

УДК 519.633-519.688
МРНТИ 27.35.63

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОРОУПРУГОСТИ

БЛИЕВА Д.Н.¹, ФАРХАДОВ Т.²

¹Казахский Национальный университет им. аль-Фараби

²Казахский Национальный педагогический университет им. Абая

***Аннотация:** В данной работе приводятся результаты вычислительного эксперимента для решения исходной начально-краевой динамической задачи пороупругости. Решение получено путем применения численных обратных преобразований Лапласа и Фурье к аналитическому решению соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями. Для вычисления обратного преобразования Лапласа применены параллельные вычисления значений функций методом Талбота, как наиболее устойчивым.*

***Ключевые слова:** пористые среды, гиперболическая система, сейсмические волны, обратное преобразование Фурье-Лапласа*

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF DYNAMIC POROELASTICITY EQUATIONS

***Abstract:** This paper presents the results of a computational experiment for solving the initial initial-boundary dynamic poroelasticity problem. This solution is obtained by applying numerical inverse Laplace and Fourier transformations to the analytical solution of the corresponding system of ordinary differential equations with boundary conditions. To calculate the inverse Laplace transform, parallel calculations of function values using the Talbot method are used, as the most stable method.*

***Key words:** porous media, hyperbolic system, seismic waves, inverse Fourier-Laplace transform*

ДИНАМИКАЛЫҚ КЕУЕКСЕРПІМДІЛІК ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШІМІН САНДЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

***Аңдатпа:** Бұл жұмыста кеуексерпімділіктің алғашқы бастапқы-шекаралық динамикалық есептердің шешу үшін есептеу экспериментінің нәтижелері келтіріледі. Шешім шеттік шарттары бар сәйкес қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің аналитикалық шешіміне Лаплас және Фурье сандық кері түрлендірулерін қолдану арқылы алынған. Лаплас кері түрлендіруін есептеу үшін функциялардың мәндерін Талбот әдісімен параллель есептеу ең орнықты әдіс ретінде қолданылған.*

***Түйінді сөздер:** кеукеті орта, гиперболалық жүйе, сейсмикалық толқындар, Фурье-Лаплас кері түрлендіруі*

Исследование процессов, происходящих в пористых средах, насыщенных жидкостью, и моделирование физических свойств пористых сред занимают одно из важных мест среди современных задач математического моделирования и вычислительной математики. В частности такое моделирование широко используется в геологоразведке и нефтедобывающей отрасли для прогнозирования влияния нефтедобычи на окружающую среду и минимизацию возможных негативных последствий. Важность данного направления обусловлена тем, что подавляющее большинство объектов в окружающей среде имеет пористую структуру. Причем как природного так и искусственного происхождения, такие как почва, горные породы, ткани животных, растений и человека, керамические, полимерные и композиционные материалы, вспененные, пористые и порошковые металлы. Сложность как экспериментального, так и теоретического анализа внутренней структуры пористых сред вызывает необходимость дальнейших исследований в этом направлении. Применение математического моделирования, учитывающего такие сложности, позволяет прогнозировать и оценивать эффективность применения новых и модернизированных технологических процессов для работы с пористыми средами и материалами. Разработка моделей пористых сред активно способствует развитию многих направлений научных исследований, в том числе наук о земле и сельском хозяйстве, теории энергии и фильтрации, материаловедения, механики, биологии и медицины.

В данной работе проводится вычислительный эксперимент и визуализация решения начально-краевой задачи для неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, описывающей процесс распространения сейсмических волн в насыщенной жидкостью пористой среде [13]. Данное решение сначала получено в явном виде для соответствующей граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной в результате применения преобразования

Фурье-Лапласа к исходной двумерной динамической задаче. Рассматривается изотропная и двумерно-неоднородная относительно пространственных координат среда. Исходная модель представляет собой реалистичное представление пористой среды, состоящей из упруго деформируемой матрицы, заполненной жидкостью и позволяет объяснить наблюдаемые эффекты, зависящие от свойств горных пород и насыщающей их поровой жидкостью при сейсмическом процессе. В связи с необходимостью решения практических задач в различных областях геофизики, биомеханики и нефтедобычи в последние десятилетия было разработано численное моделирование процесса распространения сейсмических волн в жидко-насыщенных пористых средах [3, 4, 8-12]. Для численного моделирования таких процессов часто используется модель Френкеля-Био [1, 2], в которой свойства насыщенной пористой среды характеризуются с помощью четырех параметров упругости. В теории Био основным свойством упруго-пористой насыщенной среды является то, что наряду с распространением поперечных и продольных звуковых колебаний в твердом каркасе, наблюдается распространение второй дополнительной продольной волны в жидкости. Основываясь на общих первых физических принципах, В.Н. Доровский построил свою нелинейную математическую модель для пористых сред, в которой также присутствует три типа звуковых колебаний: два типа продольных и один поперечный. Но в отличие от моделей типа Френкеля-Био, линейаризованная модель Доровского [5, 6, 7] описывает среду тремя упругими параметрами. Эти три упругих параметра взаимно однозначно определяются с помощью трех скоростей упругих колебаний. Данные параметры важны для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, и для их вычисления, в свою очередь, значения параметров пористости, физических плотностей матрицы и насыщающей ее жидкости являются заданными величинами.

Основной целью данной работы является проведение численного эксперимента для по-

лучения решения при конкретных заданных значениях параметров, описывающих пористую среду с помощью трех скоростей упругих колебаний, пористости, физических плотностей матрицы и насыщающей ее жидкости. Данные значения параметров удовлетворяют условиям разрешимости системы уравнений пороупругости в терминах преобразованных компонент скоростей частиц твердого каркаса и насыщающей жидкости в пористой среде, тензоров напряжений и порового давления. Ранее построенное точное аналитическое решение в явном общем виде зависит от значений параметров среды. Условия разрешимости выведены в результате реше-

ния системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной путем применения интегрального преобразования Фурье-Лапласа и граничных условий в начальной точке и на бесконечности, основываясь на физическом смысле искомых функций, которые угасают на бесконечности.

Работа продолжает исследование, начатое в предыдущих работах [13], где с помощью преобразования Фурье-Лапласа исходная система из восьми дифференциальных уравнений в частных производных была сведена к системе из шести обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{s} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \frac{1}{s} K \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2} - \frac{1}{ik_1} \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \left(\frac{4}{3} \mu + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K - \frac{\rho_{0,s} s^2}{(ik_1)^2} \right) \frac{ik_1}{s} \hat{u}_1 + \\ & + \left(\frac{\rho_{0,s}}{s^2 \rho_0} K (ik_1)^2 - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \right) \hat{p} = \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \left(\frac{1}{s^2} K ik_1 - \frac{\rho_0}{ik_1} \right) \hat{F}_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho_{0,s}} \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_2} + s \hat{u}_2 + \frac{1}{\rho_{0,s}} ik_1 \hat{\sigma}_{21} = \hat{F}_2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_2} + s \hat{v}_2 = \hat{F}_2 \quad (3)$$

$$\mu \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + \mu ik_1 \hat{u}_2 + s \hat{\sigma}_{12} = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{4}{3} \mu + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K \right) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K - \frac{2}{3} \mu \right) ik_1 \hat{u}_1 + \frac{\rho_{0,s}}{s \rho_0^2} K (ik_1)^2 \hat{p} + s \hat{\sigma}_{22} = \frac{\rho_{0,s}}{s \rho_0} K ik_1 \hat{F}_1 \quad (5)$$

$$(K - \alpha \rho_0 \rho_{0,s}) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} - \alpha \rho_0 \rho_{0,s} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2} + (K - \alpha \rho_0 \rho_{0,s}) ik_1 \hat{u}_1 + \left(\frac{\alpha \rho_{0,s} (ik_1)^2}{s} - s \right) \hat{p} = \alpha \rho_0 \rho_{0,s} ik_1 \frac{\hat{F}_1}{s} \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}_{22} + \hat{p} \Big|_{x_2=0} = \hat{\sigma}_{12} \Big|_{x_2=0} = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \hat{p} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (7)$$

И двух соотношений следующего вида:

$$\hat{v}_1 = -\frac{1}{s \rho_0} ik_1 \hat{p} + \frac{\hat{F}_1}{s} \quad (8)$$

$$\hat{\sigma}_{11} = \left(-\frac{1}{ik_1} \right) \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial x_2} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \hat{p} + \left(-\frac{s \rho_{0,s}}{ik_1} \right) \hat{u}_1 = \left(-\frac{\rho_{0,s}}{ik_1} \right) \hat{F}_1 \quad (9)$$

Система (1.1) - (1.6) представима в следующем матричном виде:

$$\dot{A}_1 w' + A_2 w = 3 \tag{10}$$

где \hat{w} - это вектор $\hat{w} = \hat{w}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{p})$. Тогда (10) можно записать в следующем нормальном (каноническом) виде:

$$\hat{w}' = B_1 \hat{w} + B_2 \tag{11}$$

где $B_1 = -A_1^{-1} A_2$ и $B_2 = -A_1^{-1} A_3$ при этом неоднородная система (10) является разрешимой, если $\det A \neq 0$.

Элементы матриц B_1 и B_2 в (11) вычислены с помощью пакета Matlab и B_2 имеет следующий вид:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{ik_1}{s} \hat{F}_1 \\ \rho_{0,s} \hat{F} \\ 0 \\ \rho_0 \hat{F}_2 \end{pmatrix}$$

Решение данной неоднородной системы (11) можно представить в следующем виде:

$$\hat{w}_m(x_2) = \sum_{k=1}^3 z_{mk} e^{\tau_k x_2} \left(\sum_{j=1}^6 p_{kj} C_j + (ip_{k3} d_3 + p_{k4} d_4) \int_0^{x_2} e^{-\tau_k l} \hat{F}_1(l) dl + p_{k6} \rho_0 \int_0^{x_2} e^{-\tau_k l} \hat{F}_2(l) dl \right) + \sum_{k=4}^6 z_{mk} e^{-\tau_{k-3} x_2} \left(\sum_{j=1}^6 p_{kj} C_j + (ip_{k3} d_3 + p_{k4} d_4) \int_0^{x_2} e^{\tau_{k-3} l} \hat{F}_1(l) dl + p_{k6} \rho_0 \int_0^{x_2} e^{\tau_{k-3} l} \hat{F}_2(l) dl \right),$$

где индекс $m = 1, \dots, 6$. Собственные векторы и спектр матрицы B_1 , состоящий из шести различных собственных чисел $\tau_j, j = 1, 2, \dots, 6$, получены путем вычисления корней характеристического уравнения $|B_1 - \tau E| = 0$ с исполь-

зованием инструментов прикладных математических пакетов MATLAB и Mathematica. Спектр представляет собой три пары взаимно-противоположных чисел.

$$Sp(B_1) = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ -\tau_1 \\ -\tau_2 \\ -\tau_3 \end{pmatrix}$$

После ряда необходимых преобразований, применения граничных условий при $x_2 = 0$, и при $x_2 \rightarrow \infty$, включая обратное преоб-

разование Фурье-Лапласа, получено решение исходной динамической задачи в явном виде:

$$w_m(t, x_1, x_2) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ - \sum_{k=1}^3 z_{mk} e^{\tau_k x_2} \left[(ip_{k3} d_3 + p_{k4} d_4) \int_{x_2}^\infty e^{-\tau_k l} \hat{F}_1(l) dl + p_{k6} \rho_0 \int_{x_2}^\infty e^{-\tau_k l} \hat{F}_2(l) dl \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=4}^6 z_{mk} e^{-\tau_{k-3} x_2} \left[- \sum_{j,q=1}^3 p_{kj} r_{jq} \left((i p_{q3} d_3 + p_{q4} d_4) \int_0^{\infty} e^{-\tau_q l} \hat{F}_1(l) dl + p_{q6} \rho_0 \int_0^{\infty} e^{-\tau_q l} \hat{F}_2(l) dl \right) + \right. \\
 & \left. + (i \rho_{k3} \rho_3 \rho_{k4} \rho_4) \int_0^{x_2} e^{\tau_{k-3} l} \hat{F}_1(l) + \rho_{k6} \rho_0 \int_0^{x_2} e^{\tau_{k-3} l} \hat{F}_2(l) \right] \Big\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

В силу сложности полученного выражения, нахождение решения возможно только численно-аналитическим путем с применением численных методов приближенного вычисления интегралов методами обратных дискретных преобразований Фурье и Лапласа. Для целей данной статьи проведены параллельные вычисления обратного преобразования Лапласа методом Талбота с равным количеством узлов сетки $n = 32$ по каждой из пространственных переменных x_1, x_2 . Данный численный эксперимент показал реализуемость предлагаемого алгоритма и в дальнейшем можно увеличивать количество узловых точек для более точной визуализации решения, что выдвигает более высокие требования к вычислительной компьютерной мощности.

Для получения численных результатов с использованием реалистичных данных значений параметров рассмотрены следующие случаи входных данных

$\rho_{0,s}^f$	1400.0	Kg / m^3
$\rho_{0,l}^f$	997.0	Kg / m^3
c_{p_1}	2000.0	m / s
c_{p_2}	1300.0	m / s
c_s	1300.0	m / s
d_0	0.3	

и примеров вида функций F_1 и F_2 :

$$F(t, x_1, x_2) = e^{-t^2 - x_1^2 - x_2^2}, (t, x_1, x_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

В этом случае:

$$\hat{F}(x_2) \equiv \hat{F}(s, k_1, x_2) = \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{s}{2} \right) e^{-\frac{k_1^2}{4} - x_2^2} e^{\frac{s^2}{4}}, (s, k_1, x_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

Пример трехмерной визуализации полученного численного решения для функции $w_1(t, x_1, x_2) = u_1(t, x_1, x_2)$ при количестве узлов $n = 32$ приведена на рис. 1. На графике видно,

что для данного решения выполняются начальные и граничные условия задачи, а также условие угасания на бесконечности при достаточно большом значении x_2 .

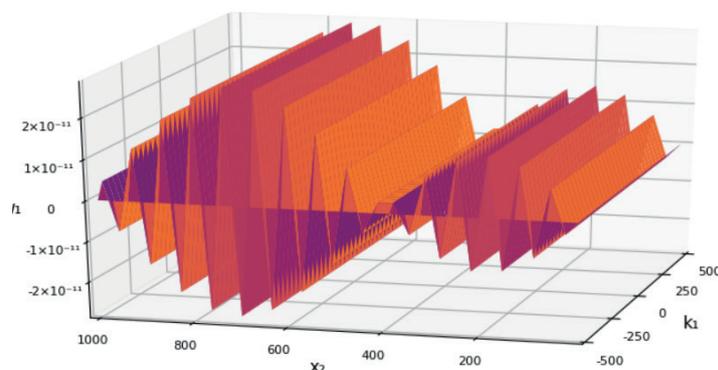


Рис. 1 – Решение для функции $w_1(t, x_1, x_2) = u_1(t, x_1, x_2)$

Данное исследование проводилось при поддержке грантового финансирования проекта AP05131026 на тему «Математическое моделирование динамики упруго-деформируемых пористых сред с учетом частной зависимости коэффициента трения (с памятью)» (2018-2020 гг.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв.АН СССР. Сер.геогр. и геофиз. – 1944. – Т.8. – №4. – С.133-150.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids //J. Acoustic. Soc. Amer., - 1956, V. 28. P. 168 - 186.
3. Berdyshev A.S., Imomnazarov Kh. Kh., Jian-Gang Tang, Mikhailov A. The Laguerre spectral method as applied to numerical solution of a two dimensional linear dynamic seismic problem for porous media. //Open Comput.Sci. - 2016, 6, p208-212.
4. Сорокин К.Е., Имомназаров Х.Х. Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористой среды //Журнал Сибирского Федерального университета, серия «Математика и физика» – 2010. – 3(2). – С.256-261.
5. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Романовский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах //Физика горения и взрыва. – 1993. – №1. – С. 100-111.
6. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum Nova Sci., New York, -1995, MathSciNet.
7. Dorovsky V. N. Imomnazarov Kh. Kh. A Mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium Mathl. Comput. Modelling, Printed in Great Britain, - 1994, Vol. 20, No. 7, pp. 91-97.
8. Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatqulov M.M., Chernykh E.G. The fundamental solution of the stationary two-velocity hydrodynamics equation with one pressure. Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 2014, No.17, pp.5-12.
9. Meirmanov A. Mathematical Models for Poroelastic Flows. Berlin : Springer, 2014. -- Vol. 1 of Atlantis Studies in distinctial Equations.
10. Бердышев А.С., Имомназаров Х.Х. Прямые и обратные задачи для системы уравнений теории двухскоростного континуума //МОН РК, КазНПУ им Абая, ИИВТ. – Алматы, 2017. – 153 с.
11. Бердышев А.С., Имомназаров Х.Х., Холмурадов А.Е. Оптимизационный метод решения одной одномерной обратной задачи пороупругости //Сибирские электронные математические известия. – Т. 12. – 2015. – С.284-293 <http://semr.math.nsc.ru/v12/html>
12. Berdyshev A.S., Imomnazarov Kh.Kh., Jian-Gang Tang, Tuchiaeva S. The symmetric form of poroelasticity dynamic equations in terms of velocities, stresses, and pressure. Open Engineering formerly Central European Journal of Engineering. Volume 6(2016), Issue 1. – P322-325.
13. Бердышев А.С., Блиева Д.Н. Применение преобразования Лапласа для сведения системы уравнений пороупругости к эллиптической системе уравнений //Материалы научной конференции ИИВТ МОН РК "Современные проблемы информатики и вычислительных технологий", 2-5 июня 2018. – Алматы. – С.80-81.