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]Калаков Б.А.
канд. физ.-матем. наук, ORCID ID: 0009-0003-6007-0254
e-mail: kalakov1968@gmail.com

[1]Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Казахстан

О НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССАХ КЛАССОВ ПОЧТИ ВЫПУКЛЫХ И ДВАЖДЫ ПОЧТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

Известно, что класс K почти выпуклых функций задается условием положительности функционала $Re\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)$ со звездообразной функцией $g(z)$. Замена звездообразной функции $g(z)$ на выпуклую приводит к известному подклассу C' класса K. В настоящей статье вводится обобщение класса C' на случай, когда множество значений $\frac{zf'(z)}{g(z)}$ содержится в области специального вида, которая в частном случае может совпадать и с полуплоскостью. Также обобщение связано с расширением класса C' до определенного подкласса класса нормированных дважды почти выпуклых функций. Многообразие частных случаев области специального вида и переход к дважды почти выпуклым функциям позволяет получить как новые оригинальные результаты, так и обобщения ранее известных результатов. Основные исследования данной статьи направлены на доказательство теорем об искажении, нахождение радиусов выпуклости рассматриваемых классов функций и обоснование точности полученных результатов. Также установлена связь введенного класса функций с некоторым новым классом дважды почти звездообразных функций. Для данного класса и его подклассов также получены новые результаты в виде теорем о росте и радиусе звездообразности и обобщения ранее известных результатов.

Ключевые слова: звездообразные функции, почти звездообразные функции, почти выпуклые функции, теоремы искажения, радиусы выпуклости, теоремы роста, радиусы звездообразности.

Введение

Рассматриваются функции, аналитические в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$. Класс таких функций с разложением вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots$, $n \geq 1$, обозначим через A_n, а класс функций $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots$, $n \geq 1$, – через N_n. Также положим $A := A_1$, $N := N_1$ и пусть P – класс Каратеодори функций $\varphi(z)$ из A с положительной вещественной частью.

Известными подклассами класса N являются класс C выпуклых функций и класс S^* звездообразных функций, а также их подклассы

$$C(\alpha) = \left\{ f \in N: 1 + Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha, 0 \leq \alpha < 1, z \in E \right\},$$

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in N: Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha, 0 \leq \alpha < 1, z \in E \right\}.$$

При этом $C \coloneqq C(0)$ и $S^* \coloneqq S^*(0)$. Опираясь на классы C и S^*, в [1] был представлен класс K почти выпуклых функций.

Напомним [1], что функция $f \in K$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $g \in S^*$ выполняется условие

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{g(z)} \right) > 0, z \in E. \tag{1}$$

Поскольку $zg'(z) \in S^*$ тогда и только тогда, когда $g \in C$, то условие (1) равносильно условию

$$Re\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0, z \epsilon E, \tag{2}$$

в котором $g \in C$.

Рассмотрим также класс $K(\gamma)$ функций $f(z)$, почти выпуклых порядка γ [2], [3], который задается условием

$$\left| arg\ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right| < \gamma\frac{\pi}{2},\ \ 0 < \gamma \leq 1, g \in S^*, z \in E.$$

Отметим, что $C = K(0) \subset K(\gamma) \subset K(1) = K$ и $S^* \subset K$.

Если в условии (2) вместо выпуклой функции $g(z)$ использовать почти выпуклую функцию, то получим класс CK дважды почти выпуклых функций (doubly close-to-convex functions) $f(z)$. При этом $K \subset CK$ и функции класса CK могут быть и неоднолистными.

В статье исследуются свойства некоторых подклассов класса почти выпуклых функций и класса дважды почти выпуклых функций, включая теоремы об искажении и о радиусе выпуклости. Устанавливается взаимосвязь данных классов с другими классами аналитических функций, на основе которой выводятся свойства функций этих классов. Представленные здесь результаты обобщают ряд ранее известных работ.

Материалы и методы

Концепция подчиненности аналитических функций имеет плодотворные применения при исследовании экстремальных свойств аналитических функций, различные классы которых также удобно задавать в форме подчиненности.

Всюду ниже будем считать, что $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ – аналитические в круге E функции и $\varphi_0(z)$ однолистна в E.

Определение 1. Если выполняется условие согласования нормировок $\varphi(0) = \varphi_0(0)$ и условие вложения областей $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$, то функция $\varphi(z)$ называется подчиненной функции $\varphi_0(z)$.

При этом используется обозначение $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, а функция $\varphi_0(z)$ называется мажорантой подчинения.

В теории подчиненности важным фактом является то, что соотношение $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ распространяется на все внутренние круги $|z| < r$, $0 \leq r < 1$, что позволяет многие свойства мажоранты подчинения переносить на подчиненную функцию.

Определение 1. Будем говорить, что аналитическая в E функция $\varphi(z)$ из A_n принадлежит классу $P_n(m,\gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left|(\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}} - m\right| < m,\ \ m > \frac{1}{2},\ \ \gamma \in [-1;1]\backslash\{0\}, z \in E. \tag{3}$$

При этом будем считать, что $P(m,\gamma) := P_1(m,\gamma)$.

Условие (3) равносильно подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, где мажоранта подчинения $\varphi_0(z)$ задается по формуле

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+\varepsilon z}{1-c\varepsilon z}\right)^{\gamma},\ \ c = 1 - \frac{1}{m}, -1 < c \le 1, \varepsilon = sign\ (\gamma). \tag{4}$$

При разных значениях параметров областью значений $\varphi_0(E)$ может быть круг, полуплоскость и область, ограниченная гиперболой или правой половиной лемнискаты Бернулли.

Лемма 1. Пусть $\varepsilon = sign\ (\gamma)$, $c = 1 - \frac{1}{m}$. Тогда для любой функции $\varphi \in P_n(m,\gamma)$ при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, выполняются оценки

$$\left(\frac{1-\varepsilon r^n}{1+\varepsilon c r^n}\right)^{\gamma} \le Re\,\varphi(z) \le |\varphi(z)| \le \left(\frac{1+\varepsilon r^n}{1-\varepsilon c r^n}\right)^{\gamma},$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \le \frac{|\gamma|(1+c)nr^n}{(1-r^n)(1+cr^n)}, \tag{5}$$

которые достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ задана по формуле (4).

Для случая, когда $0 < \gamma \le 1$, лемма 1 доказана в [4], а при $-1 \le \gamma < 0$ лемма 1 вытекает из следствия 1 [4].

В статье [5] были исследованы свойства функций $f(z)$ из N, которые удовлетворяют условию (1), но не со звездообразной функцией $g(z)$, а с выпуклой функцией $g(z)$. В дальнейшем этот класс функций исследовался в [6], где было введено обозначение класса C'. Поскольку $C \subset S^*$, то в силу определения класса C' получаем, что $C' \subset K$.

Опираясь на концепцию подчиненности аналитических функций, в статьях [7, 8] были введены и исследовались подклассы $C'[A,B]$ и $C'(\alpha,\beta)$ класса C', заданные, соответственно, условиями

$$z\frac{f'(z)}{g(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, -1 \le B < A \le 1, g \in C$$

и

$$z\frac{f'(z)}{g(z)} \prec \frac{1+(2\alpha-1)\beta z}{1+\beta z}, 0 \le \alpha < 1, 0 < \beta \le 1, g \in C.$$

Заметим, что $C'[1,-1] = C'(0,1) = C'$.

В [9] исследовался класс $K_C'(\alpha)$ функций $f \in N$ таких, что

$$Re\frac{f'(z)}{g'(z)} > \alpha,$$

где $g \in C'$. Поскольку $g \in C'$ и $C' \subset K$, то класс $K_C'(\alpha)$ является подклассом класса CK дважды почти выпуклых функций.

С почти выпуклыми функциями тесно связаны почти звездообразные функции (close-to-starlike functions), класс K^* которых был введен в [10] с помощью условия

$$Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0,\ \ z \in E, \tag{6}$$

где $g \in S^*$. Если в условии (6) $g \in K^*$, то получаем класс CK^* дважды почти звездообразных функций (doubly close-to-starlike functions). При этом, $S^* \subset K^* \subset CK^*$.

К первым исследованиям в этом направлении можно отнести статьи [11–12]. В них найдены радиусы звездообразности классов почти звездообразных функций, заданных условиями вида $Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0$ и $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, в которых $g \in S^*$. Для нас интересными будут два аналогичных результата из [11–12], в которых $g(z)$ является выпуклой. Именно в [11–12] найдены радиусы звездообразности $r_1^* = 1/3$ и $r_2^* = \sqrt{2} - 1$ классов, заданных условиями $Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0$ и $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, в которых $g \in C$.

Между классами K и K^* можно установить простую связь, которая выражается соотношением $F \in K \Leftrightarrow f = zF'(z) \in K^*$. Учитывая также, что $F \in C \Leftrightarrow f = zF'(z) \in S^*$, на основе приведенных выше результатов из [11–12] получаем, что радиусы выпуклости классов функций, заданных условиями $Re\left(z\frac{f'(z)}{g(z)}\right) > 0$ и $\left|z\frac{f'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, где $g \in C$, задается формулами $r_1^o = 1/3$ и $r_2^o = \sqrt{2} - 1$. То есть в [11–12], по сути, найдены радиусы выпуклости класса C' и его подкласса, заданного условием $\left|z\frac{f'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$.

Всюду ниже будем считать, что $a, b > \frac{1}{2}$ и $\gamma, \delta \in [-1; 1]\backslash\{0\}$.

Определение 2. Пусть $C'(a,\gamma)$ – класс функций $f \in N$, для каждой из которых существует функция $g \in C$ такая, что $\frac{zf'(z)}{g(z)} \in P(a,\gamma)$.

Таким образом,

$$f \in C'(a,\gamma) \;\Leftrightarrow\; \left|\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, \quad g \in C, z \in E.$$

Отметим, что класс $C'(a,\gamma)$, являясь подклассом класса K, содержит только однолистные (почти выпуклые) функции.

Покажем, что класс $C'(a,\gamma)$ не является пустым множеством.

Пусть $\gamma \in [-1; 1]\backslash\{0\}$, $c = 1 - \frac{1}{a}$, $a > \frac{1}{2}$. Рассмотрим функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-ct}\right)^{\gamma} \frac{dt}{1-t}, \; g_0(z) = \frac{z}{(1-z)}.$$

Тогда $g_0 \in C$ и

$$\left(\frac{zf_0'(z)}{g_0(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1+z}{1-cz}.$$

Так как функция $w_0(z) = \frac{1+z}{1-cz}$ однолистно отображает круг E на круг $|w - a| < a$, то функция $f_0(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, z \in E.$$

Следовательно, $f_0 \in C'(a,\gamma)$ и $C'(a,\gamma) \neq \emptyset$.

Рассмотрим другие примеры функций класса $C'(a,\gamma)$.

Пример 1. Пусть $\gamma \in [-1; 1]\backslash\{0\}$, $c = 1 - \frac{1}{a}$, $0 \le c < 2 - \sqrt{3}$ и

$$f_1(z) = \frac{1}{(1+\gamma)(1+c)}\left[\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{1+\gamma} - 1\right], \; g_1(z) = \frac{z}{(1-cz)^2}.$$

Поскольку в круге E для $c \in [0;\ 2 - \sqrt{3}]$ выполняется условие

$$Re\left(\frac{zg_1''(z)}{g_1'(z)}\right) = Re\left(\frac{cz}{1+cz} + \frac{3cz}{1-cz}\right) > -\frac{c}{1-c} - \frac{3c}{1+c} = \frac{c^2 - 4c + 1}{1 - c^2} \ge -1,$$

то $g_1 \in S^0$. Так как

$$f_1'(z) = \left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1-cz)^2},$$

то

$$\left(\frac{zf_1'(z)}{g_1(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1+z}{1-cz}.$$

Поэтому выполняется условие

$$\left|\left(\frac{zf_1'(z)}{g_1(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a,$$

следовательно, $f_1 \in C'(a,\gamma)$.

При $c = 0$ функция $g_1(z) = z$ и мы получаем более простой пример функции класса $C'(1,\gamma)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{(1+\gamma)}[(1+z)^{1+\gamma} - 1].$$

Пример 2. Пусть

$$f_2(z) = \frac{2z}{1-z} + ln\, ln\,(1-z), \quad g_2(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Тогда $g_2 \in S^0$ и $f_2 \in C'(\infty,1)$, так как

$$Re\frac{zf_2'(z)}{g_2(z)} = Re\frac{1+z}{1-z} > 0, z \in E.$$

Пример 3. Пусть $0 \le k \le 1/4$ и пусть

$$f_3(z) = -(1+2k)z - \frac{k}{2}z^2 - 2(1+k)\,ln\,(1-z), \; g_3(z) = z + kz^2,$$

причем, в силу ограничения на параметр k функция $g_3 \in S^0$. Поскольку

$$f_3'(z) = -(1+2k) - kz + \frac{2(1+k)}{1-z} = \frac{(1+z)(1+kz)}{1-z},$$

то

$$\frac{zf_3'(z)}{g_3(z)} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Поэтому $f_3 \in C'(\infty,1)$.

При $k = 0$ получаем функцию

$$f_3(z) = -z - 2\,ln\,(1-z) \in C'(\infty,1).$$

Пример 4. Пусть $f_4(z) = z + kz^2$, $0 \le k \le 1/2$, и пусть $g_4(z) = z$. Тогда

$$\frac{zf_4'(z)}{g_4(z)} = 1 + 2kz.$$

Поэтому

$$\left|\frac{zf_4'(z)}{g_4(z)} - 1\right| = 2k|z| < 1.$$

Следовательно, $f_4 \in C'(1,1)$.

С дугой стороны,

$$\left|arg\; arg\;\frac{zf_4'(z)}{g_4(z)}\right| = |arg\; arg\;(1+2kz)| \le arcsin\; arcsin\;(2k) = \gamma\frac{\pi}{2},$$

где $\gamma = \frac{2}{\pi}\, arcsin\; arcsin\;(2k)$. Поэтому $f_4 \in C'(\infty,\gamma)$.

Определение 3. Пусть $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ – класс функций $f \in N$, для каждой из которых существует функция $g \in C'(b,\delta)$ такая, что $\frac{f'(z)}{g'(z)} \in P(a,\gamma)$.

Из определения 3 вытекает, что любая функция $f \in K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ должна удовлетворять неравенству

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, z \in E, \tag{7}$$

причем

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{h(z)}\right)^{\frac{1}{\delta}} - b\right| < b, \ \ h \in C, z \in E. \tag{8}$$

Из условия (8) следует, что функция $g(z)$ является почти выпуклой. Поэтому в силу условия (7) функция $f(z)$ является дважды почти выпуклой.

Заметим, что $C'(a,\gamma) \subset K(\gamma)$ и $C'(a,\gamma) \subset C'$. Кроме того, $C'(a,\gamma) := K_C'(a,\gamma,\infty,0)$, $C'(b,\delta) := K_C'(\infty,0,b,\delta)$ и $K_C'(\alpha) := K_C'\left(\frac{1}{2\alpha}, -1, \infty, 1\right)$, причем $K_C'(a,\gamma,b,\delta) \subset K_C'(0)$.

Рассмотрим примеры функций класса $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$. Кроме того, покажем, что класс $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ может содержать и неоднолистные функции.

Пример 5. Пусть $0 < \delta \le 1$, $0 < \sigma \le 2$, $0 < \gamma = \sigma - \delta \le 1$, $c = 1 - \frac{1}{a}$, $a > \frac{1}{2}$ и

$$f_5(z) = \frac{1}{(1+\sigma)(1+c)}\left[\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{1+\sigma} - 1\right],$$

$$g_5(z) = \frac{1}{(1+\delta)(1+c)}\left[\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{1+\delta} - 1\right], h_5(z) = \frac{z}{(1-cz)^2}.$$

Тогда

$$\frac{zg_5'(z)}{h_5(z)} = \left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{\delta}.$$

Поэтому $g_5 \in C'(a,\delta)$.

Поскольку

$$\frac{f_5'(z)}{g_5'(z)} = \left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{\gamma},$$

то

$$\left|\left(\frac{f_5'(z)}{g_5'(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, z \in E.$$

В силу этого, с учетом того, что $g_5 \in C'(a,\delta)$, по определению 3 получаем, что $f_5 \in K_C'(a,\gamma,a,\delta)$.

Рассмотрим частный случай, когда $\sigma = 2$, $\delta = 1$ и $c = 0$.

Тогда

$$f_5(z) = \frac{1}{3}[(1+z)^3 - 1], \ g_5(z) = \frac{1}{2}[(1+z)^2 - 1], \ h_5(z) = z.$$

Поскольку $\frac{zg_5'(z)}{h_5(z)} = 1 + z$, то $\left|\frac{zg_5'(z)}{h_5(z)} - 1\right| < 1, z \in E$, и $g_5 \in C'(1,1)$. Аналогично $\frac{f_5'(z)}{g_5'(z)} = 1 + z$, поэтому $f_5 \in K_C'(1,1,1,1)$.

Заметим, что функция $f_5(z) = [(1+z)^3 - 1]/3$ не является однолистной в круге E.

Для доказательства этого возьмем две точки $z_1 \ne z_2$ из круга E и покажем, что $f_5(z_1) = f_5(z_2)$. Пусть

$$z_1 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i, \ \ z_2 = \underline{z_1} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Обозначим $\tau = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Тогда $1 + z_1 = -\tau/2$, $1 + z_2 = -\tau^2/2$. Поэтому $(1+z_1)^3 = -1/8$, $(1+z_2)^3 = -1/8$. Следовательно, $f_5(z_1) = -3/8 = f_5(z_2)$, то есть функция $f_5(z)$ не является однолистной в круге E.

Таким образом, мы доказали, что класс $K_C'(1,1,1,1)$, а значит, и класс $K_C'(a,\gamma,a,\delta)$ содержит и неоднолистные функции.

Пример 6. Пусть $f_6(z) = \frac{z(5-z)}{1-z} + 4ln\,(1-z)$, $g_6(z) = -z - 2\,ln\,(1-z)$ и $h_6(z) = z \in C$.

Тогда

$$f_6'(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2, \quad g_6'(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

и

$$\frac{z g_6'(z)}{h_6(z)} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Поэтому $g_6 \in C'(\infty,1)$. С учетом этого, так как

$$\frac{f_6'(z)}{g_6'(z)} = \frac{1+z}{1-z},$$

то $f_6 \in K_C'(\infty,1,\infty,1)$.

Определение 4. Пусть $C^*(a,\gamma)$ – класс функций $F \in N$, для каждой из которых существует функция $g \in C$ такая, что $\frac{F(z)}{g(z)} \in P(b,\gamma)$.

Таким образом,

$$F \in C^*(a,\gamma) \;\Leftrightarrow\; \left|\left(\frac{F(z)}{g(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, \;\; g \in C, z \in E.$$

Определение 5. Пусть $K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$ – класс функций $F \in N$, для каждой из которых существует функция $G \in C^*(b,\delta)$ такая, что $\frac{F(z)}{G(z)} \in P(a,\gamma)$.

Из определения 5 следует, что любая функция $F \in K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$ должна удовлетворять неравенству

$$\left|\left(\frac{F(z)}{G(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, z \in E, \tag{9}$$

где

$$\left|\left(\frac{G(z)}{h(z)}\right)^{\frac{1}{\delta}} - b\right| < b, \;\; h \in C, z \in E. \tag{10}$$

Поскольку $h \in C$, то $h \in S^*$. Кроме того, если функция $G(z)$ удовлетворяет условию (10), то она удовлетворяет и условию $Re\frac{G(z)}{h(z)} > 0$, где $h \in S^*$. Поэтому функции класса $C^*(b,\delta)$ являются почти звездообразными функциями, то есть $C^*(b,\delta) \subset K^*$. Аналогично, в силу (9)–(10) класс $K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$ является подклассом класса CK^* дважды почти звездообразных функций.

Пример 7. Пусть $\gamma,\delta \in [-1;1]\backslash\{0\}$, $c = 1 - \frac{1}{a}$, $d = 1 - \frac{1}{b}$, $a,b > \frac{1}{2}$ и

$$F(z) = z\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+z}{1-dz}\right)^{\delta}, \quad G(z) = z\left(\frac{1+z}{1-dz}\right)^{\delta}, \quad h(z) = z.$$

Тогда $G \in C^*(b,\delta)$, поскольку

$$\left(\frac{G(z)}{h(z)}\right)^{\frac{1}{\delta}} = \frac{1+z}{1-dz}$$

и поэтому выполняется условие (10). С другой стороны,

$$\left(\frac{F(z)}{G(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1+z}{1-cz}.$$

Поэтому выполняется условие (9), где $G \in C^*(b,\delta)$. Следовательно, по определению 5 $F \in K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$.

В частности, если $\gamma = \delta = c = d = 1$, то $G(z) = z\frac{1+z}{1-z} \in C^*(1,1)$. При этом $G'(z) = 0$ в точке $z = 1-\sqrt{2}$ круга E. Следовательно, класс $C^*(1,1)$ почти звездообразных функций содержит и неоднолистные функции.

Между классами $C'(a,\gamma)$, $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ и классами $C^*(a,\gamma)$, $K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$ имеется простая связь

$$f \in C'(a,\gamma) \Leftrightarrow F = zf'(z) \in C^*(a,\gamma)$$

и

$$f \in K_C'(a,\gamma,b,\delta) \Leftrightarrow F = zf'(z) \in K_C^*(a,\gamma,b,\delta). \tag{11}$$

Целью статьи является исследование свойств функций классов $C'(a,\gamma)$ и $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$, в том числе теорем об искажении и радиусе выпуклости, а также на основе взаимосвязи (11) – свойств функций классов $C^*(a,\gamma)$ и $K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$. Тем самым, получить новые результаты и обобщения ряда результатов из ранних работ.

Результаты и обсуждение

1. Теорема искажения в классе $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$

Теорема 1. Пусть $a_1 = 1-\frac{1}{a}$, $b_1 = 1-\frac{1}{b}$ и $\varepsilon_\gamma = sign\,(\gamma)$, $\varepsilon_\delta = sign\,(\delta)$. Тогда для любой функции $f \in K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, имеет место точная оценка

$$\left(\frac{1-\varepsilon_\gamma r}{1+\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^\gamma \left(\frac{1-\varepsilon_\delta r}{1+\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^\delta \frac{1}{1+r} \le |f'(z)| \le$$

$$\le \left(\frac{1+\varepsilon_\gamma r}{1-\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^\gamma \left(\frac{1+\varepsilon_\delta r}{1-\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^\delta \frac{1}{1-r}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{g'(z)}$, $\psi(z) = \frac{zg'(z)}{h(z)}$. Тогда

$$f'(z) = \varphi(z)\psi(z)\frac{h(z)}{z}.$$

Поскольку $\varphi \in P(a,\gamma)$, $\psi \in P(b,\delta)$, то на основании леммы 1 при $n = 1$ для всех z, $|z| = r$, $0 \le r < 1$, выполняются неравенства

$$\left(\frac{1-\varepsilon_\gamma r}{1+\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^\gamma \le |\varphi(z)| \le \left(\frac{1+\varepsilon_\gamma r}{1-\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^\gamma,$$

$$\left(\frac{1-\varepsilon_\delta r}{1+\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^\delta \le |\psi(z)| \le \left(\frac{1+\varepsilon_\delta r}{1-\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^\delta.$$

В силу этого

$$\left(\frac{1-\varepsilon_\gamma r}{1+\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^\gamma \left(\frac{1-\varepsilon_\delta r}{1+\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^\delta \left|\frac{h(z)}{z}\right| \le |f'(z)| \le \left|\frac{h(z)}{z}\right| \left(\frac{1+\varepsilon_\gamma r}{1-\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^\gamma \left(\frac{1+\varepsilon_\delta r}{1-\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^\delta.$$

По теореме роста для выпуклой функции $h(z)$ (см. [13])

$$\frac{r}{1+r} \le |h(z)| \le \frac{r}{1-r}.$$

Поэтому предыдущая оценка вместе с данной оценкой приводят к оценке (12).

Точность оценки (12) следует из того, что для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+\varepsilon_\gamma t}{1-\varepsilon_\gamma a_1 t}\right)^\gamma \left(\frac{1+\varepsilon_\delta t}{1-\varepsilon_\delta b_1 t}\right)^\delta \frac{dt}{1-t} \in K'_C(a,\gamma,b,\delta) \tag{13}$$

в точках $z=-r$ и $z=r$ в оценке (12), соответственно, слева и справа достигаются знаки равенства.

2. Радиус выпуклости класса $K'_C(a,\gamma,b,\delta)$

Теорема 2. Пусть $f \in K'_C(a,\gamma,b,\delta)$ и $a_1 = 1-\frac{1}{a}$, $b_1 = 1-\frac{1}{b}$. Тогда функция $f(z)$ отображает круг $|z| < r^0$ на выпуклую область, где r^0 – единственный на интервале $(0;1)$ корень уравнения

$$\frac{1}{1+r} - \frac{r}{1-r}\left(|\gamma|\frac{1+a_1}{1+a_1 r} + |\delta|\frac{1+b_1}{1+b_1 r}\right) = 0. \tag{14}$$

При $0 < \gamma, \delta \le 1$ результат точный. Экстремальная функция задается по формуле (13).

Доказательство. Если обозначить $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{g'(z)}$, $\psi(z) = \frac{zg'(z)}{h(z)}$, то $zf'(z) = \varphi(z)\psi(z)h(z)$ и

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = z\frac{h'(z)}{h(z)} + z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Поэтому в круге $|z| \le r$ выполняется неравенство

$$1 + Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \ge Re\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) - \left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| - \left|z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right|.$$

Известно (напр., [14]), что любая выпуклая функция является звездообразной порядка $\frac{1}{2}$, то есть $Re\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) > 1/2$. Поэтому

$$z\frac{h'(z)}{h(z)} \prec \frac{1}{1+z},$$

откуда

$$Re\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) = \frac{1}{1+r}.$$

Поэтому, применяя оценку (5) при $n=1$ к функциям $\varphi \in P(a,\gamma)$ и $\psi \in P(b,\delta)$, для всех z, $|z| = r$, $0 \le r < 1$, получаем неравенство

$$1 + Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \ge \frac{1}{1+r} - \frac{|\gamma|(1+a_1)r}{(1-r)(1+a_1 r)} - \frac{|\delta|(1+b_1)r}{(1-r)(1+b_1 r)}.$$

Поэтому, если

$$\frac{1}{1+r} - \frac{|\gamma|(1+a_1)r}{(1-r)(1+a_1 r)} - \frac{|\delta|(1+b_1)r}{(1-r)(1+b_1 r)} = 0,$$

то будет выполняться условие выпуклости и функция $f(z)$ будет выпуклой в круге $|z| \le r$, то есть приходим к уравнению (14). Поскольку функция $\mu_1(r) = \frac{1}{(1+r)}$ убывает на $[0;1]$ от 1 до $1/2$, а функция

$$\mu_2(r) = \frac{r}{1-r}\left(|\gamma|\frac{1+a_1}{1+a_1 r} + |\delta|\frac{1+b_1}{1+b_1 r}\right)$$

возрастает на $[0;1)$ от 0 до $+\infty$, то уравнение (14) на $(0;1)$ имеет единственный корень r_0.

Для доказательства точности радиуса выпуклости при $0 < \gamma, \delta \leq 1$ рассмотрим функцию (13) с $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\delta = 1$. Тогда

$$1 + z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{\gamma(1+a_1)z}{(1+z)(1-a_1 z)} + \frac{\delta(1+b_1)z}{(1+z)(1-b_1 z)}.$$

Поэтому в точке $z = -r_0$ получаем

$$1 + Re\frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{1}{1+r_0} - \frac{r_0}{1-r_0}\left(\gamma\frac{1+a_1}{1+a_1 r_0} + \delta\frac{1+b_1}{1+b_1 r_0}\right) = 0.$$

То есть радиус выпуклости улучшить нельзя.

3. Некоторые следствия

Положим, $\delta = \gamma = -1$, $b\frac{=1}{(2\beta)}$, $a = \frac{1}{(2\alpha)}$. Тогда класс $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ преобразуется в класс функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$Re\frac{f'(z)}{g'(z)} > \alpha, Re\frac{zg'(z)}{h(z)} > \beta, h \in C, \tag{15}$$

где $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Поскольку теперь $a_1 = 1 - 2\alpha$, $b_1 = 1 - 2\beta$, $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\delta = -1$, то из теорем 1–2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если выполняется условие (15), то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедливо неравенство

$$\frac{[1-(1-2\alpha)r][1-(1-2\beta)r]}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{[1+(1-2\alpha)r][1+(1-2\beta)r]}{(1-r)^3}$$

и функция $f(z)$ отображает круг $|z| \leq r^o$ на выпуклую область, где r^o – единственный на интервале $(0;1)$ корень уравнения

$$\frac{1}{1+r} - \frac{2r}{1-r}\left(\frac{1-\alpha}{1+(1-2\alpha)r} + \frac{1-\beta}{1+(1-2\beta)r}\right) = 0.$$

При $\beta = 0$ следствие 1 дает следующие результаты статьи [9].

Следствие 2 [9]. В классе $K_C'(\alpha)$ имеет место точная оценка

$$\frac{[1-(1-2\alpha)r](1-r)}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{[1+(1-2\alpha)r](1+r)}{(1-r)^3}$$

и функция $f(z)$ отображает круг $|z| \leq r^o$ на выпуклую область, где

$$r^o = \frac{\left(2-\sqrt{9-2\alpha}\right)}{(2\alpha-5)}.$$

Пусть $\delta = 0$, $b \to \infty$. Тогда класс $K_C'(a,\gamma,b,\delta)$ преобразуется в класс $C'(a,\gamma)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left|\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, \quad g \in C.$$

Поэтому прямым следствием теорем 1 и 2 является

Следствие 3. Пусть $f \in C'(a,\gamma)$, где $0 < \gamma \leq 1$, $a > \frac{1}{2}$, и пусть $a_1 = 1 - \frac{1}{a}$ и r^o – корень уравнения

$$\frac{1}{1+r} - \frac{\gamma r}{1-r}\frac{1+a_1}{1+a_1 r} = 0,$$

принадлежащий интервалу $(0;1)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$ справедлива оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma}}{(1+a_1r)^{\gamma}}\frac{1}{1+r}\le|f'(z)|\le\frac{(1+r)^{\gamma}}{(1-a_1r)^{\gamma}}\frac{1}{1-r}$$

и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z|<r^{o}$. Теорема искажения и радиус выпуклости являются точными.

Учитывая, что $C':=C'(\infty,1)$, из следствия 3 при $\gamma=1$, $a\to\infty$ получаем оценку [5]

$$\frac{1-r}{(1+r)^2}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^2}$$

и радиус выпуклости $r_0=1/3$ класса C', ранее найденный в [5], [12].

При $\gamma=1$, $a=1$ из следствия 2 вытекает точная оценка

$$\frac{1-r}{1+r}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{1-r}$$

и точный радиус выпуклости $r_0=\sqrt{2}-1$ класса $C'(1{,}1)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left|\frac{zf'(z)}{g(z)}-1\right|<1$, где $g\in C$. Заметим, что радиус выпуклости получен ранее в [13].

Положим $\delta=\gamma=1$, $b=a=1$. Тогда $\varepsilon_\gamma=\varepsilon_\delta=1$, $a_1=b_1=0$ и получаем класс $K'_C(1{,}1{,}1{,}1)$ функций $f(z)$, заданный условием

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}-1\right|<1,\left|\frac{zg'(z)}{h(z)}-1\right|<1, h\in C.$$

Поэтому имеет место

Следствие 4. В классе $K'_C(1{,}1{,}1{,}1)$ справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^2}{1+r}\le|f'(z)|\le\frac{(1+r)^2}{1-r}$$

и радиус выпуклости $r^{o}=\left(\sqrt{17}-3\right)/2$.

4. Почти звездообразные и дважды почти звездообразные функции

Взаимосвязь (11) классов $K'_C(a,\gamma,b,\delta)$ и $K^*_C(a,\gamma,b,\delta)$ с учетом соотношения $f\in C\Leftrightarrow F=zf'(z)\in S^*$ позволяет результаты теорем 1 и 2 перенести на класс $K^*_C(a,\gamma,b,\delta)$ дважды почти звездообразных функций.

Теорема 3. Пусть $a_1=1-\frac{1}{a}$, $b_1=1-\frac{1}{b}$ и $\varepsilon_\gamma=sign\,(\gamma)$, $\varepsilon_\delta=sign\,(\delta)$. Тогда для любой функции $F(z)$ класса $K^*_C(a,\gamma,b,\delta)$ при $|z|=r$, $0\le r<1$, справедлива точная оценка

$$\left(\frac{1-\varepsilon_\gamma r}{1+\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^{\gamma}\left(\frac{1-\varepsilon_\delta r}{1+\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^{\delta}\frac{r}{1+r}\le|F(z)|\le$$
$$\le\left(\frac{1+\varepsilon_\gamma r}{1-\varepsilon_\gamma a_1 r}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+\varepsilon_\delta r}{1-\varepsilon_\delta b_1 r}\right)^{\delta}\frac{r}{1-r} \tag{16}$$

и функция $F(z)$ отображает круг $|z|<r^*$ на звездообразную область, где r^* – корень уравнения (14).

При $0<\gamma,\delta\le1$ результат точный. Экстремальная функция имеет вид

$$F_0(z)=\left(\frac{1+\varepsilon_\gamma z}{1-\varepsilon_\gamma a_1 z}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+\varepsilon_\delta z}{1-\varepsilon_\delta b_1 z}\right)^{\delta}\frac{z}{1-z}. \tag{17}$$

Примечание 1. Обозначим через $r^*(\alpha)$ радиус звездообразности порядка α класса $K^*_C(a,\gamma,b,\delta)$. Если в теоремах 2 и 3 вместо условия выпуклости и условия звездообразности использовать условие $1+Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$ выпуклости порядка α (в теореме 2) и, соответственно, условие $Re\left(z\frac{F'(z)}{F(z)}\right) > \alpha$ звездообразности порядка α (в теореме 3), то по аналогии с предыдущим найдем радиус $r^*(\alpha)$ как корень уравнения

$$\frac{1}{1+r} - \frac{r}{1-r}\left(|\gamma|\frac{1+a_1}{1+a_1 r} + |\delta|\frac{1+b_1}{1+b_1 r}\right) - \alpha = 0. \qquad (18)$$

Поскольку частью экстремальной функции $F_0(z)$ из (17) является выпуклая функция $h_0(z) = \frac{z}{1-z}$, то частным случаем класса $K_C^*(a,\gamma,b,\delta)$ является класс $F(a,\gamma,b,\delta)$ функций $F(z)$, определенный с помощью условия

$$\left|\left(\frac{F(z)}{G(z)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| < a, \quad \left|\left(\frac{1-z}{z}G(z)\right)^{\frac{1}{\delta}} - b\right| < b.$$

Поэтому в качестве следствия из теоремы 3 с учетом примечания 1 получаем

Следствие 5. Пусть $a_1 = 1 - \frac{1}{a}$, $b_1 = 1 - \frac{1}{b}$, $\varepsilon_\gamma = sign\,(\gamma)$, $\varepsilon_\delta = sign\,(\delta)$, $a, b > \frac{1}{2}$, $\gamma, \delta \in [-1; 1]\backslash\{0\}$. Тогда в классе $F(a,\gamma,b,\delta)$ при $|z| = r$ справедлива точная оценка (16) и любая функция $F(z)$ из $F(a,\gamma,b,\delta)$ отображает круг $|z| < r^*(\alpha)$ на звездообразную область, где $r^*(\alpha)$ – корень уравнения (18), принадлежащий интервалу $(0; 1)$.

При $0 < \gamma, \delta \le 1$ результат точный. Экстремальная функция задается по формуле (17).

В последние годы вышел ряд работ (например, [15–20]), в которых получены различные радиусы звездообразности некоторых классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций.

Частными случаями класса $F(a,\gamma,b,\delta)$ являются классы, рассматриваемые в [15]:

$F_1 = F(\infty,1,\infty,1) = \left\{F(z): Re\,\frac{F(z)}{G(z)} > 0, Re\,\frac{1-z}{z}G(z) > 0\right\}$,

$F_2 = F(1,1,\infty,1) = \left\{F(z): \left|\frac{F(z)}{G(z)} - 1\right| < 1, Re\left(\frac{1-z}{z}G(z)\right) > 0\right\}$,

$F_3 = F(\infty,1,\infty,0) = \left\{F(z): Re\left(\frac{1-z}{z}F(z)\right) > 0\right\}$.

Поэтому при соответствующем выборе параметров a, γ, b, δ из следствия 5 получаются радиусы звездообразности порядка α классов F_1, F_2, F_3 из [15] и в дополнение к результатам из [15] – теоремы искажения классов F_1, F_2, F_3.

Следствие 6. Теоремы искажения и радиусы звездообразности порядка α классов F_1, F_2, F_3 имеют следующий вид:

1) в классе F_1

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^3} \le |F(z)| \le \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^3}, \quad r(F_1,\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{5+\sqrt{25-4\alpha(1-\alpha)}};$$

2) в классе F_2

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^2} \le |F(z)| \le \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^2}, \quad r(F_2,\alpha) = \frac{1-\alpha}{2+\sqrt{4+(1-\alpha)^2}};$$

3) в классе F_3

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^2} \le |F(z)| \le \frac{r(1+r)}{(1-r)^2}, \quad r(F_3,\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3+\sqrt{9-4\alpha(1-\alpha)}}.$$

Заключение

В статье получило дальнейшее развитие исследование классов аналитических нормированных функций $f(z)$ из N, введенных в [5] и [9]. Для этого вводится и исследуется обобщенный класс дважды почти выпуклых функций, который при определенных значениях параметров приводит как к классам из [5], [9] и других статей, а также дает ряд новых интересных подклассов.

Установлена связь введенного класса функций с некоторым подклассом класса дважды почти звездообразных функций, на основе которой исследованы свойства этого класса. В том числе получены обобщения некоторых ранее известных результатов.

Доказанные в статье утверждения являются новыми результатами в теории экстремальных задач для подклассов дважды почти выпуклых и дважды почти звездообразных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1 Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. – 1952. – Vol. 1 – No. 2 – P. 169–185. https://10.1307/mmj/1028988895.

2 Renyi A. Some remarks on univalent functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. – 1959. – Sec. A.3. – № 2. – P. 111–121. http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf.

3 Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. –1956. – Vol. 23. – No. 3. – P. 459–462. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0

4 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2024. – 21(2). – С. 127–138. https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138.

5 Abdel-Gawad H.R., Thomas D.K. A subclass of close-to-convex functions // Publications De L'Institut Mathématique, Nouvelle série tome. – 1991. – Vol. 49. No. 63. – P. 61–66.

6 Selvaraj C. A subclass of close-to-convex functions // South East Asian Bull. of Math. – 2004. – Vol. 28 – P. 113–123.

7 Mehork B.S., Singh G. A subclass of close-to-convex functions // Int. J. of Math. Analysis. – 2010, Vol. 4 – No. 27 – P. 1319–1327. http://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2010/ijma-25-28-2010/singhIJMA25-28-2010.pdf.

8 Peng Z.G. On a subclass of close to convex functions // Acta Mathematica Scientia, – 2010. – Vol. 30. – No. 5. – P. 1449–1456.

9 Stelin S., Selvaraj C. On a generalized class of close-to-convex functions of order α. Intern // J. of Pure and Applied Math. – 2016. – Vol. 109. – No. 5. – P. 141–149.

10 Reade M.O. On close-to-convex univalent functions // Michigan Math. J. – 1955. – Vol. 3 – P. 59–62.

11 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 14. – P. 514–520.

12 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II // Proc. Am. Math. Soc. – 1963. – Vol. 14. – P. 521–524. http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5.

13 Kohr G., Graham I. Geometric function theory in one and higher dimensions // New York: Pure and Applied Mathematics (M. Dekker), Inc. 56. – 2003. – 528 p. https://doi.org/10.1201/9780203911624.

14 Strohhäcker E. Beiträge zur theorie der schlichten funktionen // Mathematische Zeitschrift. – 1933. – Vol. 37 – P. 356–380.

15 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. – 2021. – Vol. 71. – No. 1. – P. 83–104. https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.06999.

16 Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744 – 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744.

17 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734 – 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734.

18 Sharma M., Jain N.K., Kumar S. Constrained radius estimates of certain analytic functions // arXiv:2305.16210v1 [math.CV] – 2023.

19 Kanaga R., Ravichandran V. Starlikeness for certain close-to-star functions // Hacet. J. Math. Stat. – 2021. – Vol. 50. – No. 2. – P. 414–432. https://doi.org/10.15672/hujms.702703.

20 Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. On the radius constants for classes of analytic functions // arXiv:1207.4529v1 [math.CV]. – 2012. https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.4529.

REFERENCES

1 Kaplan, W. Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J., 1 (2), 169–185 (1952) . https://10.1307/mmj/1028988895.

2 Renyi, A. Some remarks on univalent functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sec. A.3, no. 2, pp. 111–121 (1959). http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf.

3 Reade, M.O. The coefficients of close-to-convex functions, Duke Math. J., vol. 23, no. 3, pp. 459–462 (1956). https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

4 Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemissova, A.A. and Ysmagul, R.S. Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness of some classes of starlike and close-to-starlike functions, Herald of the Kazakh-British technical university, 21(2), 127–138 (2024). https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138.

5 Abdel-Gawad, H.R., Thomas, D.K. A subclass of close-to-convex functions, Publications De L'Institut Mathématique, Nouvelle série tome, 49 (63), 61–66 (1991).

6 Selvaraj, C. A subclass of close-to-convex functions, South East Asian Bull. of Math., 28, 113–123 (2004) .

7 Mehork, B.S., Singh, G. A subclass of close-to-convex functions, Int. J. of Math. Analysis, 4 (27), 1319–1327 (2010) . http://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2010/ijma-25-28-2010/singhIJMA25-28-2010.pdf.

8 Peng, Z.G. On a subclass of close to convex functions, Acta Mathematica Scientia, 30(5), 1449–1456 (2010).

9 Stelin, S., Selvaraj, C. On a generalized class of close-to-convex functions of order α, Intern. J. of Pure and Applied Math., 109 (5), 141–149 (2016).

10 Reade, M.O. On close-to-convex univalent functions, Michigan Math. J., 3, 59–62 (1955).

11 MacGregor, T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 14, 514–520 (1963).

12 MacGregor, T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II. Proc. Am. Math. Soc., 14, 521–524 (1963). http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5.

13 Kohr, G., Graham, I. Geometric function theory in one and higher dimensions, New York: Pure and Applied Mathematics (M. Dekker), Inc. 56, 528 p. (2003). https://doi.org/10.1201/9780203911624.

14 Strohhäcker, E. Beiträge zur theorie der schlichten funktionen, Mathematische Zeitschrift, 37, 356–380 (1933).

15 Sebastianc, A., Ravichandran, V. Radius of starlikeness of certain analytic functions, Math. Slovaca, 71 (1), 83–104 (2021). https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454.

16 Khatter, K., Lee, S. K. and Ravichandran, V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions, arXiv preprint arXiv:2006.11744 (2020). https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744.

17 El-Faqeer, A.S.A., Mohd, M.H., Ravichandran, V. and Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions, arXiv preprint arXiv:2006.11734 (2020). https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734.

18 Sharma, M., Jain, N.K. and Kumar, S. Constrained radius estimates of certain analytic functions, arXiv:2305.16210v1 (2023) .

19 Kanaga, R., Ravichandran, V. Starlikeness for certain close-to-star functions, Hacet. J. Math. Stat., 50 (2), 414–432 (2021). https://doi.org/10.15672/hujms.702703.

20 Ali, R.M., Jain, N.K. and Ravichandran ,V. On the radius constants for classes of analytic functions, arXiv:1207.4529v1 (2012). https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.4529

[1]Майер Ф.Ф.,
ф.-м.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru
[1]Тастанов М.Г.,
ф.-м.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]*Утемисова А.А.,
пед.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
*e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]Калаков Б.А.,
ф.-м.ғ.к., ORCID ID: 0009-0003-6007-0254б
e-mail: kalakov1968@gmail.com

[1]Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті,
Қостанай қ., Қазақстан

ДӨҢЕС ДЕРЛІК ЖӘНЕ ЕКІ ЕСЕ ДӨҢЕС ДЕРЛІК ФУНКЦИЯЛАР КЛАСЫНЫҢ КЕЙБІР ҚОСАЛҚЫ КЛАСТАРЫ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Дөңес дерлік функциялардың K класы функциялық $Re\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)$ оңдылығымен анықталатыны белгілі, мұндағы $g(z)$ – жұлдыз тәрізді функция. Жұлдыз тәрізді функцияны $g(z)$ дөңес функциямен алмастырсақ, онда K класының белгілі бір қосалқы класы C'алынады. Бұл мақалада біз мәндер жиыны $\frac{zf'(z)}{g(z)}$ белгілі бір жағдайда жарты жазықтықпен сәйкес келетін ерекше түрдегі аймақта болған жағдайға белгілі бір жағдайда жарты жазықтықпен сәйкес келетін ерекше типтегі облыста орналасқан жағдайға арналған C'класының жалпылауын енгіземіз. Бұл жалпылау, сонымен қатар, нормаланған қос дерлік дөңес функциялар класының белгілі бір ішкі сыныбына дейін C'класын кеңейтуге байланысты. Арнайы типтегі облыстардың әртүрлілігі мен екі есе дерлік дөңес функцияларға көшу бізге жаңа нәтижелер алуға, сондай-ақ бұрын белгілі нәтижелерді жалпылауға мүмкіндік береді. Мақаланың негізгі зерттеу бағыттары – бұрмалану туралы теоремаларды дәлелдеу, қарастырылған функциялар класының дөңестік радиустарын анықтау және алынған нәтижелердің дәлдігін негіздеу болып табылады. Сонымен қатар, енгізілген функциялар класы мен екі есе дерлік жұлдыз тәрізді функциялардың жаңа класы арасындағы байланыс орнатылды. Бұл класс пен оның ішкі сыныптары үшін жұлдыз тәрізділіктің өсуі мен радиусы туралы, сондай-ақ бұрын белгілі нәтижелерді жалпылауға қатысты жаңа теоремалар алынды.

Тірек сөздер: жұлдыз тәрізді функциялар, дөңес функциялар, бұрмалау теоремалары, дөңес радиустар, өсу теоремалары, жұлдыз тәрізді радиустар.

[1]**Maiyer F.F.,**
Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru
[1]**Tastanov M.G.,**
Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]***Utemissova A.A.,**
Cand. Ped. Sc., Associate Professor,ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
*e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]**Kalakov B.A.,**
Cand. Phys.-Math. Sc., ORCID ID: 0009-0003-6007-0254
e-mail: kalakov1968@gmail.com

[1]Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University,
Kostanay, Kazakhstan

ABOUT SOME SUBCLASSES OF CLASSES OF CLOSE-TO-CONVEX AND DOUBLY CLOSE-TO-CONVEX FUNCTIONS

Abstract

It is known that the class K close-to-convex functions is defined by the condition of positivity of the functional $Re\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)$ with a starlike function $g(z)$. Replacing the starlike function $g(z)$ with a convex one leads to a known subclass C' of the class K. In this article, we introduce a generalization of the class C' to the case when the set of values $\frac{zf'(z)}{g(z)}$ is contained in a region of a special type, which, in a particular case, can coincide with a half-plane. The generalization is also associated with the extension of the class C' to a certain subclass of the class of normalized doubly close-to-convex functions. The diversity of special cases of a domain of a special type and the transition to doubly close-to-convex functions allows us to obtain both new original results and generalizations of previously known results. The main research of this article is aimed at proving theorems on distortion, finding the radii of convexity of the considered classes of functions and justifying the accuracy of the obtained results. A connection has also been established between the introduced class of functions and a certain new class of doubly close-to-starlike functions, special cases of which have been actively studied in recent years. For this class and its subclasses, new results have also been obtained in the form of theorems on growth and radius of starlikeness and generalization of previously known results.

Keywords: starlike functions, close-to-starlike functions, close-to-convex functions, distortion theorems, radii of convexity, growth theorems, radii of starlikeness.

Дата поступления статьи в редакцию: 23.06.2025