

ӨОЖ 517.927.6
FTAXP 27.29.17

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-3-210-220>

^{1,2}Темешева С.М.,

ф.-м.ғ.д., жетекші ғылыми қызметкер, профессордың м.а.,
ORCID ID: 0000-0002-3341-4539, e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

^{1,3*}Кадирбаева Ж.М.,

ф.-м.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, профессор,
ORCID ID: 0000-0001-8861-4100, *e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

^{1,2}Аширов С.Б.,

магистрант, ORCID ID: 0009-0008-6654-7531,
e-mail: ashirov_27@mail.ru

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ПАРАМЕТРІ БАР ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Андатпа

Бұл мақала параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептің шешілімділігінің мәселелеріне арналған. Зерттеу Жұмабаевтың параметрлеу әдісі арқылы жүргізіледі. Бұл әдіс бастапқы шеттік есепті шешуді алгебралық теңдеулер жүйесін және жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерін шешуге алып келеді. Параметрлеу әдісінің алгоритмдеріне өзгерістер енгізілді, бұл алгоритмнің жинақтылығына шеттік шарттардың әсерін әлсіретуге мүмкіндік берді. Параметрлеу әдісінің ерекшеліктеріне сәйкес, параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептің шешімінің бар болуы және жалғыздығы үшін жеткілікті шарттар алынды. Бұл шарттар әдістің өзгертілген алгоритмдерінің жинақтылығын да қамтамасыз етеді. Зерттеу нәтижелері – параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептермен сипатталатын әртүрлі модельдердің әрекетін талдаудың конструктивті құралы. Келтірілген мысал ұсынылған әдістің жүзеге асырылуы мен тиімділігін анық көрсетеді.

Тірек сөздер: көпнүктелі шеттік есеп, жүктеу, параметр, параметрлеу әдісі, шешілімділік.

Кіріспе

Ұсынылып отырған мақалада $[a, b]$ интервалында параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін төмендегідей сызықтық көпнүктелі шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathcal{P}(t)y(t) + \sum_{j=0}^M \mathcal{K}_j(t)y(\theta_j) + \mathcal{P}_0(t)\mu + \mathcal{F}(t), \quad (1)$$

$$y \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

$$\sum_{j=0}^M \mathcal{B}_j y(\theta_j) + \mathcal{C}_0 \mu = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad (2)$$

мұндағы $(n \times n)$ – өлшемді $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{K}_j(t)$, $j = \overline{0, M}$, матрицалары, $(n \times m)$ - өлшемді $\mathcal{P}_0(t)$ матрицасы және n – өлшемді $\mathcal{F}(t)$ вектор-функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз;

$((n+m) \times n)$ – өлшемді $B_j, j = \overline{0, M}$, матрицалары, $((n+m) \times m)$ – өлшемді C_0 матрицасы – тұрақты матрицалар, d – тұрақты вектор; $\|y\| = \max_{i=1, n} |y_i|$, $a = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{M-1} < \theta_M = b$.

Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі шеттік есептер – классикалық екі нүктелі есептерге қарағанда күрделі физикалық процестерді модельдеуге мүмкіндік беретін маңызды зерттеу саласы. Мұндай есептер аралық бақылауы бар процестерді модельдеу кезінде, тиімді басқару есептерінде, тербелістер теориясында, жылу алмасу мен басқа да қолданбалы салаларда жиі кездеседі [1, 2].

Көпнүктелі шеттік есептер теориясы соңғы онжылдықтарда белсенді түрде дамып келеді. Сызықтық және сызықтық емес көпнүктелі шеттік есептердің шешімдерінің бар болуы және оның жалғыздық шарттары [3–8] еңбектерінде зерттелген.

Көпнүктелі шеттік есептерді шешудің сандық әдістері де белсенді дамып келеді: [4, 5] жұмыстарында коллокация әдісі ұсынылса, [9] еңбекте вариациялық итерациялық әдіс, ал [10] жұмысында Адомиан жіктеу әдісі ұсынылған. Сонымен қатар, [11] жұмысында атқылау әдісіне негізделген екінші ретті көпнүктелі шеттік есептер шешімдерін жуықтауға арналған сандық әдіс әзірленген.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер классикалық модельдерді жалпылайды және оларды талдауда дәлірек әдістерді талап етеді. Мұндай теңдеулер нақты процестерді дәлірек сипаттауға мүмкіндік береді, мысалы, уақытша жүктемелер әсерінен серпінді құрылымдардың тербелістерін, жылу көздерін ескеретін жылу алмасуды немесе шоғырланған күштердің әсерінен механикалық жүйелердің қозғалысын сипаттауға болады [12]. Бұл модельдер теориялық зерттеу (шешімдердің бар болуы мен жалғыздығы, орнықтылығы, реттелгендігі) жағынан да, сандық тұрғыдан іске асыруда да ерекше тәсілдерді қажет етеді. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін түрлі есептер [13–16] жұмыстарында зерттелген. Жүктелген дифференциалдық теңдеулерді қолдану нақты процестердің неғұрлым дәл және сәйкес модельдерін құруға мүмкіндік береді, бұл оларды теориялық әрі қолданбалы тұрғыдан маңызды зерттеу нысанына айналдырып отыр.

Бұл мақала параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық көпнүктелі шеттік есепті зерттеуге арналады. Бұл есепті зерттеу үшін Жұмабаевтың параметрлеу әдісі [17] қолданылады. Есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығының шарттарын орнатуға басты назар аударылады. Алынған нәтижелерді жүйенің аралық күйлері мен бөлінген жүктемелердің әсерін ескеру қажет болатын математикалық модельдеу есептеріне қолдануға болады.

Негізгі ойлар. (1), (2) параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін көпнүктелі шеттік есебін шешу үшін профессор Жұмабаев ұсынған параметрлеу әдісін қолданайық. Осы әдістің схемасы бойынша $[a, b]$ аралығын $\theta_j, j = \overline{0, M}$, жүктеу нүктелерінде бөліктерге бөлейік:

$$[a, b] = \bigcup_{r=1}^M [\theta_{r-1}, \theta_r).$$

(1), (2) параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін көпнүктелі шеттік есебін

$$y_r(t) = y(t) \mathbb{I}_r(t), \text{ мұнда } \mathbb{I}_r(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\theta_{r-1}, \theta_r) \\ 0, & t \notin [\theta_{r-1}, \theta_r) \end{cases}, \quad r = \overline{1, M},$$

белгілеуін енгізіп, қайта жазайық:

$$\frac{dy_r(t)}{dt} = \mathcal{P}(t)y_r(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \mathcal{K}_j(t)y_{j+1}(\theta_j) + \mathcal{K}_M(t) \lim_{t \rightarrow \theta_M-0} y_M(t) +$$

$$+\mathcal{P}_0(t)\mu + \mathcal{F}(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, M},$$

$$\lim_{t \rightarrow \theta_p-0} y_p(t) = y_{p+1}(\theta_p), \quad p = \overline{1, M-1}, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \theta_M - 0} y_M(t) = y(\theta_M), \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} B_j y_{j+1}(\theta_j) + B_M \lim_{t \rightarrow \theta_M - 0} y_M(t) + C_0 \mu = d, \quad (6)$$

мұнда (4) шарты – шешімнің $\theta_j, j = \overline{1, M-1}$, жүктеу нүктелеріндегі байланысу шарты.

Айталық, $(y(t), \mu)$ жұбы (1), (2) есебінің шешімі болсын, онда $(y[t], \mu)$ жұбы (3) – (6) есебінің шешімі болады, мұндағы $y[t] = (y_1(t), \dots, y_M(t))$. Және керісінше $(\tilde{y}[t], \mu)$ жұбы (3) – (6) есебінің шешімі болсын, онда $\tilde{y}(t) = \sum_{r=1}^M \tilde{y}_r(t) \mathbb{I}_r(t)$ функциясы мен μ параметрінен құралған жұп (1), (2) есебінің шешімі болады.

$y_r(t)$ функциясының $t = \theta_{r-1}, r = \overline{1, M}$, нүктелеріндегі мәндерін $\lambda_r, r = \overline{1, M}, \lim_{t \rightarrow \theta_M - 0} y_M(t)$ шегін $\lambda_{M+1}, \mu = \lambda_{M+2}$ деп белгілеп, әрбір $[\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{0, M}$, аралығында $z_r(t) = y_r(t) - \lambda_r$ алмастыруын жасайық. (3) – (6) есебіне осы белгілеулер мен алмастыруын қолданып, осы есепке пара-пар болатын параметрлері бар есепке көшеміз:

$$\begin{aligned} \frac{dz_r(t)}{dt} &= \mathcal{P}(t)[z_r(t) + \lambda_r] + \sum_{j=0}^M \mathcal{K}_j(t) \lambda_{j+1} + \\ &+ \mathcal{P}_0(t) \lambda_{M+2} + \mathcal{F}(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$z_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, M}, \quad (8)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow \theta_p - 0} z_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, M}, \quad (9)$$

$$\sum_{j=0}^M B_j \lambda_{j+1} + C_0 \lambda_{M+2} = d, \quad (10)$$

(3) – (6) есебі мен (7) – (10) есебі келесі мағынада пара-пар есептер болады: $(y[t], \mu)$ жұбы (3) – (6) есебінің шешімі болса, онда $(z[t], \lambda)$ жұбы (7) – (10) есебінің шешімі болады, мұнда $\lambda_r = y_r(\theta_{r-1}), r = \overline{1, M}, \lambda_{M+1} = \lim_{t \rightarrow \theta_M - 0} y_M(t), \lambda_{M+2} = \mu, z_r(t) = y_r(t) - y_r(\theta_{r-1})$; ал егер $(\tilde{z}[t], \tilde{\lambda})$ жұбы (7) – (10) есебінің шешімі болса, онда $(\tilde{y}[t], \tilde{\mu})$ жұбы (3) – (6) есебінің шешімі болады, мұнда $\tilde{y}_r(t) = \tilde{z}_r(t) + \tilde{\lambda}_r, \lim_{t \rightarrow \theta_M - 0} \tilde{y}_M(t) = \tilde{\lambda}_{M+1}, \tilde{\mu} = \tilde{\lambda}_{M+2}$.

Материалдар мен әдістер

(7) – (10) есебінде $z_r(\theta_{r-1}) = 0, r = \overline{1, M}$, бастапқы шартының болуы $z_r(t)$ функциясын

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau)[z_r(\tau) + \lambda_r] d\tau + \int_{\theta_{r-1}}^t \sum_{j=0}^M \mathcal{K}_j(\tau) \lambda_{j+1} d\tau + \\ &+ \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}_0(\tau) \lambda_{M+2} d\tau + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{F}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

интегралдық теңдеуінен анықтауға мүмкіндік береді.

Бұл теңдеудегі $z_r(\tau)$ -дың орнына осы теңдеудің оң жағын қойып, және де осы процесті ξ ($\xi = 1, 2, \dots$) рет қайталасақ, $z_r(t)$ функциясы үшін келесідей теңдікті аламыз:

$$z_r(t) = D_{\xi,r}(t)\lambda_r + \sum_{j=0}^M H_{\xi,r}^j(t)\lambda_{j+1} + E_{\xi,r}(t)\lambda_{M+2} + F_{\xi,r}(t) + G_{\xi,r}(z, t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, M}, \quad (12)$$

мұндағы:

$$\begin{aligned} D_{\xi,r}(t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} \mathcal{P}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &\quad + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-2}} \mathcal{P}(\tau_{\xi-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-1}} \mathcal{P}(\tau_{\xi}) d\tau_{\xi} d\tau_{\xi-1} \dots d\tau_1, \\ H_{\xi,r}^j(t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{K}_j(\tau_1) d\tau_1 + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} \mathcal{K}_j(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &\quad + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-2}} \mathcal{P}(\tau_{\xi-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-1}} \mathcal{K}_j(\tau_{\xi}) d\tau_{\xi} d\tau_{\xi-1} \dots d\tau_1, j = \overline{0, M}, \\ E_{\xi,r}(t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}_0(\tau_1) d\tau_1 + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} \mathcal{P}_0(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &\quad + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-2}} \mathcal{P}(\tau_{\xi-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-1}} \mathcal{P}_0(\tau_{\xi}) d\tau_{\xi} d\tau_{\xi-1} \dots d\tau_1, \\ F_{\xi,r}(t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{F}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} \mathcal{F}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &\quad + \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-2}} \mathcal{P}(\tau_{\xi-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-1}} \mathcal{F}(\tau_{\xi}) d\tau_{\xi} d\tau_{\xi-1} \dots d\tau_1, \\ G_{\xi,r}(z, t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t \mathcal{P}(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-2}} \mathcal{P}(\tau_{\xi-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\xi-1}} \mathcal{P}(\tau_{\xi}) z_r(\tau_{\xi}) d\tau_{\xi} d\tau_{\xi-1} \dots d\tau_1. \end{aligned}$$

(12) теңдіктің оң жағында $\lim_{t \rightarrow \theta_{r-0}} z_r(t)$ шекке көшіп, (9), (10) шарттарына қойып, λ параметріне қатысты келесідей теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q_{\xi}(\theta)\lambda = -F_{\xi}(\theta) - G_{\xi}(z, \theta), \quad (13)$$

мұндағы $\lambda \in \mathbb{R}^{n(M+1)+m}$,

$$Q_{\xi}(\theta) = \begin{bmatrix} I + D_{\xi,1}(\theta_1) + H_{\xi,1}^0(\theta_1) & H_{\xi,1}^1(\theta_1) - I & \dots & H_{\xi,1}^M(\theta_1) & E_{\xi,1}(\theta_1) \\ H_{\xi,2}^0(\theta_2) & I + D_{\xi,2}(\theta_2) + H_{\xi,2}^1(\theta_2) & \dots & H_{\xi,2}^M(\theta_2) & E_{\xi,2}(\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{\xi,M}^0(\theta_M) & H_{\xi,M}^1(\theta_M) & \dots & H_{\xi,M}^M(\theta_M) & E_{\xi,M}(\theta_M) \\ \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_1 & \dots & \mathcal{B}_M & \mathcal{C}_0 \end{bmatrix},$$

$$F_{\xi}(\theta) = (F_{\xi,1}(\theta_1), F_{\xi,2}(\theta_2), \dots, F_{\xi,M}(\theta_M), -d),$$

$$G_{\xi}(z, \theta) = (G_{\xi,1}(z, \theta_1), G_{\xi,2}(z, \theta_2), \dots, G_{\xi,M}(z, \theta_M), 0),$$

I – $n \times n$ өлшемді бірлік матрица, O – $(n + m)$ өлшемді нөлдік вектор.

(7) – (10) есебінің шешімі $(z[t], \lambda)$ жұбын табу үшін (11) және (13) тұйық теңдеулер жүйесін алдық, мұндағы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{M+1}, \lambda_{M+2}) \in \mathbb{R}^{n(M+1)+m}$, $z[t] = (z_1(t), \dots, z_M(t))$.

Таңдалынған ξ санына сәйкес $Q_\xi(\theta)$ матрицасының кері матрицасы бар болсын. Олай болса $\{(z^{(k)}[t], \lambda^{(k)})\}_{k=0}^\infty, \{(y^{(k)}(t), \mu^{(k)})\}_{k=0}^\infty$ тізбектерінің мүшелері келесі алгоритм бойынша табылады:

0-ші қадам.

а) $G_\xi(z, \theta) = 0$ деп алып $Q_\xi(\theta) \lambda = -F_\xi(\theta)$ теңдеуінен $\lambda^{(0)}$ табамыз, яғни $\lambda^{(0)} = -[Q_\xi(\theta)]^{-1} F_\xi(\theta)$.

ә) Табылған $\lambda^{(0)}$ векторының компоненттерін қолданып, (7), (8) Коши есептерін шешу арқылы $z^{(0)}[t]$ функцияларын табамыз.

б) $y^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(0)} + z_r^{(0)}(t), & \text{егер } t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{1, M}, \\ \lambda_{M+1}^{(0)}, & \text{егер } t = \theta_M \end{cases}$ және $\mu^{(0)} = \lambda_{M+2}^{(0)}$ анықтаймыз.

1-ші қадам.

а) Табылған $z^{(0)}[t]$ мәндерін (13) теңдігінің оң жағына қойып, $Q_\xi(\theta) \lambda = -F_\xi(\theta) - G_\xi(z^{(0)}, \theta)$ теңдеуінен $\lambda^{(1)}$ табамыз, яғни $\lambda^{(1)} = -[Q_\xi(\theta)]^{-1} \cdot (F_\xi(\theta) + G_\xi(z^{(0)}, \theta))$.

ә) Табылған $\lambda^{(1)}$ векторының компоненттерін қолданып, (7), (8) Коши есептерін шешу арқылы $z^{(1)}[t]$ функцияларын табамыз.

б) $y^{(1)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(1)} + z_r^{(1)}(t), & \text{егер } t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{1, M}, \\ \lambda_{M+1}^{(1)}, & \text{егер } t = \theta_M \end{cases}$ және $\mu^{(1)} = \lambda_{M+2}^{(1)}$ анықтаймыз.

k-ші қадам ($k = 2, 3, \dots$).

а) Табылған $z^{(k-1)}[t]$ мәндерін (13) теңдігінің оң жағына қойып, $Q_\xi(\theta) \lambda = -F_\xi(\theta) - G_\xi(z^{(k-1)}, \theta)$ теңдеуінен $\lambda^{(k)}$ табамыз, яғни $\lambda^{(k)} = -[Q_\xi(\theta)]^{-1} \cdot (F_\xi(\theta) + G_\xi(z^{(k-1)}, \theta))$.

ә) Табылған $\lambda^{(k)}$ векторының компоненттерін қолданып, (7), (8) Коши есептерін шешу арқылы $z^{(k)}[t]$ функцияларын табамыз.

б) $y^{(k)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)} + z_r^{(k)}(t), & \text{егер } t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{1, M}, \\ \lambda_{M+1}^{(k)}, & \text{егер } t = \theta_M \end{cases}$ а және $\mu^{(k)} = \lambda_{M+2}^{(k)}$ анықтаймыз.

Төмендегі белгілеулерді енгіземіз:

$$\|\mathcal{P}(t)\| \leq \aleph, \|\mathcal{P}_0(t)\| \leq \chi, \|\mathcal{K}_j(t)\| \leq \beta_j \quad (j = \overline{0, M}),$$

$$\sigma_\xi(\theta) = \max \left\{ 1, \max_{j=\overline{0, M}} \left\{ \frac{\beta_j}{\aleph} \right\}, \frac{\chi}{\aleph} \right\} \max_{r=\overline{1, M}} \sum_{k=\xi+1}^\infty \frac{(\aleph(\theta_r - \theta_{r-1}))^k}{k!}.$$

Келесі теорема ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының және (3) – (6) есебінің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын береді:

Теорема. Егер кейбір $\xi \in \mathbb{N}$ үшін $Q_\xi(\theta)$ матрицасының кері матрицасы бар болып, $\|[Q_\xi(\theta)]^{-1}\| \leq \gamma_\xi(\theta)$ және $\gamma_\xi(\theta) \sigma_\xi(\theta) < 1$ теңсіздіктері орындалса, онда алгоритм бойынша анықталған $\{(z^{(k)}[t], \lambda^{(k)})\}_{k=0}^\infty$ тізбегі (3) – (6) есебінің жалғыз $(z^*[t], \lambda^*)$ шешіміне жинақталады, сонымен қатар

$$\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq \frac{\gamma_\xi(\theta) \sigma_\xi(\theta)}{1 - \gamma_\xi(\theta) \sigma_\xi(\theta)} \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \|z_r^*(t) - z_r^{(k)}(t)\| &\leq \max \left\{ 1, \max_{j=\overline{0, M}} \left\{ \frac{\beta_j}{\aleph} \right\}, \frac{\chi}{\aleph} \right\} (e^{\aleph(t - \theta_{r-1})} - 1) \times \\ &\times \frac{\gamma_\xi(\theta) \sigma_\xi(\theta)}{1 - \gamma_\xi(\theta) \sigma_\xi(\theta)} \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{1, M} \end{aligned}$$

бағалаулары орын алады.

Ескерту: (14) бағалауынан

$$\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq \frac{(\gamma_{\xi}(\theta)\sigma_{\xi}(\theta))^k}{1 - \gamma_{\xi}(\theta)\sigma_{\xi}(\theta)} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|$$

теңсіздігінің дұрыстығы шығады.

(3) – (6) есебі мен (1), (2) есебі пара-пар болғандықтан бұл теоремадан келесі салдар шығады.

Салдар. Егер кейбір $\xi \in \mathbb{N}$ үшін Теореманың шарттары орындалса, онда алгоритм бойынша анықталған $\{(y^{(k)}(t), \mu^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$ тізбегі (1), (2) есебінің жалғыз $(y^*(t), \mu^*)$ шешіміне жинақталады.

Нәтижелер мен талқылау

Бұл бөлімде параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық көпнүктелі шеттік есептің жуық шешімін табуда ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы көрсетіледі.

Берілгені: $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ интервалында $\varepsilon = 10^{-3}$ дәлдікпен параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін төмендегідей сызықтық үшнүктелі шеттік есебінің жуық сандық шешімін табу керек:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \mathcal{P}(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{K}_0(t) \begin{pmatrix} y_1(0.4) \\ y_2(0.4) \end{pmatrix} + \mathcal{K}_1(t) \begin{pmatrix} y_1(0.5) \\ y_2(0.5) \end{pmatrix} + \\ &+ \mathcal{K}_2(t) \begin{pmatrix} y_1(0.6) \\ y_2(0.6) \end{pmatrix} + \mathcal{P}_0(t) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \mathcal{F}(t), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathcal{B}_0 \begin{pmatrix} y_1(0.4) \\ y_2(0.4) \end{pmatrix} + \mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} y_1(0.5) \\ y_2(0.5) \end{pmatrix} + \mathcal{B}_2 \begin{pmatrix} y_1(0.6) \\ y_2(0.6) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = d, \quad (16)$$

мұндағы

$$\mathcal{P}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t^2 \\ 4t & -2 \end{bmatrix}, \mathcal{P}_0(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2t & t^3 \\ t-1 & 4 & t^2 \end{bmatrix}, \mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} -8t^5 - 12t^2 - t - 17 \\ 25t^2 - 16 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_0(t) = \begin{bmatrix} 3 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_1(t) = \begin{bmatrix} t^2-2 & 5 \\ 2t & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_2(t) = \begin{bmatrix} -2 & t^3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \\ 4 & 9 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \\ 7 & 9 \\ 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & -8 \\ -3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \\ 11 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 60 \\ -30 \\ 68 \\ 83 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Шешуі: (15), (16) есебінің берілгендері бойынша $\aleph = 4.4$, $\chi = 4.76$, $\beta_0 = 3.6$, $\beta_1 = 6.84$, $\beta_2 = 2.216$ мәндері анықталады.

(15), (16) параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін үшнүктелі шеттік есебіне параметрлеу әдісін қолданып,

$$Q_3(\theta) = \begin{bmatrix} 1.424 & 0.067 & -1.188 & 0.527 & -0.208 & 0.0096 & 0.315 & 0.099 & 0.010 \\ 0.332 & 0.843 & 0.066 & -0.864 & 0.163 & 0.0007 & -0.023 & 0.371 & 0.019 \\ 0.318 & 0.058 & 0.932 & 0.557 & -1.207 & 0.018 & 0.315 & 0.122 & 0.018 \\ 0.174 & 0.034 & 0.293 & 0.967 & 0.160 & -0.998 & -0.008 & 0.375 & 0.029 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 1 & -6 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 5 & -8 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 9 & 7 & 9 & -3 & 4 & 11 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 8 & 8 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 9 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

есептейік, онда $\gamma_{\xi}(\theta) = 12.846$ және $\sigma_{\xi}(\theta) = 0.003$ болады.

Яғни $\gamma_{\xi}(\theta) \cdot \sigma_{\xi}(\theta) = 0.0385 < 1$ Теорема шарттары орындалады, демек (15), (16) есебінің жалғыз шешімі табылады.

Алгоритмнің 0-ші қадамында

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}, \lambda_4^{(0)}) = \left(\begin{pmatrix} 12.15 \\ -1.23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10.459 \\ -0.568 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.305 \\ 0.532 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.586 \\ -11.692 \\ 0.464 \end{pmatrix} \right),$$

1-ші қадамында

$$\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(1)}) = \left(\begin{pmatrix} 12.151 \\ -1.228 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10.46 \\ -0.569 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.306 \\ 0.528 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.589 \\ -11.698 \\ 0.461 \end{pmatrix} \right) \text{ параметрлері}$$

анықталады. Әр қадамда пайда болған (7), (8) түріндегі Коши есептерінің шешімдері 4-ретті Рунге-Кутта әдісімен $t_i = 0.4 + \frac{i}{320}$, $i = \overline{0,64}$ нүктелерінде табылды.

Келесі шамаларды есептеп аламыз:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\gamma_{\xi}(\theta) \sigma_{\xi}(\theta)}{1 - \gamma_{\xi}(\theta) \sigma_{\xi}(\theta)} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|, \\ \delta_2 &= \max \left\{ 1, \max_{j=0, M} \left\{ \frac{\beta_j}{N} \right\}, \frac{\chi}{N} \right\} \max_{r=1, M} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r]} (e^{N(t - \theta_{r-1})} - 1) \delta_1, \\ \delta_3 &= \max_{i=0, 64} \left\| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} \right\|_{t=t_i} - \mathcal{P}(t_i) \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t_i) \\ y_2^{(1)}(t_i) \end{pmatrix} - \mathcal{K}_0(t_i) \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(1)} \\ \lambda_{12}^{(1)} \end{pmatrix} - \\ &\quad - \mathcal{K}_1(t_i) \begin{pmatrix} \lambda_{21}^{(1)} \\ \lambda_{22}^{(1)} \end{pmatrix} - \mathcal{K}_2(t_i) \begin{pmatrix} \lambda_{31}^{(1)} \\ \lambda_{32}^{(1)} \end{pmatrix} - \mathcal{P}_0(t_i) \begin{pmatrix} \lambda_{41}^{(1)} \\ \lambda_{42}^{(1)} \\ \lambda_{43}^{(1)} \end{pmatrix} - \mathcal{F}(t_i) \left\| \right. \\ \delta_4 &= \left\| \mathcal{B}_0 \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(1)} \\ \lambda_{12}^{(1)} \end{pmatrix} + \mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} \lambda_{21}^{(1)} \\ \lambda_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + \mathcal{B}_2 \begin{pmatrix} \lambda_{31}^{(1)} \\ \lambda_{32}^{(1)} \end{pmatrix} + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} \lambda_{41}^{(1)} \\ \lambda_{42}^{(1)} \\ \lambda_{43}^{(1)} \end{pmatrix} - d \right\|, \end{aligned}$$

онда $\delta_1 = 2.5 \times 10^{-4}$, $\delta_2 = 1.9 \times 10^{-4}$, $\delta_3 = 9.6 \times 10^{-4}$, $\delta_4 = 1.7 \times 10^{-13}$ екенін анықтаймыз. Бұл шамалардың барлығы бізге алдын ала берілген ε -нан кіші. Сондықтан, $(\lambda^{(1)}, z^{(1)}[t])$

жұбының компоненттерінен құралған $y^{(1)}(t)$ функциясы (15), (16) есебінің $\varepsilon = 10^{-3}$ дәлдікпен табылған жуық сандық шешімі болады.

Қорытынды

Жұмабаевтың параметрлеу әдісімен (1), (2) параметрі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есебін зерттеу осы есептің шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттарын алуға мүмкіндік берді. Бұл шарттардың тиімді тексерілетін шарттар қатарына жататындығы және (1), (2) есебінің бастапқы деректеріне негізделген бағалауларға толықтай сүйенетіндігі Жұмабаевтың параметрлеу әдісінің конструктивтілігі мен тиімділігін тағы бір мәрте дәлелдейді. Бұл жұмыс теоретик-математиктерге де, практик-зерттеушілерге де қызықты болуы мүмкін.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23488811) қаржыландырады.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Geng F., Cui M. Multi-point boundary value problem for optimal bridge design // *Int. J. Comput. Math.* – 2010. – Vol. 87. – P. 1051–1056. <https://doi.org/10.1080/00207160903023573>.
- 2 Hajji M.A. Multi-point special boundary-value problems and applications to fluid flow through porous media // *Proc. of the international multi-conference of engineers and computer scientists (18–20 March)*. – Hong Kong, 2009.
- 3 Agarwal R.P. The numerical solution of multipoint boundary value problems // *J. Comput. Appl. Math.* – 1979. – Vol. 5. – P. 17–24. [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(79\)90022-6](https://doi.org/10.1016/0771-050X(79)90022-6).
- 4 Abdella K., Trivedi J. Solving multi-point boundary value problems using sinc-derivative interpolation // *Mathematics*. – 2020. – Vol. 8. – Art. 2104. <https://doi.org/10.3390/math8122104>.
- 5 Saadatmandi A., Dehghan M. The use of Sinc-collocation method for solving multi-point boundary value problems // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* – 2012. – Vol. 17. – P. 593–601. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.06.018>.
- 6 Li H., Chen Y., Zhang J. Existence of multiple solutions for nonlinear multi-point boundary value problems // *Adv. Differ. Equ.* – 2020. – Vol. 2020. – Art. 266. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02604-1>.
- 7 Geng F.Z. A numerical algorithm for nonlinear multi-point boundary value problems // *J. Comput. Appl. Math.* – 2012. – Vol. 236. – P. 1789–1794. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.10.010>.
- 8 Thompson H.B., Tisdell C.C. Three-point boundary value problems for second-order ordinary differential equation // *Math. Comput. Model.* – 2001. – Vol. 34. – P. 311–318.
- 9 Tatari M., Dehghan M. An efficient method for solving multi-point boundary value problems and applications in physics // *J. Vib. Control*. – 2012. – Vol. 18. – P. 1116–1124. <https://doi.org/10.1177/1077546311408467>.
- 10 Tatari M., Dehghan M. The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems // *Physica Scripta*. – 2006. – Vol. 73. – P. 672–676. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/73/6/023>.
- 11 Zou Y., Hu Q., Zhang R. On numerical studies of multi-point boundary value problem and its fold bifurcation // *Appl. Math. Comput.* – 2007. – Vol. 185. – P. 527–537. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.064>.
- 12 Nakhushiev A.M. An approximation method for solving boundary value problems for differential equations with applications to the dynamics of soil moisture and groundwater // *Differ. Equat.* – 1982. – Vol. 18. – P. 72–81.
- 13 Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // *Numer. Anal. Appl.* – 2014. – Vol. 7. – P. 1–14. <https://doi.org/10.1134/S1995423914010017>.
- 14 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2020. – Vol. 4. – P. 1788–1802. <https://doi.org/10.1002/mma.6003>.

15 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.

16 Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // *Comp. math. and math. phys.* – 2018. – Vol. 58. – P. 508–516. <https://doi.org/10.1134/S096554251804005X>.

17 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // *USSR Comput. Math. Math. Phys.* – 1989. – Vol. 29. – P. 34–46.

18 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem // *Lobachevskii J Math.* – 2021. – Vol. 42. – P. 606–612. <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>.

19 Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. A Problem with parameter for the integro-differential equations // *Math. Model. Anal.* – 2021. – Vol. 26. – P. 34–54. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>.

20 Iskakova N., Temesheva S., Uteshova R. On a problem for a delay differential equation // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2023. – Vol. 46. – P. 11283–11297. <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.

21 Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Solving multi-point problem for Volterra-Fredholm integro-differential equations by using Dzhumabaev parametrization method // *Open Math.* – 2024. – Vol. 22. – Art. 20240024. <https://doi.org/10.1515/math-2024-0024>.

REFERENCES

1 Geng, F. and Cui, M. *Int. J. Comput. Math.*, 87, 1051–1056 (2010). <https://doi.org/10.1080/00207160903023573>.

2 Hajji, M.A. *Proc. of the international multi-conference of engineers and computer scientists (Hong Kong, 18–20 March 2009)*.

3 Agarwal, P.R., *J. Comput. Appl. Math.*, 5, 17–24 (1979). [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(79\)90022-6](https://doi.org/10.1016/0771-050X(79)90022-6).

4 Abdella, K. J. Trivedi. *Mathematics*, 8, 2104 (2020). <https://doi.org/10.3390/math8122104>.

5 Saadatmandi, A., Dehghan, M. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17, 593–601 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.06.018>.

6 Li, H., Chen, Y., Zhang, J. *Adv. Differ. Equ.*, 2020, 266 (2020). <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02604-1>.

7 Geng, F.Z. *J. Comput. Appl. Math.*, 236, 1789–1794 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.10.010>.

8 Thompson, H.B., Tisdell, C.C. *Math. Comput. Model.*, 34, 311–318 (2001).

9 Tatari, M., Dehghan, M. *J. Vib. Control.*, 18, 1116–1124 (2012). <https://doi.org/10.1177/1077546311408467>.

10 Tatari, M., Dehghan, M. *Physica Scripta*, 73, 672–676 (2006). <https://doi.org/10.1088/0031-8949/73/6/023>.

11 Zou, Y., Hu, Q., Zhang, R. *Appl. Math. Comput.*, 185, 527–537 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.064>.

12 Nakhushev, A.M. *Differ. Equat.*, 18, 72–81 (1982).

13 Aida-zade, K.R., Abdullaev, V.M. *Numer. Analys. Appl.*, 7, 1–14 (2014). <https://doi.org/10.1134/S1995423914010017>.

14 Dzhumabaev, D.S., Bakirova, E.A., Mynbayeva, S.T. *Math. Methods Appl. Sci.*, 4, 1788–1802 (2020). <https://doi.org/10.1002/mma.6003>.

15 Dzenaliev, M.T., Ramazanov, M.I. *Nagruzhennye uravneniya - kak vozmushheniya differencial'nyh uravnenij* (Almaty: Gylym, 2010). (in Russian).

16 Assanova, A.T., Imanchiev, A.E., Kadirbayeva, Zh.M. *Comp. math. and math. phys.*, 58, 508–516 (2018). <https://doi.org/10.1134/S096554251804005X>.

17 Dzhumabayev, D.S. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 29, 34–46 (1989).

18 Temesheva, S.M., Dzhumabaev, D.S., Kabdrakhova, S.S. *Lobachevskii J Math.*, 42, 606–612 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>.

19 Bakirova, E.A., Assanova, A.T., Kadirbayeva, Zh.M. *Math. Model. Anal.*, 26, 34–54 (2021). <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>.

20 Iskakova, N., Temesheva, S., Uteshova, R. *Math. Methods Appl. Sci.*, 46, 11283–11297 (2023). <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.

21 Bakirova, E.A., Assanova, A.T., Kadirbayeva, Zh.M. *Open Math.*, 22, 20240024 (2024). <https://doi.org/10.1515/math-2024-0024>.

^{1,2}**Темешева С.М.,**

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, и.о. профессора,

ORCID ID: 0000-0002-3341-4539,

e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

^{1,3*}**Кадирбаева Ж.М.,**

к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, профессор, ORCID ID: 0000-0001-8861-4100,

*e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

^{1,2}**Аширов С.Б.**

магистрант, ORCID ID: 0009-0008-6654-7531, e-mail: ashirov_27@mail.ru

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

³Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация

Данная статья посвящена вопросам разрешимости многоточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с параметром. Исследование проводится методом параметризации Джумабаева. Это позволяет свести решение исходной краевой задачи к решению системы алгебраических уравнений и задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В алгоритмы метода параметризации внесены изменения, которые позволяют ослабить влияние краевых условий на сходимость алгоритма. Следуя специфике метода параметризации, были получены достаточные условия существования и единственности решения многоточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с параметром, которые также обеспечивают сходимость измененных алгоритмов метода. Результаты исследования представляют собой конструктивный инструмент анализа поведения различных моделей, которые описываются краевыми задачами для нагруженных дифференциальных уравнений с параметрами. Приведенный пример наглядно показывает реализуемость и эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: многоточечная краевая задача, нагружение, параметр, метод параметризации, разрешимость.

^{1,2}**Temesheva S.M.,**

Dr.Phys.-Math.Sc., Leading Researcher, Acting Professor,

ORCID ID: 0000-0002-3341-4539, e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

^{1,3*}**Kadirbayeva Zh.M.,**

Cand.Phys.-Math.Sc., Leading Researcher, Professor,

ORCID ID: 0000-0001-8861-4100, *e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

^{1,2}**Ashirov S.B.**

Master's student, ORCID ID: 0009-0008-6654-7531,

e-mail: ashirov_27@mail.ru

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

SOLVABILITY OF A MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER

Abstract

This article is devoted to the solvability questions of a multipoint boundary value problem for a system of loaded differential equations with a parameter. The investigation is carried out using the Dzhumabaev parameterization

method. This allows us to reduce the solving of the original boundary value problem to the solving of a system of algebraic equations and Cauchy problems for ordinary differential equations. Modifications have been introduced into the parametrization method algorithms to reduce the influence of boundary conditions on the convergence of the algorithm. Following the specifics of the parametrization method, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the multipoint boundary value problem for systems of loaded differential equations with a parameter have been established. These conditions also ensure the convergence of the modified algorithms. The research results provide a constructive tool for analyzing the behavior of various models described by boundary value problems for loaded differential equations with parameters. The presented example clearly demonstrates the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: multipoint boundary value problem, loading, parameter, parameterization method, solvability.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 16.07.2025