УДК 621.721: 624.024
МРНТИ 73.39.31 DOI 10.55452/1998-6688-2021-18-1-48-51

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ ПРИ АФФИННОМ СООТВЕТСТВИИ МОДЕЛИ И НАТУРНОГО ОБЪЕКТА

ЖАҢАБАЙ Н.Ж.[1], УТЕЛБАЕВА А.Б.[1], ЕРМАХАНОВ М.Н.[1], ҚЫРҒЫЗБАЕВА А.А.[2], ХАСАНХОДЖАЕВА Б.Ш.[3]

[1]Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова
[2]Казахский Национальный медицинский университет имени С. Асфендиярова
[3]Silkway International University

Аннотация: *В работе рассматриваются вопросы моделирования термомеханического подобия оболочки при аффинном соответствии модели и натурного объекта. Сформулированы условия моделирования термомеханических явлений в виде правил пересчета параметров модели и натуры. Установлены критерии подобия для определения тепловых напряжений и смещения, выполненных в определенном масштабе к натурному объекту.*

Ключевые слова: *моделирование, трубопровод, давление, тепловое напряжение, термомеханика*

МОДЕЛЬ МЕН ТАБИҒИ ОБЪЕКТ АРАСЫНДАҒЫ ЖАҚЫНДЫҚ СӘЙКЕСТІГІ БАР ЦИЛИНДРЛІК РЕЗЕРВУАРЛАРДЫҢ ТЕРМОМЕХАНИКАЛЫҚ ҰҚСАСТЫҒЫ

Аңдатпа: *Жұмыста модель мен табиғи объектінің аффиндік сәйкестігі кезінде қабықтың термомеханикалық ұқсастығын модельдеу мәселелері қарастырылады. Термомеханикалық құбылыстарды модельдеу шарттары модель мен табиғат параметрлерін қайта есептеу ережелері түрінде тұжырымдалған. Жылу кернеулерін және белгілі бір масштабта табиғи объектіге орын ауыстыруды анықтау үшін ұқсастық критерийлері белгіленді.*

Түйінді сөздер: *модельдеу, құбыр, қысым, жылу кернеуі, термомеханика*

THERMOMECHANICAL SIMILARITY OF CYLINDRICAL RESERVOIRS WITH AFFINE CORRESPONDENCE BETWEEN THE MODEL AND THE FULL-SCALE OBJECT

Abstract: *The paper deals with modeling the thermomechanical similarity of the shell with affine correspondence between the model and the full-scale object. The conditions for modeling thermomechanical phenomena are formulated in the form of rules for recalculating model and nature parameters. Similarity criteria are established for determining thermal stresses and displacements performed at a certain scale to a full-scale object.*

Key words: *modeling, pipeline, pressure, thermal stress, thermomechanics*

Метод моделирования является эффективным средством экспериментального исследования прочности, устойчивости и колебаний элементов технических устройств, машин, оборудования, конструкции и является основой всякого научно поставленного эксперимента [1,2].

В действительности при реализации условий моделирования на основе масштабных преобразований зачастую приходится отказываться от выполнения некоторых требований классического подобия.

Например, практическое применение моделирования на основе классического метода при экспериментальном исследовании прочности тонкостенных трубопроводов из-за технологических ограничений в масштабах толщин приходится отступать от полного геометрического подобия и вводить несколько линейных масштабов. При этом геометрическое подобие моделей заменяется аффинным (от латинского affinus-родственный) подобием модели и натуры. Указанный метод позволяет в ряде случаев отказаться от полного геометрического подобия и путем сокращения количества необходимых критерии подобия ослабить ограничения на условия моделирования, отвечающие классической теории подобия [2,3,4].

Рассмотрим возможность аффинного моделирования термомеханического подобия цилиндрической оболочки с использованием аффинно-подобных моделей. Такие модели допускают введение различных параметров для геометрических величин, определяющих габаритные размеры трубопровода и для толщин листового материала.

Температурное поле в упругом теле вызывает локальное изменение его объема и при неравномерном нагреве приводит к возникновению тепловых напряжений. Объемное расширение материала и термоупругие напряжения зависят от коэффициента линейного расширения и пропорциональны температуре.

Рассматривая статическую задачу термоупругости, включая в него все независимые основные линейные размеры, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала перечень основных величин запишем в следующем виде:

$$\sigma, \varepsilon, u, \underline{\partial, \alpha, \mathrm{E}, l, \delta, T, \mu} \qquad (1)$$

Исключая из списка (1) безразмерные параметры относительную деформацию и коэффициент составим матрицу размерностей основных параметров, имеющих ненулевую размерность:

$$\begin{array}{c} \\ \\ F \\ L_l \\ L_\delta \\ K \end{array} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \sigma & u & p & \alpha & E & l & \delta & T \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ & \sigma & u & p & \alpha & E & l & \delta & T \\ \hline F & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_l & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ L_\delta & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad (2)$$

где F, L_ℓ, L_δ, K – основные единицы измерения силы, длин и абсолютной температуры; σ, u – характерные величины напряжений и перемещений, под которыми следует понимать любые из компонентов напряжений σ_{ij}, и перемещений u_i; ∂ – погонная нагрузка.

Ранг матрицы размерностей (2) равен $r = 4$, количество основных параметров $n = 8$. Согласно Π – теореме анализа размерностей, количество независимых безразмерных комплексов Π_κ, составленных из основных параметров, должно быть равно $\kappa = n - r = 8 - 4 = 4$ (помимо безразмерных физических величин $\Pi_5 = \varepsilon$; $\Pi_6 = \mu$).

Согласно Π – теореме анализа размерностей, общее выражение для неизвестного безразмерного отношения представим в форме:

$$\Pi = \sigma^{x_1} \cdot u^{x_2} \cdot P^{x_3} \cdot \alpha^{x_4} \cdot E^{x_5} \cdot l^{x_6} \cdot \delta^{x_7} \cdot T^{x_8} \qquad (3)$$

Пользуясь матрицей размерностей (2) и формулой размерностей $dim\, F = L_1^{a_1} \cdot L_2^{a_2} \cdot \ldots\ldots\ldots L_n^{a_n}$, где L_i $(i = 1,2\ldots.n)$ основные единицы измерения, a_i – некоторые показатели степени, подсчитаем размерность произведения:

$$dim\, \Pi = \left(F \cdot L_\delta^{-2}\right)^{x_1} \cdot \left(L_\delta\right)^{x_3} \cdot \left(F \cdot L_\ell^{-2}\right)^{x_3} \cdot \left(K^{-1}\right)^{x_4} \cdot \left(F \cdot L_\ell^{2} \cdot L_\delta^{-4}\right)^{x_5} \cdot \left(L_\ell\right)^{x_6} \cdot \left(L_\delta\right)^{x_7} \cdot \left(K\right)^{x_8} \qquad (4)$$

Используя свойства показательных функций из (4) найдем

$$dim\, \Pi = F^{(x_1+x_3+x_5)} \cdot L_l^{(-2x_3+2x_5+x_6)} \cdot L_\delta^{(x_2-2x_1-4x_5+x_7)} \cdot K^{(-x_4+x_8)} \tag{5}$$

Условие безразмерности произведения Π приводит к системе алгебраических уравнений для неизвестных показателей x_j

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ &-2x_3 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ &x_2 - 2x_1 - 4x_5 + x_7 = 0 \\ &-x_4 + x_8 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Линейная однородная система (6) является неопределенной, так как число неизвестных ($j=8$) превышает количество уравнений ($j=4$). Считая значения x_1, x_2, x_3, x_4 произвольными и выражая через них показатели степени x_5, x_6, x_7 и x_8, найдем:

$$\begin{aligned} &x_6 = 2x_1 + 4x_3 \\ &x_6 = 2x_1 + 4x_3 \\ &x_7 = -2x_1 - 4x_3 - x_2 \\ &x_8 = x_4 \end{aligned} \tag{7}$$

Для величин $x_1, \ldots, x_4$ могут быть назначены любые значения. Пользуясь этим произволом, выберем для первого решения Π_1:

$x_1 = 1,\ x_2 = \ldots x_4 = 0;\ x_5 = -1;\ x_6 = 2;\ x_7 = -2;\ x_8 = 0.$

Остальные показатели вычисляем с помощью уравнений (7)

$x_2 = 1,\ x_1 = x_3 = x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0;\ x_7 = -1;\ x_8 = 0;$

$x_3 = 1,\ x_1 = x_2 = x_4 = 0;\ x_5 = -1;\ x_7 = 4;\ x_7 = -4;\ x_8 = 0;$

$x_4 = 1,\ x_1 = x_2 = x_3 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0;\ x_8 = 0;\ x_8 = 1$

Подставляя найденные значения x_j в выражение (3), получим безразмерное отношение в виде:

$$\Pi_1 = \sigma \cdot \mathring{A}^{-1} \cdot \ell^2 \cdot \delta^{-2}$$

Остальные безразмерные отношения $\Pi_к$ ($к=2\ldots4$) получим, полагая в уравнениях (7) последовательно для каждого значения $к=2..4$

$$\tilde{o}_j = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

и вычисляя показатели x_j при $j = 6,7,8$.

Результаты вычисления представим в виде следующей матрицы решений:

$$\begin{array}{c|cccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ & \sigma & u & p & \alpha & E & l & \delta & T \\ \Pi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ \Pi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \Pi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ \Pi_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{8}$$

Используя матрицу решений (8), представим безразмерные отношения в следующей удобной форме:

$$\Pi_1 = \frac{\sigma \cdot l^2}{E \cdot \delta^2}, \quad \Pi_2 = \frac{u}{\delta}, \quad \Pi_3 = \frac{P \cdot l^4}{E \cdot \delta^4}, \quad \Pi_4 = \alpha T. \tag{9}$$

Таким образом матрице решений соответствуют четыре независимых безразмерных комплекса основных параметров.

Количество безразмерных отношений (9) удовлетворяет Π – теореме, так как число основных параметров в матрице размерностей (2) $n = 8$, ранг матрицы размерностей $r = 4$ и $k = n - r = 4$.

Дополняя список (9) безразмерными параметрами $\Pi_5 = \varepsilon$, $\Pi_6 = \mu$, примем в качестве искомых критериев подобия модифицированную фундаментальную систему безразмерных комбинаций:

$$П_1 = \frac{\sigma \cdot l^2}{E \cdot \delta^2} = idem;$$
$$П_2 = \frac{u}{\delta} = idem;$$
$$П_3 = \frac{P \cdot l^4}{E \cdot \delta^4} = idem;$$
$$П_4 = \frac{l}{\delta} = idem;$$
$$П_4 = \alpha \cdot T = idem;$$
$$П_5 = \varepsilon = idem;$$
$$П_6 = \mu = idem. \qquad (10)$$

где символ $idem$ означает, что соответствующее безразмерное отношение для класса подобных явлений должно оставаться неизменным.

На основе критериев подобия могут сформулированы условия моделирования термомеханических явлений в виде правил пересчета параметров модели и натуры:

$$\frac{\sigma_H \cdot l_H^2}{E_H \cdot \delta_H^2} = \frac{\sigma_M \cdot l_M^2}{E_M \cdot \delta_M^2}, \quad \frac{p_M \cdot l_M^4}{E_M \cdot \delta_M^4} = \frac{p_H \cdot l_H^2}{E_H \cdot \delta_H^4},$$

$$\frac{p_M \cdot l_M^4}{E_M \cdot \delta_M^4} = \frac{p_H \cdot l_H^2}{E_H \cdot \delta_H^4}, \quad \mu_i = \mu_i, \quad \frac{l_M}{\delta_M} = \frac{l_H}{\delta_H}, \qquad (11)$$

где индекс " ì " – для натурного объекта, "м" – для модели.

Если характеристики модели выбраны, исходя из равенств, определяющих критерии подобия (12), то для определения тепловых напряжений и смещений натурной конструкции будут иметь место формулы:

$$\sigma_H = \sigma_M \frac{E_H \cdot \delta_H^2 \cdot l_M^2}{E_M \cdot \delta_M^2 \cdot l_H^2}, \quad u_i = u_i \frac{\delta_i}{\delta_i}, \quad u_i = u_i \frac{\delta_i}{\delta_i} \qquad (12)$$

Если принять материал модели и натурного объекта одинаковым, т.е. $\frac{E_H}{E_M} = 1,$ и установить масштабы моделирования линейных размеров, то $m_l \frac{l_M}{L_M}, m_\delta = \frac{\delta_M}{\delta_H},$ окончательно имеем: $\sigma_H = \sigma_M \frac{m_l^2}{m_\delta^2}; \; u_H = \frac{u_M}{m_\delta};$ (13)

Равенства (12) регламентируют выбор материала модели и температур проведения эксперимента, потребных для существования термомеханического подобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. – М. Наука, 1981. – 447 с.
2. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкции. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 ст.
3. Клечко С.Д. Аффинное подобие в теории неоднородных анизотропных упругих, упругопластических и упруговязких пластин и оболочек. // Труды Новосибирского института инж. ж-д. транспорта. Механика деформируемого тела и расчет сооружений. – Вып. 96. – Новосибирск, 1970. – 63-76 с.
4. Zhangabay N., Utelbayeva A., Salimov F.R. The calculation of strength of preliminary-stressed gas-oil pipelines of great diameter, working under the pressure with the regard to the influence of external temperature environment// Вестник «Восточно-Казахстанского государственного технического университета имени Д. Серикбаева». – №3. – Усть-Каменогорск, 2019г. – С.94-98.