

УДК 519.62

МРНТИ 27.35.21; 27.35.47; 27.41.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-242-259>¹*Исахов А.А.,

профессор, ORCID ID: 0000-0002-1937-8615,

*e-mail: alibek.issakhov@gmail.com

¹Абылкасымова А.Б.,

ассоциированный профессор, ORCID ID: 0000-0002-5967-6959,

e-mail: abyilkassymova.aizhan@gmail.com

¹Юн С.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0002-6295-1592,

e-mail: s_yun@kbtu.kz

¹Жайлыбаев Р.

бакалавр, ORCID ID: 0009-0007-6323-0689,

e-mail: r_zhailybaev@kbtu.kz

¹Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРЮНВАЛЬДА-ЛЕТНИКОВА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МЕМОИЗАЦИИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

Дробные производные благодаря своей нелокальности могут описывать сложные процессы, где исторические данные важны для будущих вычислений. Одновременно данное свойство приносит трудности при численных моделированиях. Эта статья представляет новый дискретный оператор для аппроксимации дробной производной на основе определения Грюнвальда-Летникова, «принципа короткой памяти», мемоизации и аналитических предположений. Данный оператор существенно уменьшает количество операций в процессе вычислений, при решении краевых задач, за счет сохранения вычисляемых данных и преобразования для дальнейшего использования с регулируемой точностью.

Ключевые слова: дробная производная, нелокальность, дробная производная Грюнвальда-Летникова, оптимизация, мемоизация, численное решение, дискретизация дробной производной.

1. Введение

1.1 Дробное исчисление

Дробное исчисление наряду с классическим математическим анализом изучает свойства дифференциальных и интегральных операторов дробного порядка. Дробной производной называется обобщение обыкновенной производной для нецелых значений порядка. Как следствие, такое расширение открывает новые возможности применения дробных дифференциальных операторов (ДДО) в уравнениях, описывающих физические процессы. Метод определения ДДО стал отдельной темой для исследования и дискуссий. На данный момент существует множество вариантов его определения [6–10]. Наиболее распространенными считаются определения Капуто, Риманна-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова (ГЛ), два последних определения будут представлены в секции 2.2.

1.2 Сущность дробно-дифференциального оператора

В работе [4] под названием «Что такое дробная производная?» предлагаются аксиомы (wide sense criterion и strict sense criterion), необходимые для соблюдения дробным оператором

ром. Тарасов [5] сформулировал принципы нелокальности дробной производной. Важным результатом этой работы является признание «нелокальности» ДДО как одной из ее отличительных свойств по сравнению со свойствами производными целых порядков. ДДО обладает свойством нелокальности, если значение дробной производной функции зависит от всех предыдущих значений функций, тогда как производные целого порядка зависят от конечного числа соседних элементов. Следствием нелокальности является сложность интуитивной интерпретации понятия дробной производной функции, а также высокая требовательность к системным требованиям при решении численных задач.

1.3 Перспективы применения ДДО

В последние десятилетия популярность дробных производных стремительно растет, что обуславливается широким спектром их применения в разнообразных сферах инженерии, биологии, механики, дискретных систем и т.д. Например, нелокальность ДДО применяется при моделировании поведения клеток и тканей в задачах биоинженерии [11], в материальных уравнениях для описывания стресса-деформации [12]. Моделировались также задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики с дробными производными по пространству в управляющих уравнениях [13, 15]. Системы дробных дифференциальных уравнений появляются при изучении математической биологии, их аналитическое решение описывается в [21]. Дробное исчисление совершило целую революцию в математической экономике, озаглавленное как *memory revolution*, снарядив модели экономики эффектами памяти [16]. Законы немецкого ученого-физика Фика, являющиеся фундаментом стандартной модели диффузии, наряду с дробным исчислением были использованы для получения дробного уравнения дисперсии [17]. Неоднократно было подчеркнуто, что ДДО – это инструмент для описания сложных систем с «памятью», где нынешнее состояние зависит не только от состояний в бесконечно малом радиусе по пространству или времени.

1.4 Методы аппроксимации

Как уже отмечалось выше, особенность ДДО является его основной трудностью при численных реализациях. Каждое новое значение замедляет вычисление следующего, что при необходимости длительных вычислений обременяет время ожидания и оперативную память. Ранее множество авторов предлагали методы аппроксимации ДДО на основе принципа короткой памяти (ПКР) [3, 14]. Принцип заключается в том, чтобы ограничивать количество предыдущих значений функций для вычисления дробной производной, что в некоторых случаях приводит к противоречию самой сути ДДО как нелокального оператора. Подробный анализ ошибок «усеченного» дробного оператора, основанного на определении Грюнвальда-Летникова для онлайн-систем идентификации, приводится в [20]. В работе [18] был использован подход предиктора-корректора вместе с ПКР и проанализирована соответствующая ошибка для интегро-дифференциального оператора Капуто. Рассматривались альтернативные варианты модификации ПКР в работе [19].

1.5 Цель статьи

Цель работы – представить оптимизационный алгоритм для численной реализации дробной производной Грюнвальда-Летникова (ГЛ) на основе принципа мемоизации и сравнить его эффективность (сложность алгоритма, относительная ошибка) при решении ОДУ.

2. Материалы и методы

2.1 Обобщение биномиальной функции

Генерализация производной функции становится возможной благодаря Гамма функции Эйлера, интерполирующей значения функции факториала для нецелых значений аргумента:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(x-1)} dt, \text{ также } \Gamma(n+1) = n! \text{ для } n \in \mathbb{Z}^+, \quad (1)$$

Биномиальные коэффициенты определяются, как предложено в [1]:

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)} \text{ для } x, y \in \mathbb{C} \quad (2)$$

2.2 Обобщение производной функции

Пусть $f: U(x) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $U(x)$ окрестность точки x , тогда производная функции $f(x)$ определена следующим образом:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (3)$$

Исходя из (3) и линейности дифференциального оператора, производная второго порядка определяется как:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) &= \frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (4)$$

По индукции можно доказать утверждение:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \text{ где } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ для } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} \binom{\alpha}{k} f(t - kh) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} f(t - kh) \quad (6)$$

Определение ДДО по ГЛ является эквивалентным определению ДДО по Риманна-Лиувилля (РЛ) известное как [2]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (7)$$

где a – начало интересующего промежутка, для (6) $a = 0$.

(7) представляет собой комбинацию дробного и интегрального оператора. Определение РЛ удобно при аналитических манипуляциях, тогда как определение ГЛ более практично в прикладных задачах.

3. Подготовка к численным экспериментам

3.1 Альтернативная форма ${}^{GL}D_t^\alpha$

Для приведения альтернативной формы дифференциального оператора в (6), воспользуемся следующим ныне доказанным тождеством:

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k} \quad (8)$$

Применим тождество (8) на коэффициенты в сумме (6)

$$(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^{2k} \binom{-\alpha+k-1}{k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} \quad (9)$$

Тогда имеем альтернативный вид дробно-дифференциального оператора ГЛ

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(t-kh) \quad (10)$$

Условимся, что значение f^0 дано по начальному условию, тогда конечно-разностный аналог оператора (10) выглядит следующим образом:

$${}^{GL}\Delta_t^\alpha f^{n+1} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f^{n+1-k} \quad (11)$$

При численных реализациях данного оператора возникнет ошибка переполнения памяти, например на C++ максимальное значение для типа данных double 1.7e+308, что меньше чем истинные значения $\Gamma(k-\alpha)$ и $\Gamma(k+1)$ при $k > 180$, более того, схема будет неопределенна для целых отрицательных значений α в связи с тем, что $\Gamma(-n) = \infty$ при $n \in \mathbb{N}$. Решение этой проблемы прежде уже демонстрировалось в [2].

3.2 Динамическое программирование ГЛ коэффициентов

Воспользуемся следующим свойством гамма функции для оптимизации процесса вычисления коэффициентов:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (12)$$

Обозначим ГЛ коэффициенты как $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right]$ и применим свойства, указанные в (12)

$$\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = \frac{(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(-\alpha)}{k!}, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \quad (13)$$

Условимся, что

$$c_i = \frac{i-\alpha}{i+1} \quad (14)$$

Из чего следует следующее рекуррентное отношение между коэффициентами

$$\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1.22 \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \cdot \frac{k-\alpha-1}{k} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \cdot c_{k-1} \quad (15)$$

Данное определение коэффициентов позволяет вычислять коэффициенты динамически, предварительно основным вычислениям и избежать переполнения памяти. Важно отметить свойства коэффициентов:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0 \quad \text{при } \alpha \in (0,1) \quad (16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-\alpha-1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 1 \quad (17)$$

3.3 Упрощенная форма ГЛ

В работе [3] авторами была представлена упрощенная (усеченная) форма дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ), особенностью которого является введение ограничения количества соседних элементов, учитываемых в сумме. Аналогичная форма в аналитическом виде обсуждалась в [2].

$${}^{GLs}_0\Delta_{t,L}^\alpha f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\min(L,n+1)} b_i^\alpha f^{n+1-i} \quad (18)$$

где L – количество учитываемых элементов, а коэффициенты b_i^α соответствуют $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ i \end{smallmatrix} \right]$.
Отношение между операторами (18) и (11) выражается в следующем тождестве:

$${}^{GL}_t\Delta_t^\alpha f^{n+1} - {}^{GLs}_t\Delta_{t,L}^\alpha f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{i=L+1}^{n+1} b_i^\alpha f^{n+1-i} \quad (19)$$

Причиной принимаемого упрощения является необходимость учитывать все предыдущие соседние элементы, это значит, что вычисление следующего значения будет выполняться медленнее предыдущего. В больших вычислениях это становится вызовом для времени исполнения программы. Однако предложенная форма хоть и решает проблему со временем вычисления, но стремительно теряет точность в долгосрочной перспективе.

Рассмотрим численные решения, полученные с помощью (18) при решении обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) методом конечных разностей.

$$D^{0.5}f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} + 5 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5}; f(0) = 0 \quad (20)$$

с аналитическим решением $f(t) = t^2 + 5t$

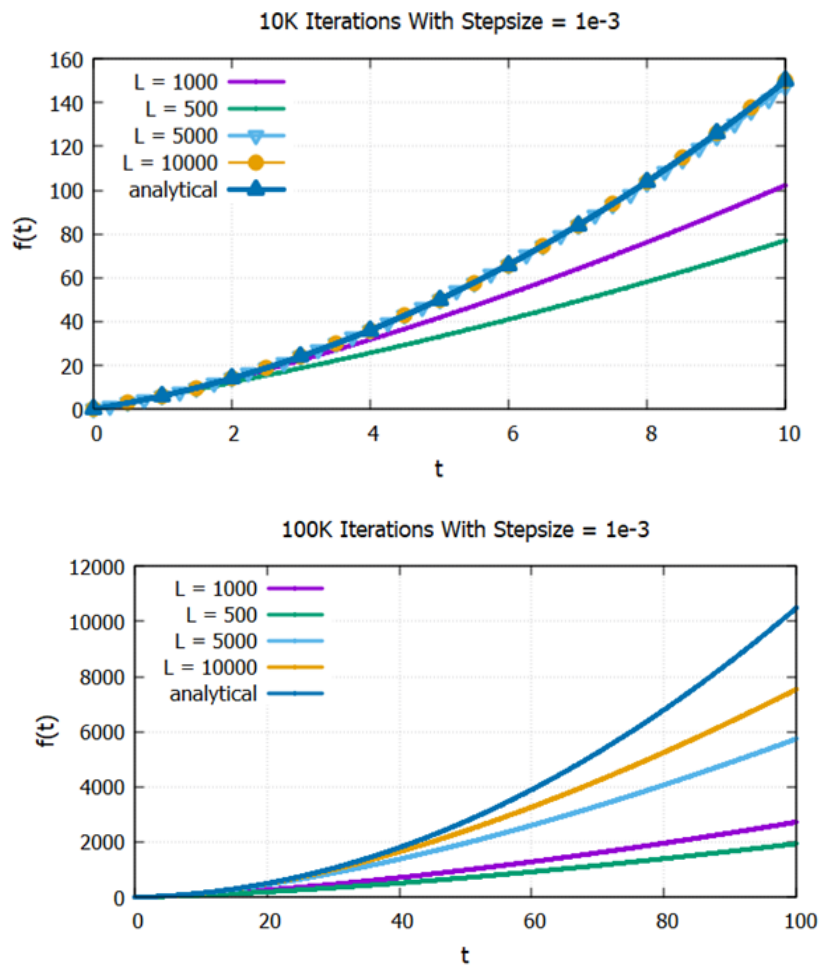


Рисунок 1 – Профили численного решения для $L = 500, 1000, 5000, 10000$ вместе с аналитическим решением

На рисунках изображены сравнительные графики численного решения для $L = 500, 1000, 5000, 10\ 000$ вместе с аналитическим. Для 10 000 итераций последние два значения параметра L способны давать приемлемые решения, но после 100 000 итераций недобор слагаемых становится критическим, который отражается на качества решения.

3.4 Модификация ДДДОГЛ

Введем следующее определение:

$${}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\min(L,n+1)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} + h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{n+1}} B_i^{n+1} \quad L, S \in \mathbb{Z} \quad (21)$$

где S – количество элементов в одном блоке, $\min(x, y)$ – наименьшее из двух чисел x, y , $\lfloor x \rfloor$ – нижнее округление до целого,

$$T^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } n+1-L \leq 0 \\ \left\lfloor \frac{n-L}{S} \right\rfloor, & \text{если } n+1-L > 0 \end{cases}$$

Определяются коэффициенты B_i^j рекуррентным способом в строго следующем порядке:

- 1) база $B_i^{-1} = 0$ для $i \in \mathbb{Z}$;
- 2) переход $B_i^{n+1} = B_i^n \cdot \frac{(T^{n+1}-i)S+L-\alpha+1}{(T^{n+1}-i)S+L+2}$ для $i \in \mathbb{Z}$;
- 3) обновление $B_{T^{n+1}}^{n+1} := B_{T^{n+1}}^{n+1} + \left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \cdot f^{n-L}$, при $T^{n+1} \neq -1$

для $n = 0, 1, 2, \dots$

Следующее утверждение отражает зависимость между данным оператором и (11):

$$1) \lim_{L \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = {}^G_0\Delta_t^\alpha f^{n+1}$$

Определение, предложенное в (21), имеет замысловатую идею, которую можно объяснить, рассмотрев оператор:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\min(L,n+1)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} + h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{n+1}} B_i^{n+1} \quad (22)$$

Тогда $\lim_{S \rightarrow \infty} T^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } n+1-L \leq 0 \\ \lfloor 0 \rfloor, & \text{если } n+1-L > 0 \end{cases}$, из чего следует $B_i^{n+1} = B_i^n$ и $B_0^{n+1} := B_0^{n+1} + \left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \cdot f^{n-L}$, так как T принимает значение -1 или 0 правая сумма (22) состоит лишь из одного блока B_0^j , тогда (22) имеет вид:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \left(\sum_{k=0}^L \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} + \left(\frac{\alpha}{L+1} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-L} f^j \right) \right) \text{ при } n+1 > L \quad (23)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} {}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L f^{n+1} = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\min(L,n+1)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f^{n+1-k} \text{ при } n+1 \leq L$$

Первые $L+1$ значений вычисляются как в (10), последующие значения аппроксимируются, каждое слагаемое $\begin{bmatrix} \alpha \\ i \end{bmatrix} f^{n+1-i}$ приближается $\left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \cdot f^{n+1-i}$ при $i \geq L+1$ с абсолютной погрешностью $\epsilon_i = \left| \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ i \end{bmatrix} - \left[\frac{\alpha}{L+1} \right] \right) f^{n+1-i} \right|$

Очевидно, что

$$\lim_{i \rightarrow L+1} \epsilon_i = 0 \quad (24)$$

Из чего можно сделать вывод, что оператор (22) вычислит с малой погрешностью только при небольшом количестве итераций относительно L . При $S \rightarrow \infty$ оператор сохраняет неограниченную сумму всех f^i для $i \leq n - L$ в одном блоке и аппроксимирует их веса одним коэффициентом b_i^α . Присвоив S конечное целое значение, зафиксируем размер блока и уменьшим погрешность вычисления путем использования не только одного коэффициента. Пусть $L, S \in \mathbb{Z}^+$, рассмотрим состояние оператора на j -той итерации, такой, что $L \leq j < L + S$, тогда для вычисления ${}^{GLm}_0 \Delta_t^\alpha |^L_S f^{j+1}$ необходимо иметь значение B_0^{j+1} , так как $T^{j+1} = 0$. Из определения (21) имеем:

$$B_0^j = 0, j = 0, 1, \dots, L; \quad B_0^{L+1} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^0; \quad B_0^{L+2} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \frac{L-\alpha+1}{L+2} f^0; \quad (25)$$

$$B_0^{L+1} = B_0^L \cdot \frac{L-\alpha+1}{L+2}; \quad B_0^{L+2} = B_0^{L+1} \cdot \frac{L-\alpha+1}{L+2}; \quad \dots \quad (26)$$

$$B_0^{L+1} := B_0^{L+1} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^0; \quad B_0^{L+2} := B_0^{L+2} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1; \quad (27)$$

Используя (15), перепишем

$$B_0^{L+2} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+2 \end{smallmatrix} \right] f^0 \quad (28)$$

Аналогично

$$B_0^{L+3} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^2 + \frac{L-\alpha+1}{L+2} \left(\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+2 \end{smallmatrix} \right] f^0 \right) \quad (29)$$

Обратимся к свойству (24) и предположим, что

$$\frac{L-\alpha+1}{L+2} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+d \end{smallmatrix} \right] \approx \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+d+1 \end{smallmatrix} \right] \text{ для } d = 2, 3, \dots, S \quad (30)$$

Следует

$$B_0^{L+3} \approx \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^2 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+2 \end{smallmatrix} \right] \cdot f^1 + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+3 \end{smallmatrix} \right] f^0 \quad (31)$$

$$B_0^{L+m} \approx \sum_{k=0}^{m-1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+m-k \end{smallmatrix} \right] f^k \text{ для } m \in \mathbb{Z}^+ \quad (32)$$

Тогда при j -той итерации, такой что $L \leq j < L + S$

$$B_0^{j+1} \approx \sum_{k=0}^{j-L} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ j+1-k \end{smallmatrix} \right] f^k \quad (33)$$

$$\begin{aligned} {}^{GLm}_0 \Delta_t^\alpha |^L_S f^{j+1} &\approx h^{-\alpha} \left(\sum_{n=0}^L \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ n \end{smallmatrix} \right] f^{j+1-n} + \sum_{k=0}^{j-L} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ j+1-k \end{smallmatrix} \right] f^k \right) \\ &\approx h^{-\alpha} \left(\sum_{n=0}^L \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ n \end{smallmatrix} \right] f^{j+1-n} + \sum_{k=L+1}^{j+1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ k \end{smallmatrix} \right] f^{j+1-k} \right) \approx {}^{GL}_t \Delta_t^\alpha f^{j+1} \end{aligned} \quad (34)$$

3.5 Точность оператора

В предыдущем подразделе было детально рассмотрено действие оператора (21) для итераций $L \leq j < L + S$. Предположив формулу (30) было приведено утверждение (34). В этом подразделе ставится задача найти значение *Error* для произвольного j :

$$Error = \left| {}^{GL}\Delta_t^\alpha f^{j+1} - {}^{GLm}\Delta_t^\alpha \Big|_S^L f^{j+1} \right| \quad (35)$$

Необходимо заметить, что

$$T^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } n \leq L - 1 \\ \lambda, & \text{если } L + \lambda S \leq j < L + (\lambda + 1)S \end{cases} \quad (36)$$

Очевидно, что $Error = 0$ для $j \leq L - 1$. Исходя из определения коэффициентов B_i^j и (.) можно будет найти их явное представление. Каждый переход добавляет к $B_T^j f^{j-L}$ только единицы. Пусть $T^{n+1} \neq -1$, тогда

$$T^{j+1} = \lambda, \text{ такому что } L + \lambda S \leq j < L + (\lambda + 1)S, \lambda \in \mathbb{Z} \quad (37)$$

$$\lambda S \leq j - L < (\lambda + 1)S \quad (38)$$

Можем утверждать, что

$$B_T^{j+1} = \sum_{k=\lambda S}^{(\lambda+1)S-1} \alpha_k^\lambda f^k, \quad (39)$$

где $\alpha_k^i \in \mathbb{R}$ неуточненные коэффициенты.

Приняв во внимание, что T^l принимает значения последовательно от 0, то есть на предыдущих итерациях $l < j$, $T = 0, 1, \dots, \lambda - 1$, следует что

$$B_i^{j+1} = \sum_{k=iS}^{(i+1)S-1} \alpha_k^i f^k, \quad (40)$$

где $\alpha_k^i \in \mathbb{R}$ неуточненные коэффициенты, для $i = 0, 1, \dots, \lambda - 1$.

Очевидно, что T принимает значение N ровно на протяжении S итераций, что согласуется с тем, что каждый B_i^{j+1} обновляется максимум S раз. Рассмотрим значения B_i^{j+1} , учитывая обновления в (21). Допустим $j = L + \lambda S$ для целого неотрицательного λ :

$$B_\lambda^{j+1} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{j-L} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S} \quad (41)$$

$$B_\lambda^{j+2} = c_{L+1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+1} \quad (42)$$

$$B_\lambda^{j+3} = (c_{L+1})^2 \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S} + c_{L+1} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+1} + \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+2} \quad (43)$$

$$\dots \quad (44)$$

$$B_\lambda^{j+S} = \sum_{k=0}^{S-1} (c_{L+1})^{S-1-k} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+k}, \quad (45)$$

$$B_\lambda^{j+S+1} = c_{L+S+1} \sum_{k=0}^{S-1} (c_{L+1})^{S-1-k} \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ L+1 \end{smallmatrix} \right] f^{\lambda S+k} \quad (46)$$

Тогда как для $i = 0, 1, \lambda - 1$

$$B_i^{j+1} = B_i^j \cdot c_{(\lambda-i)S+L+1} \quad (47)$$

Следовательно,

$$B_i^{j+S} = B_i^j \cdot (c_{(\lambda-i)S+L+1})^S \quad (48)$$

Комбинируя найденные тождества, имеем:

Для произвольного $j \geq L$

$$B_i^{j+1} = \left(\sum_{k=0}^{S-1} (c_{L+1})^{S-1-k} \left[\begin{matrix} \alpha \\ L+1 \end{matrix} \right] f^{iS+k} \right) \cdot (c_{L+S+1})^S \cdot (c_{L+2S+1})^S \dots \cdot (c_{L+(T^{j+1}-i)S+1})^{j-L-T^{j+1}S+1} \quad (49)$$

$$B_{T^{j+1}}^{j+1} = \left(\sum_{k=T^{j+1}S}^{j-L} (c_{L+1})^{j-L-k} \left[\begin{matrix} \alpha \\ L+1 \end{matrix} \right] f^{T^{j+1}S+k} \right) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} Error &= \left| {}^{GL}_0 \Delta_t^\alpha f^{j+1} - {}^{Glm}_0 \Delta_t^\alpha \right|_S^L f^{j+1} = \left| h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{j+1} \left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right] f^{j+1-k} - \right. \\ &\quad \left. h^{-\alpha} \sum_{k=0}^L \left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right] f^{j+1-k} - h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{j+1}} B_i^{j+1} \right| = \\ &= \left| h^{-\alpha} \sum_{k=L+1}^{j+1} \left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right] f^{j+1-k} - h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T^{j+1}} B_i^{j+1} \right| = \\ h^{-\alpha} &\left| \sum_{k=L+1}^{j+1} \left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right] f^{j+1-k} - \sum_{i=0}^{T^{j+1}-1} \sum_{k=0}^{S-1} \left((c_{L+1})^{S-1-k} \left[\begin{matrix} \alpha \\ L+1 \end{matrix} \right] f^{iS+k} \prod_{n=1}^{T-i-1} (c_{L+nS+1})^S (c_{L+(T-i)S+1})^{j-L-I} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{k=0}^{j-L} (c_{L+1})^{j-L-k} \left[\begin{matrix} \alpha \\ L+1 \end{matrix} \right] f^{TS+k} \right) \right| = \\ h^{-\alpha} &\left| \sum_{i=0}^{T^{j+1}-1} \sum_{k=0}^{S-1} f^{iS+k} \left(\left[\begin{matrix} \alpha \\ j+1-k-iS \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \alpha \\ L+1 \end{matrix} \right] (c_{L+1})^{S-1-k} \prod_{n=1}^{T^{j+1}-i-1} (c_{L+nS+1})^S \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (c_{L+(T-i)S+1})^{j-L-T^{j+1}S+1} \right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^{j-L} f^{T^{j+1}S+k} \left(\left[\begin{matrix} \alpha \\ j+1-T^{j+1}S-k \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \alpha \\ L+1 \end{matrix} \right] \cdot (c_{L+1})^{j-L-k} \right) \right| \end{aligned} \quad (51)$$

По аналитическому выражению ошибки трудно сделать удобные выводы о точной величине погрешности. В связи с этим подробный анализ результатов будет представлен в следующей секции. Важно отметить также, так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} c_i = 1 \quad (52)$$

Нужно отметить, что чем ближе степень производной к -1, тем меньше множители c_i влияют на погрешность.

3.6 Сложности алгоритмов

Рекуррентное определение коэффициентов B_i^{j+1} в подсекции 3.4 аппроксимирующие предыдущие элементы, очевидно дает выигрыш во времени только при итеративном вычислении, т.е. не имеет смысла использовать модификацию в случаях, когда предыдущие/следующие коэффициенты не понадобились/понадобятся для предыдущих/дальнейших вычислений f^l для $l = 0, 1, \dots, j, j+2, \dots$. В ином случае, модификация будет иметь превосходство по времени вычисления и сохранять точность при определенном подборе L и S . Поэтому следующие рассуждения проводятся с предположением, что модификация ДДДОГЛ используется при численном решении краевых задач с дробной производной по неизвестной функции.

Пусть функция ${}^{GL}\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ будет определена следующим образом:

$${}^{GL}\sigma(j) = \text{количество операций, необходимых для вычисления } {}^{GL}\Delta_t^\alpha f^j \text{ по определению ГЛ} \quad (53)$$

Аналогично будут определены функции ${}^{GL}\sigma, {}^{GLm}\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда при $j \rightarrow \infty$

$${}^{GL}\sigma(j) = O(j) \quad (54)$$

$${}^{GLs}\sigma(j) = O(L) \quad (55)$$

$${}^{GLm}\sigma(j) = O\left(L + \left\lfloor \frac{j-L}{S} \right\rfloor\right) \quad (56)$$

Функции в скобках $O()$ описывают верхние асимптотические границы для соответствующей функции слева. Рассмотрим их отношение:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{{}^{GLm}\sigma(j)}{{}^{GL}\sigma(j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{L + \frac{j-L}{S}}{j} = \frac{1}{S} \quad (57)$$

Из чего следует:

$${}^{GLm}\sigma(j) = O({}^{GL}\sigma(j)) \text{ при } j \rightarrow \infty \quad (58)$$

$$|{}^{GLm}\sigma(j)| \leq \frac{1}{S} |{}^{GL}\sigma(j)| \text{ для всех } j \text{ после какого-то } j_0; \quad (59)$$

Формально:

$$\left| \frac{{}^{GLm}\sigma(j)}{{}^{GL}\sigma(j)} \right| \leq \frac{1}{S} \text{ для всех } j \text{ после какого-то } j_0 \quad (60)$$

Количество элементарных операций, необходимых для метода GLm в $\leq S$ раз меньше, чем нужно для метода ГЛ при достаточно больших j , не учитывая обновления и переходы (21).

Действительно, каждый блок B_i^{j+1} заменяет до S слагаемых в сумме (10). Учитывая постоянную верхнюю асимптотическую границу (-), нетрудно прийти к выводу:

$${}^{GLS}\sigma(j) = o({}^{GL}\sigma(j)) \text{ и } {}^{GLS}\sigma(j) = o({}^{GL}\sigma(j)) \text{ при } j \rightarrow \infty \quad (61)$$

Так как время решения прямо пропорционально количеству элементарных операций, время вычисления методом GLm быстрее, чем методом ГЛ, но медленнее, чем методом усеченного ГЛ.

4. Результаты и обсуждение

4.1 Тестовые задачи

Рассмотрим численное решение пары задач Коши с дробной производной вида:

$$D_t^{0.5} f(t) = g(t), f(0) = f_0 \quad (62)$$

$$1) g(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5}; f_0 = 0; \text{ с аналитическим решением } f(t) = t \quad (63)$$

$$2) g(t) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.5)} t^{2.5} - 3 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5}; f_0 = 0; \text{ с аналитическим решением } f(t) = t^3 - 3t \quad (64)$$

4.2 Результаты решения

Ниже приведены диаграммы, иллюстрирующие эффективность операторов (21) $L = 1000, S = 200$ и (11) для решения (63).

На рисунке 2 отображаются сравнение времени выполнения для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации. На рисунке 3 показаны сравнение ошибки на последней итерации для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации.

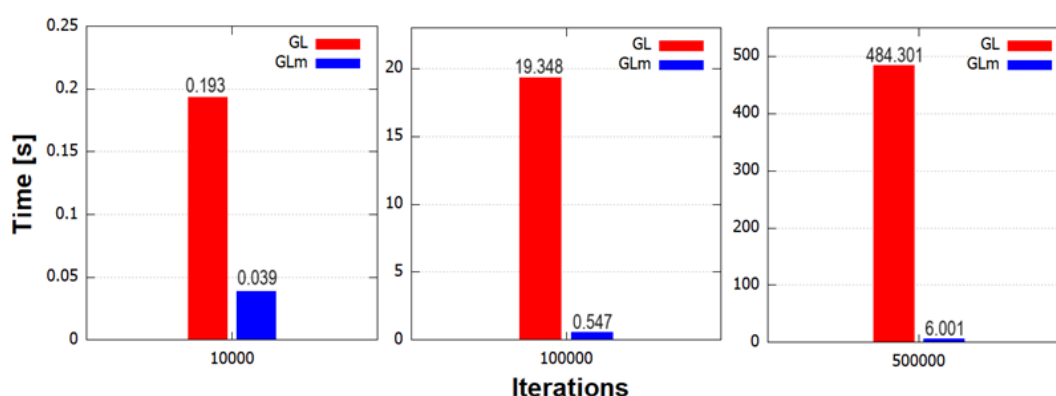


Рисунок 2 – Сравнение времени выполнения для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации

Ошибки на последней итерации (%):

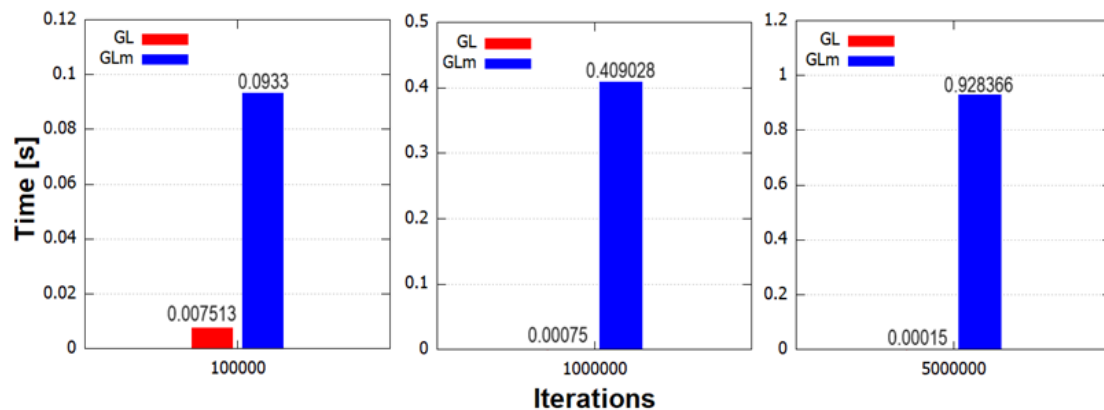


Рисунок 3 – Сравнение ошибки на последней итерации для дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) и модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) для различного количества итерации

Для демонстрации влияния параметров L и S на точность и скорость численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (64) ниже приведены таблицы с разными значениями L (строки) и значениями S (колонны). В ячейках таблицы расположены значения:

E^{GLm} – абсолютная относительная ошибка (%) оператора ${}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L$;

ν^{GLm} – время (секунд) решения оператора ${}^{GLm}_0\Delta_t^\alpha|_S^L$;

Под каждой таблицей приведены значения:

E^{GL} – абсолютная относительная ошибка (%) оператора ${}^{GL}_0\Delta_t^\alpha$;

ν^{GL} – время (секунд) решения оператора ${}^{GL}_0\Delta_t^\alpha$;

До 200.000 итераций:

Итераций = 200000	$L = 500$	$L = 1000$	$L = 1500$	$L = 2000$	$L = 2500$
$S = 200$	$E^{GLm} = 2.897\%$ $\nu^{GLm} = 1.043$	$E^? = 0.39\%$ $\nu^? = 1.429$	$E^{GLm} = 0.09\%$ $\nu^{GLm} = 1.811$	$E^{GLm} = 0.027\%$ $\nu^{GLm} = 2.195$	$E^{GLm} = 0.004\%$ $\nu^{GLm} = 2.57$
$S = 500$	$E^{GLm} = 16.174\%$ $\nu^{GLm} = 0.660$	$E^{GLm} = 3.57\%$ $\nu^{GLm} = 1.050$	$E^{GLm} = 1.27\%$ $\nu^{GLm} = 1.435$	$E^{GLm} = 0.59\%$ $\nu^{GLm} = 1.818$	$E^{GLm} = 0.31\%$ $\nu^{GLm} = 2.2$
$S = 1000$	$E^{GLm} = 32.97\%$ $\nu^{GLm} = 0.543$	$E^{GLm} = 11.65\%$ $\nu^{GLm} = 0.920$	$E^{GLm} = 4.68\%$ $\nu^{GLm} = 1.304$	$E^{GLm} = 2.42\%$ $\nu^{GLm} = 1.690$	$E^{GLm} = 1.32\%$ $\nu^{GLm} = 2.08$
$S = 1500$	$E^{GLm} = 43.67\%$ $\nu^{GLm} = 0.494$	$E^{GLm} = 18.93\%$ $\nu^{GLm} = 0.883$	$E^{GLm} = 9.05\%$ $\nu^{GLm} = 1.265$	$E^{GLm} = 5\%$ $\nu^{GLm} = 1.654$	$E^{GLm} = 2.8\%$ $\nu^{GLm} = 2.044$
$S = 2000$	$E^{GLm} = 47.27\%$ $\nu^{GLm} = 0.477$	$E^{GLm} = 24.52\%$ $\nu^{GLm} = 0.857$	$E^{GLm} = 13.66\%$ $\nu^{GLm} = 1.25$	$E^{GLm} = 7.92\%$ $\nu^{GLm} = 1.629$	$E^{GLm} = 4.57\%$ $\nu^{GLm} = 2.014$

$$E^{GL} = 0.001125\% \quad \nu^{GL} = 77.231$$

До 800.000 итераций:

Итераций =	$L = 500$	$L = 1000$	$L = 1500$	$L = 2000$	$L = 2500$
800000					
$S = 200$	$E^{GLm} = 5.90\%$ $\nu^{GLm} = 12.230$	$E^{GLm} = 0.804\%$ $\nu^{GLm} = 13.691$	$E^{GLm} = 0.175\%$ $\nu^{GLm} = 15.433$	$E^{GLm} = 0.033\%$ $\nu^{GLm} = 17.033$	$E^{GLm} = 0.0109\%$ $\nu^{GLm} = 18.532$
$S = 500$	$E^{GLm} = 29.169\%$ $\nu^{GLm} = 5.973$	$E^{GLm} = 7.502\%$ $\nu^{GLm} = 7.55$	$E^{GLm} = 2.812\%$ $\nu^{GLm} = 9.125$	$E^{GLm} = 1.337\%$ $\nu^{GLm} = 10.614$	$E^{GLm} = 0.735\%$ $\nu^{GLm} = 12.326$
$S = 1000$	$E^{GLm} = 51.741\%$ $\nu^{GLm} = 3.779$	$E^{GLm} = 22.534\%$ $\nu^{GLm} = 5.49$	$E^{GLm} = 10.22\%$ $\nu^{GLm} = 7.023$	$E^{GLm} = 5.449\%$ $\nu^{GLm} = 8.568$	$E^{GLm} = 3.148\%$ $\nu^{GLm} = 10.257$
$S = 1500$	$E^{GLm} = 62.027\%$ $\nu^{GLm} = 3.104$	$E^{GLm} = 34.645\%$ $\nu^{GLm} = 4.722$	$E^{GLm} = 18.703\%$ $\nu^{GLm} = 6.303$	$E^{GLm} = 10.905\%$ $\nu^{GLm} = 7.864$	$E^{GLm} = 6.617\%$ $\nu^{GLm} = 9.608$
$S = 2000$	$E^{GLm} = 65.631\%$ $\nu^{GLm} = 2.757$	$E^{GLm} = 42.514\%$ $\nu^{GLm} = 4.377$	$E^{GLm} = 26.79\%$ $\nu^{GLm} = 6.047$	$E^{GLm} = 16.68\%$ $\nu^{GLm} = 7.546$	$E^{GLm} = 10.527\%$ $\nu^{GLm} = 9.2$

$$E^{GL} = 0.000281\% \quad \nu^{GL} = 1261.319$$

Ниже прикреплены соответствующие графики решения (64):

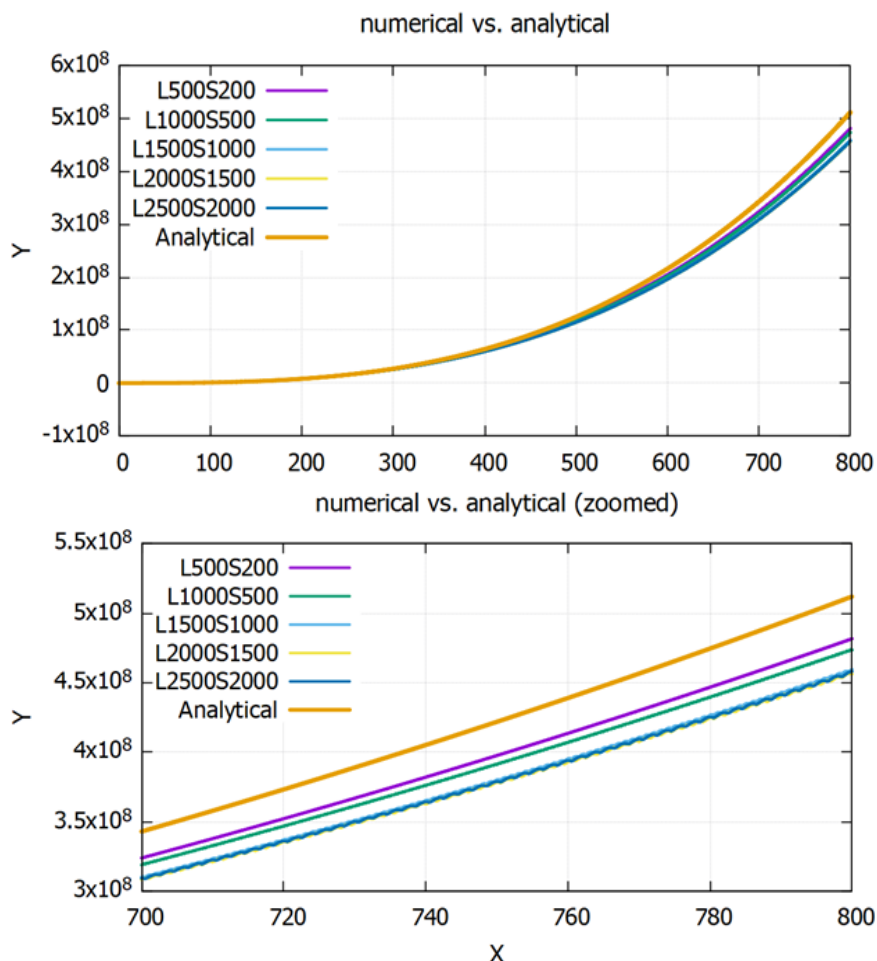


Рисунок 3 – Сравнение аналитического решения с численными решениями для модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) при различных параметрах L & S

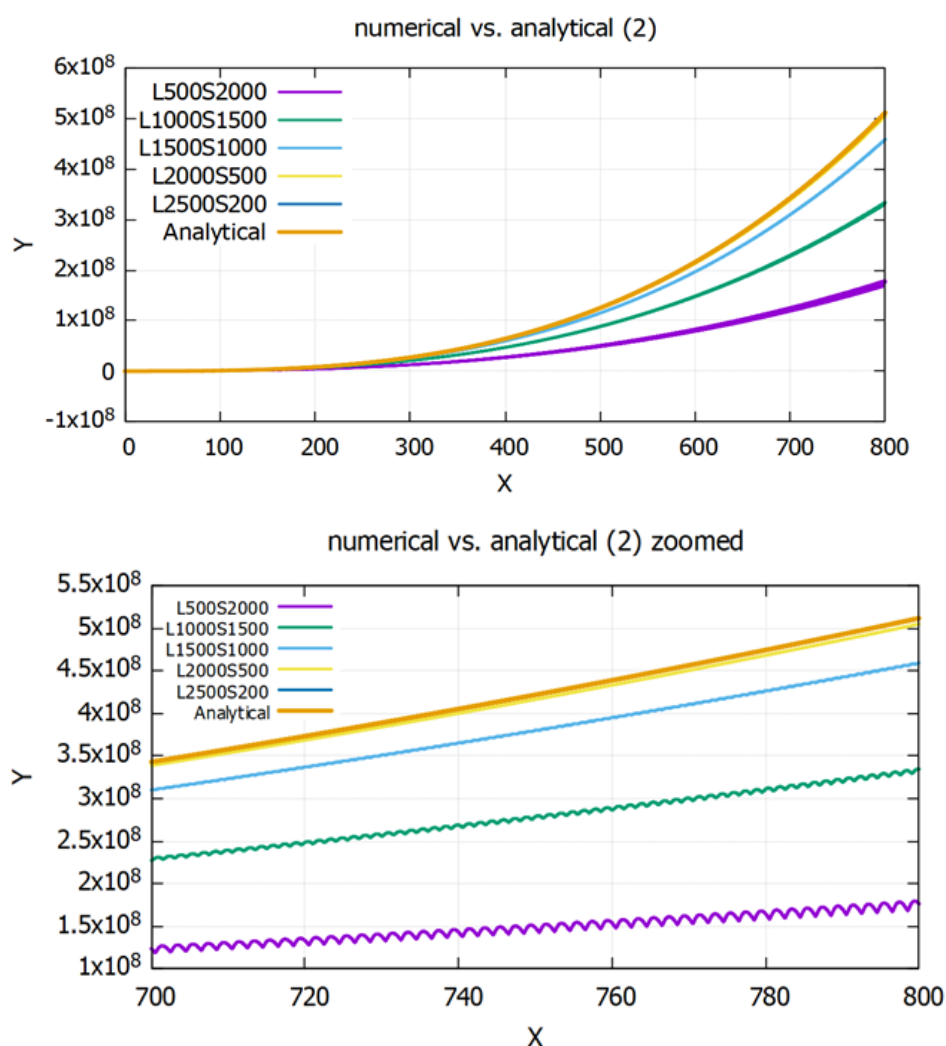


Рисунок 4 – Сравнение аналитического решения с численными решениями для модифицированного дискретного дробно-дифференциального оператора Грюнвальда-Летникова (ДДДОГЛ) при различных параметрах L и S

4.3 Анализ результатов

Наилучшие результаты относительно указанных метрик (скорость решения и абсолютная относительная ошибка) были продемонстрированы при параметрах $L = 2500, S = 200$ для 800.000 итераций. В сравнении с решением, предоставленным оригинальным определением ГЛ, ошибка возросла в ~ 39 раз и составила $\sim 0.011\%$, тогда как время решения было сокращено с ~ 1262 секунд до ~ 19 секунд. На момент 200.000-й итерации ошибка составляла 0.004% , а время решения составило ~ 2.6 секунды в сравнении с $\sim 0.000281\%$ и ~ 77.5 секунды. Таблицы и графики демонстрируют важность настройки параметров L и S в зависимости от количества необходимых итераций. Как видно из полученных результатов, чем выше S , тем сильнее видны колебания в приближенных графиках решения.

5. Заключение

В итоге была представлена модификация дискретного оператора дробной производной, определенной Грюнвальдом-Летниковым. В аналитическом виде выражена погрешность вычислений модифицированного дискретного оператора. Проведен сравнительный анализ между дискретизацией оригинального определения дробной производной Грюнвальда-Летникова

при численном решении обыкновенного дифференциального уравнения. По результатам численных экспериментов, было видно превосходство по занимаемому времени решения новой модификацией. Новый оператор позволяет существенно сократить количество операций, необходимых в алгоритме вычисления на основе мемоизации, приближая слагаемые, что делает схему неустойчивой. Однако возможно достигнуть приемлемой точности вычислений с помощью управления параметрами L и S . Данный дискретный оператор будет полезной аппроксимацией дробной производной в длительных итеративных вычислениях, например, при решении частных дифференциальных уравнений.

Из погрешности оператора, представленной в подсекции 3.5, было выяснено, что точность оператора, помимо параметров L и S и размера шага, зависит от степени производной, продолжительности вычислений, поведения функции $f(x)$ на интересующем отрезке. Открытой проблемой остается выяснение отношения между максимальной погрешностью и используемыми параметрами, для того чтобы этот алгоритм имел более прикладной характер.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Kronenburg, Maarten. The Binomial Coefficient for Negative Arguments. – 2011.
- 2 Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. – Elsevier, 1998
- 3 Brzeziński D.W., Ostalczyk P. The Grünwald-Letnikov formula and its equivalent Horner's form accuracy comparison and evaluation for application to fractional order PID controllers // 2012 17th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR). – IEEE, 2012. – P. 579–584.
- 4 Ortigueira M.D., Tenreiro Machado J.A. What is a fractional derivative? – Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 293. – P. 4–13. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
- 5 Tarasov V.E. No nonlocality. No fractional derivative // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 62. – P. 157–163. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.02.019>.
- 6 J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. A New Truncated M-Fractional Derivative Type Unifying Some Fractional Derivative Types with Classical Properties // Int. J. Anal. Appl. – 2018. – Vol. 16. – No. 1. – P. 83–96.
- 7 Najariyan M., Mazandarani M., Balas V.E. Fuzzy Fractional Derivative: A New Definition. In: Balas, V., Jain, L., Balas, M. (eds) Soft Computing Applications. SOFA 2016. Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2018. – Vol. 634. – Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62524-9_25.
- 8 Zhao D., Luo M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. – 2017. – Calcolo. – Vol. 54. – P. 903–917. <https://doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8>.
- 9 Zheng Z., Zhao W., & Dai H. A new definition of fractional derivative // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.10.001>
- 10 Hattaf K. A New Generalized Definition of Fractional Derivative with Non-Singular Kernel // Computation. – 2020. – Vol. 8. – No. 2. – P. 49. <https://doi.org/10.3390/computation8020049>
- 11 Magin R.L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues // Computers & Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59. – No. 5. – P. 1586–1593. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>.
- 12 Pfitzenreiter T. A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations // ZAMM. – 2004. – Vol. 84. – No. 4. – P. 284–287. <https://doi.org/10.1002/zamm.200310112>.
- 13 Ercan A., & Kavvas M.L. Time-space fractional governing equations of one-dimensional unsteady open channel flow process: Numerical solution and exploration // Hydrological Processes. – 2017. – Vol. 31. – No. 16. – P. 2961–2971. <https://doi.org/10.1002/hyp.11240>.
- 14 AbdAlRahman A., Abdelaty A., Soltan A. and A.G. Radwan. An Improved Approximation of Grünwald-Letnikov Fractional Integral : 2021 10th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCASST), Thessaloniki, Greece, 2021. – P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/MOCASST52088.2021.9493399>.

- 15 Bai Y., Huo L., Zhang Y., & Jiang Y. Flow, heat and mass transfer of three-dimensional fractional Maxwell fluid over a bidirectional stretching plate with fractional Fourier's law and fractional Fick's law // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2019. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.04.027>.
- 16 Tarasov V. E. On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus // *Mathematics*. – 2019. – Vol. 7. – No. 6. – P. 509. <https://doi.org/10.3390/math7060509>.
- 17 Néel M.C., Abdennadher A., & Joelson M. Fractional Fick's law: the direct way // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2007. – Vol. 40. – No. 29. – P. 8299–8314. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/29/007>.
- 18 Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2007. – Vol. 206. – No. 1. – P. 174–188. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.06.008>.
- 19 Ma R., Han J., & Yan X. Improved short memory principle method for solving fractional damped vibration equations // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10. – No. 21. – P. 7566.
- 20 Duhé J.F., Victor S., Melchior P., Abdelmounen Y., & Roubertie F. Fractional derivative truncation approximation for real-time applications // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2023. – Vol. 119. – P. 107096.
- 21 Güner Ö., & Bekir A. Exact solutions of some fractional differential equations arising in mathematical biology // *International Journal of Biomathematics*. – 2015. – Vol. 08. – No. 01. – P. 1550003. <https://doi.org/10.1142/s1793524515500035>.

REFERENCES

- 1 Kronenburg, Maarten. The Binomial Coefficient for Negative Arguments (2011).
- 2 Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier (1998).
- 3 Brzeźniński D.W., Ostalczyk P. The Grünwald-Letnikov formula and its equivalent Horner's form accuracy comparison and evaluation for application to fractional order PID controllers (2012 17th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR). IEEE, 2012), pp. 579–584.
- 4 Ortigueira M.D., & Tenreiro Machado J.A. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, 293, 4–13 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
- 5 Tarasov V.E. No nonlocality. No fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 62, 157–163 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.02.019>.
- 6 J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, A New Truncated M-Fractional Derivative Type Unifying Some Fractional Derivative Types with Classical Properties, *Int. J. Anal. Appl.*, 16 (1), 83–96 (2018).
- 7 Najariyan M., Mazandarani M., Balas V.E. Fuzzy Fractional Derivative: A New Definition. In: Balas, V., Jain, L., Balas, M. (eds) *Soft Computing Applications*. SOFA 2016. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 634. Springer, Cham. (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62524-9_25
- 8 Zhao D., Luo M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, 54, 903–917 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8>.
- 9 Zheng Z., Zhao W., & Dai H. A new definition of fractional derivative. *International Journal of Non-Linear Mechanics* (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.10.001>.
- 10 Hattaf K. A New Generalized Definition of Fractional Derivative with Non-Singular Kernel. *Computation*, 8(2), 49 (2020). <https://doi.org/10.3390/computation8020049>.
- 11 Magin R.L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), 1586–1593 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>.
- 12 Pfitzenreiter T. A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations. *ZAMM*, 84(4), 284–287 (2004). <https://doi.org/10.1002/zamm.200310112>.
- 13 Ercan A., & Kavvas M.L. Time-space fractional governing equations of one-dimensional unsteady open channel flow process: Numerical solution and exploration. *Hydrological Processes*, 31(16), 2961–2971 (2017). <https://doi.org/10.1002/hyp.11240>.
- 14 AbdAlRahman A., Abdelaty A., Soltan A. and A.G. Radwan. An Improved Approximation of Grünwald-Letnikov Fractional Integral (2021 10th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCAST), Thessaloniki, Greece, 2021), pp. 1–4, <https://doi.org/10.1109/MOCAST52088.2021.9493399>.

15 Bai Y., Huo L., Zhang Y., & Jiang Y. Flow, heat and mass transfer of three-dimensional fractional Maxwell fluid over a bidirectional stretching plate with fractional Fourier's law and fractional Fick's law. *Computers & Mathematics with Applications* (2019). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.04.027>

16 Tarasov V.E. On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. *Mathematics*, 7(6), 509 (2019). <https://doi.org/10.3390/math7060509>.

17 Néel M.C., Abdennadher A., & Joelson M. Fractional Fick's law: the direct way. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(29), 8299–8314 (2007). <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/29/007>.

18 Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1), 174–188 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.06.008>.

19 Ma R., Han J., & Yan X. Improved short memory principle method for solving fractional damped vibration equations. *Applied Sciences*, 10(21), 7566 (2020).

20 Duhé J.F., Victor S., Melchior P., Abdelmounen Y., & Roubertie F. Fractional derivative truncation approximation for real-time applications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 119, 107096 (2023).

21 Güner Ö., & Bekir A. Exact solutions of some fractional differential equations arising in mathematical biology. *International Journal of Biomathematics*, 08(01), 1550003 (2015). <https://doi.org/10.1142/s1793524515500035>.

^{1*}Исахов А.,

профессор, ORCID ID: 0000-0002-1937-8615,

*e-mail: alibek.issakhov@gmail.com

¹Абылкасымова А.Б.,

қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-5967-6959,

e-mail: abylkassymova.aizhan@gmail.com

¹Юн С.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0002-6295-1592,

e-mail: s_yun@kbtu.kz

¹Жайлыбаев Р.,

бакалавр, ORCID ID: 0009-0007-6323-0689,

e-mail: r_zhailybaev@kbtu.kz

¹Қазақстан-Британ техникалық университет, Алматы қ., Қазақстан

ЖАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕЛЕР ҮШІН МЕМОИЗАЦИЯ ПРИНЦИПІ НЕГІЗІНДЕГІ ГРЮЕНВАЛЬД-ЛЕТНИКОВ ТУЫНДЫСЫН САНДЫҚ ОРЫНДАУ АЛГОРИТМІ

Аңдатпа

Бөлшек туындылардың локальды еместігіне байланысты тарихи деректер болашақтағы есептеулер үшін маңызды рөл атқаратын күрделі процестерді сипаттай алады. Алайда бұл қасиет сандық модельдеуде белгілі бір қиындықтар туындатады. Бұл зерттеуде Грюенвальд–Летников анықтамасына, «қысқа жады принципіне», есте сақтау механизмдеріне және аналитикалық болжамдарға негізделген бөлшек туындыны жуықтауға арналған жаңа дискретті оператор ұсынылады. Ұсынылған оператор есептелген деректерді сақтауға және оларды реттелетін дәлдікпен кейінгі кезеңдерде пайдалануға мүмкіндік беретін түрлендіруді жүзеге асырады. Бұл тәсіл шекаралық есептерді шешу барысында есептеу операцияларының санын едәуір қысқартады және есептеу тиімділігін арттырады.

Тірек сөздер: бөлшек туынды, бейлокалды, Грюенвальд–Летников бөлшек туындысы, оңтайландыру, есте сақтау, сандық шешім, бөлшек туындының дискретизациясы.

^{1*}**Issakhov A.A.,**

Professor, ORCID ID: 0000-0002-1937-8615,

*e-mail: alibek.issakhov@gmail.com

¹**Abylkassymova A.B.,**

Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5967-6959,

e-mail: abylkassymova.aizhan@gmail.com

¹**Yun S.,**

Bachelor student, ORCID ID: 0009-0002-6295-1592,

e-mail: s_yun@kbtu.kz

¹**Zhailybaev R.,**

Bachelor student, ORCID ID: 0009-0007-6323-0689,

e-mail: r_zhailybaev@kbtu.kz

¹Kazakh-British Technical University, 050000, Almaty, Kazakhstan

**OPTIMIZATION ALGORITHM FOR NUMERICAL IMPLEMENTATION
OF THE FRACTIONAL GRUNWALD-LETNIKOV DERIVATIVE BASED
ON THE MEMORIZATION PRINCIPLE
FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Abstract

Fractional derivatives, due to their nonlocality, can describe complex processes where historical data are important for future calculations. At the same time, this property brings difficulties in numerical simulations. This paper presents a new discrete operator for approximating the fractional derivative based on the Grunwald-Letnikov definition, the "principle of short memory", memorization and analytical assumptions. This operator significantly reduces the number of operations in the process of calculations, when solving boundary value problems, due to the storage of calculated data and transformation for further use with adjustable accuracy.

Keywords: fractional derivative, nonlocality, Grunwald-Letnikov fractional derivative, optimization, memorization, numerical solution, fractional derivative discretization.

Дата поступления статьи в редакцию: 04.02.2025