УДК 517.51
МРНТИ 27.39.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-3-231-242

[1]Тургумбаев М.Ж.,
к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0009-0007-1422-8160,
e-mail: mentur60@mail.ru
[2]*Мұхамбетжан М.А.,
докторант, ORCID ID: 0009-0002-3632-2303,
*e-mail:manshuk-9696@mail.ru
[1]СулейменоваЗ.Р.,
к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0009-0005-9114-7247,
e-mail: zr-s2012@yandex.ru
[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
г. Астана, Казахстан
[2]Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,
г. Караганда, Казахстан

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММЫ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Аннотация

В работе рассматриваются ряды по мультипликативным системам Прайса с коэффициентами, принадлежащими классу последовательностей ограниченной вариации. Установлены условия для оценки нормы суммы таких рядов в весовых пространствах Лебега. Условия сформулированы в терминах весовой функции и соответствующей весовой последовательности. Методология включает техники гармонического анализа, преобразование Абеля и критерии Макенхаупта об ограниченности оператора Харди в весовых пространствах Лебега. Кроме того, рассматриваются дискретные трехвесовые неравенства Харди и анализируется их применимость к рассматриваемым рядам. Полученные теоремы устанавливают связь между вариацией коэффициентов и интегральными характеристиками весов. Результаты представляют интерес для дальнейшего исследования в рамках теории рядов, гармонического анализа и задач, связанных с оценками решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах. Работа расширяет область применения известных аналитических техник к более широкому классу функциональных рядов. Результаты сформулированы в виде теорем, связывающих вариацию коэффициентов ряда и интегральные свойства весовой функции. Работа также использует критерии дискретных трехвесовых неравенств Харди и анализирует их применимость к мультипликативным системам. Полученные результаты применимы в задачах гармонического анализа, теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: мультипликативные системы, взвешенные пространства Лебега, последовательность из класса ограниченной вариации, оператор Харди, условия интегрируемости.

Введение

В данной статье рассматриваются вопросы интегрируемости с весом суммы рядов по мультипликативным системам Прайса. Также найдены условия на весовую функцию и на весовые последоватовательности для получения оценки весовой нормы суммы рассматриваемых рядов.

Сначала приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность целых чисел $p_k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, по определению $m_0 = 1,\ m_n = p_1 p_2 \cdots p_n, n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \text{где } x_k \in \mathbb{Z} \cap [0, p_k)$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = \frac{j}{m_k}$ взять разложение с конечным числом ненулевых x_k. Каждое $n \in \mathbb{Z}$ единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, m_{j-1}, \alpha_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j).$$

Для любого $x \in [0,1)$ положим по определению

$$\psi_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j x_j}{p_j}\right), n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

Известно, что система $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой Прайса, если является ортонормированной системой, полной в $L^1(0,1)$ [1–3]. Если все $p_k = 2$, то $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает с системой Уолша в нумерации Пэли.

Мы будем писать $F \lesssim G$, если $F \leq C \cdot G$ для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от существенных параметров выражений F и G .

В теории тригонометрических рядов хорошо известна теорема Харди Литтлвуда о рядах с монотонными коэффициентами [4]. Необходимое и достаточное условие принадлежности функции некоторым функциональным пространствам выражается через монотонность и суммируемость ее коэффициентов Фурье.

В данной статье рассматриваются весовые функции с другими условиями. Одной из классических задач гармонического анализа является задача нахождения условий, при которых сумма тригонометрического ряда

$$\psi(x) \sim \sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

принадлежит пространству Лебега $L_p(\mathbb{T})$.

Сначала напомним общие достаточные условия, формулируемые в терминах коэффициентов ряда (для простоты в дальнейшем считаем, что $a_0 = 0$ и полагаем $|c_n| := |a_n| + |b_n|$):

а) неравенство Хаусдорфа-Юнга [4]

$$\|\psi\|_p \lesssim \left(\sum_n |c_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, 2 \leq p \leq \infty,$$

б) неравенство Харди-Литтлвуда [4]

$$\|\psi\|_p \lesssim \left(\sum_n |c_n|^p n^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}, 2 \leq p < \infty.$$

Неравенства Харди-Литтлвуда были обобщены в различных направлениях: рассматривались взвешенные пространства, а также более общие условия монотонности [6–11]. В работе С. Тихонова [5] получены неравенства для нормы суммы тригонометрических рядов Фурье со специальными коэффициентами.

Аналоги теоремы Харди-Литтлвуда для рядов по системе Уолша были приведены в [1], а для мультипликативных систем – в [2, 12]. Вопросы весовой интегрируемости сумм рядов по мультипликативным системам с убывающими коэффициентами изучались в работах [12–16]. Эта статья является продолжением работы [15].

В настоящей работе получен критерий оценки взвешенной нормы суммы ряда по мультипликативной системе с коэффициентами ограниченной вариации.

Материалы и методы

Через $L^p[0,1)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{[0,1)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ при } 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{essup}_{x\in G} |f(x)|, \text{ при } = \infty.$$

Пусть $1 \le p < \infty$ и ω – неотрицательная локально суммируемая функция на $[0,1)$. Измеримая функция $f(x)$ принадлежит весовому пространству $L^p_\omega[0,1)$, если

$$\|f\|_{L^p_\omega[0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Через $L^p_\omega[0,1)\downarrow$ мы обозначим множество всех невозрастающих, неотрицательных измеримых функций из $L^p_\omega[0,1)$. Сначала приведем известные условия для ограниченности оператора Харди

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

в пространствах (L^p_ω) и $(L^p_\omega)^\downarrow$.

Б. Макенхаупт [10] доказал, что $H: L^p_\omega \to L^p_\omega, p \in (1,+\infty)$, то есть оператор Харди H ограничен в пространстве $L^p_\omega[0,1)$ тогда и только тогда, когда функция ω удовлетворяет условию M_p

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^x \omega(t)^{-\frac{p'}{p}}dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \text{ где } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1.$$

А. Ариньо и Б. Макенхаупт [10] доказали, что H: $(L^p_\omega)^\downarrow \to L^p_\omega, p \in (0,\infty)$ тогда и только тогда, когда функция ω удовлетворяет условию B_p :

$$\int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^p}dt \lesssim \frac{1}{x^p}\int_0^x \omega(t)dt, \text{ где } x \in [0,1).$$

Ясно, что $M_p \subseteq B_p$, для $1 \le p < \infty$.

Говорят, что функция ω удовлетворяет условию RB_p, если для любого $x \in [0,1)$ и выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{x^p}\int_0^x \omega(t)\,dt \lesssim \int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^p}\,dt,\ p \in (0,\infty).$$

Это условие является обратным к условию B_p.

Для мультипликативной системы, определенной в (2), ядро Дирихле определяется равенством:

$$D_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x).$$

Лемма 1. [1, гл. 1.; 2, гл. 4].

1. Пусть $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Тогда $D_{m_n}(x) = m_n \cdot \chi_{[0,1/m_n)}(x), n \in \mathbb{Z}_+$, где χ_E – характеристическая функция множества E.
2. Пусть $\sup_n p_n = K < \infty$, для любых $x \in (0,1)$ и $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|D_k(x)| \le \frac{K}{x}$.

А. Ариньо и Б. Макенхаупт [10] (в непрерывном случае) и Беннетт Гроссе-Эрдман [11] (в дискретном случае) получили следующее описание неравенства Харди с одним весом.

Лемма 2. Если $1 \le p < \infty$, то неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m\right)^p \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n^p$$

справедливо для любой невозрастающей последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{\omega_m}{m^p} \lesssim \frac{1}{n^p}\sum_{m=1}^{n} \omega_m.$$

Нам понадобится следующее дискретное трехвесовое неравенство Харди [17]; в случае $\theta_n = 1$ изучался в [11]; непрерывный случай рассматривался в [18] и [19].

Лемма 3. Пусть $1 < p \le q < \infty$ и $\{\theta_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ – неотрицательные последовательности и

$$\Theta_m = \sum_{s=1}^{m} \theta_s,\ B_m = \sum_{s=1}^{m} \beta_s.$$

Тогда неравенство

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \left(\sum_{m=1}^{n} x_m \theta_m\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

справедливо для любой невозрастающей последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда

$$K_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^{n} \Theta_m^q \gamma_m\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{n} \beta_m\right)^{-\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$K_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \gamma_m\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \Theta_m^{p'} \left(B_m^{1-p'} - B_{m+1}^{1-p'}\right) + \Theta_n^{p'} B(n)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Результаты и обсуждение

Мы будем рассматривать функции, являющиеся суммами рядов по мультипликативным системам:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \psi_k(x),$$

где $\{\lambda_k\}$ является последовательностью ограниченной вариации, то есть

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| < \infty.$$

В следующей теореме приводится оценка нормы функции $f(x)$ в весовом пространстве Лебега L_ω^p через ее коэффициенты.

Теорема 1. Пусть $1 \le p < \infty, \sup p_n = K < \infty, \{\lambda_k\}$ – последовательность ограниченной вариации, $\lambda_n \to 0$ и пусть $\Lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \psi_k(x),$$

Тогда неравенство

$$\|f\|_{L_\omega^p(0,1)} \lesssim \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^p \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(x)}{x^p} dx\right)^{1/p} \tag{3}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\omega \in RB_p$. Доказательство. Пусть $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in N$. Учитывая, что $|\psi_k(x)| = 1$, получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \psi_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \psi_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \psi_k(x)\right|$$
$$\le \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| + \left|\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \psi_k(x)\right|.$$

Для второй суммы, применяя преобразование Абеля, получаем

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| + |\lambda_{n+1} D_n(x)| + \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \cdot |D_k(x)|.$$

Применяя лемму 1, мы имеем

$$|f(x)| \lesssim \sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k| + n\Lambda_k, \text{ при } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}.$$

Далее, отметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| = \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k,$$

и в силу того, что Λ_n монотонно не возрастает, имеем

$$n\Lambda_n \leq \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k$$

Таким образом,

$$|f(x)| \lesssim C \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k, \text{ при } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_{L^p_\omega[0,1)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}$$

$$\lesssim \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \Lambda_k\right)^p \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \omega(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left(\sum_{k=0}^{n} \Lambda_k\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

где

$$\Omega_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \omega(x) dx.$$

Обозначим

$$\bar{\Omega}_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(x)}{x^p} dx.$$

Ясно, что

$$\bar{\Omega}_n \geq n^p \cdot \Omega_n.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{L^p_\omega(0,1)} \leq C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Omega}_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k \right)^p \right)^{1/p} \tag{5}$$

По лемме 2 неравенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k \right)^p \bar{\Omega}_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^p \bar{\Omega}_n \tag{6}$$

верно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\bar{\Omega}_k}{k^p} \lesssim \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} \bar{\Omega}_k \tag{7}$$

А неравенство (5) выполняется в силу условия теоремы $\omega \in RB_p$. Действительно, из условия $\omega \in RB_p$ мы имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\bar{\Omega}_k}{k^p} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\omega(t)}{t^p} dt \lesssim 2^p \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \omega(t) dt$$

$$= 2^p \int_0^{\frac{1}{n}} \omega(t) dt \lesssim \frac{1}{n^p} \int_{\frac{1}{k+1}}^{1} \frac{\omega(t)}{t^p} dt \lesssim \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\omega(t)}{t^p} dt = \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} \bar{\Omega}_k$$

Из (5)–(7) следует (3).

Докажем обратное утверждение, т.е. из (3) следует $\omega \in RB_p$. Для этого рассмотрим функцию $f_n(x) = \sum_{v=0}^{m_n-1} \psi_v(x), n \in \mathrm{N}$.

Тогда по лемме 1 и по неравенству (3) имеем

$$m_n \left(\int_0^{1/m_n} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{v=0}^{\infty} \Lambda_v^p \left(\int_{1/m_{v+1}}^{1/m_v} \frac{\omega(x)}{x^p} dx \right) \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sum_{v=p}^{n} \left(\int_{1/m_{v+1}}^{1/m_v} \frac{\omega(x)}{x^p} dx \right)^p \right)^{1/p} = \left(\int_{1/m_{n+1}}^{1} \frac{\omega(x)}{x^p} dx \right)$$

Отсюда следует, что $\omega \in RB_p$. Теорема 1 доказана.

Замечание: теорема 1 является аналогом соответствующей теоремы, доказанной С. Тихоновым [5] для рядов по тригонометрической системе. При доказательстве теоремы 1 мы воспользовались специфическими свойствами мультипликативной системы.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $\sup_n p_n = K < \infty$,

$\{\lambda_k\}$ – последовательность ограниченной вариации, $\lambda_n \to 0$ и пусть

$$\Lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|, \mathrm{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \psi_k(\mathrm{x})$$

и пусть

$$I_1 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{v=1}^{n} u_v \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\omega(x)}{x^q} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

$$I_2 := \sup_{n \in \mathbb{N}} V_n \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где

$$V_n = \left(\sum_{v=1}^{n-1} v^{p'} \alpha_v + \frac{n^{p'}}{U_n^{\frac{p'}{p}}} \right)^{\frac{1}{p'}}, p > 1,$$

$$\alpha_v = \frac{1}{U_v^{\frac{p'}{p}}} - \frac{1}{U_{v+1}^{\frac{p'}{p}}}$$

и $U_v = \sum_{k=1}^{v} u_k, u_k \geq 0, u_1 > 0$.

Тогда имеет место оценка

$$\|f\|_{L^q_{\omega[0,1)}} \lesssim \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Lambda_n^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. В лемме 3, полагая $\gamma_m = \Omega_m, \theta_m = 1, x_n = \Lambda_n$, и $\beta_n = u_n$ и учитывая, что $\Lambda_n \downarrow$, имеем, что неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \sum_{k=1}^{n} (\Lambda_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Lambda_n^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $I_1 + I_2 < \infty$. Действительно, в этом случае, согласно лемме 3, имеем

$$K_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^{n} \theta_m^q \gamma_m \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{m=1}^{n} \beta_m \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^{n} \Omega_m \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{n} u_m \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\omega(x)}{x^q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{n} u_m \right)^{-\frac{1}{p}} = I_1.$$

Учитывая, что $1 - p' = \frac{-p'}{p'}$, мы имеем

$$K_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \gamma_m \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \Theta_m \right) \left(B_m^{1-p'} - B_{m+1}^{1-p'} \right) + \Theta_m^{p'} B_n^{1-p'} \Bigg)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \Omega_m \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{n-1} m^{p'} \left(B_m^{1-p'} - B_{m+1}^{1-p'} \right) + n^{p'} B_n^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \Omega_m \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} m^{p'} \left(\frac{1}{B_s^{\frac{p'}{p}}} - \frac{1}{B_{s+1}^{\frac{p'}{p}}} \right) + \frac{n^{p'}}{B_n^{\frac{p'}{p}}} \Bigg)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot V_n = I_2$$

Теорема 2 доказана.

Заключение

В данной работе получены оценки нормы суммы рядов по мультипликативным системам в весовом пространстве Лебега. При этом коэффициенты рассматриваемых рядов являются последовательностью ограниченной вариации. Были найдены условия на коэффициенты и на весовую функцию для принадлежности суммы рядов по мультипликативным системам весовому пространству Лебега.

Результаты применимы в задачах гармонического анализа и теории приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды Уолша и преобразования. Теория и приложения // Наука. – 1987. – 343 с.

2 Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Множества функций и гармонический анализ на нуль-измеримых группах. – Баку: ЭЛМ,1981. – 180 с.

3 Shipp F., Wade W.R., and Simon P. Walsh Series: An Introduction to Dyadic Analysis. – Adam Hilger, Bristol, 1990.

4 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – Univ. Press, 1959.

5 Тихонов С.Ю. Весовые неравенства для рядов Фурье и ограниченность вариации // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2021. – С. 294–312. https://doi.org/10.4213/tm4130.

6 Bari N.K. Trigonometric Series. – Fizmatgiz, Moscow, 1961.

7 Dyachenko M., Mukanov A. and Tikhonov S. Hardy–Littlewood theorems for trigonometric series with general monotone coefficients // Stud. Math. – 2020. – Vol. 250. – No. 3. – P. 217–234. https://doi.org/10.4064/sm180225-13-10.

8 AndersenF. On the transformation of Fourier coefficients of certain classes of functions. II // Pac. J. Math. – 1983. – Vol. 105. – No. 1. – P. 1–10. https://doi.org/10.2140/pjm.1983.105.1.

9 Tikhonov S.Yu. On integrability of trigonometric series // Mathematical Notes. – 2005. – Vol. 78. – No. 3. – P. 437–442. https://doi.org/10.4213/mzm2606.

10 Ari˜no M. and MuckenhouptB. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions // Trans. Am. Math. Soc. – 1990. – Vol. 320. – No. 2. – P. 727–735. https://doi.org/10.2307/2001699.

11 Bennett G., Grosse-Erdmann K.-G. Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions // Mathematische Annalen. – 2006. –Vol. 344. – No. 3. – P. 489–531. https://doi.org/10.1007/s00208-005-0678-7.

12 Volosivets S.S., Fadeev R.N. Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems // Journal of Mathematical Sciencesю – 2015. – Vol. 209. – No. 1. – P. 51–65. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2484-4.

13 VolosivetsS. S. Absolute convergence of single and double Fourier series on multiplicative systems // Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. – 2009. – P. 7–14. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-3-7-14.

14 Bokayev N.A., Mukanov Z.B. Weighted integrability of double trigonometric series and of double series with respect to multiplicative systems with coefficients of class R^+_0 BV S^2 // Math Notes. – 2012. – Vol. 91. – P. 575–578. https://doi.org/10.1134/S0001434612030327

15 Turgumbayev K., Suleimenova A., Mukhambetzhan M. On criteria for weighted integrability of series sums with monotonic coefficients with respect to multiplicative systems // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. – Vol. 2. – No. 114. – P. 197–210. https://doi.org/10.31489/2024m2/197-210.

16 Volosivets S.S., Fadeev R.N. Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems. // Fundam. Prikl. Mat. – 2013. – P. 69–87. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2484-4.

17 Goldman M.L., Estimates for the norm of integral and discrete operators of Hardy type on cones of quasimonotone functions. // Dokl. Math. – 2001. –Vol. 63. – No. 2. – P. 250–255.

18 Гольдман М.Л. Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квазимонотонных функций // Тр. МИАН. – 2001. – Vol. 232. – P. 115–143.

19 Гогатишвили А., Степанов В.Д. Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // УМН. – 2013. – Vol. 68. – No. 4. – P. 3–68. https://doi.org/10.1070/RM2013v068n04ABEH004849.

REFERENCES

1 Golubov, B.I., Efimov, A.V., Skvortsov, V.A., Walsh Series and Transformations: Theory and Applications (Moscow: Nauka, 1987), 343 p. [In Russian].

2 Agaev, G.N., Vilenkin, N.Ya., Dzhafarli, G.M., Rubinstein, A.I., Function Sets and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups (Baku: Elm, 1981), 180 p. [In Russian].

3 Schipp, F., Wade, W.R., Simon, P., Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis (Bristol: Adam Hilger Ltd., 1990).

4 Zygmund, A. Trigonometric Series. Univ. Press, 1959. [In Russian].

5 Tikhonov, S.Yu., Weighted inequalities for Fourier series and bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math., 312, 282–300 (2021). https://doi.org/10.1134/S0081543821010193. [In Russian].

6 Bari, N.K. Trigonometric Series (Fizmatgiz, Moscow, 1961).

7 Dyachenko, M., Mukanov, A., and Tikhonov, S. Hardy–Littlewood theorems for trigonometric series with general monotone coefficients // Stud. Math., 250 (3), 217–234 (2020). https://doi.org/10.4064/sm180225-13-10.

8 Andersen, F. On the transformation of Fourier coefficients of certain classes of functions. II. Pac. J. Math., 105 (1), 1–10 (1983). https://doi.org/10.2140/pjm.1983.105.1.

9 Tikhonov, S.Yu. On integrability of trigonometric series // Mathematical Notes., 78 (3), 437–442 (2005). https://doi.org/10.4213/mzm2606.

10 Ari˜no, M. and Muckenhoupt, B. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. Trans. Am. Math. Soc., 320 (2), 727–735 (1990). https://doi.org/10.2307/2001699.

11 Bennett, G., Grosse-Erdmann, K.-G. Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions. Mathematische Annalen., 344 (3), 489–531 (2006). https://doi.org/10.1007/s00208-005-0678-7.

12 Volosivets, S.S., Fadeev, R.N. Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems. Journal of Mathematical Sciences, 209 (1), 51–65 (2015). https://doi.org/10.1007/s10958-015-2484-4.

13 VolosivetsS, S. Absolute convergence of single and double Fourier series on multiplicative systems. Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 7–14 (2009). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-3-7-14.

14 Bokayev, N.A., Mukanov, Z.B. Weighted integrability of double trigonometric series and of double series with respect to multiplicative systems with coefficients of class R+0 BV S2. Math Notes, 91, 575–578 (2012). https://doi.org/10.1134/S0001434612030327.

15 Turgumbayev, K., Suleimenova, A., Mukhambetzhan, M. On criteria for weighted integrability of series sums with monotonic coefficients with respect to multiplicative systems. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2 (114), 197–210 (2024). https://doi.org/10.31489/2024m2/197-210.

16 Volosivets, S.S., Fadeev R.N. Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems. Fundam. Prikl. Mat., 69–87 (2013). https://doi.org/10.1007/s10958-015-2484-4.

17 Goldman, M.L. Estimates for the norm of integral and discrete operators of Hardy type on cones of quasimonotone functions. Dokl. Math., 63 (2), 250–255 (2001).

18 Goldman, M.L. Sharp Estimates of Norms of Hardy-Type Operators on Cones of Quasimonotone Functions. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 232, 115–143 (2001). [In Russian].

19 Gogatishvili, A., Stepanov, V.D. Reduction Theorems for Weighted Integral Inequalities on the Cone of Monotone Functions. Russian Mathematical Surveys, 68 (4), 3–68 (2013). https://doi.org/10.1070/RM2013v068n04ABEH004849. [In Russian].

[1]**Тургумбаев М.Ж.,**
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID:0009-0007-1422-8160,
e-mail: mentur60@mail.ru
[2*]**Мұхамбетжан М.А.,**
докторант, ORCID ID:0009-0002-3632-2303,
*e-mail:manshuk-9696@mail.ru
[1]**Сулейменова З.Р.,**
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID:0009-0005-9114-7247,
e-mail: zr-s2012@yandex.ru
[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Астана қ., Қазақстан
[2]Е.А. Букетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті,
Қарағанды қ., Қазақстан

МУЛЬТИПЛИКАТИВТІК ЖҮЙЕЛЕР БОЙЫНША ҚАТАРЛАРДЫҢ ҚОСЫНДЫСЫНА АРНАЛҒАН САЛМАҚТЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аңдатпа

Бұл жұмыста Прайс мультипликативтік жүйелері бойынша шектелген вариациялы тізбектер класына жататын коэффициенттері бар қатарлар зерттеледі. Мұндай қатарлардың қосындысының нормасын өлшенген Лебег кеңістіктерінде бағалау шарттары алынады. Бұл шарттар салмақ функциясы мен сәйкес салмақ тізбегі арқылы тұжырымдалады. Зерттеу әдістемесі гармониялық талдау тәсілдеріне, Абель түрлендіруіне және Лебегтің өлшенген кеңістіктеріндегі Харди операторының шектеулілік критерийлеріне (Макенхаупт шарттарына) негізделеді. Сонымен қатар, дискретті үш-салмақты Харди теңсіздіктері қарастырылып, олардың зерттеліп отырған қатарларға қолданылуы талданады. Жұмыстың негізгі теоремалары коэффициенттердің вариациясы мен салмақтардың интегралдық сипаттамалары арасындағы байланысты анықтайды. Алынған нәтижелер белгілі аналитикалық әдістердің қолданылу аясын кеңейтіп, оларды функционалдық қатарлардың анағұрлым кең класына таратады. Бұл нәтижелер гармониялық талдау, қатарлар теориясы, сондай-ақ функционалдық кеңістіктердегі дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін бағалау мәселелері үшін өзекті.

Тірек сөздер: мультипликативті жүйелер, Лебегтің өлшенген кеңістіктері, шектеулі вариация класының реттілігі, Харди операторы, интегралдылық шарттары.

[1]**Turgumbaev M.Zh.,**
Cand.Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0009-0007-1422-8160,
e-mail: mentur60@mail.ru
[2]***Mukhambetzhan M.A.,**
PhD student, ORCID ID:0009-0002-3632-2303,
*e-mail:manshuk-9696@mail.ru
[1]**Suleimenova Z.R.,**
Cand.Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID:0009-0005-9114-7247
e-mail: zr-s2012@yandex.ru
[1]Eurasian National University,
Astana, Kazakhstan
[2]Karaganda Buketov University,
Karaganda, Kazakhstan

WEIGHT INEQUALITIES FOR THE SUM OF SERIES WITH RESPECT TO THE MULTIPLICATIVE SYSTEMS

Abstract

This paper investigates series over Price multiplicative systems with coefficients belonging to the class of sequences of bounded variation. Conditions are obtained for estimating the norm of the sum of such series in weighted Lebesgue spaces. These conditions are formulated in terms of the weight function and the corresponding weight sequence. The methodology relies on techniques of harmonic analysis, the Abel transformation, and the Muckenhoupt criteria for the boundedness of the Hardy operator in weighted Lebesgue spaces. Additionally, discrete three-weight Hardy inequalities are considered, and their applicability to the analyzed series is examined. The main theorems establish a relationship between the variation of the coefficients and the integral characteristics of the weights. The results extend the applicability of known analytical methods to a wider class of functional series and are of interest in harmonic analysis, series theory, and the estimation of solutions to differential equations in functional spaces.

Keywords: multiplicative systems, weighted Lebesgue spaces, sequence from the class of bounded variation, Hardy operator, integrability conditions.

Дата поступления статьи в редакцию: 04.07.2025