УДК 517.925.7
МРНТИ 27.31.15, 27.29.21

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-188-199

[1]***Талипова М.Ж.,**
канд. физ.-матем. наук, доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
*e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]**Сейлова Р.Д.,**
канд. физ.-матем. наук, доцент, ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,
e-mail: roza_seilova@mail.ru
[1]**Каипова А.Д.,**
магистр естественных наук, преподаватель,
ORCID ID: 0009-0000-2517-8559,
e-mail: almaz_ai@mail.ru

[1]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

О РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация

Цель настоящей работы заключается в исследовании неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, близких к обыкновенному случаю. Частное решение рассматриваемой системы вблизи регулярной особенности (0,0) ищется в виде обобщенного степенного ряда двух переменных с помощью метода Фробениуса-Латышевой. Показаны разные возможные случаи, когда системы определяющих уравнений имеют простые или кратные корни. Приведена теорема для частного решения «резонансной» неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. На примере показано решение неоднородной системы Бесселя. Соответствующая однородная система имеет решения в виде функций Бесселя двух переменных, частное решение неоднородной системы представлено в виде произведения бесселевых функций.

Ключевые слова: неоднородная система, решение, определяющее уравнение, многочлен, аналитическая функция, ряд, регулярная особая точка, метод Фробениуса-Латышевой.

Введение

Множество задач в механике, математической физике, технике и других областях сводятся к решению дифференциальных уравнений. Поэтому достижения в изучении интегралов дифференциальных уравнений открывают путь для решения ряда прикладных задач. Наиболее важное место в общей теории дифференциальных уравнений занимает аналитическая теория, основателем которой является Л. Фукс [1–2]. В середине XIX века была почти полностью разработана теория линейных дифференциальных уравнений типа Фукса

$$\sum_{\nu=0}^{n}(x-a)^{\nu}\cdot P_{n-\nu}(x)\cdot y^{(\nu)}=0, \tag{1}$$

где коэффициенты $P_{n-\nu}(x)$ $(\nu=0,1,\ldots,n-1)$ есть регулярные функции в окрестности точки $x=a$, $P_0=1$.

Г. Фробениус исследовал рекуррентные формулы для этого типа уравнений и доказал равномерную сходимость рядов в определенной окрестности особой точки [3]. Коэффициенты этих рядов определяются из рекуррентных уравнений как решения данного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1).

Наряду с построением решений уравнений и систем большой интерес представляет изучение таких свойств решений, как устойчивость, ограниченность, колебательность и асимптотическое поведение при неограниченном возрастании независимой переменной. Асимптотические представления решений могут быть получены с помощью теории интегральных уравнений, операционных методов, а также с использованием методов, позволяющих непосредственно определить структуру и строить решения уравнений и систем в окрестности особой точки. К таким методам относится метод Фробениуса-Латышевой, применимый для построения асимптотических представлений решений линейного дифференциального уравнения n –го порядка вида

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x)\cdot\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}=0. \tag{2}$$

Предполагается, что $P_i(x)$ – многочлены либо функции, представимые сходящимися рядами.

Метод Фробениуса-Латышевой, в отличие от других методов, применяемых для исследования уравнения (2), позволяет разрабатывать эффективные алгоритмы построения его решений в виде степенных, нормальных и поднормальных рядов. Кроме того, в некоторых случаях он позволяет получить нормально-регулярные решения, а также решения в замкнутом виде. Ключевой особенностью этого метода является использование понятия ранга, введенного А. Пуанкаре, и антиранга, предложенного К.Я. Латышевой [4–6].

Ю.И. Сикорский расширил применение данного метода на обыкновенные линейные неоднородные дифференциальные уравнения. В первую очередь это относится к специальным дифференциальным уравнениям, решениями которых являются известные ортогональные многочлены и специальные функции одной переменной [7–9].

Исследованием решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами с использованием метода Фробениуса-Латышевой занимался О. Кашкинбаев [10].

Отдельные результаты этого метода были обобщены Н.И. Терещенко на специальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В отношении таких систем линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами им были решены два ключевых вопроса: существование решений в конечной форме и установление признаков появления логарифмических решений [11].

Ж.Н. Тасмамбетов применил метод Фробениуса-Латышевой для исследования однородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Использование этого метода позволило модифицировать алгоритмы нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных, а также доказать условия существования нормальных, нормально-регулярных и замкнутых решений однородных систем дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Кроме того, были предложены методы их построения [12–18].

Однако неоднородные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка остались малоизученными.

Материалы и методы

Исследуется неоднородная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{aligned}&A^{(0)}(x,y)\cdot Z_{xx}+A^{(1)}(x,y)\cdot Z_x+A^{(2)}(x,y)\cdot Z=A^{(3)}(x,y),\\&B^{(0)}(x,y)\cdot Z_{yy}+B^{(1)}(x,y)\cdot Z_y+B^{(2)}(x,y)\cdot Z=B^{(3)}(x,y),\end{aligned} \tag{3}$$

где $A^{(i)}(x,y)$ и $B^{(i)}(x,y)$ $(i = 0,1,2,3)$ – многочлены или аналитические функции двух переменных, $Z = Z(x,y)$ − общая неизвестная функция.

При $A^{(0)}(x,y) \equiv 1, B^{(0)}(x,y) \equiv 1$ выполняются все пять условий совместности системы (1):

1. $A_y^{(1)} - B_x^{(1)} = 0,$
2. $2 \cdot B_x^{(2)} - \left[A_{yy}^{(1)} - B^{(2)} \cdot A_y^{(1)}\right] = 0,$
3. $B_{xx}^{(1)} + A^{(1)} \cdot B_x^{(1)} - 2A_y^{(2)} = 0,$
4. $B_{xx}^{(2)} + A^{(1)} \cdot B_x^{(2)} - A_{yy}^{(2)} - B^{(1)} \cdot A_y^{(1)} = 0,$
5. $B_{xx}^{(3)} + A^{(1)} \cdot B_x^{(3)} - B^{(2)} \cdot A^{(3)} - \left[A_{yy}^{(3)} + B^{(1)} \cdot A_y^{(3)} - A^{(2)} \cdot B^{(3)}\right] = 0.$

Как известно, для простых дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и уравнений Эйлера существуют два основных метода решения неоднородных уравнений: метод вариации произвольных постоянных и метод неопределенных коэффициентов. В данном случае метод неопределенных коэффициентов применяется для нахождения частных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных (3).

Пусть коэффициенты первого уравнения системы (3) зависят от x, а второго – от y. В этом случае каждое уравнение системы преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются специальные функции, были рассмотрены в работе [19]. Эти уравнения охватывают также уравнения математической физики, поскольку метод разделения переменных приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решениями которых являются специальные функции. Итак, рассмотрим систему двух неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с общим неизвестным $Z(x,y)$:

$$\begin{aligned} A^{(0)}(x) \cdot Z_{xx} + A^{(1)}(x) \cdot Z_x + A^{(2)}(x) \cdot Z = A^{(3)}(x), \\ B^{(0)}(y) \cdot Z_{yy} + B^{(1)}(y) \cdot Z_y + B^{(2)}(y) \cdot Z = B^{(3)}(y) \end{aligned} \tag{4}$$

с аналитическими коэффициентами $A^{(i)}(x)$ и $B^{(i)}(y)$ $(i = 0,1,2,3)$.

При $A^{(3)}(x) \equiv 0,\ B^{(3)}(y) \equiv 0$ получаем однородную систему

$$\begin{aligned} A^{(0)}(x) \cdot Z_{xx} + A^{(1)}(x) \cdot Z_x + A^{(2)}(x) \cdot Z = 0, \\ B^{(0)}(y) \cdot Z_{yy} + B^{(1)}(y) \cdot Z_y + B^{(2)}(y) \cdot Z = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Если считать, что первое уравнение системы (5) имеет особую регулярную линию $x = 0$, то оно записывается так:

$$x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot a^{(1)}(x) \cdot Z_x + a^{(2)}(x) \cdot Z = 0, \tag{6}$$

где

$$a^{(i)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(i)} \cdot x^\mu \quad (i = 1,2)$$

– аналитические функции, регулярные вблизи $x = 0$.

Рассуждая аналогично, представим и второе уравнение в виде (6).

Тогда однородная система (5) имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot a^{(1)}(x) \cdot Z_x + a^{(2)}(x) \cdot Z = 0, \\ y^2 \cdot Z_{yy} + y \cdot b^{(1)}(y) \cdot Z_y + b^{(2)}(y) \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$a^{(i)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\mu}^{(i)} \cdot x^{\mu}, \quad b^{(i)}(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{\nu}^{(i)} \cdot y^{\nu} \ (i = 1,2)$$

– аналитические функции, регулярные вблизи $x = 0$ и $y = 0$ соответственно.

Введем обозначения

$$\Lambda_1 Z = x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot a^{(1)}(x) \cdot Z_x + a^{(2)}(x) \cdot Z,$$
$$\Lambda_2 Z = y^2 \cdot Z_{yy} + y \cdot b^{(1)}(y) \cdot Z_y + b^{(2)}(y) \cdot Z,$$

тогда система (7) запишется в виде

$$\Lambda_i Z = 0 \ (i = 1,2).$$

Система определяющих уравнений относительно особенности $(x = 0, y = 0)$ имеет следующий вид:

$$f_0^1(\rho) = \rho \cdot (\rho - 1) + p_0^{(1)} \cdot \rho + p_0^{(2)} = 0,$$
$$f_0^2(\sigma) = \sigma \cdot (\sigma - 1) + q_0^{(1)} \cdot \sigma + q_0^{(2)} = 0. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении частного решения неоднородной системы

$$\Lambda_i Z = f_i(x, y) \ (i = 1,2). \quad (9)$$

Правая часть $f_i(x, y)$ при $i = 1$ представима в виде обобщенного степенного ряда по независимой переменной x:

$$f_1(x, y) = a^{(3)}(x) = x^{\alpha} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,0} \cdot x^{\mu} \ \ (a_{0,0} \neq 0), \quad (10)$$

а при $i = 2$ – по переменной y:

$$f_2(x, y) = b^{(3)}(y) = y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{0,\nu} \cdot y^{\nu} \ \ (b_{0,0} \neq 0). \quad (11)$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \ \ (C_{\mu,\nu} \neq 0) \quad (12)$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 1. Пусть задана неоднородная система с аналитическими коэффициентами, регулярными вблизи особенности $(x = 0, y = 0)$. Тогда частное решение системы (9) с правыми частями (10) и (11) имеет вид (12), если $\rho + k^{(1)}$ и $\sigma + k^{(2)}$ не совпадают ни с одной парой показателей решения, соответствующей однородной системе (7), ни при каких натуральных $k^{(j)} (j = 1,2)$.

Доказательство. Подставляя (12) в систему (4), получаем систему характеристических уравнений

$$x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \{C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) + [C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 1,\sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)] \cdot x +$$
$$+[C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma)] \cdot y + [C_{1,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho + 1,\sigma + 1) +$$
$$+C_{1,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho + 1,\sigma) + C_{0,1} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma + 1) + C_{0,0} \cdot f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)] \cdot xy + \ldots\} = f_j(x, y),$$

где при $i = 1$ $f_i(x, y)$ есть ряд (10), а при $i = 2$ – ряд (11), а $f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) (j = 1,2)$ – определяет систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$ и имеет вид (8).

Отсюда следует, что (12) будет формальным частным решением системы (9) только тогда, когда коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,\dots)$ удовлетворяют рекуррентной системе

$$C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,0}^{(j)}$$
$$C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{1,0}^{(j)}$$
$$C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,1}^{(j)}$$
$$C_{1,1} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1) + C_{1,0} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma) +$$
$$+C_{0,1} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot f_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)}$$
$$C_{2,0} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho+2,\sigma) + C_{1,0} \cdot f_{1,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot f_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{2,0}^{(j)}$$
$$C_{0,2} \cdot f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+2) + C_{0,1} \cdot f_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot f_{0,2}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,2}^{(j)}$$

При наших условиях, эта рекуррентная система распадается на две системы:

$$C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) = a_{0,0},$$
$$C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma) = a_{1,0},$$
$$C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(1)}(\rho,\sigma) = a_{0,1}\ ,$$

и

$$C_{0,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) = b_{0,0},$$
$$C_{1,0} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot f_{1,0}^{(1)}(\rho,\sigma) = b_{1,0},$$
$$C_{0,1} \cdot f_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot f_{0,1}^{(1)}(\rho,\sigma) = b_{0,1}\ ,$$

Все неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,\dots)$ могут быть определены последовательно из системы (13) при условии, что $\rho + k^{(1)}$ и $\sigma + k^{(2)}$, где $k^{(j)}(j = 1,2)$ – любое натуральное число, не являются показателями решения системы (7).

Следует отметить, что сходимость рядов в выражениях (10) и (11) повлечет за собой сходимость ряда в выражении (12).

Таким образом, в рассмотренном случае частное решение неоднородной системы (9) ищется в виде (12).

Лемма 1 доказана.

Решая систему определяющих уравнений (8), заметим, что возможны следующие случаи:

1. Первое уравнение системы имеет кратные корни $\rho_1 = \rho_2$, а второе – простые корни σ_1 и σ_2. Из них можно составить следующие пары корней: (ρ_1,σ_1); (ρ_1,σ_2); (ρ_2,σ_1) и (ρ_2,σ_2). Видно, что вместо четырех пар получится две пары корней: $(\rho_1 = \rho_2,\sigma_1)$ и $(\rho_1 = \rho_2,\sigma_2)$. Соответственно, система регулярных однородных уравнений (7) имеет всего два линейно-независимых решения. Остальные решения выражаются через логарифмы. Действительно, первое уравнение системы (7) имеет второе решение в логарифмическом виде

$$Z_{10}^{(2)} = A \cdot Z_{10}^{(1)} \cdot lnx + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_\mu \cdot x^\mu \quad (A_0 \neq 0). \tag{14}$$

Поэтому неизвестные решения $Z_3(x,y)$ и $Z_4(x,y)$ однородной системы (7) получатся в виде комбинации логарифмического решения (14) и двух линейно-независимых решений второго уравнения. Итак,

$$Z_3(x,y) = Z_{10}^{(2)}(x)\cdot Z_{01}^{(1)}(y) = \left(A\cdot Z_{10}^{(1)}\cdot ln\,x + x^{\rho_2}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu\cdot x^\mu\right)\times$$

$$\times\, y^{\sigma_1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu\cdot y^\nu = A\cdot x^{\rho_1}\cdot y^{\sigma_1}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu\cdot x^\mu\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu\cdot y^\nu\cdot lnx +$$

$$+x^{\rho_2}\cdot y^{\sigma_1}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu\cdot x^\mu\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu\cdot y^\nu =$$

$$= A\cdot Z_1(x,y)\cdot ln\,x + x^{\rho_1}\cdot y^{\sigma_1}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(1)}\cdot x^\mu\cdot y^\nu.$$

Таким же образом определяем и

$$Z_4(x,y) = B\cdot x^{\rho_2}\cdot y^{\sigma_2}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(2)}\cdot x^\mu\cdot y^\nu\cdot ln\,x +$$

$$+x^{\rho_2}\cdot y^{\sigma_2}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(3)}\cdot x^\mu\cdot y^\nu = B\cdot Z_2(x,y)\cdot ln\,x +$$

$$+x^{\rho_2}\cdot y^{\sigma_2}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(3)}\cdot x^\mu\cdot y^\nu.$$

Рассмотренный случай показывает возможность существования двух логарифмических решений относительно x.

Следующий случай рассматривается аналогично этому случаю.

2. Пусть первое уравнение системы определяющих уравнений имеет простые корни ρ_1 и ρ_2, а второе – кратные корни $\sigma_1 = \sigma_2$. Откуда составляются две пары корней: $(\rho_1, \sigma_1 = \sigma_2)$ и $(\rho_2, \sigma_1 = \sigma_2)$. Тогда система (7) снова имеет два линейно-независимых решения вида (12), а два оставшихся решения являются логарифмическими относительно y:

$$Z_3(x,y) = \text{C}\cdot Z_1(x,y)\cdot ln\,y + x^{\rho_1}\cdot y^{\sigma_2}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(4)}\cdot x^\mu\cdot y^\nu,$$

$$Z_4(x,y) = D\cdot Z_1(x,y)\cdot ln\,y + x^{\rho_2}\cdot y^{\sigma_2}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(5)}\cdot x^\mu\cdot y^\nu,$$

3. Пусть оба уравнения системы определяющих уравнений имеют кратные корни. Поэтому система (7) имеет решения

$$Z_{10}^{(1)}(x) = x^{\rho_1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu \cdot x^\mu (A_0 \neq 0)$$

$$Z_{10}^{(2)}(x) = A \cdot Z_{10}^{(1)}(x) \cdot ln\, x + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(1)} \cdot x^\mu,$$

$$Z_{01}^{(1)}(y) = y^{\sigma_1} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \cdot y^\nu (B_0 \neq 0),$$

$$Z_{01}^{(2)}(y) = B \cdot Z_{10}^{(1)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) \cdot ln\, y + x^{\rho_2} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu^{(1)} \cdot y^\nu$$

Комбинируя их, получим частные решения системы (7):

$$Z_1(x,y) = Z_{10}^{(1)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) = x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu$$

$$\left(C_0 = A_0 \cdot B_0 \neq 0, C_\mu = A_\mu \cdot B_\mu\right)$$

$$Z_2(x,y) = Z_{10}^{(1)}(x) \cdot Z_{01}^{(2)}(y) = B \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu\, ln\, y +$$

$$+ x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \left(C_\mu = A_\mu \cdot B_\mu\right),$$

$$Z_3(x,y) = Z_{10}^{(2)}(x) \cdot Z_{01}^{(1)}(y) = A \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \cdot ln\, x +$$

$$+ x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \left(C_\mu = A_\mu \cdot B_\mu\right),$$

$$Z_4(x,y) = Z_{10}^{(2)}(x) \cdot Z_{01}^{(2)}(y) = A \cdot B \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \cdot ln\, x \cdot lny +$$

$$+ A \cdot x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \cdot ln\, x + B \cdot x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \cdot lny +$$

$$+ x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^\mu \cdot y^\nu \left(C_\mu = A_\mu \cdot B_\mu\right).$$

Аналогично обыкновенному случаю [16], здесь также исследуется так называемый «резонансный» случай, когда $f_j(x,y)(j = 1,2)$ совпадает с найденными частными решениями однородной системы (7).

При «резонансном» случае справедлива

Теорема 1. Частное решение «резонансной» неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (9) в случае отсутствия кратных пар показателей и показателей пар, отличающихся на целые числа, имеет вид

$$Z(x,y) = \frac{C_{0,0}}{A_{0,0}} \cdot [Z_1(x,y) \cdot ln\, x \cdot ln\, y + x^{\rho_1+1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \phi_1(x,y) \cdot ln\, x +$$
$$+ x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1+1} \cdot \phi_2(x,y) \cdot ln\, y + x^{\rho_1+1} \cdot y^{\sigma_1+1} \cdot \phi_3(x,y)],$$

где $C_{0,0} = \frac{Z_1}{x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1}}\Big|_{x=0,y=0} \neq 0, A_{0,0}$ известная постоянная, отличная от нуля, $\phi_l(x,y)(l = 1,2,3)$ – аналитические функции двух переменных, регулярные вблизи особенности $(x = 0, y = 0)$.

Доказательство теоремы вполне аналогично схеме доказательства теоремы 1 из [7, с. 137].

Решение множества прикладных задач, связанных с интегрированием уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности, системы волновых уравнений и других, в процессе разделения переменных сводится к уравнению Бесселя с индексом ν. Когда источники распределены по объему, задачи превращаются в задачи интегрирования неоднородных уравнений. Такие задачи были рассмотрены в работах Э.Т. Уиттекера, Г.Н. Ватсона, Б.Г. Коренева и других [20–21].

Результаты и обсуждение

Пример 1. Рассмотрим неоднородную систему Бесселя вида

$$\begin{aligned} Z_{xx} + \frac{1}{x} \cdot Z_x + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot Z = Z_\nu(\lambda_1 \cdot x), \\ Z_{yy} + \frac{1}{y} \cdot Z_y + \left(1 - \frac{\mu^2}{y^2}\right) \cdot Z = Z_\mu(\lambda_2 \cdot y), \end{aligned} \tag{15}$$

где $Z = Z(x,y)$ – общая неизвестная, а правые части $Z_\nu(\lambda_1 \cdot x)$ и $Z_\mu(\lambda_2 \cdot y)$ –цилиндрические функции [20].

Решение системы состоит из двух этапов. Сначала определим линейно- независимые решения соответствующей однородной системы. Оба уравнения однородной системы решаются как обыкновенные уравнения Бесселя, и для первого уравнения получим в качестве решения две известные бесселевые функции от x с положительными и отрицательными индексами ν:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(\nu + m + 1)},$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(-\nu + m + 1)},$$

а для второго уравнения – бесселевые функции $J_{\pm\mu}(y)$ [21]. Согласно общей теории таких систем, общее решение соответствующей однородной системы представимо в виде суммы четырех линейно-независимых частных решений:

$$Z_{\nu,\mu}(x,y) = C_{0,0} \cdot J_{\nu,\mu}(x,y) + C_{1,0} \cdot J_{\nu,-\mu}(x,y) +$$
$$+ C_{0,1} \cdot J_{-\nu,\mu}(x,y) + C_{1,1} \cdot J_{-\nu,-\mu}(x,y),$$

где $C_{0,0}, C_{1,0}, C_{0,1}$ и $C_{1,1}$ – произвольные постоянные, а $Z_{\pm\nu,\pm\mu}(x,y)$ – произведения бесселевых функций от x и y. А частное решение неоднородной системы (15) представимо в виде произведения двух рядов:

$$U_{\nu,\mu}(x,y) = \frac{Z_\nu(\lambda_1 \cdot x)}{1 - \lambda_1^2} \cdot \frac{Z_\mu(\lambda_2 \cdot y)}{1 - \lambda_2^2} = \frac{Z_{\nu,\mu}(\lambda_1 \cdot x; \lambda_2 \cdot y)}{(1 - \lambda_1^2) \cdot (1 - \lambda_2^2)}.$$

Общее решение неоднородной системы (15) представляется в виде суммы

$$Z(x,y) = Z_{\nu,\mu}(x,y) + U_{\nu,\mu}(x,y).$$

При выполнении условий $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ получим так называемое «резонансное» решение.

Заключение

В данной работе проведено исследование неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, близких к обыкновенному случаю. Для поиска частного решения вблизи регулярной особенности (0,0) использован метод Фробениуса-Латышевой, представленный в виде обобщенного степенного ряда двух переменных. Рассмотрены различные случаи, возникающие при наличии простых и кратных корней в системе определяющих уравнений. Доказана теорема, описывающая частное решение «резонансной» неоднородной системы. В качестве примера приведено решение неоднородной системы Бесселя, где решение однородной системы выражается через функции Бесселя двух переменных, а частное решение представляется в виде их произведения.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

ЛИТЕРАТУРА

1 Fuchs L. Ueber Relationen welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1873. – Bd. 76. – P. 177 – 213.

2 Fuchs L. Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichungen erster Ordnung in singularen Punkten annehmen kannen // Berl. Ber.: 1886. – P. 219–300.

3 Frobenius G. Uber algebreich integrirbare lineare Differentialgleichungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1875. – Bd. 80. – P. 83–193.

4 Латишева К.Я. Піднормальні ряди, як разв"язки лінійних диференціальних рівнянь, ранг яких дорівню одиниці // ДАН УССР. – 1952. – № 2. – С. 53–57.

5 Латышева К.Я. О нормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга // Наукові записки КДУ, Мат. сборник. – Київ,1952. – № 6. – С. 25–46.

6 Пуанкаре А. Избранные методы. Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – 771 с.

7 Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // Мат. физика. – Киев, 1972. – № 11. – С. 133–137.

8 Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. Об одном методе нахождения частных решений неоднородных уравнений Бесселя и Лежандра // Мат. физика. – Киев, 1971. – Вып. 9. – С. 152–159.

9 Сикорский Ю.И. Нормальные решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: автореф. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1972. – 12 с.

10 Кашкинбаев О. Нормально-регулярные и асимптотические решения линейных дифференциальных уравнений с тригонометрическими коэффициентами: автореф. … канд. физ.-мат. наук. – Алматы, 1996. – 16 с.

11 Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев: Вищ. школа, 1974. – 136 с.

12 Тасмамбетов Ж.Н., Терещенко Н.И. О логарифмических решениях системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Сборник трудов инст. мат. и мех. АН КазССР. – 1974. – С. 236–244.

13 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – ИП Жандилдаева С.Т., Актобе, 2015. – 464 с.

14 Тасмамбетов Ж.Н. Нормально-регулярные решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Изв. Мин. науки – АН РК. Сер. физ.-мат. – 1998. – № 5. – С. 51–57.

15 Талипова М.Ж., Тасмамбетов Ж.Н. Алгоритм поиска рациональных решений линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Материалы II межд. конф. «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 2000. – С. 108–110.

16 Tasmambetov Zh. About logarithmic decisions of the special system of the differential equations in partial derivatives // Abstracts of the third congress of the World mathematical Society of Turkic countries. – Almaty, 2009. – P. 407–411.

17 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Bessel functions of two variables as solutions for systems of the second order differential equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – Vol. 98. – №2. – P. 141–152.

18 Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No.11. – P. 3167–3173.

19 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings. – 2017. – 1880. https://doi.org/ 10.1063/1.5000629.

20 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. ч. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М. : Наука, 1974. – 295 с.

21 Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

REFERENCES

1 Fuchs L. Ueber Relationen welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, pp. 177–213 (1873).

2 Fuchs L. Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichungen erster Ordnung in singularen Punkten annehmen kannen. Berl. Ber., pp. 219–300 (1886).

3 Frobenius G. Uber algebreich integrirbare lineare Differentialgleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 80, pp. 83–193 (1875).

4 Latisheva K.Ja. Pidnormal'ni rjadi, jak razv"jazki linijnih diferencial'nih rivnjan', rang jakih dorivnju odinici.DAN USSR, no. 2, pp. 53–57 (1952). [in Ukrainian]

5 Latysheva K.Ja. O normal'nyh rjadah kak reshenijah linejnyh differencial'nyh uravnenij ljubogo ranga. Naukovi zapiski KDU, Mat. sbornik., no. 6, pp. 25–46 (1952). [in Russian]

6 Puankare A. Izbrannye metody. Novye metody nebesnoj mehaniki (Moscow, Nauka, 1971), 771 p. [in Russian].

7 Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. O neodnorodnyh linejnyh differencial'nyh uravnenijah v reguljarnom sluchae. Mat. fizika (Kiev, 1972), no.11, pp. 133–137 [in Russian].

8 Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. Ob odnom metode nahozhdenija chastnyh reshenij neodnorodnyh uravnenij Besselja i Lezhandra. Mat. Fizika (Kiev. 1971), vol. 9, pp.152–159. [in Russian].

9 Sikorskij Ju.I. Normal'nye reshenija linejnyh neodnorodnyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi kojefficientami: avtoref. … kand. fiz.-mat. Nauk (Kiev, 1972), 12 p. [in Russian].

10 Kashkinbaev O. Normal'no-reguljarnye i asimptoticheskie reshenija linejnyh differencial'nyh uravnenij s trigonometricheskimi kojefficientami: avtoref. … kand. fiz.-mat. Nauk (Almaty, 1996), 16 p. [in Russian].

11 Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I., Orel G.S. Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija (Kiev: Vishh. shkola, 1974), 136 p. [in Russian].

12 Tasmambetov Zh.N., Tereshhenko N.I. O logarifmicheskih reshenijah sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. Sbornik trudov inst. mat. i meh. AN KazSSR, pp. 236 – 244 (1974) [in Russian].

13 Tasmambetov Zh.N. Postroenie normal'nyh i normal'no-reguljarnyh reshenij special'nyh sistem differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. IP Zhandildaeva S.T. (Aktobe, 2015), 464 p. [in Russian].

14 Tasmambetov Zh.N. Normal'no-reguljarnye reshenija sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. Izv. Min. naukiAN RK. Ser. fiz.-mat., no. 5, pp. 51–57 (1998) [in Russian].

15 Talipova M.Zh., Tasmambetov Zh.N. Algoritm poiska racional'nyh reshenij linejnyh differencial'nyh uravnenij s polinomial'nymi kojefficientami. Materialy II mezhd. konf. "Problemy differencial'nyh uravnenij, analiza i algebry" (Aktobe, 2000), pp.108–110 [in Russian].

16 Tasmambetov Zh. About logarithmic decisions of the special system of the differential equations in partial derivatives. Abstracts of the third congress of the World mathematical Society of Turkic countries. Almaty, 407–411(2009).

17 Tasmambetov Zh.N., Issenova A.A. Bessel functions of two variables as solutions for systems of the second order differential equations. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series 98, 2, 141–152 (2020).

18 Issenova A.A., Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. Lobachevskii Journal of Mathematics 43, 11, 3167–3173 (2022).

19 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system. AIP Conference Proceedings, 1880 (2017) https://doi.org/ 10.1063/1.5000629.

20 Bejtmen G. i Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. ch. II. Funkcii Besselja, funkcii parabolicheskogo cilindra, ortogonal'nye mnogochleny (Moscow, Nauka, 1974), 295 p. [in Russian].

21 Korenev B.G. Vvedenie v teoriju besselevyh funkcij (M., Nauka, 1971), 288 p. [in Russian].

[1]*Талипова М.Ж.,
физ.-мат.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
*e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]Сейлова Р.Д.,
физ.-мат.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,
e-mail: roza_seilova@mail.ru
[1]Каипова А.Д.,
жаратылыстану ғылымдарының магистрі, оқытушы
ORCID ID: 0009-0000-2517-8559,
e-mail: almaz_ai@mail.ru

[1]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

ЕКІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ БІРТЕКТІ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

Андатпа

Бұл жұмыстың мақсаты – қарапайым жағдайға жақын келетін екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеу. Қарастырылып отырған жүйенің дербес шешімі (0,0) регулярлы ерекше нүктенің маңында Фробениус-Латышева әдісінің көмегімен екі айнымалының жалпыланған дәрежелік қатары түрінде зерттелді. Анықтаушы теңдеулер жүйелерінің жай немесе еселі түбірлері болған кездегі әртүрлі мүмкін болатын жағдайлар көрсетілген. Екінші ретті дербес туындылы «резонансты» біртекті емес дифференциалды теңдеулер жүйесінің дербес шешімі үшін теорема ұсынылған. Мысалда біртекті емес Бессель жүйесінің шешімі көрсетілген. Сәйкесінше біртекті жүйенің шешімі екі айнымалыдан тұратын Бессель функциялары түрінде, біртекті емес жүйенің дербес шешімі Бессель функцияларының көбейтіндісі түрінде ұсынылған.

Тірек сөздер: біртекті емес жүйе, шешім, анықтаушы теңдеу, көпмүшелік, аналитикалық функция, қатар, регулярлы ерекше нүкте, Фробениус-Латышева әдісі.

[1]***Talipova M.Zh.,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
*e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]**Seilova R.D.,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,
e-mail: roza_seilova@mail.ru
[1]**Kaipova A.D.,**
master of Science, teacher
ORCID ID: 0009-0000-2517-8559,
e-mail: almaz_ai@mail.ru

[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov

ON SOLUTIONS OF NONHOMOGENEOUS SYSTEMS OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The aim of this work is to study a nonhomogeneous system of second-order partial differential equations that is close to the ordinary case. A particular solution of the considered system near the regular singular point (0,0) is sought in the form of a generalized power series in two variables using the Frobenius-Latysheva method. Various possible cases are demonstrated, where the systems of determining equations have simple or multiple roots. A theorem is presented for the particular solution of a "resonant" nonhomogeneous system of second-order partial differential equations. As an example, the solution of a nonhomogeneous Bessel system is given. The corresponding homogeneous system has solutions in the form of Bessel functions of two variables, while the particular solution of the nonhomogeneous system is expressed as a product of Bessel functions.

Keywords: nonhomogeneous system, solution, determining equation, polynomial, analytic function, series, regular singular point, Frobenius-Latysheva method.

Дата поступления статьи в редакцию: 15.03.2025