

ӘОЖ 517.518.28
FTAXP 27.39.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-220-241>

^{1*}**Жаңабергенова Н.С.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0402-6999,
*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com
²**Темирханова А.Т.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-5610-3314,
e-mail: ainura-t@yandex.kz

^{1,2}Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ, Қазақстан

МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ КЕЙБІР КЛАСЫ ҮШІН ҮШ САЛМАҚТЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аңдатпа

Үзіліссіз және дискреттік жағдайларында берілетін атақты Харди теңсіздіктердің бастапқы түрі кейінірек айтарлықтай жалпыланды. Осыған орай математикада Харди теңсіздігі өз алдына жеке үлкен бағытқа айналды. Қазіргі таңда Харди тәріздес операторларды қамтитын үзіліссіз және дискреттік теңсіздіктерінің орындалу критерийлерін алу–салмақты теңсіздіктер теориясында басты мәселелерінің бірі. Дискреттік теңсіздіктерді матрицалық операторлар класы үшін қарастыру зерттеудің жаңа толқыны десек болады. Жалпы жағдайда матрицамен берілген дискреттік оператордың салмақты Лебег кеңістігінде шенелімділік критерийі анықталмағандықтан матрицаға әртүрлі шарттар қойылып, матрицасыз жағдайға қарағанда кеңірек нәтижелер алынады. Бұл жұмыста дискреттік квазисызықты операторларды белгілі бір шартты қанағаттандыратын матрицалар үшін қарастырамыз. Квазисызықты теңсіздіктер үшін алынған нәтижелерді бисызықты Харди теңсіздіктерін сипаттау кезінде қолдануға болады.

Тірек сөздер: Харди теңсіздігі, салмақты Лебег кеңістігі, матрицалық оператор, квазисызықты оператор.

Кіріспе

1906–1928 ж. аралығында атақты математик Хардидің үзіліссіз және дискреттік теңсіздіктерінің пайда болуы мен даму кезеңдері, сондай-ақ олардың математикалық талдау саласындағы зерттеулер тарихы [1] ғылыми еңбекте толық қамтылған. Бұл кезеңдерде Харди теңсіздіктерінің теориялық негіздері қалыптасып, олардың қолданылу аясы кеңейіп, математикалық анализ, дифференциалдық теңдеулер теориясында және математиканың әртүрлі салаларында қолданысқа ие болды. Кейінгі жылдары Харди теңсіздіктері екі салмақты теңсіздіктерге жалпыланып, толықтай зерттелді [2].

XXI ғасырдың басында екі салмақты теңсіздіктерді зерттеумен қатар үш салмақты теңсіздіктерге сипаттама бере бастады. Ең алғаш 2008 ж. келесі түрдегі интегралдық итерацияланған Харди тәріздес теңсіздігін Р. Ойнаров және А. Калыбай [3] жұмыста қарастырған еді:

$$\left(\int_a^b u^q(x) \left(\int_a^x \left| w(t) \int_t^x f(s) ds \right|^r dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |f(x)v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L_{p,v}, \quad (1)$$

мұндағы C – (1) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы, $-\infty \leq a, b \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < q, r < \infty$, $u(\cdot), w(\cdot), v(\cdot)$ – (a, b) аралығында өлшенетін және локальды интегралданатын теріс емес функциялар, $L_{p,v}$ (1) теңсіздіктің оң жағы ақырлы болатындай функциялардан тұратын

салмақты Лебег кеңістігі. 2013 жылы В.И. Буренков және Р. Ойнаров көп өлшемді Харди тәріздес оператордың салмақты Лебег кеңістігінен локальді Морри типті кеңістігіне шенелімділігін сипаттайтын теңсіздік (1) теңсіздікке эквивалентті болатынын көрсетті [4]. Осы жұмыстан кейін (1) түріндегі квазисызықты Харди тәріздес теңсіздіктер қарқынды түрде зерттеле бастады (мысалы [5–9]) және ол Морри типті кеңістікте қолданысқа ие болды [10]. Зерттеудің келесі толқыны өзекті қамтитын квазисызықты операторлардың салмақты бағалау болды. [11–13] жұмыстарда өзекті қамтыған квазисызықты Харди операторларының кейбір кластары қарастырылған.

Ендігі кезекте осы жұмыстың негізгі мәселесіне тоқталайық: Айталық $0 < q, p, r < \infty$ және $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ болсын. $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ және $w = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ теріс емес, ал $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ оң нақты сандар тізбегі болсын. $l_{p,v}$ арқылы $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ нақты сандар тізбегінен тұратын және

$$\|f\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

квазинормалар ақырлы болатын кеңістікті белгілейміз.

Бұл жұмыста $\forall f \in l_{p,v}$ үшін келесі түрдегі дискреттік Харди тәріздес теңсіздікті қарастырамыз:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q (K^{\pm} f)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

мұндағы $C - f$ тәуелсіз оң тұрақты және $K^{\pm}$ келесі түрде анықталған квазисызықты операторлар

$$(K^{+}f)_n = \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$(K^{-}f)_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Жұмыстың мақсаты $(a_{k,i})$ матрица элементтері келесі түрдегі шарттарды қанағаттандыратын жағдайда (3) және (4) квазисызықты дискреттік операторларды салмақты бағалау:

Шарт 1 [14]. Барлық $k \geq j \geq i \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d} (a_{k,j} + b_{j,i} \omega_k) \leq a_{k,i} \leq d (a_{k,j} + b_{j,i} \omega_k) \quad (5)$$

шарт орындалатындай $d \geq 1$ тұрақтысы, $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі және элементтері j бойынша кемімейтін және i бойынша өспейтін $(b_{j,i})$ теріс емес матрицасы бар болсын.

Шарт 2 [14]. Барлық $k \geq j \geq i \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d} (b_{k,j} \omega_i + a_{j,i}) \leq a_{k,i} \leq d (b_{k,j} \omega_i + a_{j,i}) \quad (6)$$

шарт орындалатындай $d \geq 1$ тұрақтысы, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ оң сандар тізбегі және элементтері k бойынша кемімейтін және j бойынша өспейтін $(b_{k,j})$ теріс емес матрицасы бар болсын.

Осы мақаланың авторлары матрица қатысқан (3) және (4) операторлары үшін (2) теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары параметрдің $p \leq q$ жағдайында [15], [16] жұмыстарда алған, мұнда $(a_{k,i})$, $k \geq i \geq 1$, матрицасының барлық $a_{k,i} \geq 0$ элементтері дискреттік Ойнаров шартын қанағаттандырады, яғни $k \geq j \geq i \geq 1$ үшін

$$\frac{1}{d}(a_{k,j} + a_{j,i}) \leq a_{k,i} \leq d(a_{k,j} + a_{j,i}) \quad (7)$$

шарт орындалатындай $d \geq 1$ табылады.

Бұл шартта $(a_{k,i})$ матрицасының $a_{k,i}$ элементтері k бойынша кемімейтін және i бойынша өспейтінін көруге болады. Егер $b_{j,i} = a_{j,i}$, $j \geq i \geq 1$, және $\omega_k \equiv 1$, $k \geq 1$, болған кезде, (5) теңсіздігінен (7) шығады. Дәл солай (6) теңсіздігінен (7) шығады, яғни (7) шарты (5) және (6) шарттарының дербес жағдайы

Сонымен қатар осындай интегралдық Ойнаров шартын қанағаттандыратын ядросы бар $K^\pm$ операторларының интегралдық жағдайлары [12] жұмыста зерттелген. Сонымен қатар, авторлар (7) шартпен берілген матрицасы бар $(K_1 f)_n = \left(\sum_{k=1}^n |w_k \sum_{i=k}^\infty a_{k,i} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}$ және $(K_2 f)_n = \left(\sum_{k=n}^\infty |w_k \sum_{i=1}^k a_{i,k} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}$ түріндегі квазисызықты операторлар класын да қарастырыған [17].

Математика ғылымында Харди тәріздес операторлар алдымен өзексіз жағдайда зерттеліп, кейін белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын өзекпен қарастырылады, яғни өзексіз жағдайға қарағанда кеңірек нәтижелер алынады. Дәл сол сияқты, $a_{k,i} \equiv 1$, $k \geq i \geq 1$ болған жағдайда (3) және (4) операторлары қатысқан салмақты теңсіздіктердің орындалу критерийлері бұрынырақ алынған (мысалы [18–22]).

Материалдар мен әдістер

Негізгі нәтижелерді алу үшін бұрыннан белгілі екі салмақты Харди тәріздес теңсіздіктеріне байланысты тұжырымдар мен нәтижелер, Минковский теңсіздігі, басқа да классикалық теңсіздіктер және матрицаның қасиеттері қолданылады. Теореманың жеткілікті шартын дәлелдеу барысында тізбектерді бөліктерге бөлу әдісі “локализация әдісі” қолданылады, ал қажеттілік шарты тексеріс тізбегін таңдау арқылы дәлелденеді. Классикалық Харди теңсіздігіне қатысты нәтижелер:

Теорема А [23]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ болсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=1}^k f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (8)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер

$$H = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Сонымен қатар $C \approx H$, мұнда C – (8) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема А* [23]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ болсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=k}^{\infty} f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (9)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер

$$H' = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Сонымен қатар $C \approx H'$, мұнда C – (9) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема C^* [24]. Айталық $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$. (9) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $M' < \infty$, мұнда

$$M' = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Сонымен қатар $C \approx M'$, мұнда C – (9) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема B [25]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ және $(a_{k,i})$ матрицасының элементтері дискреттік Ойнаров шартын (7) қанағаттандырсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (10)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $D = \max\{D_1, D_2\} < \infty$, мұнда

$$D_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k,j}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, D_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^j a_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар $C \approx D$, мұнда C – (10) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема B^* [25]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері дискреттік Ойнаров шартын (7) қанағаттандырсын.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left| \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,v}, \quad (11)$$

теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $D' = \max\{D'_1, D'_2\} < \infty$, мұнда

$$D'_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j a_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, D'_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар $C \approx D'$, мұнда C – (11) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема D [26]. Айталық $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$ және $(a_{k,i})$ матрицасының элементтері i бойынша өспейтін болсын. (10) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $N < \infty$, мұнда

$$N = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k,j}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Сонымен қатар $C \approx N$, мұнда C – (10) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема D^* [26]. Айталық $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері i бойынша кемімейтін болсын. (11) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $N' < \infty$, мұнда

$$N' = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{k=1}^j a_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Сонымен қатар $C \approx N'$, мұнда C – (11) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Теорема G [27]. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері (5) қанағаттандырсын. (11) теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $G = \max\{G_1, G_2\} < \infty$,

мұнда

$$G_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j b_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, G_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^j u_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сонымен қатар $C \approx G$, мұнда C – (11) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Біз бағалаулар кезінде келесі қарапайым теңсіздіктерді қолданамыз:

Егер $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$, онда

$$\sum_{i=1}^k a_i^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^\alpha, \alpha \geq 1. \quad (12)$$

Айталық $a_i > 0, b_i > 0, 1 \leq n < N \leq \infty$ болсын. Онда $0 < \alpha < 1$ үшін

$$\left(\sum_{i=n}^N (a_i + b_i)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\sum_{i=n}^N a_i^\alpha + \sum_{i=n}^N b_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 2^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\left(\sum_{i=n}^N a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\sum_{i=n}^N b_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right). \quad (13)$$

Сондай-ақ бізге келесі шамалар қажет:

$$J_{r,p}^+(\alpha, \beta) = \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta} |w_k \sum_{i=\alpha}^k a_{k,i} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad J_{r,p}^-(\alpha, \beta) = \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta} |w_k \sum_{i=k}^{\beta} a_{i,k} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Келісім: $E \ll F$ дегеніміз p, q және r параметрлеріне тәуелді кейбір C тұрақтысымен $E \leq CF$ білдіреді. Сонымен қатар, $E \approx F$ белгілеуі $E \ll F \ll E$ екіжақты бағалауы.

Нәтижелер мен талқылау

Келесі шамаларды енгізейік

$$\begin{aligned} A_1 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^+(1, j), \\ A_2 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}, \\ A_3 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \\ A_4 &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Айталық $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$ және $(a_{k,i})$ матрицасының элементтері (5) шартты қанағаттандырсын. Онда (3) операторы үшін (2) салмақты теңсіздігі

a) $0 < p \leq 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $\mathcal{A} = \max\{A_1, A_2\} < \infty$.

b) $p > 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $A = \max\{A_1, A_3, A_4\} < \infty$.

Сонымен қатар (a) жағдайда $C \approx \mathcal{A}$ және (b) жағдайда $C \approx A$, мұнда C – (2) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық (2) теңсіздігі ең кіші $C > 0$ тұрақтысымен орындалсын. Алдымен теореманың (a) жағдайын дәлелдейік, яғни $\mathcal{A} < \infty$ болатынын көрсетейік. (2) теңсіздіктің дұрыстығынан

$$\begin{aligned} C \left(\sum_{i=1}^j |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^j \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

шығады және

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^j |w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=1}^j |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^+(1, j) = A_1 \quad (14)$$

болады. Егер теңсіздік $\forall f \in l_{p,v}$ үшін орындалатын болса, онда қандай да бір $\tilde{f} \in l_{p,v}$ үшін де орындалуы керек. Сондықтан, $\tilde{f} \in l_{p,v}$ тексеру тізбегін таңдап алып, (2) теңсіздігінің оң және сол жағына қоямыз. $j \geq 1$ саны үшін $\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ тексеру тізбегі $s = j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = v_s^{-1}$ ал $s \neq j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = 0$ болсын, онда

$$\|\tilde{f}_j\|_{p,v} = 1. \quad (15)$$

$\tilde{f}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің $I = I(f)$ сол жағына қойып, матрицаның $j \geq i$ үшін $a_{k,i} \geq a_{k,j}$ шарты арқылы

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} \tilde{f}_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} \tilde{f}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n |a_{k,j}^r w_k^r| \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=1}^j \tilde{f}_{j,i} \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \quad (16) \end{aligned}$$

аламыз. (15), (16) және (2)-ден

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}, \forall j \geq 1,$$

шығады. Соңғы бағалауда $j \geq 1$ кез-келген сан болғандықтан екі жағынан j бойынша супремум аламыз және $C - j$ -ден тәуелсіз болғандықтан

$$A_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \leq C < \infty.$$

Осыны және (14) ескерсек келесі бағалауын аламыз:

$$\mathcal{A} \leq C < \infty. \quad (17)$$

(b) жағдай. Бұл жолы кез-келген $j \geq 1$ үшін $\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ тексеру тізбегін $1 \leq i \leq j$ үшін $\tilde{f}_{j,i} = v_i^{-p'}$, ал $i > j$ үшін $\tilde{f}_{j,i} = 0$ болатындай етіп таңдайық. Ендеше

$$\|\tilde{f}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{f}_{j,i} \cdot v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^j |v_i^{-p'} \cdot v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (18)$$

$\tilde{f}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің $I = I(f)$ сол жағына қойып, матрицаның $a_{k,i} \geq a_{k,j}$, $j \geq i$, шартын ескеріп біз келесі шаманы аламыз:

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} \tilde{f}_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} v_i^{-p'} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

(18), (19) және (2) теңсіздіктерден

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \forall j \geq 1.$$

шығады. $j \geq 1$ кез-келген сан болғандықтан, келесі бағалауды аламыз:

$$A_3 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C < \infty. \quad (20)$$

Дәл солай, $j \geq 1$ үшін тағы да бір $\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ тексеру тізбегін $1 \leq s \leq j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = b_{j,s}^{p'-1} v_s^{-p'}$ және $s > j$ үшін $\tilde{f}_{j,s} = 0$ аламыз. Осыны (2) теңсіздіктің оң жағына қойсақ, онда

$$\|\tilde{f}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{s=1}^{\infty} |\tilde{f}_{j,s} \cdot v_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=1}^j |b_{j,s}^{p'-1} v_s^{-p'} \cdot v_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=1}^j b_{j,s}^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (21)$$

Енді $\tilde{f}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойып, кейін $a_{k,i} \geq b_{j,i} \omega_k$, $k \geq j$, шартын ескерсек, онда

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}) &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} \tilde{f}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \left| w_k \sum_{i=1}^j a_{k,i} b_{j,i}^{p'-1} v_i^{-p'} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

(21), (22) және (2)-ден келесі шығатыны анық:

$$C \geq \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall j \geq 1.$$

Жоғарыдағыдай соңғы теңсіздіктің екі жағынан $j \geq 1$ бойынша супремум аламыз

$$A_4 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C < \infty.$$

Соңғы және (14), (20) бағалаулар келесіні береді:

$$A \leq C < \infty. \quad (23)$$

Жеткіліктілігі. (а) жағдай. $A < \infty$ болсын, енді (2) теңсіздік орындалатынын дәлелдейміз. Ол үшін жалпылықты жоғалтпай $0 \leq f \in l_{p,v}$ деп аламыз. $\inf \emptyset = \infty$ деп алып келесі шаманы анықтайық

$$s_{\infty} = \inf \left\{ s \in \mathbb{Z}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r < 2^{r(s+1)} \right\}.$$

$s \leq s_{\infty}$ болатындай s үшін

$$n_s = \inf \left\{ n \geq 1: \sum_{k=1}^n \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \geq 2^{rs} \right\}.$$

Онда

$$\sum_{k=1}^{n_s-1} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r < 2^{rs} \leq \sum_{k=1}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r.$$

және $n_s \leq j \leq n_{s+1} - 1$ үшін

$$2^s \leq \left(\sum_{k=1}^j \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} < 2^{s+1}. \quad (24)$$

Осыдан $\mathbb{N}$ натурал сандар жиыны

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s \geq 1} [n_s, n_{s+1} - 1]$$

түрінде өрнектеледі. (2) теңсіздігінің $I(f)$ оң жағы үшін (24) бағалауын қолданып келесі қатынасты аламыз:

$$I(f) = \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\sum_s 2^{q(s-1)} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (25)$$

Әрі қарай дәлелдеу кезінде қажет болатын келесі өрнектерді қарастырамыз:

r параметрінің екі жағдайын жеке-жеке алатын болсақ, (10) және Минковский теңсіздігін қолданып $1 \leq r < \infty$ үшін келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} 2^{s-1} = 2^s - 2^{s-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} - \left(\sum_{k=1}^{n_{s-1}-1} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\ll \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=n_{s-1}}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^{n_{s-1}} a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (26)$$

$0 < r < 1$ болған жағдайда

$$\begin{aligned} 2^{r(s-1)} &= \frac{1}{2^r - 1} (2^{rs} - 2^{r(s-1)}) \leq \frac{1}{2^r - 1} \left(\sum_{k=1}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r - \sum_{k=1}^{n_{s-1}-1} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right) \\ &\leq \frac{1}{2^r - 1} \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right) \\ &\ll \sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=n_{s-1}}^k a_{k,i} f_i \right)^r + \sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^{n_{s-1}} a_{k,i} f_i \right)^r. \end{aligned} \quad (27)$$

Алған (26) және (27) теңсіздіктері арқылы (25) қатынасты бағалау үшін $q \geq 1$ және $0 < q < 1$ жағдайларын жеке қарастырамыз. $q \geq 1$ болғанда Минковский, ал $0 < q < 1$ болған жағдайда (13) теңсіздігі көмегімен екі жағдайда да

$$\begin{aligned} I(f) &\ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=n_{s-1}}^k a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \left(w_k \sum_{i=1}^{n_{s-1}} a_{k,i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (28)$$

аламыз. Алдымен I_1 бағалайық.

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \left(\sum_s \left(J_{r,p}^+(n_{s-1}, n_s) \right)^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{i=n_{s-1}}^{n_s} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\sum_s \left(J_{r,p}^+(1, n_s) \right)^q \times \right. \\ &\times \sum_{n=n_s}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{i=n_{s-1}}^{n_s} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left. \right)^{\frac{1}{q}} \ll \sup_{j \geq 1} J_{r,p}^+(1, j) \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_s \left(\sum_{i=n_{s-1}}^{n_s} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$\frac{q}{p} \geq 1$ болғандықтан, (12) теңсіздігі бойынша

$$I_1 \ll A_1 \|f\|_{p,v} \quad (29)$$

болады. Енді I_2 бағалайық. Шарт 1 бойынша

$$I_2 \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} w_k^r a_{k,n_{s-1}}^r \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} f_i \right)^r + \sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} b_{n_{s-1},i} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,n_{s-1}}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n_{s-1}} b_{n_{s-1},i} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_{21} + I_{22}. \quad (30)$$

I_{21} -ді келесі түрде жазайық

$$I_{21} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n f_i \right)^q \mu_1(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (31)$$

мұндағы

$$\mu_1(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,n_{s-1}}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s-1})$$

және $\delta(\cdot)$ – Дирактың дельта-функциясы. (31) қатынасақ Теорема С қолдансақ, онда

$$I_{21} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \mu_1(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}. \quad (32)$$

(32)-дың оң жағына төмендегі өрнекті қолданып

$$\sum_{n=j}^{\infty} \mu_1(n) \leq \sum_{n_{s-1} \geq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,n_{s-1}}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}$$

келесіні аламыз:

$$I_{21} \ll A_2 \|f\|_{p,v}. \quad (33)$$

Жоғарыдағыдай I_{22} – ні келесі түрде жазамыз:

$$I_{22} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n b_{n,i} f_i \right)^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (34)$$

мұндағы

$$\mu_2(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s-1}).$$

(35) теңдіктегі $b_{n,i}$ матрицасының элементтері i бойынша өспейтін болғандықтан, Теорема D бойынша

$$I_{22} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}.$$

$k \geq n_{s-1}$ үшін $b_{n_{s-1},j} \omega_k \leq a_{k,j}$ шартын ескеріп

$$\begin{aligned} \sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) &\leq \sum_{n_{s-1} \geq j} b_{n_{s-1},j}^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\ll \sum_{n_{s-1} \geq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n a_{k,j}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \end{aligned} \quad (35)$$

аламыз. Осыдан

$$I_{22} \ll A_2 \|f\|_{p,v}. \quad (36)$$

Қорытындылай келе (28), (29), (30), (33) және (36) бағалаулары $C \ll \mathcal{A}$ береді. Осыдан және (17) теңсіздіктен $C \approx \mathcal{A}$ шығады.

(b) жағдай. Бұл кезде теореманың жеткілікті бөлігі (a) жағдайдағы сияқты дәлелденеді. Яғни $I \ll I_1 + I_2$ бағалауын аламыз, мұндағы I_1 және I_2 (28) өрнектегі шамалар. $\frac{q}{p} \geq 1$ болғандықтан (29)-дағы сияқты $I_1 \ll A_1 \|f\|_{p,v}$ аламыз. Кейін (5) шартын пайдаланып $I_2 \ll I_{21} + I_{22}$ аламыз, мұнда I_{21} және I_{22} (30) бағалауындағы шамалар. Әрі қарай (31) қатынасына Теорема А қолданып дәл солай $I_{21} \ll A_3 \|f\|_{p,v}$ алуға болады, ал (32) қатынасына Теорема В қолданып

$$I_{22} \leq \max \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \|f\|_{p,v}$$

аламыз. (35) шартынан

$$\sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} b_{n,j}^q \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \ll A_3$$

аламыз. Сонымен қатар,

$$\sum_{n=j}^{\infty} \mu_2(n) = \sum_{n_{s-1} \geq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s-1}}^{n_s} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^n \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}$$

шартынан келесіні аламыз

$$\sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \mu_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^j b_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \ll A_4.$$

Осылардан $I_{22} \ll \max\{A_3, A_4\} \|f\|_{p,v}$ бағалауларын аламыз. Осы және (29) шарты бізге $C \ll A$ береді. Осылайша, осы бағалау және (23) шартынан $C \approx A$ эквивалентті болатынын аламыз. Теорема 1 тұжырымының дәлелдеуі аяқталды.

Айталық

$$B_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(j, \infty),$$

$$B_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1},$$

$$B_3 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B_4 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2. Айталық $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері (6) шартты қанағаттандырсын. Онда (4) операторы үшін (2) салмақты теңсіздігі

a) $0 < p \leq 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $B = \max\{B_1, B_2\} < \infty$.

b) $p > 1$ болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $B = \max\{B_1, B_3, B_4\} < \infty$.

Сонымен қатар, (a) жағдайда $C \approx B$ және (b) жағдайда $C \approx B$, мұнда C - (2) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Ең кіші $C > 0$ тұрақтысымен (2) теңсіздігі орындалсын.

(a) жағдай. $B < \infty$ болатынын көрсетейік. (2) теңсіздіктен

$$C \left(\sum_{i=j}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left| w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Осыдан келесіні алуға болады:

$$C \geq \sup_{j \geq 0} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(j, \infty) = B_1. \quad (37)$$

$j \geq 1$ саны үшін $\tilde{g}_j = \{\tilde{g}_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ тексеру тізбегін алайық, мұнда $s = j$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = v_s^{-1}$ ал $s \neq j$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = 0$, онда

$$\|\tilde{g}_j\|_{p,v} = 1. \quad (38)$$

$\tilde{g}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойсақ, онда

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \left| w_k \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,k} \tilde{g}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}. \quad (39)$$

(38), (39) және (2) -ден

$$B_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \leq C.$$

Соңғы теңсіздік және (37) келесіні береді:

$$B \leq C < \infty. \quad (40)$$

(b) жағдай. $1 \leq j < N < \infty$ үшін тексеру тізбегін $j \leq i \leq N$ үшін $\tilde{g}_{j,i} = v_i^{-p'}$, ал $i < j$ және $i > N$ үшін $\tilde{g}_{j,i} = 0$ алайық. Онда

$$\|\tilde{g}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{i=j}^N |v_i^{-p'} \cdot v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=j}^N v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (41)$$

$\tilde{g}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойып, келесі шаманы аламыз:

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \left| w_k \sum_{i=j}^N a_{i,k} \tilde{g}_{j,i} \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^N v_i^{-p'} \right). \quad (42)$$

(41), (42) және (2) -ден алынған теңсіздікте $j \geq 1$ бойынша супремум алсақ және $N \rightarrow \infty$ шекке көшсек келесі бағалауды аламыз:

$$B_3 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C. \quad (43)$$

$1 \leq j < N < \infty$ үшін тексеру тізбегін $j \leq s \leq N$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = b_{s,j}^{p'-1} v_s^{-p'}$ және $s < j$ және $s > N$ үшін $\tilde{g}_{j,s} = 0$ деп алып, (2) теңсіздіктің оң жағына қоямыз

$$\|\tilde{g}_j\|_{p,v} = \left(\sum_{s=j}^N |b_{s,j}^{p'-1} v_s^{-p'} \cdot v_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=j}^N b_{s,j}^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (44)$$

Енді $\tilde{g}_j$ тексеру тізбегін (2) теңсіздіктің сол жағына қойсақ, кейін (6) шарт бойынша

$$I(\tilde{g}) \geq \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^N b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right). \quad (45)$$

(44), (45) және (2)-ден келесі теңсіздікті алуға болады:

$$B_4 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C.$$

Соңғы және (37), (43) бағалаулар келесіні береді:

$$B \leq C < \infty. \quad (46)$$

Жеткіліктілігі. (а) жағдай. $B < \infty$ болсын, енді (2) теңсіздік орындалатынын дәлелдейміз. $0 \leq f \in l_{p,v}$ болсын. $\inf \emptyset = \infty$ деп алып келесі шаманы анықтайық

$$s_\infty = \inf \left\{ s \in \mathbb{Z}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r > 2^{-rs} \right\}.$$

$s \leq s_\infty$ болатындай s үшін

$$n_s = \inf \left\{ n \geq 1: \sum_{k=n}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \leq 2^{-r(s-1)} \right\}.$$

Онда

$$\sum_{k=n_s}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \leq 2^{-r(s-1)} < \sum_{k=n_s-1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r.$$

және $n_s \leq j \leq n_{s+1} - 1$ үшін

$$2^{-s} \leq \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} < 2^{-(s-1)}. \quad (47)$$

$$N = \bigcup_{s \geq 1} [n_s, n_{s+1} - 1]. \text{ сандар жиыны}$$

(2) теңсіздігінің $I(f)$ оң жағы үшін (47) бағалауын қолданып келесі қатынасты аламыз:

$$I(f) \leq \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_s}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 4^q \left(\sum_s 2^{-q(s+1)} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (48)$$

$1 \leq r < \infty$ үшін келесі өрнекті қарастырамыз:

$$\begin{aligned} 2^{-(s+1)} &= 2^{-s} - 2^{-(s+1)} \leq \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} - \left(\sum_{k=n_s+2}^{\infty} \left(w_k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\ll \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=k}^{n_{s+2}} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (49) \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ болған жағдайда

$$2^{-r(s+1)} = \frac{(2^{-rs} - 2^{-r(s+1)})}{2^r - 1} \ll \sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=k}^{n_{s+2}} a_{i,k} f_i \right)^r + \sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r. \quad (50)$$

Алған (49) және (50) теңсіздіктері арқылы (48) қатынасты бағаласак, онда

$$I(f) \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=k}^{n_{s+2}} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \left(w_k \sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,k} f_i \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2. \quad (51)$$

Алдымен I_1 бағалайық.

$$I_1 \leq \left(\sum_s \left(J_{r,p}^-(n_{s+1}-1, n_{s+2}) \right)^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{i=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(j, \infty) \left(\sum_s \left(\sum_{i=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \ll B_1 \|f\|_{p,v}. \quad (52)$$

Енді I_2 бағалайық. Шарт 2 бойынша

$$I_2 \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r a_{n_{s+2},k}^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} b_{i,n_{s+2}} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_{21} + I_{22}. \quad (53)$$

I_{21} -ді келесі түрде жазамыз

$$I_{21} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} f_i \right)^q \varphi_1(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (54)$$

мұнда

$$\varphi_1(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r a_{n_{s+2},k}^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s+2})$$

және $\delta(\cdot)$ — Дирактың дельта-функциясы. (54) қатынасқа Теорема C^* қолдансақ, онда

$$I_{21} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j \varphi_1(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}. \quad (55)$$

(55)-тің оң жағына төмендегі өрнекті қолданып

$$\sum_{n=1}^j \varphi_1(n) \leq \sum_{n_{s+2} \leq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r a_{n_{s+2},k}^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}$$

келесіні аламыз:

$$I_{21} \ll B_2 \|f\|_{p,v}. \quad (56)$$

Жоғарыдағыдай I_{22} – ні келесі түрде жазамыз:

$$I_{22} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_{i,n} f_i \right)^q \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (57)$$

мұндағы

$$\varphi_2(n) = \sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \delta(n - n_{s+2}).$$

(57) теңдіктегі Теорема D* бойынша

$$I_{22} \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j b_{j,n}^q \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} \right\} \|f\|_{p,v}.$$

$n_{s+2} \geq k$ үшін $b_{j,n_{s+2}} \omega_k \leq a_{j,k}$ шартынан

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^j b_{j,n}^q \varphi_2(n) &\leq \sum_{n_{s+2} \leq j} b_{j,n_{s+2}}^q \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} \omega_k^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\ll \sum_{n_{s+2} \leq j} \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \ll \sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}}. \end{aligned} \quad (58)$$

(58) бойынша

$$I_{22} \ll B_2 \|f\|_{p,v}. \quad (59)$$

Қорытындылай келе (51), (52), (53), (56) және (59) бағалаулары $C \ll B$ береді. Осыдан және (40) теңсіздіктен $C \approx B$ шығады.

(б) жағдай. Бұл жағдай (а) жағдайдағы сияқты дәлелденеді. Яғни $I \ll I_1 + I_2$ бағалауын аламыз, мұндағы I_1 және I_2 (51) өрнектегі шамалар. $\frac{q}{p} \geq 1$ болғандықтан (52)-дегі сияқты $I_1 \ll B_1 \|f\|_{p,v}$ аламыз. Кейін (6) шартын пайдаланып $I_2 \ll I_{21} + I_{22}$ аламыз, мұнда I_{21} және I_{22} (53) бағалауындағы шамалар. Әрі қарай (55) қатынасына Теорема A* қолданып дәл солай $I_{21} \ll B_3 \|f\|_{p,v}$ алуға болады, ал (57) қатынасына Теорема B* қолданып

$$I_{22} \leq \max \left\{ \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j b_{j,n}^q \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \right. \\ \left. \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j \varphi_2(n) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} b_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \|f\|_{p,v} \ll \max\{B_3, B_4\} \|f\|_{p,v}$$

Соңғы бағалаулар және (52) шарты бізге $C \ll B$ береді. Осылайша, осы және (46) шарты $C \approx B$ береді. Теорема 2 дәлелдеуі аяқталды.

Айталық

$$F_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}, \\ F_2 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=1}^j u_n^q \left(\sum_{k=n}^j b_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$ және $(a_{i,k})$ матрицасының элементтері (5) шартты қанағаттандырсын. Онда (4) операторы үшін (2) салмақты теңсіздігі болғанда орындалады сонда тек сонда, егер $F = \max\{B_1, F_1, F_2\} < \infty$. Сонымен қатар, $C \approx F$, мұнда C - (2) теңсіздігінің ең кіші тұрақтысы.

Ескерту. Теорема 3-тегі B_1 шамасы Теорема 2-ден алынған.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Бұл теореманың дәлелдеуі Теорема 2-ге ұқсас дәлелденеді. $B_1 \leq C$ болатыны (37) теңсіздіктен көруге болады. $1 \leq j < N < \infty$ болсын. $F_1 \leq C$ дәлелдеу үшін тексеру тізбегі $j \leq i \leq N$ үшін $\check{g}_{j,i} = a_{i,j}^{p'-1} v_i^{-p'}$, ал $i < j, i > N$ үшін $\check{g}_{j,i} = 0$ түрінде таңдалады. Ал $F_2 < C$ көрсету үшін тексеру тізбегін $j \leq i \leq N$ үшін $\check{g}_{j,i} = \omega_i^{p'-1} v_i^{-p'}$, ал $i < j, i > N$ үшін $\check{g}_{j,i} = 0$ деп аламыз. Осы тексеру тізбектерін (2) теңсіздіктің оң және сол жақтарына қойып, жоғарыдағы теоремалардың қажеттілік бөлігі сияқты $F \leq C < \infty$ алуға болады.

Жеткіліктілігі. Бұл теореманың жеткілікті бөлігі Теорема 2 сияқты басталады. (51) теңсіздіктегідей $I \ll I_1 + I_2$ бағалауын аламыз. $I_1 \ll B_1 \|f\|_{p,v}$ болатыны (52)-дегі сияқты алынады. Кейін (5) шарты бойынша

$$I_2 \ll \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} a_{i,n_{s+2}} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\sum_s \sum_{n=n_s}^{n_{s+1}-1} u_n^q \left(\sum_{k=n_{s+1}-1}^{n_{s+2}} b_{n_{s+2},k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{i=n_{s+2}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_{21} + I_{22}.$$

I_{21} бағалау үшін Дирактың дельта-функциясын қолданып, кейін (5) шартты қанағаттандыратын матрицасы бар Харди теңсіздігін аламыз. Осы теңсіздікке Теорема G пайдаланып $I_{21} \ll \max\{F_1, F_2\} \|f\|_{p,v}$ аламыз. Ал I_{22} бағалау үшін Дирактың дельта-функциясын және Теорема A* қолданып $I_{22} \ll F_2 \|f\|_{p,v}$ алуға болады. Осылайша, $C \ll F$ болатынын аламыз. Осы бағалаудан және $F \leq C$ шартынан $F \approx C$ шығады.

Қорытынды

Бұл жұмыста параметрдің $0 < p \leq q < \infty$ және $0 < r < \infty$ жағдайларында матрицалық оператор қатысқан итерацияланған дискретті Харди теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары сәтті түрде алынды. Алынған нәтижелер – жаңа. Алдағы зерттеулер (5) шартпен берілген матрица қатысқан квазисызықты операторды p, q және r параметрлерінің қатынасының қалған жағдайларында қарастырумен байланысты.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуге Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант AP22684768).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The prehistory of the Hardy inequality // Amer. Math. Monthly. – 2006. – Vol. 113. – No. 8. – P. 715–732.
- 2 Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy Inequality: about its History and Some Related Results. – Pilsen: Vydavatelsky servis, 2007.
- 3 Oinarov R., Kalybay A.A. Three - parameter weighted Hardy type inequalities // Banach Journal Math. – 2008. – Vol. 2. – No. 2. – P. 85–93.
- 4 Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space // Math. Inequal. Appl. – 2013. – Vol. 16. – No. 1. – P. 1–19. <https://doi.org/10.7153/mia-16-01>
- 5 Gogatishvili A., Mustafayev R. et al. Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$ // J. Inequal. Appl. – 2013. – Vol. 2013. – No. 515. – P. 1–29.
- 6 Прохоров Д.В., Степанов В.Д. О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. МИАН. – 2013. – Т. 283. – С. 155–170.
- 7 Bernardis A.L., Salvador P.O. Some new iterated Hardy-type inequalities and applications // J. Math. Ineq. – 2017. – Vol. 11. – No. 2. – P. 577–594.
- 8 Stepanov V.D., Shambilova G.E. On weighted iterated Hardy-type operators // Analysis Math. – 2018. – Vol. 44. – No. 2. – P. 273–283.
- 9 Krepela M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema // Collectanea Mathematica. – 2017. – Vol. 68. – P. 21–50.
- 10 Kalybay A. On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space // Int. J. Math. Anal. – 2014. – Vol. 8. – No. 11. – P. 539–553.
- 11 Oinarov R., Kalybay A. Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters // J. Funct. Spaces. Appl. – 2016. – Vol. 2016. – P.1–11. <https://doi.org/10.1155/2016/1045459>
- 12 Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators // Siberian Mathematical Journal – 2019. – Vol. 60. – No. 2. – P. 291–303.
- 13 Kalybay A., Oinarov R. On weighted inequalities for a class of quasilinear integral operators // Banach Journal of Mathematical Analysis. – 2023. – Vol. 17. – No. 3. – P. 2–18.

- 14 Oinarov R., Taspaganbetova Z. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators // J. Ineq. Appl. – 2012. – Vol. 2012. – No. 53. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-53>.
- 15 Kalybay A., Temirkhanova A.M., Zhangabergenova N. On iterated discrete Hardy type inequalities for a class of matrix operators // Analysis Mathematica. – 2023. – Vol. 49. – No. 1. – P. 137–150.
- 16 Kalybay A., Zhangabergenova N. On iterated discrete Hardy type operators // Operators and Matrices. – 2023. – Vol. 17. – No. 1. – P. 79–91. <https://doi.org/10.7153/oam-2023-17-07>.
- 17 Zhangabergenova N. Weighted estimates for a class of matrix operators // Mathematical inequality and application. – 2023. – Vol. 26. – No. 3. – P. 627–644. <https://doi.org/10.7153/mia-2023-26-38>.
- 18 Omarbayeva B.K., Persson L.-E., Temirkhanova A.M. Weighted iterated discrete Hardy-type inequalities // Math. Inequalities and Appl. – 2020. – Vol. 23. – No. 3. – P. 943–959. <https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-73>.
- 19 Темирханова А.М., Омарбаева Б.К. Весовая оценка одного класса квазилинейных дискретных операторов: случай $0 < q < \theta < p < \infty, p > 1$ // Вестник КазНПУ им. Абая Серия физ.-мат. – 2019. – Т. 67. – № 3. – С.109–116.
- 20 Oinarov R., Omarbayeva B.K., Temirkhanova A.M. Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science. – 2020. – Vol. 105. – No. 1. – P. 19–29. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.03>.
- 21 Temirkhanova A.M., Omarbayeva B.K. Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators: the case $0 < q < p \leq \theta < \infty, p > 1$ // Vestnik KazNRTU. – 2020. – Vol. 140. – No. 4. – P. 588–595.
- 22 Zhangabergenova N., Temirkhanova A.M. Iterated discrete Hardy-type inequalities // Eurasian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 14. – No. 1. – P. 81–95. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2023-14-1-81-95>.
- 23 Bennett G. Some elementary inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1987. – Vol. 38. – No. 2. – P. 401–425.
- 24 Bennett G. Some elementary inequalities III // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1991. – Vol. 42. – No. 2. – P. 149–174.
- 25 Ойнаров Р., Шалгинбаева С.Х. Весовая аддитивная оценка одного класса матричных операторов // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2004. – №1. – С. 39–49.
- 26 Shaimardan S., Shalgynbaeva S. Hardy-type inequalities for matrix operators // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. – 2017. – Vol. 88. – No. 4. – P. 63–72.
- 27 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A., Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators // Math. journal. – 2011. – Vol. 11. – No. 2(40). – P. 73 – 85.

REFERENCES

- 1 Kufner A. and Maligranda L., Persson L.-E. The prehistory of the Hardy inequality, Amer. Math. Monthly., 113 (8), 715–732 (2006).
- 2 Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. The Hardy Inequality: about its History and Some Related Results. (Pilsen: Vydavatel'sky servis, 2007).
- 3 Oinarov R. and Kalybay A.A., Three – parameter weighted Hardy type inequalities, Banach Journal Math., 2 (2), 85–93 (2008).
- 4 Burenkov V.I. and Oinarov R., Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space, Math. Inequal. Appl., 16(1), 1–19 (2013) <https://doi.org/10.7153/mia-16-01>.
- 5 Gogatishvili A., Mustafayev R. and et al., Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$, J. Inequal. Appl., 2013(515), 1–29 (2013).
- 6 Prokhorov D.V. and Stepanov V.D., O vesovykh neravenstvakh Khardi v smeshannykh normakh, Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova, 283, 155–170 (2013) [in Russian]
- 7 Bernardis A.L. and Salvador P.O., Some new iterated Hardy-type inequalities and applications, J. Math. Ineq., 11(2), 577–594 (2017).
- 8 Stepanov V.D. and Shambilova G.E., On weighted iterated Hardy-type operators, Analysis Math., 44(2), 273–283 (2018).
- 9 Krepela M., Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema, Collectanea Mathematica, 68, 21–50 (2017).

- 10 Kalybay A., On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space, *Int. J. Math. Anal.*, 8(11), 539–553 (2014).
- 11 Oinarov R. and Kalybay A., Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters, *J. Funct. Spaces. Appl.*, 2016, 1–11 (2016). <https://doi.org/10.1155/2016/1045459>
- 12 Kalybay A., Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators, *Siberian Mathematical Journal*, 60 (2), 291–303 (2019).
- 13 Kalybay A. and Oinarov R., On weighted inequalities for a class of quasilinear integral operators, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 17 (3), 2–18 (2023).
- 14 Oinarov R. and Taspaganbetova Z. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators, *J. Ineq. Appl.*, 2012 (53) (2012). <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-53>.
- 15 Kalybay A., Temirkhanova A.M. and Zhangabergenova N., On iterated discrete Hardy type inequalities for a class of matrix operators, *Analysis Mathematica*, 49 (1), 137–150 (2023).
- 16 Kalybay A. and Zhangabergenova N., On iterated discrete Hardy type operators, *Operators and Matrices*, 17(1), 79–91 (2023). <https://doi.org/10.7153/oam-2023-17-07>
- 17 Zhangabergenova N. and Weighted estimates for a class of matrix operators, *Math. Inequalities and Appl.*, 26 (3), 627–644 (2023). <https://doi.org/10.7153/mia-2023-26-38>.
- 18 Omarbayeva B.K., Persson L.-E. and Temirkhanova A.M., Weighted iterated discrete Hardy-type inequalities, *Math. Inequalities and Appl.*, 23(3), 943–959 (2020). <https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-73>.
- 19 Temirkhanova A.M. and Omarbayeva B.K., Vesovaia otsenka odnogo klassa kvazilineinykh diskretnykh operatorov: sluchai $0 < q < \theta < p < \infty, p > 1$, *Vestnik Kazakhskogo natsionalnogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaia. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, 67 (3), 109–116 (2019). [in Russian]
- 20 Oinarov R., Omarbayeva B.K. and Temirkhanova A.M., Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights, *Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 105 (1), 19–29 (2020). <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.03>.
- 21 Temirkhanova A.M. and Omarbayeva B.K., Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators: the case $0 < q < p \leq \theta < \infty, p > 1$, *Vestnik KazNRTU*, 140 (4), 588–595 (2020).
- 22 Zhangabergenova N. and Temirkhanova A.M. Iterated discrete Hardy-type inequalities, *Eurasian Mathematical Journal*, 14 (1), 81–95 (2023). <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2023-14-1-81-95>.
- 23 Bennett G., Some elementary inequalities, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 38 (2), 401–425 (1987).
- 24 Bennett G., Some elementary inequalities III, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 42 (2), 149–174 (1991).
- 25 Oinarov R. and Shalgynbaeva S.Kh., Vesovaia additivnaia otsenka odnogo klassa matrichnykh operatorov. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Respubliki Kazakhstan, Seriya Fiziko-matematicheskaya*, 1, 39–49 (2004). [in Russian]
- 26 Shaimardan S. and Shalgynbaeva S., Hardy-type inequalities for matrix operators, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics*, 88 (4), 63–72 (2017).
- 27 Taspaganbetova Zh. and Temirkhanova A., Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators, *Math. journal*, 11, 2(40), 73–85 (2011).

^{1*}Жаңабергенова Н.С.,

PhD, ORCID ID: 0000-0003-0402-6999,

*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com

²Темирханова А.Т.,

PhD, ORCID ID: 0000-0001-5610-3314,

e-mail: ainura-t@yandex.kz

^{1,2}Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

ТРЕХВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация

Критерии выполнения непрерывных и дискретных неравенств, включающих операторы Харди, являются одной из ключевых проблем в теории весовых неравенств. Рассмотрение дискретных неравенств для

класса матричных операторов можно считать новым направлением исследований. В общем случае, поскольку критерий устойчивости в весовом пространстве Лебега для дискретного оператора с матричным ядром не определен, к матрице задаются различные условия, что позволяет получать более широкие результаты по сравнению со случаем без матрицы. В данной работе мы рассматриваем дискретные квазилинейные операторы с матрицами, удовлетворяющими определенным условиям. Полученные результаты для квазилинейных неравенств могут быть применены при описании билинейных неравенств Харди.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовая пространства Лебега матричный оператор, квазилинейные операторы.

^{1*}**Zhangabergenova N.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0003-0402-6999,
*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com
²**Temirhanova A.,**
PhD, ORCID ID: 0000-0001-5610-3314,
e-mail: ainura-t@yandex.kz

^{1,2}L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

THREE-WEIGHTED INEQUALITIES FOR SOME CLASS OF MATRIX OPERATORS

Abstract

The criteria for the fulfillment of continuous and discrete inequalities involving Hardy operators are one of the key problems in the theory of weighted inequalities. The study of discrete inequalities for the class of matrix operators can be considered a new direction of research. In general, since the stability criterion in the weighted Lebesgue space for a discrete operator with a matrix kernel is not defined, various conditions are imposed on the matrix, which allows for obtaining broader results compared to the case without a matrix. In this work, we consider discrete quasilinear operators with matrices satisfying certain conditions. The results obtained for quasilinear inequalities can be applied to the description of bilinear Hardy inequalities.

Keywords: Hardy inequality, weighted Lebesgue space matrix operator, quasilinear operators.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 27.02.2025