

ӘОЖ 539.3
МРНТИ 30.19.23

ТІКБҰРЫШТЫ ИЗОТРОПТЫ ПЛАСТИНАНЫ ОРНЫҚТЫЛЫҚҚА ЕСЕПТЕУ

АХАЖАНОВ С.Б., МЫРЗАБЕК Д.В.

Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

Аңдатпа: Мақалада изотропты пластинаны айнымалыларды бөлу әдісімен орнықтылыққа есептеу қарастырылған. Бойлық жағы қысылған жағдайдағы пластинаны орнықтылыққа есептеуі жүргізілген. Айнымалыларды бөлу әдісі қолданылған. Алынған нәтижелер әдебиеттегі шешімдердің нәтижелерімен салыстырылған.

Түйінді сөздер: изотропты пластина, айнымалыларды бөлу әдісі, күдікті жүктеме параметрі

CALCULATION FOR THE STABILITY OF A RECTANGULAR ISOTROPIC PLATES

Abstract: «Calculation of stability of a plate by a method of division of variables». Calculation of a plate on stability is made at compression in a longitudinal direction. The method of separation of variables is applied. Comparison of results to available decisions is made.

Key words: isotropic plates, the method of separation of variables, critical parameter

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

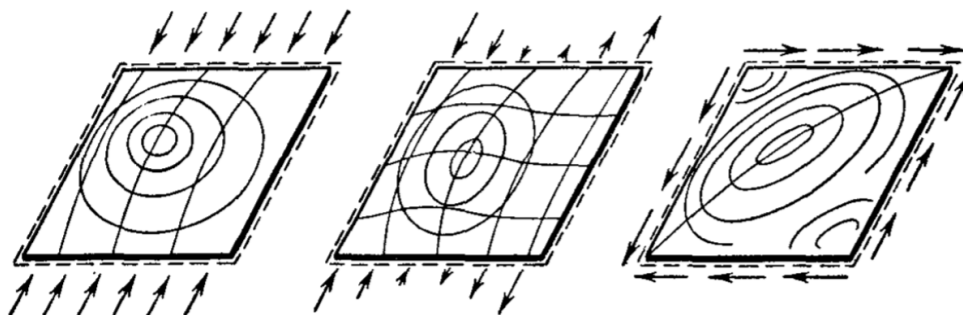
Аннотация: В статье рассмотрен расчет устойчивости изотропной пластины методом разделения переменных. Произведен расчет пластины на устойчивость при сжатии в продольном направлении. Применен метод разделения переменных. Произведено сопоставление результатов с имеющимися решениями.

Ключевые слова: изотропная пластина, метод разделения переменных, критический параметр

Кіріспе

Тікбұрыш пішінді пластиналар әртүрлі конструкциялар құрамына кіреді: құрылымдардың қабырғалары, ұшақтың қанаты, кеменің борттық қабырғалары мен палубасы, тұтас металл вагон қабырғалары және т.б. Әдетте пластиналар бекітуші қабырғалар жүйесімен бекітілген панель қаптамалары түрінде кездеседі [1,2]. Бұл конструкциялардың элементтері осы немесе басқа көлденең сыртқы күштер әсеріне ұшырайды. Көп жағдайда негізгі күштер басым болып келеді: қысылу, иілу, сырғу әсерінен пластинаның дөңестенуіне әкеледі (1-сурет). Пластинаны

орнықтылыққа есептеу конструкцияны толық есептеудің ажырамас бөлігі болып табылады. Бойлық шеттері бойынша бекітілген пластиналар орнықтылықты жоғалту кезінде сыртқы жүктемені көтере алады. Кейбір конструкциялар үшін қаптама салыстырмалы түрде аз майысады деп саналады, оның элементтері жеткілікті түрде қатты болады. Демек, инженер зерттеушілер пластиналар орнықтылығын жоғалту құбылысын ғана емес, олардың күдікті жағдайындағы конструкцияда болып жатқан құбылыстар туралы ескеруі қажет. Сондықтан, пластиналарды



1 сурет – Пластинаның қысылу, иілу, сырғудағы дөңестенуі

орнықтылыққа есептеу өте маңызды мәселе болып табылады.

Пластинаны орнықтылыққа есептеудің классикалық әдістері

Әдебиетте жиі кездесетін [3] күдікті жүктеме параметрін алу жолдарын қарастырайық.

1. Жақтары топсалы бекітілген пластина үшін майысу функциясы былайша таңдалынып алынады:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (1)$$

Шекаралық шарттарды ескеру арқылы және (1) формуланы негізгі теңдеуге қойып, келесі жақтары топсалы бекітілген пластинаның күдікті жүктеме параметрін аламыз:

$$K_2 = \left(\frac{m \dot{a}_2}{a_1} + \frac{a_1}{m \dot{a}_2} \right)^2, \quad (2)$$

мұнда $m = \frac{a_1}{a_2}$.

2. Екі көлденең жағы топса арқылы және екі бойлық жағы қатты бекітілген тікбұрышты пластинаның майысу функциясы мына түрде болады:

$$w = Y(y) \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (3)$$

Шекаралық шарттарды ескеріп келесі формуланы табамыз:

$$Y(y) = A \cosh \alpha y + C \cos \beta y \quad (4)$$

Бұл жағдайда күдікті жүктеме параметр былайша анықталады:

$$K_3 = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{a_1}{m a_2} \right)^2 (\xi^2 + \eta^2)^2$$

$$K = \frac{\sigma h \cdot a_2^2}{D} \quad (5)$$

$$-\xi \cdot \text{th} \xi = \eta \cdot \text{th} \eta \quad (6)$$

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m a_2 \pi}{a_1} \right)^2 \quad (7)$$

Күдікті кернеудің ең кіші мәнін анықтау

үшін $\left(\frac{a_1}{m a_2} \right)$ мәндерін өзгерту арқылы ξ , η

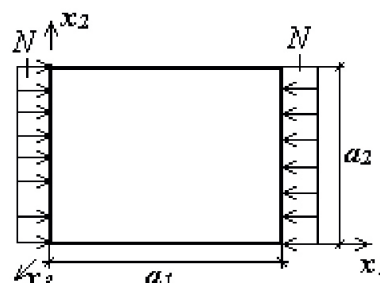
шамаларының ең кіші мәнін табу қажет болады. (6) және (7) теңдеулер күрделі түрде сипатталғандықтан, оларды шешу математикалық қиындықтар туғызады.

Пластинаны орнықтылыққа есептеу үшін ұсынылған теория

Бір бағытта қысылған тікбұрышты изотроптық пластинаны координаттық

жүйеде $(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -z \leq x_3 \leq z, z = \frac{h}{2})$

қарастырайық (2 – сурет).



2 сурет – Тікбұрышты пластина

мұнда a_1 , a_2 , h координаттық өстер бойындағы пластинаның өлшемдері.

Осы пластинаның орнықтылық теңдеуі болып табылады:

$$D \cdot \left[\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} \right] + N \cdot \left[\sigma_1^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + 2 \tau_{12}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} + \sigma_2^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right] = 0, \quad (8)$$

мұнда $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ пластинаның цилиндрлік қатандығы, σ_1^0 , σ_2^0 , τ_{12}^0 мембраналық кернеулердің өлшемсіз параметрлері, N қысу күші, W – майысу функциясы, E – пластина материалының серпімділік модулі, ν – Пуассон коэффициенті.

Пластинаның орнықтылық есебін шешу үшін айнымалыларды бөлу әдісін [4,5] қолданамыз. Пластинаның майысу функциясын мына түрде қабылдаймыз:

$$W(x_1, x_2) = W_0 \cdot X(x_1) \cdot Y(x_2) = W_0 \cdot \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \cdot \sin \frac{n\pi x_2}{a_2} \quad (9)$$

мұнда W_0 максимал майысу, m, n – x_1, x_2 өстері бойындағы толқындар саны.

алынған өрнекті пластина ауданы бойынша интегралдасақ, күдікті жүктеме параметрін анықтаймыз:

Функцияны (9) орнықтылық теңдеуіне (8) енгізіп және өлшемсіз түрге келтіру арқылы

$$K_1 = - \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(x, y) \cdot f(x, y) dx dy}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(x, y) \cdot f(x, y) dx dy} \quad (10)$$

$$K_1 = \frac{N \cdot a_2^2}{\pi^2 \cdot D}$$

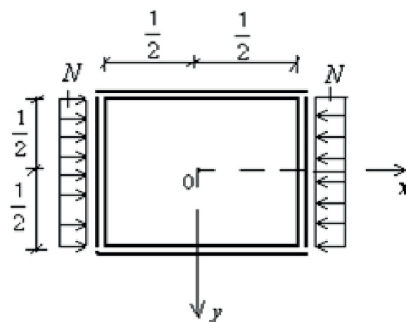
мұнда $S(x, y) = m^4 \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2m^2 n^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + n^4 \frac{a_1^2}{a_2^2} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$

$$T(x, y) = \pi^2 \left[\sigma_1^0 m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\tau_{12}^0 mn \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sigma_2^0 n^2 \frac{a_1^2}{a_2^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] f(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$X(x), Y(y)$ – арқалықтың көлденең және бойлық бағыттағы орнықтылығының өлшемсіз функциялары.

Енді негізгі формуланың (10) әртүрлі бекітілген тікбұрышты пластинаға қолданылуын мысалдар түрінде көрсетейік.

1 мысал. Жақтары топса арқылы бекітілген тікбұрышты пластинаны қарастырайық (3-сурет).



3 сурет – Жақтары топсалы бекітілген пластина

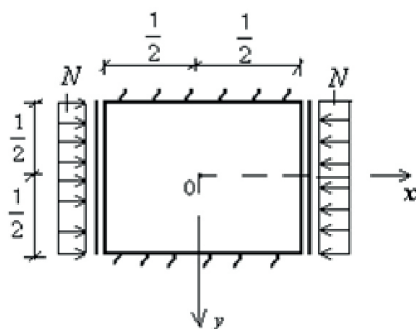
Осы пластинаның шекаралық шарттарын қанағаттандыратын арқалықтың өлшемсіз функциялары мына түрді қабылдайды:

Полином түріндегі өлшемсіз функциялар

$$X(x) = 1 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{16}{5}x^4, \quad x = \frac{x_1}{a_1}$$

$$Y(y) = 1 - \frac{24}{5}y^2 + \frac{16}{5}y^4, \quad y = \frac{x_2}{a_2} \quad (11)$$

2 мысал. Екі көлденең жағы топса арқылы және екі бойлық жағы қатты бекітілген тікбұрышты пластина берілсін (4-сурет).



4 сурет – Екі көлденең жағы топса арқылы және екі бойлық жағы қатты бекітілген пластина

Пластинаның шекаралық шарттарын қанағаттандыратын арқалықтың өлшемсіз функциясы:

$$X(x) = 1 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{16}{5}x^4$$

$$Y(y) = 1 - 8y^2 + 16y^4 \quad (12)$$

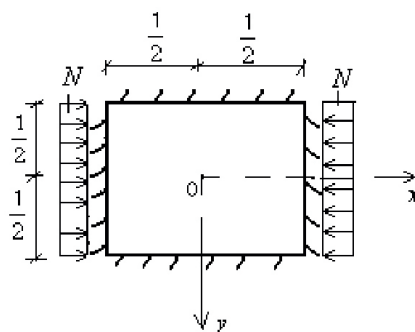
1 кесте – Топсалы бекітілген пластина

$\frac{a_1}{a_2}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3
K_1	27,073	13,216	8,419	6,256	5,142	4,534	4,206	4,047	4	4	4
K_2	27	13,20	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20	4,04	4	4	4
m	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3

2 кесте – Көлденең жағы топса арқылы және бойлық жағы қатты бекітілген пластина

$\frac{a_1}{a_2}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3
K_1	9,518	7,730	7,075	7,010	7,307	7,858	7,730	6,984	7,122
K_3	9,440	7,690	7,050	7,000	7,290	7,830	7,690	7,000	7,112
m	1	1	1	1	1	1	2	3	4

3 мысал. Жақтары қатты бекітілген тікбұрышты пластинаны қарастырайық (5-сурет).



5 сурет – Жақтары қатты бекітілген пластина

Пластинаның шекаралық шарттарын қанағаттандыратын арқалықтың өлшемсіз функциялары:

$$X(x) = 1 - 8x^2 + 16x^4 \quad (13)$$

$$Y(y) = 1 - 8y^2 + 16y^4$$

Осы функцияларды (11) - (13) және параметрлерді $\sigma_1^0 = 1$, $\sigma_2^0 = \tau_{12}^0 = 0$ (10) формулаға енгізу арқылы күдікті жүктеменің параметрі табылады. Ұсынылып отырған әдіс бойынша алынған күдікті жүктеме параметрлердің мәндерін әдебиетте кездесетін [6,7] параметрлермен салыстырылуын кестелер түрінде көрсетейік.

3 кесте – Жақтары қатты бекітілген пластина

$\frac{a_1}{a_2}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
K_1	10,943	12,391	10,943	11,515	10,943	11,248	10,943	11,132	10,943
K_4	10,07	8,43	7,88	7,78	7,37	7,35	7,23	7,18	7,12
m	1	2	2	3	3	4	4	5	5

мұнда: K_1 – (10) формула арқылы есептелген күдікті жүктеме параметрінің мәндері, ал K_2 – әдебиетте келтірілген екі жағы топса арқылы бекітілген пластинаның күдікті жүктеме параметрінің мәндері, K_3 – әдебиеттегі көлденең жағы топса арқылы және бойлық жағы қатты бекітілген пластинана мен барлық жақтары

қатты бекітілген пластинаның күдікті жүктеме параметрлерінің мәндері.

Ұсынылған әдіс бойынша (10) анықталған барлық жақтары топсалы бекітілген пластинаның орнықтылығының күдікті жүктеме параметрінің графигін мына түрде көрсетуге болады (6-сурет).



6 сурет – Жақтары топсалы бекітілген пластинаның орнықтылығының күдікті жүктеме параметрі

Сонымен, жұмыста алынған (10) формуланы қолданып, кез келген түрде бекітілген пластинаның орнықтылығының күдікті жүктеме параметрінің графигін тұрғызуға болады.

Қорытынды

(1), (2) және (3)-ші кестелер бойынша күдікті жүктеме параметрі мәндерінің әдебиеттегі мәндерден алшақтығы 1% аспайтынын көреміз. Алынған шешімдер жақтары әртүрлі

бекітілген тікбұрышты пластиналардың аналитикалық шешімдері болып саналады.

Сонымен, осы әдіс арқылы изотроптық пластинаның орнықтылық есебін жай полиномдарды қолдану арқылы аналитикалық

түрде әр уақытта алуға болады. Сондықтан болашақта, ұсынылып отырған (10)-шы формуланы кез келген түрде бекітілген пластинаның орнықтылығын есептеуде, пайдаланған тиімді болып табылады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Сухотерин М.В., Анненков Л.В. Устойчивость сжатых панелей обшивки судна // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. – 2013. – № 2. – С. 51-58.
2. Барышников С.О., Сухотерин М.В. Прочность, устойчивость, колебания плоских элементов судовых конструкций. – СПб.: Судостроение, 2012. – 167 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967г. – 984 с.
4. Турсунов К.А. Основы расчета прямоугольных пластин. – Караганда: КарГУ, 2001. – 70 с.
5. Ахажанов С.Б., Хабидолда Ө. Пластинаның орнықтылығын айнымалыларды бөлу әдісімен есептеу. ҚарМУ хабаршысы. – МАТЕМАТИКА сериясы. – 2007. – №1(45). – Б. 68-71.
6. Даревская Е.В. Устойчивость защемленной по контуру прямоугольной пластинки // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – № 3. – С. 31-35.
7. Алфутон Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.