УДК 517.927.2
МРНТИ 27.29.15, 27.29.17, 27.29.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-3-221-230

[1]**Усманов К.И.,**
к.ф.-м.н, доцент, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807,
e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[1]**Назарова К.Ж.,**
к.ф.-м.н, доцент, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,
e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz
[1]***Турганбаева Ж.Н.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-9680-2347,
*e-mail: zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz

[1]Международный казахско-турецкий университет им. А.Ясави, г. Туркестан, Казахстан

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Аннотация

В данной научной работе рассматривается нелокальная краевая задача для одного класса интегро-дифференциальных уравнений, в структуре которых присутствует инволютивное преобразование. Основное внимание сосредоточено на применении метода параметризации, разработанного и предложенного профессором Д. Джумабаевым, целью которого является исследование условий существования и единственности решения для подобного рода задач, а также определение спектра собственных значений соответствующей краевой задачи. Как известно из теории, задача Коши для уравнений, содержащих инволюции, не всегда имеет единственное решение. Для преодоления данной трудности вводятся параметры $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ в середине рассматриваемого отрезка и осуществляется преобразование $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, которое обеспечивает существование единственного решения задачи Коши. Это преобразование позволяет разделить исходную нелокальную краевую задачу на две части: во-первых, на специальную задачу Коши и, во-вторых, на систему линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. После подстановки решения в краевые условия строится система уравнений, разрешимость которой зависит от невырожденности соответствующей матрицы. Кроме того, рассматривается случай неоднозначности решения, при котором исследуются собственные значения и формулируются условия разрешимости исходной задачи.

Ключевые слова: инволюция, краевая задача, метод параметризации, параметр, специальная задача Коши, разрешимость, собственные значения.

Введение

Интегро-дифференциальные уравнения с инволюцией образуют особый класс функционально-дифференциальных уравнений, которые находят широкое применение в математическом моделировании физических, биологических и инженерных процессов, характеризующихся обратными связями, симметричными зависимостями и запаздыванием. Подобные уравнения возникают, в частности, при моделировании процессов с пространственной симметрией, в задачах динамики колебаний, квантовой механики и теории управления.

Инволютивное преобразование имеет свойства вида $\alpha: [0, T] \to [0, T]$ и $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$. Интегро-дифференциальные уравнения, содержащие искомую функцию $x(t)$ и значение $x(\alpha(t))$ и $\dot{x}(\alpha(t))$, называют интегро-дифференциальными уравнениями с инволютивными преобразованиями. На отрезке $[0,1]$ в качестве такого преобразования можно рассмотреть преобразование вида $\alpha(t) = 1 - t$.

Проблемам существования и единственности решений дифференциальных уравнений с инволюцией посвящен ряд фундаментальных исследований. Так, в работах Przeworska-Rolewicz [3] и J. Wiener [4] исследованы дифференциальные и дифференциально-операторные уравнения с инволюцией методами функционального анализа и разделения переменных. Свойства соответствующих преобразований и спектральных задач изучались в трудах N. Karapetiants и S. Samko [5]. Построение функций Грина для одномерных уравнений с инволюцией представлено в работе Alberto Cabada и F. Tojo [6].

Корректность, качественные свойства решений, а также спектральные задачи для дифференциальных уравнений с различными видами инволютивных преобразований освещаются в работах [7–10]. Отдельное внимание уделяется собственным значениям и функциям для операторов второго порядка и уравнений с кратной инволюцией [8–11].

Несмотря на значительный прогресс в исследовании таких уравнений, многие вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач остаются открытыми. В частности, не всегда ясно, при каких условиях можно гарантировать существование решения. Настоящая работа направлена на исследование одной из таких задач с использованием метода параметризации, позволяющего установить условия разрешимости для краевых задач с инволютивными преобразованиями.

Материалы и методы

В данной работе на отрезке $[0,1]$ исследуется краевая задача типа Самарского – Ионкина для интегро-дифференциального уравнения с инволюцией

$$y''(x) + \varepsilon y''(1-x) = -\lambda y(x) + \nu \int_0^1 K(x,s)y(s)\, ds + f(x),\ -1 < \varepsilon < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1),\ y'(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $K(x,s)$ непрерывна на $[0,1] \times [0,1]$, функция $f(x)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Разрешимость краевой задачи (1), (2) будем исследовать методом параметризации, предложенный профессором Д. Джумабаевым [12].

1. Методология исследования

Для исследования исходной краевой задачи исследуем сначала разрешимость следующей краевой задачи

$$y''(x) + \varepsilon y''(1-x) = -\lambda y(x) + F(x),\ -1 < \varepsilon < 1, \tag{3}$$

$$y(0) = y(1),\ y'(1) = 0. \tag{4}$$

где $F(x) = \nu \int_0^1 K(x,s)y(s)\, ds + f(x)$.

Введя обозначения $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right),\ \mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, от краевой задачи (3), (4) перейдем к следующей эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$u''(x) + \varepsilon u''(1-x) = -\lambda u(x) + F^*(x),\ -1 < \varepsilon < 1, \tag{5}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{6}$$
$$u(0) - u(1) - \mu_2 = 0, \tag{7}$$
$$u'(1) + \mu_2 = 0. \tag{8}$$

Где $F^*(x) = F(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Лемма 1. Задачи (3), (4) и (5) – (8) эквивалентны.

Доказательство. Пусть $y(x)$ решение краевой задачи (3), (4). Тогда определяема в виде функция $u(x) = y(x) - \mu_1 - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет (5) – (8), где $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right),\ \mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$. Действительно, $u''(x) = y''(x)$ и $u''(1-x) = y''(1-x)$.

Подставляя выражения для $u(x) = y(x) - \mu_1 - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ в (5), получим

$$u''(x) + \varepsilon u''(1-x) + \lambda u(x) - F(x) + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = y''(x) + \varepsilon y''(1-x) + \lambda y(x) - F(x) = 0,$$

т.е. $y(x)$ удовлетворяет (5).

Так как $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right),\ \mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$, то

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) - \mu_1 = \mu_1 - \mu_1 = 0,$$

$$u'\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) - \mu_2 = \mu_2 - \mu_2 = 0.$$

Выполнение условий (7), (8) следует из

$$u(0) - u(1) - \mu_2 = \left(y(0) - \mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right) - \left(y(1) - \mu_1 - \frac{\mu_2}{2}\right) - \mu_2 = y(0) - y(1) = 0,$$

$$u'(1) + \mu_2 = (y'(1) - \mu_2) + \mu_2 = y'(1) = 0.$$

Обратно, пусть $u(x),\ \mu_1,\ \mu_2$ – решение задачи (5) – (8). Тогда определяема в виде функция $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет (3), (4). Действительно, $y''(x) = u''(x)$ и $y''(1-x) = u''(1-x)$. Тогда используя то, что $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right),\ F^*(x) = F(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, получим

$$y''(x) + \varepsilon y''(1-x) + \lambda y(x) - F(x) = u''(x) + \varepsilon u''(1-x) + \lambda u(x) - F^*(x) = 0$$

т.е. решение (5) – (8) удовлетворяет (3).

Докажем, что $y(x)$, определенный равенством $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, удовлетворяет и краевым условиям (4).

Так как

$$y(0) - y(1) = u(0) + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} - u(1) - \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} = u(0) - u(1) - \mu_2 = 0.$$

Используя (8), можно показать, что $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет и $y'(1) = 0$.

Лемма доказана.

Как видно из (5) – (8), краевая задача формально разделена на две части, т.е. задача Коши (4), (5) для исходного уравнения и в систему линейных алгебраических уравнений (7), (8) для определения введенных параметров μ_1, μ_2.

2. Решение задачи Коши

Рассмотрим уравнение (4)) в точках $x^* = 1 - x$, тогда

$$u''(1-x) + \varepsilon u''(x) = -\lambda u(1-x) + F^*(1-x),\ -1 < \varepsilon < 1 \tag{9}$$

Складываем уравнения (5) и (9). Обозначим через $\vartheta(x) = u(x) + u(1-x)$, тогда

$$(1+\varepsilon)\,\vartheta''(x) = -\lambda\vartheta(x) + F_+^*(x),\ -1 < \varepsilon < 1 \tag{10}$$

$$\vartheta\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ \vartheta'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{11}$$

где $F_+^*(x) = F^*(x) + F^*(1-x)$.

Вычитаем из уравнения (5) уравнение (9). Обозначим через $w(x) = u(x) - u(1-x)$, тогда

$$(1-\varepsilon)\,w''(x) = -\lambda w(x) + F_-^*(x),\ -1 < \varepsilon < 1 \tag{12}$$

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{13}$$

где $F_-^*(x) = F^*(x) - F^*(1-x)$.

Лемма 2. Решение задачи задач Коши (10), (11), удовлетворяет условию $\vartheta(x) = \vartheta(1-x)$ на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\vartheta}(x)$ решение задачи Коши (10), (11). Так как $x \in [0,1]$, то $(1-x) \in [0,1]$, то и $\tilde{\vartheta}(1-x)$ удовлетворяет задаче Коши (10), (11). Обозначим через $z(x) = \tilde{\vartheta}(x) - \tilde{\vartheta}(1-x)$, тогда

$$(1+\varepsilon)z''(x) = -\lambda z(x),\ -1 < \varepsilon < 1 \tag{14}$$

$$z\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ z'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{15}$$

Решение задачи Коши (14), (15) определяется в виде

$$z(x) = -\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\int_{\frac{1}{2}}^{x}(x-\xi)\ z(\xi)\ d\xi.$$

Из леммы Гроноулла – Беллмана следует, что $z(x) = 0$ т.е. $\tilde{\vartheta}(x) = \tilde{\vartheta}(1-x)$.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Решение задачи задач Коши (12), (13) удовлетворяет условию $w(x) = -w(1-x)$ на отрезке $[0,1]$.

Лемма 4. Пусть $\vartheta(x),\ w(x)$ решение соответственно задач (10), (11) и (12), (13), тогда $u(x) = \frac{1}{2}\big(\vartheta(x) + w(x)\big)$ является единственным решением задачи (5), (6).

Доказательство. Пусть $\vartheta(x),\ w(x)$ решение соответственно задач (10), (11) и (12), (13), Тогда

$$u''(x) = \frac{1}{2}\big(\vartheta''(x) + w''(x)\big),\ u''(1-x) = \frac{1}{2}\big(\vartheta''(1-x) + w''(1-x)\big).$$

Отсюда и $\vartheta''(x) = \vartheta''(1-x),\ w''(x) = -w''(1-x)$, следует

$$u''(x) + \varepsilon u''(1-x) = \frac{1}{2}\big(\vartheta''(x) + w''(x)\big) + \frac{\varepsilon}{2}\big(\vartheta''(1-x) + w''(1-x)\big) =$$

$$= \frac{1+\varepsilon}{2}\vartheta''(x) + \frac{1-\varepsilon}{2}w''(x) = -\frac{\lambda}{2}\big(\vartheta(x) + w(x)\big) + f^*(x) = -\lambda u(x) + F^*(x).$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\vartheta\left(\frac{1}{2}\right) + w\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0,\ u'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\vartheta'\left(\frac{1}{2}\right) - w'\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.$$

Лемма 5. Пусть $u(x)$ решение задачи (5), (6), тогда $\vartheta(x) = u(x) + u(1-x)$, $w(x) = u(x) - u(1-x)$ является решением соответственно задач (10), (11) и (12), (13).
Доказательство очевидно.
Пусть $\lambda > 0$, тогда решение задачи (10), (11) определяется в виде

$$\vartheta(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}(x-\xi)\right)F_+^*(\xi)\,d\xi,$$

а решение задачи Коши (12), (13) в виде

$$w(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}(x-\xi)\right)F_-^*(\xi)\,d\xi.$$

Из леммы 4 следует

$$u(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}(x-\xi)\right)F_+^*(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}(x-\xi)\right)F_-^*(\xi)\,d\xi. \qquad (16)$$

Пусть $K(x,s) = 1$. Тогда

$$F(x) = \nu\int_0^1 K(x,s)\,y(s)\,ds + f(x) = \nu\int_0^1 u(s)\,ds + \nu\mu_1 + f(x)$$

Учитывая, что $F^*(x) = F(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ получим

$$F_+^*(x) = F(x) + F(1-x) - 2\lambda\mu_1 =$$

$$= 2\nu\int_0^1 u(s)\,ds + f(x) + f(1-x) + 2(\nu-\lambda)\mu_1 \qquad (17)$$

$$F_-^*(x) = F(x) + F(1-x) - 2\lambda\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= f(x) - f(1-x) - 2\lambda\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right). \qquad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (16) получим интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{\nu}{\lambda}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\int_0^1 u(s)\,ds +$$

$$+\left(\frac{\nu}{\lambda}-1\right)\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\mu_1 - \mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\mu_2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+\tilde{F}(x) \qquad (19)$$

где

$$\tilde{F}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}(x-\xi)\right)f_{+}(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}(x-\xi)\right)f_{-}(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $\lambda\neq\alpha\nu$, где, $\alpha=\left(1-2\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\lambda}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\right)\right)$, тогда, применяя теорию Фредгольма, получим

$$\int_0^1 u(s)\,ds=\frac{(\nu-\lambda)\alpha}{\lambda-\alpha\nu}\mu_1+\frac{\lambda}{\lambda-\alpha\nu}\int_0^1\tilde{F}(s)\,ds,$$

т.е. решение интегрального уравнения (19) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{\nu-\lambda}{\lambda-\alpha\nu}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\mu_1-\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\mu_2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+\tilde{F}(x)+$$

$$+\frac{\nu}{\lambda-\alpha\nu}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\int_0^1\tilde{F}(s)\,ds \qquad (20)$$

В (20), определив значения $u(0),\ u(1),\ u'(1)$ и подставляя в условия (7), (8), получим

$$\mu_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\left(\tilde{F}(0)-\tilde{F}(1)\right), \qquad (21)$$

$$\frac{\nu-\lambda}{\lambda-\alpha\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\mu_1\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\right)+\mu_2\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\right)=$$

$$=-\tilde{F}'(1)+\frac{1}{\lambda(1-\alpha)}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\right)\int_0^1\tilde{F}(s)\,ds \qquad (22)$$

Матрицу, соответствующую параметрам μ_1, μ_2, обозначим через

$$Q=\begin{pmatrix}0 & \sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\\ \frac{\nu-\lambda}{\lambda-\alpha\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} & \cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Результаты и обсуждение

Теорема 1. Пусть $\lambda \neq \alpha\nu$, тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходима и достаточна обратимость матрицы Q.

Доказательство. Если матрица Q обратима, то система линейных уравнений (21), (22) совместно определенная, т.е. однозначно определим значения параметров μ_1, μ_2. Подставляя полученные значения в (5), (6), найдем единственное решение задачи Коши $u(x)$. На основании леммы 1 определяем $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ – единственное решение краевой задачи (1), (2).

Обратно, пусть краевая задача (1), (2) однозначно разрешима и $y(x)$ его единственное решение. Введя обозначения $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $u(x) = y(x) - \mu_1 - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, от краевой задачи (1), (2) перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами (5) – (8).

Предположим, что матрица Q необратима. Тогда система линейных уравнений имеет по крайней мере два различных решения μ_1, μ_2 и $\widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2}$. Но $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\widetilde{\mu_1} = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\widetilde{\mu_2} = y'\left(\frac{1}{2}\right)$, отсюда следует, что матрица Q обратима и $\mu_1 = \widetilde{\mu_1}$, $\mu_2 = \widetilde{\mu_2}$.

Теорема доказана.

Если матрица Q необратима, т.е. $\frac{\lambda-\nu}{\lambda-\alpha\nu}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\right) = 0$, тогда из системы (21), (22) следует:

Теорема 2. Если $\lambda \neq \alpha\nu$ и $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (24)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Так как $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$, то $\mu_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_{1n}}{(1-\varepsilon)}}\right) = \mu_2\cos(n\pi) = (-1)^n\mu_2$, т.е. система уравнении (21), (22) совместна неопределенная.

В уравнении (22), считая μ_1 свободным, находим значении μ_2. Определив решение задачи Коши (5), (6) и подставляя в $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, находим решения краевой задачи (1), (2).

Наоборот, пусть краевая задача (1), (2) имеет решение при $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$. Предположим, что $\int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi)\, d\xi \neq 0$.

Применяя метод параметризации, от краевой задачи (1), (2) приходим к системе линейных уравнений (21), (22). Тогда из уравнения (21) получим

$$0 = \tilde{F}(0) - \tilde{F}(1) = \int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi)\, d\xi \neq 0.$$

Из противоречия следует необходимость выполнения условия (24), при $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\lambda \neq \alpha\nu$. Если $\lambda = \nu$ и $\lambda_{2k} = (1+\varepsilon)k^2\pi^2$, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{(1+\varepsilon)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\right)\cos(2k\pi\xi)\right) f(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (25)$$

Доказательство. Пусть $\lambda \neq \alpha\nu$ и $\lambda_2 = \nu$. Тогда

$$\lambda \neq \alpha\nu \Rightarrow \lambda(1-\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\lambda}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_{2k} = 4(1+\varepsilon)k^2\pi^2.$$

Дальнейшие выкладки аналогичны доказательству теоремы 3 [18].

Заключение

В данной работе была рассмотрена краевая задача типа Самарского – Ионкина для интегро-дифференциального уравнения. Для исследования разрешимости рассматриваемой задачи был применен метод параметризации Д. Джумабаева. Определены разрешимость и собственные значения исследуемой задачи. В дальнейшем предполагается применение результатов данной работы для исследования краевых задач для интегро-дифференциального уравнения с дробной производной, а также для исследования краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Информация о финансировании

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP 23488086).

ЛИТЕРАТУРА

1 Przeworska-Rolewicz, D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach, 1st ed.; Elsevier Scientific: Amsterdam, The Netherlands, 1973.

2 Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations, 1st ed., World Scientific: Singapore, River Edge NJ, USA, London, UK Hong Kong, China, 1993.

3 Karapetiants, N., Samko, S. Equations with Involutive Operators, 1st ed. World Birkha¨user: Boston, MA, USA, 2001.

4 Cabada, A., Tojo, F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed., Atlantis Press: Paris, France, 2015.

5 Al-Salti, N., Kerbal, S., Kirane, M. Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. Math. Model. Nat. Phenomena, 14, 312 (2019).

6 Kritskov, L.V., Sadybekov, M.A., Sarsenbi, A.M. Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution. Turk. J. Math., 43, 393–401 (2019).

7 Sarsenbi, A., Sarsenbi, A. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. Symmetry, 13, 1972 (2021).

8 Turmetov, B., Karachik, V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple Involution. Symmetry, 13, 1981 (2021).

9 Dildabek, G., Ivanova, M.B., Sadybekov, M.A. On root functions of nonlocal differential second-order operator with boundary conditions of periodic type. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 112 (4), 29–44 (2021).

10 Dzhumabayev, DS. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Comput Maths Math Phys., 29 (34), 34–46 (1989).

11 Assanova, A.T., Bakirova, E.A., Kadirbayeva, Z.M. Numerical Solution to a Control Problem for Integro-Differential Equations, Comput. Math. and Math. Phys., 60 (2), 203–221 (2020).

12 Dzhumabaev, D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics., 53 (6), 736–758 (2013).

[1]Усманов К.И.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[1]Назарова К.Ж.,
ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879, e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz
[1]*Турганбаева Ж.Н.,
PhD, ORCID ID: 0000-0001-9680-2347, *e-mail: zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz

[1]Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан

ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУГЕ АРНАЛҒАН БЕЙЛОКАЛЬДІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Бұл ғылыми жұмыста құрамында инволютивті түрлендіру бар интегро-дифференциалдық теңдеулердің бір класына арналған бейлокальді шеттік есеп қарастырылады. Жұмыста профессор Д. Жұмабаев әзірлеген параметрлеу әдісін қолдануға ерекше көңіл бөлінеді. Бұл әдістің мақсаты – мұндай есептердің шешімінің бар болу және бірегейлік шарттарын зерттеу, сондай-ақ сәйкес шеттік есептің меншікті мәндер спектрін анықтау. Теория бойынша инволюциясы бар теңдеулер үшін Коши есебі әрдайым бір ғана шешімге ие бола бермейтіні белгілі. Бұл қиындықты шешу үшін қарастырылып отырған кесіндінің ортасына параметрлер $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ енгізіліп, Коши есебінің бірегей шешімінің бар болуын қамтамасыз ететін түрлендіру $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ жүргізіледі. Бұл түрлендіру бастапқы бейлокальді шеттік есепті екі бөлікке бөлуге мүмкіндік береді: біріншісі – арнайы Коши есебі, екіншісі – енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі. Шешімді шеттік шарттарға қойғаннан кейін сәйкес матрицаның ерекшелігіне байланысты болатын теңдеулер жүйесі құрылады. Сонымен қатар шешімнің бірмәнді емес жағдайы қарастырылып, бұл жағдайда меншікті мәндер зерттеліп, бастапқы есептің шешімділік шарттары тұжырымдалады.

Тірек сөздер: инволюция, шеттік есеп, параметрлеу әдісі, параметр, арнайы Коши есебі, шешімділік, меншікті мәндер.

[1]Usmanov K. I.,
Cand.Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807
e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[1]Nazarova K. Zh.,
Cand.Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,
e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz
[1]*Turganbayeva Zh. N.,
PhD, ORCID ID: 0000-0001-9680-2347, *e-mail: zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz

[1]International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yasawi, Turkestan, Kazakhstan.

ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION

Abstract

This scientific paper considers a nonlocal boundary value problem for a certain class of integro-differential equations that include an involutive transformation in their structure. The main focus is on the application of the parameterization method developed and proposed by Professor D. Dzhumabayev, the aim of which is to study the conditions for the existence and uniqueness of solutions for such problems, as well as to determine the spectrum of eigenvalues of the corresponding boundary value problem. As is known from theory, the Cauchy problem for equations involving involutions does not always have a unique solution. To overcome this difficulty, $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ parameters are introduced at the midpoint of the considered interval, and a transformation $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ is performed that ensures the existence of a unique solution to the Cauchy problem. This transformation allows the original nonlocal boundary value problem to be divided into two parts: first, a special Cauchy problem, and second, a system of linear algebraic equations with respect to the introduced parameters. After substituting the solution into the boundary conditions, a system of equations is constructed, the solvability of which depends on the non-degeneracy of the corresponding matrix. In addition, the case of non-uniqueness of the solution is considered, in which the eigenvalues are studied and the paper establishes criteria ensuring the existence of solutions to the initial boundary value problem.

Keywords: involution, boundary value problem, parameterization method, parameter, special Cauchy problem, solvability, eigenvalues.

Дата поступления статьи в редакцию: 07.08.2025