

УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-260-266>

^{1,2*}**Вербовский В.В.,**
д.ф.-м.н., доцент, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,
*e-mail: verbovskiy at math.kz
^{1,3}**Даулетиярова А.Б.,**
магистр, ORCID ID: 0000-0003-0051-870X,
e-mail: d_aigera95 at mail.ru

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

²Satbayev University, г. Алматы, Казахстан

³SDU University, г. Каскелен, Казахстан

ПРИМЕРЫ О-МИНИМАЛЬНЫХ ОБОГАЩЕНИЙ ПЛОТНОГО ДЕРЕВА ВСТРЕЧ

Аннотация

Понятие о-минимальности является очень продуктивным для линейно упорядоченных структур, но прямой перенос этого понятия на частично упорядоченные множества испытывает некоторые трудности. Действительно, работ по о-минимальным частично упорядоченным структурам очень и очень мало. Стандартное определение о-минимальности для частично упорядоченных структур говорит, что любое формульное подмножество представимо в виде булевой комбинации интервалов и точек. Поскольку булева комбинация включает операцию взятия дополнения множества, а в частично упорядоченных множествах дополнение интервала может быть устроено чрезвычайно сложно, есть определенные сложности в исследовании таким образом определенного класса структур. Мы предлагаем использовать другое определение о-минимальности – частично упорядоченная структура является о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением обобщенных интервалов и точек. В статье мы приводим ряд примеров, которые показывают, что данное определение нетривиально, что есть структуры, которые являются о-минимальными в новом смысле.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, о-минимальность, выпуклое множество, сильно минимальная структура.

Введение

В работе авторов данной статьи [2] было предложено новое понятие о-минимальности для частично упорядоченных структур на примере плотного дерева встреч. Плотное дерево встреч является достаточно классическим объектом в теории моделей, на его основе М.Г. Перетяткиным был построен пример эренфойхтовой теории, который не базируется на линейном порядке [7]. Другие исследования плотного дерева встреч можно найти в работе [1].

Первоначально понятие о-минимальности для частичных порядков было предложено в статье [9] Ц. Таффалори. Л. Невельски и Р. Венсель продолжили исследования в этой области в статье [6]. К.Ж. Кудайбергенов предложил понятие слабой о-минимальности для частично упорядоченных структур [3]. Частичные порядки, кроме того, изучались Б.Ш. Кулпешовым, С.В. Судоплатовым, Д.Ю. Емельяновым [4, 5]. В своей совместной работе [8] В.В. Вербовский и С.В. Судоплатов предложили ряд новых понятий слабой о-минимальности для частично упорядоченных структур с целью избежать того, что при использовании подхода К.Ж. Кудайбергенова могут быть определены бесконечные антицепи, а в этом случае следует либо ограничиться рассмотрением частичных порядков конечной ширины, что и было сделано в работе [3], либо смириться с тем, что таким образом определенный класс слабо

о-минимальных структур может содержать любые обогащения структуры с тривиальным частичным порядком, то есть когда частичный порядок совпадает с равенством. Действительно, подмножество A частично упорядоченного множества M называется выпуклым согласно К.Ж. Кудайбергенову [3], если верно следующее:

$$\forall a_1 \forall a_2 (a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge a_1 < a_2 \rightarrow \forall b \in M (a_1 < b < a_2 \rightarrow b \in A)).$$

В случае, когда элементы a_1 и a_2 несравнимы, данная импликация тривиально истинна, таким образом, любая антицепь является выпуклым множеством.

Определение 1 (К.Ж. Кудайбергенов [3]). Частично упорядоченная структура M называется слабо о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением выпуклых множеств.

В работе [8] было предложено изменить понятие выпуклого множества, а именно взять за основу бесконечные пересечения или объединения системы вложенных интервалов. Позже появилась идея использовать это определение для описания, что такое обобщенный интервал в частично упорядоченном множестве [2].

Известные определения о-минимальности для частичных порядков используют в качестве основы булевы комбинации интервалов. Это следует из того, что если для линейных порядков дополнение интервала – это объединение максимум 2 интервалов, то для частичных порядков это уже не верно. Использовать же в определении возможность рассматривать дополнение интервала вызывает определенные вопросы в силу того, что совершенно не известно, как может быть устроено дополнение интервала. В нашем определении о-минимальности любое формульное подмножество является конечным объединением обобщенных интервалов и точек, что соответствует классическому определению о-минимальности с той лишь разницей, что вместо обычного интервала рассматривается обобщенный.

Для начала, мы приведем аксиомы плотного дерева встреч (DMT).

Плотным деревом пересечений [7] называется структура $M = \langle M; <, \sqcap \rangle$, которая является нижней полурешеткой без наименьшего и наибольшего элементов, такая что:

(а) для каждой пары несравнимых элементов их наименьшая общая верхняя грань (join) не существует;

(б) для каждой пары различных сравнимых элементов существует элемент между ними;

(с) для каждого элемента a существует бесконечно много попарно несравнимых элементов, больших a , наибольшая нижняя грань (инфимум) которых равна a .

Хорошо известно, что элементарная теория плотного дерева встреч допускает элиминацию кванторов. Среди бескванторных формул следует выделить отношение эквивалентности

$$E_c(x, y) = x > c \wedge y > c \wedge (x \sqcap y > c),$$

которое задается на множестве $(c, +\infty)$, где c – некоторый произвольный элемент.

Кроме того, мы будем использовать еще одно обозначение;

$$x \parallel y = \neg(x < y \vee y < x \vee x = y).$$

Таким образом, $a \parallel b$ говорит о том, что эти два элемента не являются сравнимыми, они несравнимы.

Определение 2. Будем говорить, что некоторое подмножество плотного дерева встреч M является обобщенным интервалом, если оно является интервалом или если его можно представить в виде (бесконечного) объединения системы интервалов вида $(a, +\infty)$, где a пробегает некоторое определимое с параметрами в языке $\{<, \sqcap\}$ подмножество M .

Определение 3. Обогащение плотного дерева встреч $M = \langle M; <, \sqcap, \dots \rangle$ будем называть о-минимальным, если любое его формульное в обогащенном языке подмножество является конечным объединением обобщенных интервалов и точек.

Теория обогащения плотного дерева встреч называется о-минимальной, если любая ее модель является таковой.

При помощи элиминации кванторов методом перебора всех формульных подмножеств плотного дерева встреч можно доказать, что структура $\mathcal{M} = \langle M; <, \sqcap \rangle$ в исходном, необогащенном языке является о-минимальной в смысле определения 3 [2]. Целью данной работы является изучение подмножеств и функций, которые определимы в о-минимальном обогащении плотного дерева встреч. Но для начала мы приведем примеры о-минимальных обогащений плотного дерева встреч, чтобы показать, что данный класс является более богатым, чем просто класс плотных деревьев встреч.

Пусть имеются семейства сильно минимальных счетных структур $\mathcal{N}_i = \langle N_i, \Sigma_i \rangle$, где индекс i пробегает некоторое множество I , причем $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \{=\}$ для всех $i \neq j \in I$, более того, никакая сигнатура Σ_i не содержит символы $<$ и $\sqcap$. Выберем семейство попарно несравнимых элементов $c_i \in M$, где $i \in I$. Для каждого $i \in I$ определим структуры $\mathcal{N}_i$ на множестве классов эквивалентности $\sim_i$, где $a \sim_i b$ определено как $E_{c_i}(a, b)$. Классы эквивалентности $\sim_i$ будем обозначать как $[a]_i$. Пусть

$$\pi_i : N_i \rightarrow \frac{(c_i, +\infty)}{\sim_i}$$

будет некоторое биекцией (мы предположили, что все структуры $\mathcal{N}_i$ счетные, точно так же, как и $\mathcal{M}$, следовательно, биекция существует). Теперь очевидным образом можно задать структуру $\mathcal{N}_i$ на множестве классов эквивалентности $\frac{(c_i, +\infty)}{\sim_i}$ и тем самым определить все предикаты, функциональные символы и константы из Σ_i , например, n -местный предикат P мы определяем следующим образом:

$$\mathcal{M}^+ \models P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^n a_j > c_i \text{ и } \mathcal{N}_i \models P(\pi_i^{-1}(a_1), \dots, \pi_i^{-1}(a_n)).$$

Функциональные символы и константы легко определить по аналогии.

Кроме того, мы будем считать, что сигнатура новой структуры $\mathcal{M}^+$ содержит константы c_i для всех $c_i \in I$, которые мы будем отождествлять с элементами c_i . Еще заметим, что равенство из сигнатуры Σ_i превращается в отношение эквивалентности $\sim_i$.

Теорема 4. Построенная вышеуказанным образом структура $\mathcal{M}^+$ имеет о-минимальную элементарную теорию.

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что элементарные теории сильно минимальных структур $\mathcal{N}_i$ допускают элиминацию кванторов, более того, будем считать, что мы проделали скулемизацию. В силу сделанных предположений легко доказать, что элементарная теория T^+ структуры $\mathcal{M}^+$ допускает сокращение кванторов. Для доказательства мы будем использовать критерий Тарского элиминации кванторов, то есть что достаточно показать, как опускать квантор существования, стоящий перед элементарной конъюнкцией атомных формул. Запишем возможные атомные формулы:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $x = u$; | 4) $x < u$; | 7) $x > u$; |
| 2) $x \sqcap v = u$; | 5) $x \sqcap v < u$; | 8) $x \sqcap v > u$; |
| 3) $x \sqcap v = x \sqcap u$; | 6) $x \sqcap v < x \sqcap u$; | 9) $x \sqcap v > x \sqcap u$; |

Запишем ту часть элементарной конъюнкции, которая состоит из символов сигнатуры Σ_i в виде $F_i(x, \bar{y})$. Конъюнкцию формул сигнатуры чистого плотного дерева встреч мы обозначим $\Psi(x, \bar{y})$.

В силу сильной минимальности для каждой подстановки параметров $\bar{b}$ вместо кортежа $\bar{y}$ получаем, что формула $F_i(x, \bar{b})$ имеет либо конечное, либо коконечное число решений, причем, если решение конечно число, то это число не превосходит некоторого натурального числа $n = n_F$, которое зависит только от формулы, но не зависит от параметров. Пусть формулы

$$\theta_1(\bar{y}), \dots, \theta_n(\bar{y}), \theta_\infty(\bar{y})$$

будут такими, что $\bar{b}$ удовлетворяет одной из них и при этом $F_i(x, \bar{b})$ имеет столько решений, каков нижний индекс у этой формулы. Если $F_i(x, \bar{b})$ имеет бесконечное число решений, то ее отрицание имеет конечное, пусть $\theta_1^*(\bar{y}), \dots, \theta_n^*(\bar{y})$ будут соответствующие формулы для отрицания формулы $F_i(x, \bar{b})$. В силу скульемизации, если формула $F_i(x, \bar{b})$ имеет j решений, то существуют функции $g_{F,j,1}(\bar{y}), \dots, g_{F,j,j}(\bar{y})$, такие, что именно значения этих функций дают решения формулы $F_i(x, \bar{y})$. Аналогично мы вводим функции $g_{F,j,1}^*(\bar{y}), \dots, g_{F,j,j}^*(\bar{y})$ для отрицания формулы $F_i(x, \bar{y})$. Тогда

$$\begin{aligned} & \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge F_i(x, \bar{y})) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \bigvee_j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge F_i(x, \bar{y}) \wedge \theta_j(\bar{y})) \vee \bigvee_j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge F_i(x, \bar{y}) \wedge \theta_j^*(\bar{y})) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \bigvee_j \bigvee_{k=1}^j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge x \sim_i g_{F,j,k}(\bar{y}) \wedge \theta_j(\bar{y})) \vee \bigvee_j \exists x \left(\bigwedge_{k=1}^j \Psi(x, \bar{y}) \wedge x \not\sim_i g_{F,j,k}^*(\bar{y}) \wedge \theta_j(\bar{y}) \right) \\ & \Leftrightarrow \bigvee_j \bigvee_{k=1}^j \exists x (\Psi(x, \bar{y}) \wedge x \sim_i g_{F,j,k}(\bar{y})) \wedge \theta_j(\bar{y}) \vee \bigvee_j \exists x \left(\bigwedge_{k=1}^j \Psi(x, \bar{y}) \wedge x \not\sim_i g_{F,j,k}^*(\bar{y}) \right) \wedge \theta_j(\bar{y}) \end{aligned}$$

В результате внутри скобок мы получили формулу чистого плотного дерева встреч, для которой элиминация кванторов уже известна.

Если у нас в формуле присутствуют символы из нескольких сигнатур Σ_i , то рассуждения остаются аналогичными, но более громоздкими.

В силу элиминации кванторов легко доказать, что построенная структура будет о-минимальной. Действительно, формулы чистого плотного дерева встреч, как было анонсировано в [2], представимы в виде конечного объединения обобщенных интервалов и точек, а формулы из сигнатур Σ_i могут лишь выделить конечное число классов эквивалентности $\sim_i$, которые можно было бы выделить и в сигнатуре чистого плотного дерева встреч. Таким образом, и эти множества представимы в виде конечного объединения обобщенных интервалов и точек.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{M}^+$ – произвольное о-минимальное обогащение плотного дерева встреч. Тогда для любого элемента c полная индуцированная структура на $(c, +\infty)/\sim_c$ является минимальной. Если же $Th(\mathcal{M}^+)$ о-минимальна, то полная индуцированная структура на $(c, +\infty)/\sim_c$ является сильно минимальной.

Доказательство. Очевидно, так как в теории чистого плотного дерева встреч только возможно выделить только конечное число классов эквивалентности, только конечное число классов эквивалентности можно представить в виде конечного объединения обобщенных интервалов.

Построим еще примеры о-минимального обогащения плотного дерева встреч.

Выделим два несравнимых элемента c и d . На множестве $(c, +\infty)$ зададим отношение эквивалентности $E(x, y)$, такое, что из $x \sim_c y$ влечет $E(x, y)$, а структура, индуцированная на $\frac{(c, +\infty)}{\sim_c}$, является сильно минимальной. Будем считать, что существует бесконечное число классов эквивалентности E . Если имеет место $E(a, b)$, но $a \not\sim_c b$, то пусть π_{ab} будет частичным изоморфизмом плотного дерева встреч из $[a]_c$ в $[b]_c$. Пусть A будет подмножеством интервала $(c, +\infty)$, которое состоит из классов отношения эквивалентности $\sim_c$, причем из каждого

класса эквивалентности E мы берем ровно один класс эквивалентности $\sim_c$. Получаем, что A состоит из счетного числа классов эквивалентности $\sim_c$.

Пусть f будет частичным изоморфизмом плотного дерева встреч из $(c, +\infty)$ в $(d, +\infty)$. Если $b \notin A$, найдем $a \in A$, такой, что $E(a, b)$. Положим в этом случае, что

$$f(b) = f(\pi_{ba}(b)).$$

Таким образом, мы определяем функцию f на всем интервале $(c, +\infty)$.

Теорема 6. Построенная вышеуказанным образом структура $\mathcal{M}^+ = (M, <, \sqcap, f, c, d)$ имеет о-минимальную элементарную теорию.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидным образом вытекает из элиминации кванторов элементарной теории структуры $\mathcal{M}^+$ (возможно, потребуется скульемизация для полной индуцированной сильно минимальной структуры на $(c, +\infty)/\sim_c$), доказательство которой мы оставляем читателю в виде легкого упражнения.

Теорема 7. Пусть f – строго возрастающая непрерывная функция из $(c, +\infty)$ на $(d, +\infty)$, определяемая в некотором обогащении плотного дерева встреч $\mathcal{M}^+$, которое имеет о-минимальную теорию. Тогда f задается, как было описано выше.

Доказательство. В силу своего возрастания и непрерывности функция f является частичным изоморфизмом между классами эквивалентности $\sim_c$ и классами эквивалентности $\sim_d$. Зададим отношение эквивалентности $E(x, y)$ на $(c, +\infty)$ как $f(x) = f(y)$. Если имеет место $E(a, b)$, но $a \not\sim_c b$, то так как каждый класс $[a]_c$ и $[b]_c$ частично изоморфно отображается в один и тот же класс $\sim_d$, то есть и между ними частичный изоморфизм. Отношение эквивалентности E должно индуцировать сильно минимальную структуру на $(c, +\infty)/\sim_c$ в силу теоремы 5. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Материалы и методы

Основные материалы в проведенной работе – это частично упорядоченные алгебраические структуры, понятие о-минимальности. Мы использовали методы изучения о-минимальных теорий, общие методы изучения частично упорядоченных структур и линейной упорядоченных структур, кроме того, мы использовали классические методы теории моделей.

Результаты и обсуждение

Результатом проведенного исследования является перенос понятия о-минимальности с класса линейно упорядоченных структур на класс частично упорядоченных структур, а именно на обогащения плотного дерева встреч, в работе приведены примеры о-минимальных обогащений плотного дерева встреч.

Заключение

В данной работе мы получили следующие результаты: введенное понятие о-минимальности для частично упорядоченных структур имеет непустое содержание, были показаны интересные свойства получаемых о-минимальных обогащений, все это свидетельствует, что подобная адаптация понятия о-минимальности к частично упорядоченным структурам имеет смысл и обещает быть плодотворной.

Информация о финансировании

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант BR20281002).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Dauletiyarova A. B., Verbovskiy V.V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2024. – Vol. 21. – No. 2. – P. 755–770.
- 2 Даулетиярова А.Б., Вербовский В.В. О понятии о-минимальности для частичных порядков на примере плотного дерева встреч : Тезисы докладов «Мальцевские чтения, 2024», Новосибирск, Математический центр в Академгородке, 2024. – С. 239.
- 3 Kudaibergenov K.Zh. Generalized o-minimality for partial orders // *Siberian Adv. Math.* – 2013. – Vol. 23. – No 1. – P. 47–60 [in Russian].
- 4 Kulpeshov B. Sh. On connectedness in partially ordered structures // *AIP Proceedings*. – 2016. – Vol. 1759. – P. 020062, <https://doi.org/10.1063/1.4969676>.
- 5 Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for some partially ordered theories. *Algebra and Model Theory 13* (collection of papers edited by A. G. Pinus, E.N. Poroshenko, and S.V. Sudoplatov), NSTU, Novosibirsk, 202, pp. 69–75.
- 6 Newelski L., Wencel R. Definable sets in Boolean-ordered o-minimal structures // *I, The Journal of Symbolic Logic*. – 2001. – V. 66. – No. 4. – P. 1821–1836. <https://doi.org/10.2307/2694978>
- 7 Peretyat'kin M.G. On complete theories with a finite number of denumerable models // *Algebra and Logic*. – 1973. – Vol. 12. – No. 5. – P. 310–326.
- 8 Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. On the concepts of convexity and weak o-minimality for partially ordered structures // *Herald of the Kazakh-British technical university*. 2024. – Vol. 21. – No. 1. – P. 75–84 [in Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-75-84>.
- 9 Toffalori C. Lattice ordered o-minimal structures // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. – 1998. – Vol. 39. – No. 4. – P. 447–463. <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1039118862>.

REFERENCES

- 1 Dauletiyarova A. B., Verbovskiy V.V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 21 (2), 755–770 (2024).
- 2 Dauletiyarova A.B., Verbovskiy V.V. O ponyatii o-minimalnosti dlya chastichnykh poryadkov na primere plotnogo dereva vstrech, *Proceeding of “Maltsev Meeting, 2024”* (Novosibirsk, Mathematical center in Academgorodok, 2024), p. 239 [in Russian].
- 3 Kudaibergenov K. Zh. Generalized o-minimality for partial orders. *Siberian Adv. Math.*, 23 (1), 47–60 (2013) [in Russian].
- 4 Kulpeshov B. Sh. On connectedness in partially ordered structures. *AIP Proceedings* 1759, 020062 (2016). <https://doi.org/10.1063/1.4969676>.
- 5 Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for some partially ordered theories. *Algebra and Model Theory 13* (collection of papers edited by A. G. Pinus, E.N. Poroshenko, and S.V. Sudoplatov) (NSTU, Novosibirsk, 2021), pp. 69–75.
- 6 Newelski L., Wencel R. Definable sets in Boolean-ordered o-minimal structures. *I, The Journal of Symbolic Logic*, 66 (4), 1821–1836 (2001). <https://doi.org/10.2307/2694978>.
- 7 Peretyat'kin M. G. On complete theories with a finite number of denumerable models, *Algebra and Logic*, 12 (5), 310–326 (1973).
- 8 Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. On the concepts of convexity and weak o-minimality for partially ordered structures, *Herald of the Kazakh-British technical university*, 21 (1), 75–84 (2024) [in Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-75-84>.
- 9 Toffalori C. Lattice ordered o-minimal structures, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39 (4), 447–463 (1998). <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1039118862>.

^{1,2*}**Вербовский В.В.,**
физ.-мат.ф.к., доцент, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,
*e-mail: verbovskiy at math.kz
^{1,3}**Даулетиярова А.Б.,**
магистр, ORCID ID: 0000-0003-0051-870X,
e-mail: d_aigera95 at mail.ru

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

²Satbayev University, Алматы қ., Қазақстан

³SDU University, Қаскелен қ., Қазақстан

ТЫҒЫЗ АҒАШТА КЕЗДЕСЕТІН О-МИНИМАЛ КЕҢЕЙТУЛЕРІНІҢ МЫСАЛЫ

Аңдатпа

О-минималдылық ұғымы сызықты реттелген құрылымдар үшін өте өнімді. Алайда бұл ұғымды жартылай реттелген жиындарға тікелей көшіру белгілі бір қиындықтарға тап болады. Шынында да, о-минимал жартылай реттелген құрылымдар жөніндегі жұмыстар өте аз. Жартылай реттелген құрылымдар үшін о-минималдылықтың стандартты анықтамасы бойынша кез келген анықталатын жиын интервалдар мен нүктелердің булевік комбинациясы түрінде берілуі тиіс. Алайда булевік комбинациялар құрамында жиынның толықтауышын алу амалы бар, ал жартылай реттелген жиындарда интервалдың толықтауышы өте күрделі құрылымға ие болуы мүмкін. Сондықтан мұндай жолмен анықталған құрылымдар класын зерттеуде елеулі қиындықтар туындайды. Біз о-минималдылықтың балама анықтамасын ұсынамыз: жартылай реттелген құрылым о-минимал деп аталады, егер оның кез келген анықталатын ішкі жиыны жалпыланған интервалдар мен нүктелердің ақырлы бірігуінен тұрса. Мақалада біз осы анықтаманың тривиалды емес екендігін және жаңа мағынада о-минимал болатын құрылымдардың бар екендігін көрсететін бірнеше мысал келтіреміз.

Тірек сөздер: жартылай реттелген жиын, о-минималдылық, дөңес жиын, күшті минимал құрылым.

^{1,2*}**Verbovsky V.V.,**
d.ph.m.sc., docent, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,
e-mail: verbovskiy at math.kz
^{1,3}**Dauletiyarova A.B.,**
MSc, ORCID ID: 0000-0003-0051-870X,
e-mail: d_aigera95 at mail.ru

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

³SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

EXAMPLES OF O-MINIMAL EXPANSIONS OF THE DENSE MEET TREE

Abstract

The notion of o-minimality is highly productive for linearly ordered structures, but a direct transfer of this concept to partially ordered sets encounters certain difficulties. Indeed, there is a striking scarcity of works on o-minimal partially ordered structures. The standard definition of o-minimality for partially ordered structures states that every definable subset is a Boolean combination of intervals and points. However, since Boolean combinations involve the operation of taking set complements, and in partially ordered sets the complement of an interval can be extremely complex, this approach presents certain challenges for studying the resulting class of structures. We propose using an alternative definition of o-minimality: a partially ordered structure is o-minimal if every definable subset is a finite union of generalized intervals and points. In the paper, we provide a number of examples demonstrating that this definition is nontrivial and that there exist structures which are o-minimal in this new sense.

Keywords: partially ordered set, o-minimality, convex set, strongly minimal structure.

Дата поступления статьи в редакцию: 23.04.2025