

ӘОЖ 517.929.7
ГТАХР 27.29.15, 27.29.17

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-177-187>

^{1,2*}**Бакирова Э.А.,**

физ.-мат.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

*e-mail: bakirova1974@mail.ru

¹**Искакова Н.Б.,**

физ.-мат.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3}**Иманчиев А.Е.,**

физ.-мат.ғ.к., қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

^{1,4}**Каракенова С.Г.,**

PhD, аға оқытушысы, ORCID ID: 0000-0001-7786-5262,

e-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

¹Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

²Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

⁴Х. Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ., Қазақстан

КЕШІГУЛІ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ АППРОКСИМАЦИЯСЫ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Ақырлы интервалда тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Интервалды бөліктерге бөлу арқылы тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеудің интегралдық мүшесі квадратуралық формуламен ауыстырылады. Мұндай ауыстыру кезінде тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп тұрақты кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есеппен аппроксимацияланады. Кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепке және құрылған жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепке де корректілі шешілімділіктің анықтамалары енгізіледі. Сондай-ақ кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есептің және кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есептің корректілі шешілімділігінің шарттары тағайындалады. Тұрақты кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп пен оны аппроксимациялаушы – тұрақты кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс көрсетіледі.

Тірек сөздер: кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу, кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, корректілі шешілімділік, өзара байланыс, аппроксимациялау.

Кіріспе

$[0, T]$ кесіндісінде кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп зерттеледі

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(t)x(t - \tau) + \int_0^t \mathcal{K}(t, s)x(s) ds + f(t), x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

$$Cx(0) + Dx(T) = d, d \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

мұндағы $A(t)$, $B(t)$ матрицалары және $f(t)$ вектор-функциясы $[0, T]$ аралығында үзіліссіз, $K(t, s)$ матрицасы $[0, T] \times [0, T]$ үзіліссіз, C, D матрицалары және d векторы – тұрақты.

$$\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|, \|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|,$$

$$\|A(t)\| \leq \alpha, \|B(t)\| \leq \beta, \|K(t, s)\| \leq k, \alpha, \beta, k - \text{const.}$$

Кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер уақыт кідірісі ескерілетін популяция динамикасын модельдеуде, есте сақтау және кешігу әсерлері бар жылу алмасу есептерінде, робототехникалық жүйелер мен электр энергетикалық желілерді басқаруда қолданылады.

Кешігулі дифференциалдық теңдеулер үшін және кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әртүрлі әдістермен көптеген жұмыстарда [1–16] қарастырылған.

Параметрлеу әдісі [17] және интегралдық-дифференциалдық теңдеуді жүктелген дифференциалдық теңдеумен аппроксимациялау негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары [18, 19] жұмыстарында алынған болатын. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы байланыс [20, 21] жұмысында көрсетілген.

Ұсынылып отырған жұмыста (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен аппроксимацияланады. Осы есептердің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс көрсетіледі.

Материалдар мен әдістер

$[0, T]$ интегралдау аралығын $h > 0$: $mh = T$ қадаммен бөліктерге бөліп және $K_i(t)$ арқылы $K_i[t, (i-1)h]$ матрицасын белгілеп аламыз, яғни $K_i(t) = K[t, (i-1)h], t \in [0, T], i = \overline{1, m}$, онда (1) – (3) есебі келесі шеттік есебіне келтіріледі:

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + \sum_{i=1}^m K_i(t) \int_{(i-1)h}^{ih} y(s) ds + f(t), \quad (4)$$

$$y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (5)$$

$$Cy(0) + Dy(T) = d. \quad (6)$$

(1) – (3) және (4) – (6) есептерінің шешімдері мен қасиеттері арасындағы өзара байланыс зерттеледі.

$K_h(t, s) = K_i(t), t \in [0, T], s \in [(i-1)h, ih], i = \overline{1, m-1}, K_h(t, s) = K_m(t), s \in [(m-1)h, mh]$ теңдіктерімен $[0, T] \times [0, T]$ -да бөлікті үзіліссіз $K_h(t, s)$ матрицасын анықтаймыз. $K(t, s)$ матрицасының $[0, T] \times [0, T]$ -да бірқалыпты үзіліссіздігінен $h \rightarrow 0$ кезде $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ шығады, мұнда

$$\varepsilon(h) = \sup_{(t,s) \in [0,T] \times [0,T]} \|K(t, s) - K_h(t, s)\|.$$

Анықтама 1. (1) – (3) есебі корректілі шешілімді деп аталады, егер кез келген $f(t), \phi(t), d$ векторлары үшін оның жалғыз шешімі бар болса және келесі теңсіздік орындалса

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\| \leq \chi \cdot \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы χ – бұл $f(t), \phi(t), d$ векторларынан тәуелсіз константа.

Анықтама 2. (4) – (6) есебі корректілі шешілімді деп аталады, егер кез келген $f(t), \phi(t), d$ векторлары үшін оның жалғыз шешімі бар болса және келесі теңсіздік орындалса

$$\|y\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|y(t)\| \leq \gamma \cdot \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы γ – бұл $f(t), \phi(t), d$ векторларынан тәуелсіз константа.

Теорема 1. (1) – (3) есебі $\hat{\chi}$ константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын

$$\delta(h) = \hat{\chi} \varepsilon(h) T < 1. \quad (7)$$

Онда (4) – (6) есебі

$$\gamma^* = \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h) T}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орынды

$$\|y - x\|_1 \leq \hat{\chi} \frac{\hat{\chi} \varepsilon(h) T}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h) T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|), \quad (8)$$

мұндағы $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі, ал $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі.

Дәлелдеуі. (1) – (3) есебінің корректілі шешілімділігін және оның константасын пайдаланып (4) – (6) есебінің шешімін біртіндеп жуықтау әдісімен табамыз. $y^{(0)}(t) = x(t)$ деп алып, $y^{(1)}(t)$ жуықтауын келесі шеттік есепті шешу арқылы анықтаймыз

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = & \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)y(t - \tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)y(s)ds + f(t) + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] y^{(0)}(s)ds, \end{aligned} \quad (9)$$

$$y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (10)$$

$$\mathcal{C}y(0) + \mathcal{D}y(T) = d, \quad (11)$$

$\mathcal{K}_i(t), \mathcal{K}(t, s)$ матрицалары $[0, T], [0, T] \times [0, T]$ -да сәйкесінше үзіліссіз болғандықтан $F(t) = \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] y^{(0)}(s)ds$ функциясының $[0, T]$ -да үзіліссіздігі шығады. Онда (1) – (3) шеттік есебінің корректілі шешілімділігінен (9) – (11) есебінің $y^{(1)}(t)$ жалғыз шешімінің бар болуы шығады және келесі есептің

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} = & \mathcal{A}(t)\Delta(t) + \mathcal{B}(t)\Delta(t - \tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)\Delta(s)ds + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] y^{(0)}(s)ds, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta(t) = 0, t \in [-\tau, 0], \quad (13)$$

$$\mathcal{C}\Delta(0) + \mathcal{D}\Delta(T) = 0 \quad (14)$$

шешімі болатын $\Delta^{(1)}(t) = y^{(1)}(t) - y^{(0)}(t)$ функциясы үшін

$$\|\Delta^{(1)}\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|y^{(0)}\|_1 = \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|x\|_1 \quad (15)$$

бағалауы орынды болады. Осы үдерісті жалғастырып, $(k+1)$ -ші жуықтауын келесі шеттік есептен анықтаймыз

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)y(t-\tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)y(s)ds + f(t) + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t,s)] y^{(k)}(s)ds, \\ y(t) &= \phi(t), t \in [-\tau, 0], \\ \mathcal{C}y(0) + \mathcal{D}y(T) &= d. \end{aligned}$$

Онда $\Delta^{(k+1)}(t) = y^{(k+1)}(t) - y^{(k)}(t)$ функциясы (12) – (14) есебінің шешімі болады, мұнда (12) теңдеуінің оң жағындағы $y^{(0)}(s)$ функциясын $\Delta^{(k+1)}(s)$ функциясымен ауыстырамыз. Сонымен қатар, келесі бағалауларын аламыз

$$\|\Delta^{(k+1)}\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|\Delta^{(k)}\|_1 = \delta(h)\|\Delta^{(k)}\|_1, k = 1, 2, \dots$$

Осы шарттан және (7) шартынан $y^{(k+1)}(t)$ функциялар тізбегі $[0, T]$ кесіндісінде $y(t)$ функциясына $k \rightarrow \infty$ бірқалыпты жинақталады және $y^{(k+1)}(t), x(t)$ функцияларының айырымы үшін келесі бағалау орынды

$$\begin{aligned} \|y^{(k+1)} - x\|_1 &\leq \|y^{(k+1)} - y^{(k)}\|_1 + \|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|_1 + \dots + \|y^{(2)} - y^{(1)}\|_1 + \\ &+ \|y^{(1)} - y^{(0)}\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T \left\{ \left[(\delta(h))^{k-1} + (\delta(h))^{k-2} + \dots + 1 \right] \|\Delta^{(1)}\|_1 + \|x\|_1 \right\}. \end{aligned}$$

Осыдан $k \rightarrow \infty$ ұмтылғанда шекке көшіп алатынымыз

$$\begin{aligned} \|y - x\|_1 &\leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T \left\{ \frac{1}{1 - \delta_1(h)} \|\Delta^{(1)}\|_1 + \|x\|_1 \right\} \leq \\ &\leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T \left\{ \frac{\hat{\chi}\varepsilon(h)T}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} + 1 \right\} \|x\|_1 = \frac{\hat{\chi}\varepsilon(h)T}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \|x\|_1 \end{aligned}$$

Осы теңсіздіктен және (1) – (3) есебінің корректілі шешілімділігінен келесі бағалауды аламыз

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &\leq \|y - x\|_1 + \|x\|_1 \leq \frac{\hat{\chi}\varepsilon(h)T}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \|x\|_1 + \|x\|_1 = \\ \frac{1}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \|x\|_1 &\leq \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|). \end{aligned} \quad (16)$$

Енді (4) – (6) есебінің шешімінің жалғыз екенін көрсетейік.

$y(t), \tilde{y}(t)$ функциялары (4) – (6) есебінің шешімдері болсын. Онда олардың $\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ айырымы $[0, T]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болады және келесі шеттік есебін қанағаттандырады

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y(t)}{dt} = & \mathcal{A}(t)\Delta y(t) + \mathcal{B}(t)\Delta y(t - \tau) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)\Delta y(s)ds + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} [\mathcal{K}_i(t) - \mathcal{K}(t, s)] \Delta y(s)ds, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta y(t) = 0, t \in [-\tau, 0], \quad (18)$$

$$\mathcal{C}\Delta y(0) + \mathcal{D}\Delta y(T) = 0. \quad (19)$$

(1) – (3) есебінің корректілі шешілімділігінен $\Delta y(t)$ функциясы (17) – (19) есебінің жалғыз шешімінің болатыны шығады және келесі бағалау орынды

$$\|\Delta y\|_1 \leq \hat{\chi}\varepsilon(h)T\|\Delta y\|_1 = \delta(h)\|\Delta y\|_1.$$

$\delta(h) < 1$ екенін ескеріп $\|\Delta y\|_1 = 0$ болатынын көреміз, яғни $y(t) = \tilde{y}(t), t \in [0, T]$. Осыдан және (16) теңсіздігінен (4) – (6) есебінің $\gamma^* = \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi}\varepsilon(h)T}$ константасымен корректілі шешілімділігі және (8) бағалауы орынды екені шығады. Теорема дәлелденді.

Теорема 2. (4) – (6) есебі γ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын делік

$$\gamma^*\varepsilon(h)T < 1.$$

Онда (1) – (3) есебі

$$\hat{\chi} = \frac{\gamma^*}{1 - \gamma^*\varepsilon(h)T}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|x - y\|_1 \leq \gamma^* \frac{\gamma^*\varepsilon(h)T}{1 - \gamma^*\varepsilon(h)T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі, ал $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі.

Бұл теореманың дәлелдеуі 1-теореманың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

Енді (4) теңдеуінде $\int_{(i-1)h}^{ih} y(s) ds$ интегралын $y[(i-1)h]h$ көбейтіндісімен ауыстырсақ, онда (4) – (6) есебі кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есебіне келтіріледі:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}(t)z(t) + \mathcal{B}(t)z(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \mathcal{K}_i(t)z[(i-1)h]h + f(t), \quad (20)$$

$$z(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (21)$$

$$\mathcal{C}z(0) + \mathcal{D}z(T) = d. \quad (22)$$

Келесі тұжырымдар (4) – (6) және (20) – (22) есептерінің корректілі шешілімділігінің өзара байланысын көрсетеді.

Теорема 3. (4) – (6) есебі γ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын делік

$$\frac{1}{2}[(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th < 1.$$

Онда (20) – (22) есебі

$$\chi^* = \frac{2\gamma^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|z - y\|_1 \leq \gamma^* \frac{[(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\gamma^* + 1]\beta Th} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

Мұндағы $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі, ал $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі.

Теорема 4. (20) – (22) есебі χ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздік орындалсын

$$\frac{1}{2}[(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th < 1.$$

Онда (4) – (6) есебі

$$\gamma^* = \frac{2\chi^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|y - z\|_1 \leq \chi^* \frac{[(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $y(t)$ – (4) – (6) есебінің шешімі, ал $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі

3,4 теоремалардың дәлелдеуі 1 теореманың дәлелдеуі және [18] жұмысындағы тұжырымдарға ұқсас дәлелденеді.

Жоғарыда келтірілген 1–4 теоремалары зерттелінді (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы (20) – (22) кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланысты алуға мүмкіндік береді.

Теорема 5. (20) – (22) кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі χ^* константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздіктер орындалсын

$$\frac{1}{2}[(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th < 1,$$

$$\frac{2\chi^* \varepsilon(h)T}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th} < 1,$$

Онда (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі

$$\hat{\chi} = \frac{2\chi^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th - 2\chi^* \varepsilon(h)T}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|z - x\|_1 \leq \left\{ [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th + \frac{4\chi^* \varepsilon(h)T}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th - 2\chi^* \varepsilon(h)T} \right\} \times \frac{\chi^*}{2 - [(\alpha + \beta + kT)\chi^* + 1]\beta Th} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі, ал $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі.

Теорема 6. (1) – (3) кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі $\hat{\chi}$ константасымен корректілі шешілімді және келесі теңсіздіктер орындалсын

$$\hat{\chi} \varepsilon(h)T < 1,$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T} + 1 \right] \beta Th < 1.$$

Онда (20) – (22) кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есебі

$$\chi^* = \frac{2\hat{\chi}}{2(1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T) - [(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi} + 1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T]\beta Th}$$

константасымен корректілі шешілімді болады және келесі бағалау орындалады

$$\|x - z\|_1 \leq \left\{ \hat{\chi} \varepsilon(h)T + \frac{[(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi} + 1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T]\beta Th}{2(1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T) - [(\alpha + \beta + kT)\hat{\chi} + 1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T]\beta Th} \right\} \times \\ \times \frac{\hat{\chi}}{1 - \hat{\chi} \varepsilon(h)T} \max(\|f\|_1, \|\phi\|_1, \|d\|),$$

мұндағы $z(t)$ – (20) – (22) есебінің шешімі, ал $x(t)$ – (1) – (3) есебінің шешімі.

5, 6 теоремаларды дәлелдеу [20] жұмысындағы тұжырымдарды дәлелдеу сұлбесі бойынша 1–4 теоремаларын қолдану арқылы жүзеге асырылады.

Нәтижелер мен талқылау

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер және мұндай теңдеулер үшін шеттік есептер [18–21] жұмыстарында қарастырылып, олардың шешілімділік шарттары әртүрлі әдістермен тағайындалған. [18, 19] жұмыстарында параметрлеу әдісі және интегралдық-дифференциалдық теңдеуді жүктелген дифференциалдық теңдеумен аппроксимациялау негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің критеріі алынған болатын. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс [20, 21] жұмысында көрсетілген. Ұсынылып отырған жұмыста кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен аппроксимацияланды. Кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен оны аппроксимациялаушы кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс көрсетілді. Әрі қарай аппроксимациялаушы кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептер терминінде кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің корректілі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттарын алу көзделіп отыр.

Қорытынды

Ұсынылып отырған жұмыста кешігулі интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп зерттелген. Зерттелінді есеп кешігулі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеппен аппроксимацияланады. Осы есептердің корректілі шешілімділігінің арасындағы өзара байланыс орнатылған.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеулерге Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант AP23486114).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Schmitt K. Delay and functional differential equations and their applications. – Academic Press, USA, 2014.
- 2 Hale J.K. Theory of dunctional differential equations. – Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1977.
- 3 Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dinamics. – Academic Press, USA, 2012.
- 4 Fathalla A. Rihan. Delay differential equations and applications to biology. – Springer, Singapore, 2021.
- 5 Glagolev M., Sabrekov A., Goncharov V. Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic // Environ. Dyn. Glob. Clim. Chang. – 2018. – Vol. 9. – No. 2. – P. 40–63.
- 6 Bellour A., Bousselsal M. Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method // Math. Methods Appl. Sci. – 2014. – Vol. 37. – No. 10. – P. 1491–1506. <https://doi.org/10.1002/mma.2910>.
- 7 El-Hawary H., El-Shami K. Numerical solution of volterra delay integro-differential equations via spline and spectral methods // Int. J. Differ. Equ. Appl. – 2013. – Vol. 12. – No.3. – P. 149–157. <http://dx.doi.org/10.12732/ijdea.v12i3.1011>.
- 8 Yuzbasi S., Gok E., Sezer M. Muntz Legendre matrix method to solve the delay Fredholm integrodifferential equations with constant coefficients // New Trends Math. Sci. – 2015. – Vol. 3. – No. 2. – P. 159–167.
- 9 Hetmaniok E., Pleszczynski M., Khan Y. Solving the integral-differential equations with delayed argument by using the DTM method // Sensors. – 2022. – Vol. 22. – 4124. <https://doi.org/10.3390/s.22114124>.
- 10 Shahmorad S., Ostadzad M. An operational matrix method for solving delay Fredholm and Volterra integro–differential equations // Int. J. Comput. Methods. – 2016. – Vol. 13. – No. 6. –1650040. <https://doi.org/10.1142/S0219876216500407>.
- 11 Lalli B.S., Zhang B.G. Boundary value problems for second-order functional differential equations // Ann. Differ. Equ. – 1992. – Vol. 8. – No. 3. – P. 261–268.
- 12 Weng P.X. Boundary value problems for second order mixed-type functional-differential equations // Apl. Math. – 2012. – Vol. 12. – No. 2. – P. 155–164. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.031>.
- 13 Ntouyas S.K., Sficas Y.G., TsamatosLiu P.Ch. An existence principle for boundary value problems for second order functional-differential equations // Nonl. Anal.: Theory Methods Appl. – 1993. – Vol. 20. – No. 3. – P. 215–222. <https://doi.org/10.1016/0362-546X>.
- 14 Bai D., Xu Y. Existence of positive solutions for boundary-value problems of second-order delay differential equations // Appl. Math. Lett. – 2005. – Vol. 18. – No. 6. – P. 621–630. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.07.022>.
- 15 Iskakova N. Корректная разрешимость периодической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, Сер. математика, механика и информатика, – 2005. – Vol. 45. – No. 2. – P. 35–46.
- 16 Iskakova N., Temesheva S., Uteshova R. On a problem for a delay differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2023. – Vol. 46. – No. 9. – P. 11283–11297. <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.
- 17 Dzhumabayev D. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys. – 1989. – Vol. 29. – No. 1. – P. 34–46.
- 18 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-possedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, // Differential equations. – 2010. – Vol. 46. – No. 4. – P. 553–567.
- 19 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Критерий корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Известия НАН РК, Сер. физ.-мат. – 2007. – Vol. 3. – P. 47–51.
- 20 Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С. Об одной аппроксимации линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Математический журнал. – 2005. – Vol. 5. – No. 4. – P. 34–44.
- 21 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, // Differential equations. – 2013. – Vol. 49. – No. 9. – P. 1–16.

REFERENCES

- 1 Schmitt K. Delay and functional differential equations and their applications, Academic Press, USA, 2014.
- 2 Hale J.K. Theory of dunctional differential equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1977.
- 3 Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dinamics, Academic Press, USA, 2012.
- 4 Fathalla A. Rihan. Delay differential equations and applications to biology, Springer, Singapore, 2021.
- 5 Glagolev M., Sabrekov A., Goncharov V. Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic, Environ. Dyn. Glob. Clim. Chang., 9(2), 40–63 (2018).
- 6 Bellour A., Bousselsal M. Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method, Math. Methods Appl. Sci., 37(10), 1491–1506 (2014). <https://doi.org/10.1002/mma.2910>.
- 7 El-Hawary H., El-Shami K. Numerical solution of volterra delay integro-differential equations via spline and spectral methods, Int. J. Differ. Equ. Appl., 12(3), 149–157 (2013). <http://dx.doi.org/10.12732/ijdea.v12i3.1011>.
- 8 Yuzbasi S., Gok E., Sezer M. Muntz Legendre matrix method to solve the delay Fredholm integrodifferential equations with constant coefficients, New Trends Math. Sci., 3(2), 159–167 (2015).
- 9 Hetmaniok E., Pleszczynski M., Khan Y. Solving the integral-differential equations with delayed argument by using the DTM method, Sensors., 22, 4124 (2022). <https://doi.org/10.3390/s.22114124>.
- 10 Shahmorad S., Ostadzad M. An operational matrix method for solving delay Fredholm and Volterra integro–differential equations, Int. J. Comput. Methods, 13(6), 1650040 (2016). <https://doi.org/10.1142/S0219876216500407>.
- 11 Lalli B.S., Zhang B.G. Boundary value problems for second-order functional differential equations, Ann. Differ. Equ., 8(3), 261–268 (1992).
- 12 Weng P.X. Boundary value problems for second order mixed-type functional-differential equations, Apl. Math., 12(2), 155–164 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.031>.
- 13 Ntouyas S.K., Sficas Y.G., TsamatosLiu P.Ch. An existence principle for boundary value problems for second order functional-differential equations, Nonl. Anal.: Theory Methods Appl., 20(3), 215–222 (1993). <https://doi.org/10.1016/0362-546X>.
- 14 Bai D., Xu Y. Existence of positive solutions for boundary-value problems of second-order delay differential equations, Appl. Math. Lett., 18(6), 621–630 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.07.022>.
- 15 Iskakova N. Korrektnaja razreshimost' periodicheskoy kraevoy zadachi dlja sistemy differencial'nyh uravnenij s zapazdyvajushhim argumentom, Vestnik KazNU im. al'-Farabi, Ser. matematika, mehanika i informatika, 45(2), 35–46 (2005) [in Russian].
- 16 Iskakova N., Temesheva S., Uteshova R. On a problem for a delay differential equation, Math. Meth. Appl. Sci., 46(9), 11283–11297 (2023). <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.
- 17 Dzhumabayev D. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys., 29(1), 34–46 (1989).
- 18 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-possedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, Differential equations, 46(4), 553–567 (2010).
- 19 Dzhumabaev D.S., Bakirova Je.A. Kriterij korrektnoj razreshimosti dvuhtocheknoj kraevoy zadachi dlja sistem integro-differencial'nyh uravnenij, Izvestija NAN RK, Ser. fiz.-mat., 3, 47–51 (2007) [in Russian].
- 20 Bakirova Je.A., Dzhumabaev D.S. Ob odnoj approksimacii linejnoy dvuhtocheknoj kraevoy zadachi dlja integro-differencial'nogo uravnenija, Matematicheskij zhurnal, 5(4), 34–44 (2005) [in Russian].
- 21 Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, Differential equations, 49(9), 1–16 (2013).

^{1,2,*}Бакирова Э.А.,

канд. физ.-матем. наук, ведущий научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

*e-mail: bakirova1974@mail.ru

¹Искакова Н.Б.,

канд. физ.-матем. наук, ведущий научный сотрудник,

ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3}Иманчиев А.Е.,

канд. физ.-матем. наук, ассоциированный профессор,

ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

^{1,4}Каракенова С.Г.,

PhD, ст. преподаватель,

ORCID ID: 0000-0001-7786-5262,

e-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан²Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан³Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан⁴Атырауский университет им. Х. Досмухамедова, г. Атырау, Казахстан

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация

На конечном интервале исследуется линейная двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом. Делением интервала на части интегральный член интегро-дифференциального уравнения с постоянным запаздывающим аргументом заменяется квадратурной формулой. При такой замене линейная двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом аппроксимируется линейной краевой задачей для системы нагруженных дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом. Вводятся определения корректной разрешимости как для краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, так и для построенной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Установлены условия корректной разрешимости линейной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и линейной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Показана взаимосвязь между корректными разрешимостями линейной двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом и аппроксимирующей ее линейной двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с запаздыванием, нагруженное дифференциальное уравнение с запаздыванием, краевая задача, корректная разрешимость, взаимосвязь, аппроксимация.

^{1,2*}**Bakirova E.A.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., Leading Researcher,

ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

*e-mail: bakirova1974@mail.ru

¹**Iskakova N.B.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., Leading Researcher,

ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3}**Imanchiev A.E.,**

Cand. Phys.-Math. Sc., Associate Professor,

ORCID ID: 0000-0002-1835-2501,

e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

^{1,4}**Karakenova S.G.,**

PhD, Senior Lecturer,

ORCID ID: 0000-0001-7786-5262,

e-mail: sayakhat.karakenova05@gmail.com

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

³K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

⁴Kh. Dosmukhamedov Atyrau University, Atyrau, Kazakhstan

ON THE APPROXIMATION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DELAY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

A linear two-point boundary value problem for a system of integro-differential equations with a constant delay argument is investigated on a finite interval. By dividing the interval by parts, the integral term of the integro-differential equation with constant delay argument is replaced by the quadrature formula. With this replacement, the linear two-point boundary value problem for a system of integro-differential equations with a constant delay argument is approximated by the linear boundary value problem for a system of loaded differential equations with a constant delay argument. Definitions of correct solvability of boundary value problem for system of integro-differential equations with delay argument and constructed boundary value problem for system of loaded differential equations with constant delay argument are introduced. Conditions of correct solvability of linear boundary value problem for system of integro-differential equations with delay argument and linear boundary value problem for system of loaded differential equations with delay argument are established. Relationship between correct solvabilities of linear two-point boundary value problem for system of integro-differential equations with constant delay argument and approximating linear two-point boundary value problem for system of loaded differential equations with constant delay argument is shown.

Keywords: Delay integro-differential equation, delay loaded differential equation, boundary value problem, correct solvability, interrelation, approximation.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 26.03.2025