

ӘӨЖ 510.67
FTAMP 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-3-271-279>

^{1,2,3}**Байжанов Б.,**
ф.-м.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0002-3743-7404,
e-mail: baizhanov@math.kz

^{1,2,3}***Тазабекова Н.,**
докторант, ORCID ID: 0009-0005-3608-9259,
*e-mail: tazabekova.nargiz@gmail.com

¹**Замбарная Т.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-7203-1701,
e-mail: zambarnaya@math.kz

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

²Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³SDU университеті, Қаскелең қ., Қазақстан

ӘЛСІЗ РЕТТЕЛГЕН МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАРДАҒЫ АЙНАЛАЛАР

Аңдатпа

Бұл жұмыста әлсіз реттелген минималды (яғни, әлсіз о-минималды) теориялардағы толық алгебралық емес 1-типтердің айналасы, әлсіз ортогоналдылық пен дерлік ортогоналдылық мәселелері қарастырылады. Типтердің айналасы – олардың жүзеге асуының жергілікті қасиеттерін сипаттау және тип ішіндегі алгебралық тұйықталу ұғымын жалпылау құралы ретінде енгізіледі. Оларды пайдалану типтердің айырмашылықтарын анықтауға және олардың өзара әрекеттесу құрылымын нақтылауға мүмкіндік береді. Біз айналасының негізгі қасиеттерін тұжырымдап, дәлелдейміз. Атап айтқанда $\alpha \in V_p(\beta) \Leftrightarrow \beta \in V_p(\alpha)$ екені анықталды. Осы нәтижелердің негізінде типтердің әлсіз және дерлік ортогоналдылығы арасындағы қатынастар қарастырылады. Атап айтқанда, олардың эквиваленттілігін, симметриялылығын және әртүрлі типтер кластары (иррационал, квазисолитарлық және квазирационалдық) үшін мінез-құлқын сипаттайтын критерийлер алынды. Осылайша, жұмыс әлсіз о-минималды теориялардағы ортогоналдылық ұғымдарын нақтылауға және дамытуға үлес қосады. Сондықтан, кейбір әлсіз о-минималды теориялар кластары үшін әлсіз және дерлік ортогоналдылықтың сәйкес келетіні көрсетілген. Алынған нәтижелер әлсіз о-минималды теориялардағы типтердің геометриясын талдау үшін жаңа құралдар береді және әлсіз о-минималды типтегі құрылымдарды әрі қарай зерттеу перспективасын ашады. Сонымен қатар, ұсынылған тәсілдер теориялардың неғұрлым жалпы кластары салыстыру үшін пайдаланылуы мүмкін.

Тірек сөздер: әлсіз о-минималды теориялар, әлсіз ортогоналдылық, дерлік ортогоналдылық, дөңес жиын, квазижеке тип, квазирационалды тип, иррационалды тип.

Кіріспе

Бұл мақалада әлсіз реттелген минималды теориялар контекстінде айналасы, әлсіз ортогоналдылық және дерлік ортогоналдылық мәселелері зерттеледі. Реттелген минималдылық жағдайында әрбір анықталатын қосалқы жиын нүктелер мен интервалдардың ақырлы бірігуі түрінде беріледі. Ал әлсіз реттелген минималдылық бұл шартты босаңсытып, анықталатын жиындардың дөңес жиындардың ақырлы бірігуі ретінде ұсынылуына мүмкіндік береді.

Зерттеу шеңберінде басты назар алгебралық емес толық 1-типтердің өзара әрекеттесуіне аударылады. Бұл типтерді талдау үшін негізгі құрал ретінде айналасы пайдаланылады, өйткені олар типтердің жүзеге асуы туралы локалды (жергілікті) ақпаратты сипаттайды.

Ортогоналдылық ұғымын зерделеу барысында ерекше назар айналарға бағытталады. Сонымен қатар, [10] еңбегінде сипатталған кеңейту әдістері аясында квази-айнала ұғымы негізгі рөл атқарады. Ортогоналдылық ұғымы толық емес 1-типтер үшін дөңес ортогоналдылыққа дейін жалпыланды. Бұл жерде дөңес ортогоналдылық ұғымы толық типтің дөңес жабылуына қатысты қарастырылады. Алынған нәтижелер [11] жұмысында тұжырымдалған қорытындыларды толықтыра түседі.

Сонымен қатар, ұсынылып отырған нәтижелер жарияланбаған [12] препринтінде берілген негізге сүйенеді және онда көрсетілген бірнеше маңызды дәлелдерді толықтырып, әрі кеңейтеді.

Материалдар мен әдістер

Біз мақала бойы келесі келісімді қолданамыз.

Келісім 1. Егер $\bar{a} \in M^{\ell(\bar{a})}$ мұндағы $\ell(\bar{a}) = \ell$ және $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_\ell \rangle$ онда $\bar{a} \in M$ дегеніміз – $\{a_1, \dots, a_\ell\} \subseteq M$. Егер $1 \leq m < \ell$, онда $\bar{a} \upharpoonright m := \langle a_1, \dots, a_m \rangle$.

Барлық жерде $\mathcal{M}'$ – әлсіз о-минималды теория T -ның моделі, ал $\mathcal{M}$ – $\mathcal{M}'$ -дің жеткілікті үлкен қаныққан элементарлы кеңейтімі.

Кез келген $C, D \subseteq M$ үшін біз $C < D$ деп жазамыз, егер $c < d$ барлық $c \in C$ және $d \in D$ үшін орындалса. Егер $c \in M$, онда $c < D$ жазу арқылы $\{c\} < D$ дегенді білдіреміз.

Параметрлердің кез келген $A \subseteq M$ жиыны бекітілген кезде, $\mathcal{M}$ -нің $|A|^+$ -қаныққан екендігін болжаймыз.

$p, q, r \in S_1(A)$ типтер әрқашан A -ның үстіндегі толық, бірақ алгебралық емес 1-типтер болады. Оқшауланған тип дегеніміз – алгебралық емес оқшауланған тип.

$\text{Aut}_A(\mathcal{M})$ – бұл M -нің барлық автоморфизмдердің тобы, олар A -ны нүктелік тұрғыда бекітеді, яғни, $f(a) = a$ кез келген $f \in \text{Aut}_A(\mathcal{M})$ және $a \in A$ үшін орындалады.

Біз келесі белгілерді қолданамыз:

$$x > F(\mathcal{M}, \bar{y}) \Leftrightarrow \forall z [F(z, \bar{y}) \rightarrow z < x]$$

$$\Psi(\mathcal{M}, \bar{x}) > F(\mathcal{M}, \bar{y}) \Leftrightarrow \forall z \forall t [F(z, \bar{y}) \wedge \Psi(t, \bar{x}) \rightarrow z < t]$$

$$p(\mathcal{M}) = \{\gamma \in \mathcal{M} \mid f \text{ кез келген } \varphi(x) \in p, \mathcal{M} \models \varphi(\gamma)\}, \quad \alpha \models p \Leftrightarrow \alpha \in p(\mathcal{M})$$

Анықтама 2. A – сызықты реттелген жиын болсын, ал $B \subseteq A$. Біз B -ні дөңес дейміз, егер кез келген $a, b \in B$ және барлық $x \in A$,

$$a < x < b \Rightarrow x \in B.$$

Анықтама 3. Формула $F(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$ оңға қарай дөңес деп аталады, егер

$$\mathcal{M} \models \forall y \forall x [(F(x, y, \bar{a}) \rightarrow (y \leq x \wedge \forall z (y \leq z \leq x \rightarrow F(z, y, \bar{a}))))].$$

Формула $G(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$ солға қарай дөңес деп аталады, егер

$$\mathcal{M} \models \forall y \forall x [(G(x, y, \bar{a}) \rightarrow (y \geq x \wedge \forall z (x \leq z \leq y \rightarrow G(z, y, \bar{a}))))].$$

Барлық жерде $\mathcal{M}'$ – әлсіз о-минималды теория T -ның моделі, ал $\mathcal{M}$ – $\mathcal{M}'$ -нің жеткілікті үлкен қаныққан элементарлы кеңейтімі.

Кез келген $C, D \subseteq M$ үшін біз $C < D$ деп жазамыз, егер $c < d$ барлық $c \in C$ және $d \in D$ үшін орындалса. Егер $c \in M$ онда $c < D$ жазу арқылы $\{c\} < D$ дегенді білдіреміз.

Параметрлердің кез келген $A \subseteq M$ жиыны бекітілген кезде, $\mathcal{M}$ -нің $|A|^+$ -қаныққан екендігін болжаймыз.

Анықтама 4. (Б.С. Байжанов, В.В. Вербовский [1])

1. Формула $\varphi(x, \bar{a})$ -ның дөңес жабылуы келесі формула арқылы беріледі:

$$\varphi^e(x, \bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 (\varphi(y_1, \bar{a}) \wedge \varphi(y_2, \bar{a}) \wedge (y_1 \leq x \leq y_2)).$$

$p(x) \in S_1(A)$ типінің дөңес жабылуы келесі типпен беріледі:

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x, \bar{a}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Анықтама 5. (Б.С. Байжанов [2, 3]) $p \in S_1(A)$, $\bar{a} \in A$ болсын. Біз $\Phi(x, y, \bar{a})$, формуланы p -тұрақты (p -сақтаушы) дейміз, егер кез келген $\alpha \models p$ үшін $\gamma_1, \gamma_2 \models p$ табылып, $\gamma_1 < \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) < \gamma_2$ шартын қанағаттандырса.

Анықтама 6. (D. Marker [4]) $\gamma(v) \in S_1(M)$ қиылысы M -де бірімәнді жүзеге асырылатын деп аталады, егер $\gamma(v)$ -ні жүзеге асыратын кез келген c элементі $Pr(M \cup \{c\})$ бастапқы модельде $\gamma(v)$ -нің жүзеге асырылуы болып табылады.

Маркердің бірімәнді жүзеге асырылатын типтер туралы ұғымына сүйене отырып, біз бұл түсінікті әлсіз о-минималды теориялар контекстіне жалпылаймыз және мұндай типтерді жеке типтер деп атаймыз.

Анықтама 7. [5] Біз p -ті оңға қарай жартылай-квазижеке дейміз, егер оңға қарай ең үлкен p -сақтаушы оңға қарай дөңес $2-A$ -формула $F(x, y, \bar{a})$ бар болса, мұндағы $\bar{a} \in A$.

Біз p -ті солға қарай жартылай-квазижеке дейміз, егер солға қарай ең үлкен p -сақтаушы солға қарай дөңес $2-A$ -формула $G(x, y, \bar{a})$ бар болса, мұндағы $\bar{a} \in A$.

Біз p -ті квазижеке дейміз, егер ол әрі оңға, әрі солға қарай жартылай-квазижеке болса.

$F(y, x, \bar{a})$ оңға қарай ең үлкен p -сақтаушы дөңес формула, ал $G(y, x, \bar{a})$ – солға қарай ең үлкен p -сақтаушы дөңес формула болсын. [6]-да дәлелденгендей, $E_p(x, y, \bar{a}) := F(x, y, \bar{a}) \vee G(x, y, \bar{a})$ формуласы эквиваленттік қатынас болып табылады.

$p \in S_1(A)$ квазижеке тип болсын. Егер $E_p(x, y, \bar{a}) \equiv (x = y)$, біз p -ті жеке тип дейміз.

Анықтама 8. $p \in S_1(A)$ болсын, $B \subset M$ және $\mathcal{M} \models B \cup A$ – қанық болсын. Онда p -типіндегі B жиынының айналасы келесі жиын арқылы анықталады:

$$V_p(B) := \{\gamma \in M \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(\mathcal{M}), H(x, \bar{b}, \bar{c}) \text{ формуласы бар, } \bar{b} \in B, \bar{c} \in A,$$

$$\gamma_1 < H(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c}) < \gamma_2, \gamma \in H(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c})\}.$$

$$\bar{a} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle \text{ болсын, онда } V_p(\bar{a}) := V_p(\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}).$$

Нәтижелер мен талқылау

Лемма 9. $p \in S_1(A)$ болсын.

(i) $\beta \in p(\mathcal{M})$ болсын. Онда $|V_p(\beta)| = 1 \Leftrightarrow p$ – жеке тип.

(ii) p квазижеке $\Leftrightarrow \exists \beta \in p(\mathcal{M}), V_p(\beta) = (A \cup \beta)$ -анықталатын жиын. (Шындығында, $E_p(\mathcal{M}, \beta, \bar{c}_p) = V_p(\beta)$)

Дәлел.

(i) $(\Rightarrow)$ p жеке тип болсын. Онда $E_p(x, y, \bar{a}) \equiv (x = y)$. Бұл дегеніміз, кез келген $\beta \in p(\mathcal{M})$ үшін E_p -ке қатысты эквиваленттік класста тек бір ғана элемент бар, ол β -нің өзі. $V_p(\beta)$ анықтамасы бойынша β -ның E_p -ке қатысты эквиваленттік класы болып табылады. Сондықтан, егер p жеке тип болса, онда

$$V_p(\beta) = \{\beta\} \Rightarrow |V_p(\beta)| = 1.$$

$(\Leftarrow)$ $|V_p(\beta)| = 1$ болсын. Онда $E_p(x, y)$ тек тривиалды эквиваленттіліктерді ажыратады. Осыдан $E_p(x, y) \equiv (x = y)$, және p жеке тип болады.

(ii) $V_p(\beta)$ айналасы E_p -тің астындағы β -ның эквиваленттік класы ретінде анықталады, яғни: $V_p(\beta) = \{x \in M \mid E_p(x, \beta, \bar{a})\}$.

($\Rightarrow$) Егер $\gamma \in V_p(\beta)$ болса, онда $H(x, \beta)$ формуласы бар болып $\gamma \in H(\mathcal{M}, \beta) \subset p(\mathcal{M})$. Осыған қоса

$$H^c(x, \beta) := \exists x_1 \exists x_2 (H(x_1, \beta) \wedge H(x_2, \beta) \wedge x_1 \leq x \leq x_2).$$

$p(\mathcal{M})$ дөңес болғандықтан $H^c(\mathcal{M}, \beta) \subset p(\mathcal{M})$. Назар аударыңыз:

$$H^c(x, \beta) \equiv (H^c(x, \beta) \wedge x < \beta) \vee (x = \beta) \vee (H^c(x, \beta) \wedge \beta < x).$$

Сонда $V_p(\beta) \subseteq E(\mathcal{M}, \beta)$. Анықтама бойынша $E(\mathcal{M}, \beta) \subseteq V_p(\beta)$. Демек, $E(\mathcal{M}, \beta) = V_p(\beta)$.

($\Leftarrow$) Кейбір $\beta \in p(\mathcal{M})$ үшін $V_p(\beta)$ айналасы $(A \cup \{\beta\})$ -анықталатын болсын. Яғни, мынадай формула $\psi(x, \beta)$ бар: $V_p(\beta) = \{x \in M \mid \psi(x, \beta)\}$.

Сонымен қатар, $V_p(\beta)$ айналасы E_p астындағы эквиваленттік класс болғандықтан, ол дөңес және $p(\mathcal{M})$ -де қамтылған. $E_p(x, y, \bar{c})$ формуланы былай анықтаймыз:

$$E_p(x, y, \bar{c}) \equiv \forall \beta (\psi(x, \beta) \leftrightarrow \psi(y, \beta)).$$

Осылайша, $E_p(x, y, \bar{c}) - p(\mathcal{M})$ -де дөңес кластармен эквиваленттік қатынасты анықтайды, ал берілген β үшін:

$$E_p(\mathcal{M}, \beta, \bar{c}) = V_p(\beta).$$

Олай болса, p квазижеке тип болып табылады. $\square$

Лемма 10. $\alpha \in V_p(\beta) \Leftrightarrow \beta \in V_p(\alpha)$

Дәлел. $\alpha \in V_p(\beta)$ болсын. Онда $\theta(x, \beta)$ формуласы және $\gamma_1, \gamma_2 \in p(\mathcal{M})$ элементтері бар, олар мына шартты қанағаттандырады:

$$\gamma_1 < \theta(\mathcal{M}, \beta) < \gamma_2, \quad \alpha \in \theta(\mathcal{M}, \beta) \quad \text{және} \quad \models \forall y (\theta(\alpha, y) \rightarrow y < \alpha).$$

$\theta^c(x, \beta)$ формуласы осылай анықталатын болсын:

$$\theta^c(x, \beta) := \exists x_1, x_2 ((x_1 \leq x \leq x_2) \wedge \bigwedge_{i=1}^2 \theta(x_i, \beta)).$$

Егер $f \in \text{Aut}_A(\mathcal{M})$ болса, онда кез келген $H(x_1, \dots, x_n)$ формуласы үшін мынадай орындалады: $\mathcal{M} \models H(c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models H(f(c_1), \dots, f(c_n))$.

Енді A -ны бекітетін $\mathcal{M}$ -нің автоморфизмін f алайық, мұнда $f(\gamma_2) = \gamma_1, f(\beta) = \beta', f(\gamma_1) = \gamma_2$. Осыдан:

$$\gamma_1' < \theta^c(\mathcal{M}, \beta') < \gamma_2' = \gamma_1 < \theta^c(\mathcal{M}, \beta) < \gamma_2$$

Анық, $\alpha \notin \theta^c(\mathcal{M}, \beta')$, сондықтан $\models / \theta^c(\alpha, \beta')$. Демек, μ бар және ол

$$\mu < \theta^c(\alpha, \mathcal{M}) < \gamma_2.$$

Егер $\models K(\gamma_1, \beta, \gamma_2)$ болса, онда $K(\gamma_1, \beta', \gamma_2)$. Осылайша, $\theta^c(\alpha, y)$ формуласы $\beta \in V_p(\alpha)$ фактісінің куәсі болып табылады. Себебі кез келген $n < \omega$ түшін $\theta(x, f^n(\beta))$ формула $x = \alpha$ -да орындалмайды (яғни, $\models / \theta(\alpha, f^n(\beta))$). $\square$

Анықтама 11. $p \in S_1(A)$ оқшауланбаған болсын. Біз p -ны оңнан квазирационалды дейміз, егер $\bar{a} \in A$ болатын $U(x, \bar{a})$ сформуласы бар болып, кез келген $\alpha \models p$, үшін келесі тұжырым орындалса:

$$\forall \beta [\alpha < \beta \wedge \mathcal{M} \models U(\beta, \bar{a}) \Rightarrow tp(\beta/A) = p].$$

p -ны солдан квазирационалды дейміз, егер $\bar{a} \in A$ болатын $U(x, \bar{a})$ сформуласы бар болып, кез келген $\alpha \models p$ үшін келесі тұжырым орындалса:

$$\forall \beta [\beta < \alpha \wedge \mathcal{M} \models U(\beta, \bar{a}) \Rightarrow tp(\beta/A) = p].$$

Оқшауланбаған және квазирационалды емес тип p иррационалды деп аталады.

Теорема 12. [Компакттылық теоремасы, Л. Хенкин [7]]. Егер L -сөйлемдерінің жиыны T -ның әрбір ақырлы ішкі жиыны қанағаттандырылатын болса, онда T -нің өзі де қанағаттандырылады.

Ескерту 13.

(i) $p, q \in S_1(A)$ алгебралық емес болсын, $\alpha \in p(\mathcal{M})$ және $\Phi(x, y, \bar{a})$ мұндағы $\bar{a} \in A$, сондай болсын, егер $\Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) \subseteq q(\mathcal{M})$ (яғни, p типі q типті оқшаулайды). Онда әрбір $\beta \models p$ үшін $\Phi(\mathcal{M}, \beta, \bar{a}) \subset q(\mathcal{M})$.

(ii) Егер q сол жақ бойынша иррационал болса, онда $C(x)$ формуласын анықтайтын ешбір M -анықталатын жиын болмайды, мұндағы $C(\mathcal{M}) = q(\mathcal{M})^-$.

Сонымен қатар, кез келген $\Phi(x, \bar{\beta})$, формуласы үшін, мұндағы $\bar{\beta} \in M$, егер $\Phi(\mathcal{M}, \bar{\beta}) \subseteq q(\mathcal{M})$ болса, онда $q(\mathcal{M})$ -де мынадай γ элементі табылады, ол үшін

$$\gamma < \Phi(\mathcal{M}, \bar{\beta}).$$

(iii) Егер q оң жақ бойынша иррационал болса, яғни $C(x)$ формуласын анықтайтын ешбір M -анықталатын жиын болмайды, мұндағы

$$C(\mathcal{M}) = q(\mathcal{M})^+,$$

онда кез келген $\Phi(x, \bar{\beta})$ формуласы үшін, мұндағы $\bar{\beta} \in M$, егер $\Phi(\mathcal{M}, \bar{\beta}) \subseteq q(\mathcal{M})$ болса, онда $q(\mathcal{M})$ -де мынадай γ элементі табылады, ол үшін

$$\gamma > \Phi(\mathcal{M}, \bar{\beta}).$$

Теорема 14. $p \in S_1(A)$, $B \subset M$ болсын және $\mathcal{M} \models |A \cup B|^+$ – қаныққан модель болсын. Сонда келесі тұжырымдар орындалады:

1. $V_p(B)$ не дөңес, не бос жиын болады;

2. p иррационалды болсын. Онда кез келген $\bar{a} \in M \setminus M'$, кез келген $H(x, \bar{a}, \bar{a})$ формуласы және $\bar{a} \in A$ үшін

$$[H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{a}) \neq \emptyset, H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{a}) \subseteq p(\mathcal{M}) \Rightarrow H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{a}) \subseteq V_p(\bar{a})];$$

3. $V_p(B) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(\mathcal{M}), \gamma_1 < V_p(B) < \gamma_2$;

4. $\forall \beta \in p(\mathcal{M}) [V_p(B) \neq \emptyset, \beta \notin V_p(B) \Rightarrow \forall q \in S_1(A), V_q(\beta) \cap V_q(B) = \emptyset]$;

5. $\forall \alpha \in p(\mathcal{M}): V_p(B) < \alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in p(\mathcal{M}) [V_p(B) < \alpha_0 < V_p(\alpha)]$.

Дәлел.

1. Анықтама 8 бойынша.

2. Анықтама 8 және Ескерту 13 (ii), (iii) бойынша.

3. Анықтама 8 және Компакттылық теоремасы (Теорема 12) бойынша.

4. $q \in S_1(A)$ тип сондай болсын $V_q(\beta) \cap V_q(B) \neq \emptyset$. Онда $\Phi(x, \beta, \bar{b})$, мұндағы $\bar{b} \in A$, сондай формула бар, және $H(x, \bar{a}, \bar{c})$, мұндағы $\bar{a} \in B, \bar{c} \in A$ сондай болсын, сонда $\exists \gamma \in \Phi(\mathcal{M}, \beta, \bar{b}) \cap H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{c}), \Phi(\mathcal{M}, \beta, \bar{b}) \subset V_q(\beta), H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{c}) \subset V_q(B)$.

Анықтама 8 бойынша, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in q(\mathcal{M})$ бар, сондай болғанда

$$\gamma_1 < \Phi(\mathcal{M}, \beta, \bar{b}) < \gamma_2, \gamma_3 < H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{c}) < \gamma_4.$$

Let $\mu_1 = \min\{\gamma_1, \gamma_3\}, \mu_2 = \max\{\gamma_2, \gamma_4\}, f \in \text{Aut}_A(\mathcal{M})$ сондай болсын, $f(\mu_2) = \mu_1$.

$$\beta_1 := f(\beta), \beta_2 := f^{-1}(\beta).$$

Сондықтан: $\Phi(\mathcal{M}, \beta_1, \bar{b}) < \mu_1 < H(\mathcal{M}, \bar{a}, \bar{c}) < \mu_2 < \Phi(\mathcal{M}, \beta_2, \bar{b})$, және

$(\beta_1 < \beta < \beta_2$ немесе $\beta_2 < \beta < \beta_1)$.

$$K(y, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) := \exists x (H(x, \bar{\alpha}, \bar{c}) \wedge \Phi(x, y, \bar{b}))$$

болсын. Онда $\beta \in K(\mathcal{M}, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$ және $\beta_1, \beta_2 \notin K(\mathcal{M}, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$.

$K_1(x, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$ формаласы $K(x, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$ -ның дөңес ішкі формуласы болсын, сондай болғанда $\beta \in K_1(\mathcal{M}, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$.

Демек,

$$\beta_1 < K_1(\mathcal{M}, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) < \beta_2 \text{ немесе } \beta_2 < K_1(\mathcal{M}, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) < \beta_1.$$

Сонда $\beta \in V_p(\bar{\alpha})$ және $\beta \in V_p(B)$. Қайшылық.

5. $V_p(B) < \alpha$ деп болжайық.

1-қадам. Біз $V_p(B) < V_p(\alpha)$ екенін көрсетуге тиіспіз. Қайшылық үшін, $V_p(B)$ және $V_p(\alpha)$ қиылыспайтын жиындар емес, яғни $V_p(B) \cap V_p(\alpha) \neq \emptyset$ деп жорамалдап көрейік.

$V_p(B) = \bigcup H_i(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c})$ болсын, ал

$$V_p(\alpha) = \{\delta \mid \delta \in \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}), \exists \gamma_1, \gamma_2 (\gamma_1 < \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) < \gamma_2)\}.$$

Бір $\gamma \in H(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c}) \cap \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a})$ таңдайық. Сонда

$$K(y, \bar{b}, \bar{c}) := \exists x (H(x, \bar{b}, \bar{c}) \wedge \Phi(x, y, \bar{a})).$$

$\bar{b} \in B, \bar{a}, \bar{c} \in A$ болған жағдайда, $\alpha \models K(y, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$, Сондықтан $\alpha \in V_p(B)$.

Қайшылық, өйткені біз $V_p(B) < \alpha$ деп болжадық. Демек, $V_p(B) < V_p(\alpha)$.

2-қадам. Енді біз $\alpha_0 \in p(\mathcal{M})$ бар екенін көрсетеміз, мұнда $[V_p(B) < \alpha_0 < V_p(\alpha)]$.

a) $V_p(\alpha)$ анықталатын.

α_1) $V_p(B)$ анықталатын.

$U(M) = V_p(B)^+$ деп $V_p(B)$ оң шекарасын белгілейік.

$$F(y, \bar{b}_0, \bar{c}) := U(x, \bar{b}_0, \bar{c}) \wedge x < y \wedge \forall x [(U(\mathcal{M}, \bar{b}_0, \bar{c}) < z \rightarrow (E_p(z, y) \vee E_p(\mathcal{M}, y) < z))]$$

$\alpha \in F(\mathcal{M}, \bar{b}_0, \bar{c})$ болғандықтан, $\alpha \in V_p(B)$.

α_2) $V_p(B) = \bigcup_{i \in I} H_i(\mathcal{M}, \bar{b}_0, \bar{c})$.

Келесі формулалар жиыны

$$\{(H_{i_1}(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c}) \cup \dots \cup H_{i_n}(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c})) < x < E_p(\mathcal{M}, \alpha) \mid i, i_n \in I\}$$

қайшылықсыз, сондықтан оны қанағаттандыратын α_0 бар. Сонда

$$V_p(B) < \alpha_0 < V_p(\alpha).$$

b) $V_p(\alpha)$ анықталмайды. Себебі, 1-қадам бойынша $V_p(B) < V_p(\alpha)$, сондықтан $V_p(\alpha)$ -ның төменгі шегі анықталмайды. Формулалар жиыны

$$\{H(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c}) < x < \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) \mid H(\mathcal{M}, \bar{b}, \bar{c}) \subset V_p(B), \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) \subset V_p(B)\}$$

қайшылықсыз, сондықтан осы жиынды қанағаттандыратын элемент бар. $\square$

Анықтама 15. $p, q \in S_1(A)$ болсын. Біз $\mathcal{P}$ типін q -ға әлсіз ортогонал дейміз (белгіленеді $p \boxdot^w q$) егер кез келген $H(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, кез келген $\alpha \in p(\mathcal{M})$, үшін келесі орындалса:

$$[H(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) \cap q(\mathcal{M}) \neq \emptyset \Rightarrow q(\mathcal{M}) \subseteq H(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a})].$$

Егер $\mathcal{P}$ типі q -ға әлсіз ортогонал емес болса, онда оны $p \boxdot^w q$ деп белгілейміз.

Анықтама 16. $p, q \in S_1(A)$. болсын. Біз $\mathcal{P}$ типін q -ға дерлік ортогонал дейміз (белгіленеді $p \boxdot^a q$), егер $\exists \alpha \in p(\mathcal{M}) (\Leftrightarrow \forall \alpha \in p(\mathcal{M}), V_q(\alpha) = \emptyset)$. Егер $\mathcal{P}$ типі q -ға дерлік ортогонал болмаса, онда $p \boxdot^a q$ деп белгілейміз..

Осы анықтамадан $p \boxdot^a q \Leftrightarrow V_p(\alpha) \neq \emptyset$. Ал $V_p(\alpha) \neq \emptyset \Leftrightarrow \Phi(x, \alpha, \bar{a})$ формуласы бар, және $q(\mathcal{M})$ -ден γ_1, γ_2 элементтері бар болып, мына шарт орындалады:

$$\gamma_1 < \Phi(\mathcal{M}, \alpha, \bar{a}) < \gamma_2.$$

$p, q \in S_1(A)$ үшін әлсіз және дерлік ортогоналдықтың келесі қасиеттері орындалады:

1. $p \boxdot^w q \Rightarrow q \boxdot^w p$;
2. $p \boxdot^w q \Leftrightarrow p(x) \cup q(y)$ толық 2- A -тип болып табылады;
3. Егер p алгебралық болса, онда әрбір $q \in S_1(A)$ үшін $p \boxdot^w q$;
4. $p \boxdot^w q \Rightarrow p \boxdot^a q$;
5. $p \boxdot^w q, p \boxdot^a q$ орындалатын әлсіз о-минималды T теориясы бар;
6. T о-минималды болсын. Онда $p \boxdot^a q \Leftrightarrow p \boxdot^w q$.

Қорытынды

Бұл жұмыста біз әлсіз реттелген минималды теориялардағы алгебралық емес толық 1-типтердің айналаларын, сондай-ақ олардың әлсіз және дерлік ортогоналдылық қасиеттерін зерттедік. Айнала ұғымын қолдана отырып, әлсіз және дерлік ортогоналдылық арасындағы өзара байланысты сипаттап, түрлі типтер кластарында олардың мінез-құлқын талдадық. Алынған нәтижелер әлсіз о-минималды құрылымдардағы типтердің геометриясын зерттеу үшін жаңа әдістемелік тәсілдер ұсынады және болашақ зерттеулерге теориялық негіз қалыптастырады.

Қаржыландыру туралы ақпарат: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландырды (Грант No AP19677434).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Baizhanov, B.S., and Verbovskii, V.V. O-stable theories. *Algebra and Logic*, 50 (3), 211–225 (2011).
- 2 Baizhanov, B.S. Types in weakly o-minimal theories. 1st Congress of Kazakhstan Mathematicians (11–14 September 1996), Shymkent, p. 177 (1996).
- 3 Baizhanov, B.S. One-types in weakly o-minimal theories. *Proceedings of Informatics and Control Problems Institute*, Almaty, pp. 77–90 (1996).
- 4 Marker, D. Omitting types in o-minimal theories. *Journal of Symbolic Logic*, 51 (1), 63–74 (1986). <https://doi.org/10.2307/2273943>
- 5 Baizhanov, B.S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories. In: Pinus, A.C., and Ponomaryov, K.N. (eds.) *Algebra and Model Theory*. Novosibirsk State Technical University, pp. 5–28 (1999).
- 6 Baizhanov, B.S., and Tazabekova, N.S. Essential kinds of 1-types over sets of models of weakly o-minimal theories. *Kazakh Mathematical Journal*, 23 (4), (2023). <https://doi.org/10.70474/ckvn1r44>
- 7 Henkin, L. The completeness of the first-order functional calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 14 (3), 159–166 (1949).
- 8 Shelah, S. *Classification theory and the number of non-isomorphic models*. North Holland (1978).
- 9 Baldwin, J. *Fundamentals of stability theory*. Springer-Verlag (1988).
- 10 Baizhanov, B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates. *Journal of Symbolic Logic*, 66, 1382–1414 (2001). <https://doi.org/10.2307/2695114>
- 11 Baizhanov, B., Umbetbayev, O., and Zambarnaya, T. Non-orthogonality of 1-types in theories with a linear order. *Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”* (accepted for publication).
- 12 Baizhanov, B.S. Classification of one-types in weakly o-minimal theories and its corollaries. Preprint (1996).
- 13 Baizhanov, B.S. Expansion of an o-minimal model by unary convex predicates. *Researches in theory of algebraic systems*, Karaganda (1995).
- 14 Kulpehsov, B.Sh. Weak o-minimality of a linearly ordered structure. *Researches in theory of algebraic systems*, Karaganda, 61–67 (1995).

- 15 Baizhanov, B.S., Sudoplatov, S.V., and Verbovskiy, V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 9, 161–184 (2012).
- 16 Dickmann, M.A. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings. *Proceedings of the 3rd Easter Model Theory Conference*, Gross Koris, Berlin (1985).
- 17 van den Dries, L. Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, \cdot, \exp)$. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 112, 97–121 (1984). [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(08\)71811-1](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71811-1)
- 18 Laskowski, M., and Steinhorn, Ch. On o-minimal expansions of Archimedean ordered groups. *Journal of Symbolic Logic*, 60, 817–878 (1995). <https://doi.org/10.2307/2275758>
- 19 Lascar, D., and Poizat, B. An introduction to forking. *Journal of Symbolic Logic*, 44, 330–350 (1979).
- 20 Mayer, L. Vaught's conjecture for o-minimal theories. *Journal of Symbolic Logic*, 53, 146–159 (1988). <https://doi.org/10.2307/2274434>
- 21 Marker, D., and Steinhorn, Ch. Definable types in o-minimal theories. *Journal of Symbolic Logic*, 59, 185–198 (1994). <https://doi.org/10.2307/2275260>
- 22 Macpherson, D., Marker, D., and Steinhorn, Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352 (12), 5435–5483 (2000). <https://doi.org/10.2307/2275260>

^{1,2,3}**Байжанов Б.,**

д.ф.-м.н., профессор, ORCID ID: 0000-0002-3743-7404,

e-mail: baizhanov@math.kz

^{1,2,3*}**Тазабекова Н.,**

докторант, ORCID ID: 0009-0005-3608-9259,

*e-mail: tazabekova.nargiz@gmail.com

¹**Замбарная Т.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0001-7203-1701,

e-mail: zambarnaya@math.kz

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

²Казахстанско-Британский технический университет, г.Алматы, Казахстан

³Университет СДУ, г. Каскелен, Казахстан

ОКРЕСТНОСТИ В СЛАБО УПОРОДЯЧЕННО МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Аннотация

В данной работе исследуются окрестности, слабая ортогональность и почти ортогональность полных неалгебраических 1-типов в слабо упорядоченных минимальных (слабо о-минимальных) теориях. Окрестности вводятся как инструмент для описания локального поведения реализаций типов и обобщения понятия алгебраического замыкания внутри типа. Их использование позволяет выявить различия между типами и уточнить структуру их взаимодействия. Мы формулируем и доказываем основные свойства окрестностей. В частности, установлено, что $\alpha \in V_p(\beta) \Leftrightarrow \beta \in V_p(\alpha)$. На основе этих результатов изучаются соотношения между слабой ортогональностью и почти ортогональностью типов. В частности, получены критерии, описывающие их эквивалентность, симметричность и поведение для различных классов типов (иррациональных, квазисолитарных и квазирациональных). Таким образом, работа вносит вклад в уточнение и развитие понятий ортогональности для слабо о-минимальных теорий. Также показано, что для некоторых классов слабо о-минимальных теорий слабая и почти ортогональность совпадают. Полученные результаты предоставляют новые инструменты для анализа геометрии типов в слабо о-минимальных теориях и открывают перспективы применения в дальнейшем исследовании структур слабо о-минимального типа. Кроме того, предложенные подходы могут быть использованы для сопоставления с более общими классами теорий.

Ключевые слова: слабо о-минимальные теории, слабая ортогональность, почти ортогональность, выпуклое множество, квазиодионочный тип, квазирациональный тип, иррациональный тип.

^{1,2,3}**Baizhanov B.,**

Dr.Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0002-3743-7404,

e-mail: baizhanov@math.kz

^{1,2,3}***Tazabekova N.,**

PhD candidate, ORCID ID: 0009-0005-3608-9259,

*e-mail: tazabekova.nargiz@gmail.com

¹**Zambarnaya T.,**

PhD, ORCID ID: 0000-0001-7203-1701,

e-mail: zambarnaya@math.kz

¹ Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

² Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan

³ SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

NEIGHBORHOODS IN WEAKLY ORDERED MINIMAL THEORIES

Abstract

This paper studies neighborhoods, weak orthogonality, and almost orthogonality of complete non-algebraic 1-types in weakly ordered minimal (weakly o-minimal) theories. A neighborhood is introduced as a tool to describe the local properties of type realizations and to generalize the notion of algebraic closure within a type. Their use allows us to distinguish between types and to refine the structure of their interaction. We formulate and prove the main properties of neighborhoods. In particular, it was established that $\alpha \in V_p(\beta) \Leftrightarrow \beta \in V_p(\alpha)$. On the basis of these results, we investigate the relationships between weak and almost orthogonality of types. In particular, we obtain criteria describing their equivalence, symmetry, and behavior for various classes of types (irrational, quasisolitary, and quasirational). Thus, the paper contributes to clarifying and developing the concepts of orthogonality in weakly o-minimal theories. It is also shown that for certain classes of weakly o-minimal theories, weak and almost orthogonality coincide. The results obtained provide new tools for analyzing the geometry of types in weakly o-minimal theories and open perspectives for further research on structures of weakly o-minimal type. In addition, the proposed approaches can be used for comparison with more general classes of theories.

Keywords: weakly o-minimal theories, weak orthogonality, almost orthogonality, convex set, quasisolitary type, quasirational type, irrational type.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 23.08.2025