УДК 517.54
МРНТИ 27.23.25

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-165-176

[1]*Майер Ф.Ф.,
канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
*e-mail: maiyer@mail.ru
[1]Тастанов М.Г.,
канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]Утемисова А.А.,
канд. пед. наук, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260
e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]Ысмағұл Р.С.,
канд. физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

[1]Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Казахстан

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДВАЖДЫ ПОЧТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

На основе результатов, полученных авторами в одной из предыдущих статей (Вестник Казахстанско-Британского технического университета, 2024, 21(2), С.127–138), вводится и исследуется класс дважды почти выпуклых в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, заданный с помощью условий

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a \quad \text{и} \quad \left|\left(\frac{g'(z)}{h'(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b,$$

где функции $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ имеют разложения вида $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, n \geq 1, z \in E$, и функция $h(z)$ является выпуклой. В данном классе установлены теоремы искажения, вращения и радиус выпуклости. В частных случаях получается как ряд ранее известных, так и ряд новых оригинальных результатов для дважды почти выпуклых и почти выпуклых функций. На основе данного класса вводится класс дважды почти звездообразных функций, для которого найдены теорема роста и радиус звездообразности. При конкретных значениях параметров получаются ранее известные результаты для почти звездообразных функций.

Ключевые слова: однолистные функции, почти выпуклые функции. почти звездообразные функции, радиус выпуклости, радиус звездообразности.

Введение

Одной из важнейших задач геометрической теории функций комплексного переменного является исследование различных геометрических свойств тех или иных классов аналитических функций, в том числе и подклассов класса S однолистных функций. Изучение их свойств помогает лучше понимать геометрию отображений.

Однолистные функции – это аналитические функции, которые осуществляют взаимно однозначное отображение своей области определения. Для стандартизации исследований рассматриваются аналитические в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функции $f(z)$, нормированные условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, класс которых обозначим через $\mathcal{N}$.

К данному кругу вопросов относится оценка коэффициентов аналитических функций из $\mathcal{N}$, получение теорем искажения, вращения и покрытия в исследуемых классах функций, а также нахождение различных радиусов (выпуклости, звездообразности и других) данных классов.

В настоящей статье исследуются некоторые классы дважды почти выпуклых функций из $\mathcal{N}$, в определенной степени близких к однолистным почти выпуклым функциям.

Материалы и методы

Будем говорить, что аналитическая в E функция $\varphi(z)$ подчинена однолистной функции $\varphi_0(z)$ в круге E и писать $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Пусть $\mathcal{A}_n$ – класс аналитических в круге E функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots, n \geq 1, z \in E$, и $\mathcal{N}_n$ – класс нормированных аналитических в E функций $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots, n \geq 1, z \in E$.

Пусть $\mathcal{M}_n$ является некоторым подклассом классов $\mathcal{A}_n$ или $\mathcal{N}_n$. Тогда будем считать, что $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1$. И обратно, если $\mathcal{M}$ является некоторым подклассом класса $\mathcal{A}$ или класса $\mathcal{N}$ и функции класса $\mathcal{M}$ имеют разложение вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots, n \geq 1$, или $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots, n \geq 1$, то класс $\mathcal{M}$ будем обозначать через $\mathcal{M}_n$.

Пусть $\mathcal{P}_n(m, \gamma)$ – класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left|\varphi(z)^{1/\gamma} - m\right| < m, \quad m > 1/2, 0 < \gamma \leq 1, z \in E.$$

В терминах подчиненности функций это означает, что $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-1/m)z}\right)^{\gamma}. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{P}_n(\gamma) := \mathcal{P}_n(\infty, \gamma) = \left\{\varphi \in \mathcal{A}_n : |\arg \varphi(z)| < \frac{\gamma\pi}{2},\ z \in E\right\}$ и $\mathcal{P}_n := \mathcal{P}_n(1)$ – класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$ с положительной вещественной частью.

Лемма 1 [1]. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_n(m, \gamma)$ и $c = 1 - 1/m$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+cr^n}\right)^{\gamma} \leq \operatorname{Re}\varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-cr^n}\right)^{\gamma}, \tag{2}$$

$$|\arg \varphi(z)| \leq \gamma \arcsin \frac{(1+c)r^n}{1+cr^{2n}}, \tag{3}$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leq \frac{\gamma(1+c)nr^n}{(1-r^n)(1+cr^n)}. \tag{4}$$

Экстремальная функция имеет вид $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где функция $\varphi_0(z)$ задается в (1).

Лемма 2 [2]. Пусть $\varphi(z) + 1 \in \mathcal{A}_n$ и $\varphi_0(z)$ однолистна и звездообразна в E. Тогда если $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, то

$$\int_0^z \varphi(t)\frac{dt}{t} \prec \frac{1}{n}\int_0^z \varphi_0(t)\frac{dt}{t}.$$

Пусть S°, S^*, K соответственно класс выпуклых, класс звездообразных и класс почти выпуклых функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$. Также через $S^{\circ}(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ будем обозначать классы функций соответственно выпуклых порядка α и звездообразных порядка α, которые задаются условиями

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > \alpha \text{ и } \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0.$$

Очевидно, что $S^{\circ}(0) = S^{\circ}$ и $S^*(0) = S^*$.

Напомним, что $f \in K$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $g \in S^{\circ}$ выполняется условие

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} \prec \varphi_0(z),\ \varphi_0(z) \in \mathcal{P}. \qquad (5)$$

Почти выпуклые функции (close-to-convex functions) введены Капланом [3] в форме достаточного условия однолистности $\mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0,\ z \in E$, которое равносильно условию (5) с $\varphi_0(z) = (1+z)/(1-z)$. Если $\varphi_0(z) = ((1+z)/(1-z))^{\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$, то есть $f(z)$ удовлетворяет условию $|\arg\,(f'(z)/g'(z))| < \gamma\pi/2$, то получаем класс $K(\gamma)$ функций, почти выпуклых порядка γ [4–5].

Если в условии (5) вместо выпуклой функции $g(z)$ использовать почти выпуклую функцию, то получим класс CK дважды почти выпуклых функций (doubly close-to-convex functions). Например, подклассом класса CK является класс [6] почти Σ-выпуклых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (5) с $g \in \Sigma$, где $\Sigma = \{f \in \mathcal{N}\colon \mathrm{Re}\left((1-z^2)f'(z)\right) > 0, z \in E\}$. Заметим, что Σ – класс функций $f(z)$, выпуклых в направлении мнимой оси, который получается, если в условии (5) в качестве $g(z)$ взять выпуклую функцию $g(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$, то есть $\Sigma \subset K$.

Таким образом, $f \in CK$ тогда и только тогда, когда существуют функции $g(z)$ и $h(z)$ такие, что выполняются условия

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} \prec \varphi_0(z) \text{ и } \frac{g'(z)}{h'(z)} \prec \psi_0(z), \qquad (6)$$

где $\varphi_0, \psi_0 \in \mathcal{P}$ и $h \in S^{\circ}$.

В статьях [7–8] исследовались классы $\mathcal{L}(\gamma,\delta)$ и $\mathcal{CC}(a,b)$ дважды почти выпуклых функций, заданные соответственно условиями

$$\mathcal{L}(\gamma,\delta)\colon\ \left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \left|\arg\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| < \delta\frac{\pi}{2},\ \ h(z) \in S^{\circ}, \qquad (7)$$

$$\mathcal{CC}(a,b)\colon\ \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - a\right| < a,\ \ \left|\frac{g'(z)}{h'(z)} - b\right| < b,\ \ h(z) \in S^{\circ}, \qquad (8)$$

где $0 < \gamma,\delta \le 1$, $a,b > 1/2$.

Обозначим через $K_n(a,\gamma)$ класс функций $f(z) \in \mathcal{N}_n$, для каждой из которых существует функция $g \in S_n^{\circ}$ такая, что $f'(z)/g'(z) \in \mathcal{P}_n(a,\gamma)$, то есть выполняется условие

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a,\quad a > 1/2, 0 < \gamma \le 1, z \in E. \qquad (9)$$

Легко заметить, что при $n = 1$, $a \to \infty$ класс $K_n(a,\gamma)$ сводится к классу $K(\gamma)$ функций, почти выпуклых порядка γ [4–5]. При этом, $K_n(a,\gamma) \subset K_n(\gamma) \subset K(1) = K$.

Определение 1. Пусть $a,b > 1/2$, $0 < \gamma,\delta \le 1$. Будем говорить, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$ принадлежит классу $CK_n(a,\gamma,b,\delta)$, если существует функция $g \in K_n(b,\delta)$ такая, что $f'/g' \in \mathcal{P}_n(a,\gamma)$.

Из определения следует, что $f \in CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $g(z)$ и $h(z)$ такие, что выполняются условия

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a \ \text{ и } \ \left|\left(\frac{g'(z)}{h'(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b, \qquad (11)$$

при этом $f, g \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^{\circ}$.

Заметим, что класс $CK(\infty,\gamma,\infty,\delta)$ совпадает с классом $\mathcal{L}(\gamma,\delta)$ из [7], заданным условиями (7), а класс $CK(a,1,b,1)$ совпадает с классом $\mathcal{CC}(a,b)$ из [8], заданным условиями (8).

Кроме того, отметим, что $CK_n(a,\gamma,\infty,0) = K_n(a,\gamma)$, $CK_n(\infty,0,b,\delta) = K_n(b,\delta)$, $CK(\infty,\gamma,\infty,0) = \mathcal{L}(\gamma,0) = K(\gamma)$, $CK(\infty,0,\infty,0) = K(0) = S^{\circ}$.

В настоящей статье для класса $CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ получены теоремы искажения, вращения и радиус выпуклости. Полученные результаты не только обобщают соответствующие результаты статей [7–8] для классов $\mathcal{L}(\gamma,\delta)$ и $\mathcal{CC}(a,b)$ и результаты ряда других статей для различных подклассов почти выпуклых функций, но и дают новые оригинальные результаты.

Результаты и обсуждение

1. Теорема искажения

Теорема 1. Пусть $f\in CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ и $a_1=1-1/a$, $b_1=1-1/b$. Тогда при $|z|=r$, $0\le r<1$, имеет место точная оценка

$$\frac{1}{(1+a_1r^n)^\gamma(1+b_1r^n)^\delta}\frac{(1-r^n)^{\gamma+\delta}}{(1+r^n)^{2/n}}\le|f'(z)|\le$$

$$\le\frac{(1+r^n)^{\gamma+\delta}}{(1-r^n)^{2/n}}\frac{1}{(1-a_1r^n)^\gamma(1-b_1r^n)^\delta}. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z)=f'(z)/g'(z),\psi(z)=g'(z)/h'(z)$. Так как $\varphi\in\mathcal{P}_n(a,\gamma)$, $\psi\in\mathcal{P}_n(b,\delta)$, то в силу леммы 1 для всех z, $|z|=r$, $0\le r<1$, выполняются неравенства

$$\left(\frac{1-r^n}{1+a_1r^n}\right)^\gamma\le|\varphi(z)|\equiv\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|\le\left(\frac{1+r^n}{1-a_1r^n}\right)^\gamma,$$

$$\left(\frac{1-r^n}{1+b_1r^n}\right)^\delta\le|\psi(z)|\equiv\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\le\left(\frac{1+r^n}{1-b_1r^n}\right)^\delta.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1-r^n}{1+a_1r^n}\right)^\gamma|g'(z)|\le|f'(z)|\le|g'(z)|\left(\frac{1+r^n}{1-a_1r^n}\right)^\gamma, \tag{12}$$

$$\left(\frac{1-r^n}{1+b_1r^n}\right)^\delta|h'(z)|\le|g'(z)|\le|h'(z)|\left(\frac{1+r^n}{1-b_1r^n}\right)^\delta. \tag{13}$$

Поскольку $h\in S_n^o$, то из подчиненности $z\frac{h''(z)}{h'(z)}\prec\frac{2z}{1-z}$ в силу леммы 2 находим

$$\ln h'(z)=\int_0^z\left(t\frac{h''(t)}{h'(t)}\right)\frac{dt}{t}\prec\frac{1}{n}\int_0^z\frac{2dt}{1-t}=-\frac{2}{n}\ln(1-z).$$

Следовательно, $h'(z)\prec 1/(1-z)^{2/n}$, откуда при $|z|=r$, $0\le r<1$, получаем оценку

$$\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}}\le|h'(z)|\le\frac{1}{(1-r^n)^{2/n}}.$$

Комбинируя данную оценку с (13), получаем

$$\left(\frac{1-r^n}{1+b_1r^n}\right)^\delta\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}}\le|g'(z)|\le\left(\frac{1+r^n}{1-b_1r^n}\right)^\delta\frac{1}{(1-r^n)^{2/n}},$$

которая вместе с (12) приводит к оценке (11).

Для доказательства точности оценки (11) рассмотрим функцию

$$f_0(z)=\int_0^z\varphi_0(t^n)\psi_0(t^n)h_0'(t^n)dt, \tag{14}$$

где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-a_1 z}\right)^{\gamma}, \quad \psi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-b_1 z}\right)^{\delta}, \quad h_0(z) = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} \in S_n^{\circ}.$$

Тогда $f_0 \in CK_n(a,\gamma,b,\delta)$, так как $f_0'(z)/g_0'(z) = \varphi_0(z^n) \in \mathcal{P}_n(a,\gamma)$ и $g_0'(z)/h_0'(z^n) = \psi_0(z^n) \in \mathcal{P}_n(b,\delta)$. Поскольку

$$f_0'(z) = \left(\frac{1+z^n}{1-a_1 z^n}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+z^n}{1-b_1 z^n}\right)^{\delta}\frac{1}{(1-z^n)^{2/n}},$$

то в точках $z = \sqrt[n]{-1}\, r$ и $z = r$ в оценке (11) соответственно слева и справа достигаются знаки равенства. Следовательно, оценка (11) является точной.

Теорема 1 доказана.

2. Теорема вращения

Теорема 2. Пусть $f \in CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ и $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \le r < 1$ имеет место оценка

$$|\arg f'(z)| \le \gamma \arcsin\frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1 r^{2n}} + \delta \arcsin\frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1 r^{2n}} + \frac{2}{n}\arcsin r^n. \qquad (15)$$

Доказательство. Поскольку $\varphi(z) = f'(z)/g'(z) \in \mathcal{P}_n(a,\gamma)$, то

$$\varphi^{1/\gamma}(z) \prec w(z) = \frac{1+z}{1-a_1 z}.$$

Учитывая, что $w(z)$ отображает круг E на круг $|w-a| < a$, в силу подчиненности $\varphi^{1/\gamma}(z) \prec w(z)$ получаем $\varphi^{1/\gamma}(|z| \le r) \subset w(|z| \le r^n)$. Так как $w(|z| \le r^n)$ – круг $|w - C(r)| < R(r)$, где

$$C(r) = \frac{1+a_1 r^{2n}}{1-a_1 r^{2n}}, \quad R(r) = \frac{(1+a_1)r^n}{1-a_1 r^{2n}},$$

то при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, выполняется неравенство $\left|\varphi^{1/\gamma}(z) - C(r)\right| < R(r)$. Отсюда нетрудно найти, что

$$\left|\frac{1}{\gamma}\arg\varphi(z)\right| = \left|\arg\varphi^{\frac{1}{\gamma}}(z)\right| \le \arcsin\frac{R(r)}{C(r)},$$

то есть

$$\left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| \le \gamma \arcsin\frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1 r^{2n}}.$$

Аналогично с учетом соотношения

$$\left(\frac{g'(z)}{h'(z)}\right)^{1/\delta} \prec w_1(z) = \frac{1+z}{1-b_1 z}$$

получаем, что

$$\left|\arg\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| \le \delta \arcsin\frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1 r^{2n}}.$$

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что $h'(z) \prec 1/(1-z)^{2/n}$ или $(h'(z))^{n/2} \prec 1/(1-z)$. Поэтому аналогично предыдущему находим

$$|\arg\, h'(z)| \le \frac{2}{n}\arcsin r^n.$$

С учетом этого окончательно выводим

$$|\arg f'(z)| \equiv \left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\frac{g'(z)}{h'(z)}h'(z)\right| \le \left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| + \left|\arg\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| + |\arg h'(z)| \le$$
$$\gamma \arcsin\frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1 r^{2n}} + \delta \arcsin\frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1 r^{2n}} + \frac{2}{n}\arcsin r^n,$$

что и требовалось доказать.

3. Радиусы выпуклости

Теорема 3. Точный радиус выпуклости порядка α класса $CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ является принадлежащим интервалу $(0;1)$ корнем уравнения

$$\frac{1-r^n}{1+r^n}-\alpha-\frac{nr^n}{1-r^n}\left(\frac{\gamma(1+a_1)}{1+a_1r^n}+\frac{\delta(1+b_1)}{1+b_1r^n}\right)=0, \tag{16}$$

где $a_1=1-1/a$, $b_1=1-1/b$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, обозначив $\varphi(z)==f'(z)/g'(z)$, $\psi(z)=g'(z)/h'(z)$, получаем $f'(z)=h'(z)\varphi(z)\psi(z)$, откуда

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}+z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

В силу этого в круге $|z|\le r$ имеем

$$1+\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\ge\min_{|z|\le r}\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right\}-\max_{|z|\le r}\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|-\max_{|z|\le r}\left|z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right|. \tag{17}$$

Поскольку $h(z)\in S_n^{\circ}$, то $1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\prec\frac{1+z}{1-z}$, откуда получаем, что

$\min\limits_{|z|\le r}\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right\}\ge\frac{1-r^n}{1+r^n}$. С учетом этого и применяя дважды оценку (4) к функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, в силу (17) находим

$$1+\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\ge\frac{1-r^n}{1+r^n}-\frac{\gamma(1+a_1)nr^n}{(1-r^n)(1+a_1r^n)}-\frac{\delta(1+b_1)nr^n}{(1-r^n)(1+b_1r^n)}.$$

Отсюда следует, что функция $f(z)$ будет выпуклой порядка α в круге $|z|\le r$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1-r^n}{1+r^n}-\frac{\gamma(1+a_1)nr^n}{(1-r^n)(1+a_1r^n)}-\frac{\delta(1+b_1)nr^n}{(1-r^n)(1+b_1r^n)}=\alpha. \tag{18}$$

То есть приходим к уравнению (16).

Докажем теперь, что уравнение (18) имеет единственный корень $r_0\in(0;1)$. Действительно, функция $\mu_1(r)=(1-r^n)/(1+r^n)$ монотонно убывает на $[0;1]$ от $\mu_1(0)=1$ до $\mu_1(1)=0$, а функции

$$\mu_2(r)=\frac{\gamma(1+a_1)nr^n}{(1-r^n)(1+a_1r^n)},\qquad \mu_3(r)=\frac{\delta(1+b_1)nr^n}{(1-r^n)(1+b_1r^n)}$$

монотонно возрастают на $[0;1]$ от 0 до $+\infty$ при $a,b>1/2$, $0<\gamma,\delta\le 1$. Поэтому в силу возрастания функции $\mu_2(r)+\mu_3(r)$ на $[0;1]$ от 0 до $+\infty$ и убывания функции $\mu_1(r)$ на $[0;1]$ от 1 до 0 получаем, что уравнение (18), а значит, и (16), на $(0;1)$ имеет единственный корень r_0.

Для доказательства точности радиуса выпуклости рассмотрим экстремальную функцию $f_0(z)$, заданную по формуле (14). Тогда

$$1+\ z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}=\frac{1+z^n}{1-z^n}+z\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}+z\frac{\psi_0'(z)}{\psi_0(z)}$$

и, учитывая, что в оценке (4) знак равенства достигается в точке $z=\sqrt[n]{-1}r$, в силу леммы 1 в точке $z=\sqrt[n]{-1}$

$$1+\mathrm{Re}\frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)}=\mathrm{Re}\frac{1+z^n}{1-z^n}-\mathrm{Re}\frac{z\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}-\ \mathrm{Re}\frac{z\psi_0'(z)}{\psi_0(z)}=$$
$$=\frac{1-r_0^n}{1+r_0^n}-\frac{\gamma(1+a_1)nr_0^n}{(1-r_0^n)(1+a_1r_0^n)}-\frac{\delta(1+b_1)nr_0^n}{(1-r^n)(1+b_1r_0^n)}=\alpha.$$

Таким образом, в условии выпуклости $1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \geq \alpha$ порядка α в точке $z = \sqrt[n]{-1}\, r_0$ достигается знак равенства, следовательно, и радиус выпуклости порядка α увеличить нельзя.

Теорема 3 доказана.

4. Некоторые частные случаи

Следствие 1 ($a \to \infty$, $b \to \infty$). Пусть $f \in \mathcal{L}_n(\gamma,\delta)$, то есть выполняются условия (7), где $f, g \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^{\circ}$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$ имеют место оценки

$$\frac{(1-r^n)^{\gamma+\delta}}{(1+r^n)^{\gamma+\delta+2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r^n)^{\gamma+\delta}}{(1-r^n)^{\gamma+\delta+2/n}}, \tag{19}$$

$$|\arg f'(z)| \leq (\gamma+\delta)\arcsin\frac{2r^n}{1+r^{2n}} + \frac{2}{n}\arcsin r^n \tag{20}$$

и радиус выпуклости класса $\mathcal{L}_n(\gamma,\delta)$ определяется по формуле

$$r_0(\gamma,\delta) = \left(1 + n(\gamma+\delta) - \sqrt{\left(1+n(\gamma+\delta)\right)^2 - 1}\right)^{1/n}. \tag{21}$$

Действительно, если $a \to \infty$, $b \to \infty$, то $a_1 \to 1$, $b_1 \to 1$, класс $CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ преобразуется в класс $\mathcal{L}_n(\gamma,\delta)$, оценки (11), (15) – в оценки (19), (20), а уравнение (18) при $\alpha = 0$ – в уравнение $r^{2n} - 2\left(1+n(\gamma+\delta)\right)r^n + 1 = 0$, откуда вытекает формула (21) для точного радиуса выпуклости $r_0(\gamma,\delta)$ класса $\mathcal{L}_n(\gamma,\delta)$.

Заметим, что при $n = 1$ оценка (19) и радиус выпуклости (21) дают результаты из [7]. Кроме того, из формулы (21) также вытекает точный радиус выпуклости $r_0(1,1) = 3 - \sqrt{8}$ класса дважды почти выпуклых функций $f \in \mathcal{N}$, заданного условиями $\operatorname{Re}\{f'(z)/g'(z)\} > 0$ и $\operatorname{Re}\{g'(z)/h'(z)\} > 0$, где $h \in S^{\circ}$.

Следствие 2 ($\gamma = \delta = 1$). Пусть $f \in \mathcal{CC}_n(a,b)$, то есть выполняются условия (8), где $f, g \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^{\circ}$, и пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место оценки

$$\frac{(1-r^n)^2}{(1+r^n)^{2/n}}\frac{1}{(1+a_1r^n)(1+b_1r^n)} \leq |f'(z)| \leq$$
$$\leq \frac{(1+r^n)^2}{(1-r^n)^{2/n}}\frac{1}{(1-a_1r^n)(1-b_1r^n)}, \quad (22) \tag{22}$$

$$|\arg f'(z)| \leq \arcsin\frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1r^{2n}} + \arcsin\frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1r^{2n}} + \frac{2}{n}\arcsin r^n$$

и радиусом выпуклости класса $\mathcal{CC}_n(a,b)$ является единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$(a+b-ab-1)(r^{4n} - 4r^{3n}) - (5a+5b-10ab-1)r^{2n} + ab(4r^n - 1) = 0.$$

При $n = 1$ оценка (22) и радиус выпуклости класса $\mathcal{CC}_n(a,b)$ совпадают с результатами статьи [8, теоремы 4 и 6] для класса $\mathcal{CC}(a,b)$.

Следствие 3 ($b \to \infty$, $\delta \to 0$). Пусть $f \in K_n(a,\gamma)$, то есть $f(z)$ удовлетворяет условию (9), где $f \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^{\circ}$, и пусть $a_1 = 1 - 1/a$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место оценки

$$\frac{(1-r^n)^{\gamma}}{(1+a_1r^n)^{\gamma}(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r^n)^{\gamma}}{(1-a_1r^n)^{\gamma}(1-r^n)^{2/n}}, \tag{23}$$

$$|\arg f'(z)| \leq \gamma\arcsin\frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1r^{2n}} + \frac{2}{n}\arcsin r^n$$

и радиус выпуклости класса $K_n(a,\gamma)$ равен $r_0 = \sqrt[n]{t_0}$, где t_0 – единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$[a + (a-1)t](1-t)^2 - (2a-1)\gamma nt(1+t) = 0. \tag{24}$$

При $a \to \infty$, $n = 1$ класс $K_n(a,\gamma)$ преобразуется в класс $K(\gamma)$ почти выпуклых функций порядка γ и из следствия 3 получаем

$$\frac{(1-r)^{\gamma}}{(1+r)^{\gamma+2}} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r)^{\gamma}}{(1-r)^{\gamma+2}}, \tag{25}$$

$$|\arg f'(z)| \le \gamma \arcsin \frac{2r}{1+r^2} + 2\arcsin r \tag{26}$$

и радиус выпуклости класса $K(\gamma)$ равен $r_0 = 1 + \gamma - \sqrt{(1+\gamma)^2 - 1}$.

Оценка (25) ранее была получена в [5], а при $\gamma = 1$ оценка (26) – в [9] и радиус выпуклости – в [10].

При $a = 1$ из (24) получаем уравнение $(\gamma n - 1)t^2 + (2 + \gamma n)t - 1 = 0$, из которого вытекает радиус выпуклости

$$r_0 = \begin{cases} \sqrt[n]{\left(\sqrt{n^2 + 8\gamma n} - 2 - \gamma n\right)/(2\gamma n - 2)} & \text{при } \gamma n \ne 1, \\ \sqrt[n]{1/(2+\gamma n)} & \text{при } \gamma n = 1. \end{cases}$$

класса функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1/\gamma} - 1\right| < 1$, $0 < \gamma \le 1$, где $f \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^{\circ}$. При $\gamma = n = 1$ отсюда получаем радиус выпуклости [11–12] $r_0 = 1/3$ подкласса почти выпуклых функций, удовлетворяющих условию $|f'(z)/g'(z) - 1| < 1$, $g \in S^{\circ}$.

5. Почти звездообразные функции

С классом K почти выпуклых функций $f(z)$ тесно связан класс CS^* почти звездообразных функций $F(z)$, который был введен в [13] с помощью условия

$$\frac{F(z)}{G(z)} \prec \varphi_0(z),\ \varphi_0(z) \in \mathcal{P}, \tag{27}$$

где $G \in S^*$. Если условие (5) записать в виде

$$\frac{zf'(z)}{zg'(z)} \prec \varphi_0(z),\ \varphi_0(z) \in \mathcal{P}$$

и обозначить

$$F(z) = zf'(z) \text{ и } G(z) = zg'(z), \tag{28}$$

то учитывая, что $g \in S^{\circ} \Leftrightarrow G = zg' \in S^*$, видим, что с помощью соотношений (28) осуществляется переход от класса K к классу CS^* и обратно.

Если выполняется условие (27), причем $G \in CS^*$, то $F(z)$ называется дважды почти звездообразной функцией (close-to-starlike functions).

Определение 2. Пусть $a, b > 1/2$, $0 < \gamma, \delta \le 1$. Будем говорить, что функция $F(z)$ из $\mathcal{N}_n$ принадлежит классу $CS_n^*(a,\gamma,b,\delta)$ дважды почти звездообразных функций тогда и только тогда, когда существует функция $G(z)$ из $\mathcal{N}_n$ такая, что выполняются условия

$$\left|\left(\frac{F(z)}{G(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a, \text{ и } \left|\left(\frac{G(z)}{H(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b, \tag{29}$$

при этом $H \in S_n^*$.

Между функциями классов $CS_n^*(a,\gamma,b,\delta)$ и $CK_n(a,\gamma,b,\delta)$ существует простая связь:

$$f(z) \in CK_n(a,\gamma,b,\delta) \quad \Leftrightarrow \quad F(z) = zf'(z) \in CS_n^*(a,\gamma,b,\delta).$$

В силу этой взаимосвязи с учетом того, что $f \in S^{\circ} \Leftrightarrow G(z) = zg'(z) \in S^*$, из теорем 1–3 вытекает

Теорема 4. Пусть $F \in CS_n^*(a,\gamma,b,\delta)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, имеют место оценки

$$\frac{r}{(1+a_1r^n)^{\gamma}(1+b_1r^n)^{\delta}} \frac{(1-r^n)^{\gamma+\delta}}{(1+r^n)^{2/n}} \le |F(z)| \le$$
$$\le \frac{(1+r^n)^{\gamma+\delta}}{(1-r^n)^{2/n}} \frac{r}{(1-a_1r^n)^{\gamma}(1-b_1r^n)^{\delta}}, \tag{30}$$

$$\left|\arg\frac{F(z)}{z}\right| \le \gamma \arcsin\frac{(1+a_1)r^n}{1+a_1r^{2n}} + \delta \arcsin\frac{(1+b_1)r^n}{1+b_1r^{2n}} + \frac{2}{n}\arcsin r^n \qquad (31)$$

и радиус звездообразности порядка α класса $CS_n^*(a,\gamma,b,\delta)$ определяется как единственный на $(0;1)$ корень уравнения (16).

Поскольку функция $H(z)=\frac{z}{(1-z^n)^{2/n}}$ является экстремальной для класса S_n^*, то теорема 4 остается справедливой и для класса $\widehat{CS}_n^*(a,\gamma,b,\delta)$ дважды почти звездообразных функций $F(z)$ из $\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left|\left(\frac{F(z)}{G(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|<a, \text{ и } \left|\left((1-z^n)^{\frac{2}{n}}\frac{G(z)}{z}\right)^{1/\delta}-b\right|<b.$$

Если $b\to\infty$, $\delta\to 0$, то этот класс преобразуется в класс $\widehat{CS}_n^*(a,\gamma)$ почти звездообразных функций $F(z)$ из $\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию

$$\left|\left((1-z^n)^{\frac{2}{n}}\frac{F(z)}{z}\right)^{1/\gamma}-a\right|<a.$$

Класс $\widehat{CS}_n^*(a,\gamma,b,\delta)$ является обобщением классов $\Pi_1=\widehat{CS}_1^*(\infty,1,\infty,1)$, $\widehat{CS}_1^*(1,1,\infty,1)$ из [14], класса $\mathcal{F}_4=\widehat{CS}_1^*(\infty,1)$ из [15], а также в случае, когда $F\in\mathcal{N}_2$, классов $\mathcal{K}_1=\widehat{CS}_2^*(\infty,1,\infty,1)$, $\mathcal{K}_2=\widehat{CS}_2^*(1,1,\infty,1)$, $\mathcal{K}_3=\widehat{CS}_2^*(\infty,1)$ из [16]. Поэтому из теоремы 4 вытекают радиусы звездообразности порядка α классов Π_1, Π_2 из [14] $r^*(\alpha;\,\Pi_1)=3-\sqrt{8+\alpha^2}$, $r^*(\alpha;\,\Pi_2)=\left(5-\sqrt{25-4\alpha+4\alpha^2}\right)/(2\alpha)$ и класса $\mathcal{F}_4$ из [15] $r^*(\alpha;\mathcal{F}_4)=\left(2-\sqrt{3+\alpha^2}\right)/(1+\alpha)$, а также в дополнение к результатам [14–15] – оценки $|F(z)|$ и $|\arg\,(F(z)/z)|$. Кроме того, теорема 4 дает уточнение радиусов звездообразности порядка α классов $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ из [16] в случае, когда $F,G\in\mathcal{N}_2$.

Заключение

В статье исследованы свойства одного класса дважды почти выпуклых функций, который включает целый ряд известных классов дважды почти выпуклых и почти выпуклых функций. Для данного класса получены теоремы искажения, вращения и радиус выпуклости. Установлена связь данного класса дважды почти выпуклых функций с классом дважды почти звездообразных функций и для последнего получены теоремы роста модуля и аргумента функции, а также радиус звездообразности.

Из предстоящих задач считаем перспективным решение вопроса об оценках коэффициентов функций данных классов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2024. – Vol. 21. – No. 2. – С. 127–138. https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138.

2 Suffridge T.J. Some remarks on convex maps of the unit disk // Duke Math. J. – 1970. – No. 37. – P. 755–777. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-70-03792-0.

3 Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. – 1952. – Vol.1. – No. 2. – P. 169–185. https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895.

4 Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23. – No. 3. – P. 459–462. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

5 Renyi A. Some remarks on univalent functions // An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec. – 1959. – A.3. – P. 111–121. http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf.

6 Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 28. – No. 2. – P. 519–524. https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf

7 Dorff M., Naraniecka I., Szynal J. Doubly close-to-convex functions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – No. 290. – P. 55–62. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050.

8 Raducanu D. Bounded doubly close-to-convex functions. – Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Article ID 804095. – P. 7. http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095.

9 Krzyz J. On the derivative of close-to-convex functions // Colloq. Math. – 1963. – No. 10. – P. 143–146.

10 Hayman W.K. Multivalent functions // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1994. – No. 110. – 276 p.

11 Vasudevarao A., Sokół J., Thomas D.K. On a close-to-convex analogue of certain starlike functions // Bull. Aust. Math. Soc. – 2020. – Vol. 102. – No. 2. – P. 268–281. https://doi.org/10.1017/S0004972719001606.

12 Ratti J.S. The radius of convexity of certain analytic functions II // Intern. J. of Math. and Math. Scie. – 1980. – Vol. 3. – No. 3. – P. 483–489. https://doi.org/10.1155/s0161171280000361.

13 Reade M.O. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J. – 1955. – No. 3. – P. 59–62.

14 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734. – 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734.

15 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. – 2021. – Vol. 71. – No. 1. – P. 83–104. https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454.

16 Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744.

REFERENCES

1 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A. and Ysmagul R.S. Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness of some classes of starlike and close-to-starlike functions. Herald of the Kazakh-British technical university, 21(2), 127–138 (2024). [In Russian]. https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138.

2 Suffridge T.J. Some remarks on convex maps of the unit disk. Duke Math. J., 37, 755–777 (1970). https://doi.org/10.1215/S0012-7094-70-03792-0.

3 Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J., 1(2), 169–185 (1952). https: //doi.org/10.1307/mmj/1028988895.

4 Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions. Duke Math. J., 23(3), 459–462 (1956). https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

5 Renyi A. Some remarks on univalent functions. An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec., A.3, 111–121 (1959). http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf

6 Hengartner W. and Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction. Proc. Amer. Math. Soc., 28(2), 519–524 (1971). https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf

7 Dorff M., Naraniecka I. and Szynal J. Doubly close-to-convex functions. J. Math. Anal. Appl., 290, 55–62 (2004). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050

8 Raducanu D. Bounded doubly close-to-convex functions. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 804095, 7 p. (2014). http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095.

9 Krzyz J. On the derivative of close-to-convex functions. Colloq. Math., 10, 143–146 (1963).

10 Hayman W.K. Multivalent functions. Cambridge Tracts in Mathematics, 110, 276 p. (1994)

11 Vasudevarao A., Sokół J. and Thomas D.K. On a close-to-convex analogue of certain starlike functions. Bull. Aust. Math. Soc., 102, Is. 2, 268-281 (2020). https://doi.org/10.1017/S0004972719001606

12 Ratti J.S. The radius of convexity of certain analytic functions II. Intern. J. of Math. and Math. Scie., 3(3), 483–489 (1980). https://doi.org/10.1155/s0161171280000361

13 Reade M.O. On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J., 3, 59-62 (1955).

14 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V. and Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11734 (2020). https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734.

15 Sebastianc A. and Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions. Math. Slovaca, 71(1), 83-104 (2021). https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454.

16 Khatter K., Lee S. K. and Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11744 (2020). https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

[1]***Майер Ф.Ф.,**
физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
*e-mail: maiyer@mail.ru
[1]**Тастанов М.Г.,**
физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]**Утемисова А.А.,**
пед.ғ.к., ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]**Ысмағұл Р.С.,**
физ.-мат.ғ.к., профессор, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

[1]Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті,
Қостанай қ., Қазақстан

ЕКІ ЕСЕ ДЕРЛІК ДӨҢЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР КЛАСТАРЫ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Мақалада авторлардың алдыңғы зерттеу жұмыстарының бірінде алынған нәтижелер негізінде (Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 2024, 21(2), б. 127-138), f(z) функцияларының $E = \{z: |z| < 1\}$ бірлік шеңберіндегі екі есе дерлік дөңес класы енгізіліп, төмендегі шарттардың көмегімен зерттеу жұмысы жүргізілді:

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a \quad \text{и} \quad \left|\left(\frac{g'(z)}{h'(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b,$$

мұндағы f(z), g(z) және h(z) функцияларында $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, n \geq 1, z \in E$, және h(z) функциясы дөңес. Бұл сыныпта бұрмалау, айналу және дөңес радиус теоремалары орнатылған. Ерекше жағдайларда екі есе дерлік дөңес және дөңес функциялар үшін бұрын белгілі және бірқатар жаңа түпнұсқа нәтижелер алынды. Осы сыныпқа сүйене отырып, өсу теоремасы мен жұлдыз тәрізді радиусы табылған жұлдыз тәрізді функциялардың екі еселенген класы енгізілді. Параметрлердің нақты мәндерінде жұлдыз тәрізді функциялар үшін бұрын белгілі нәтижелер бар.

Тірек сөздер: бір жапырақты функциялар, дөңес дерлік функциялар, жұлдыз тәрізді дерлік функциялар, дөңес радиустары, жұлдыздық радиустар.

[1]***Maiyer F.F,**
Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
*e-mail: maiyer@mail.ru
[1]**Tastanov M.G.,**
Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]**Utemissova A.A.,**
Cand. Ped. Sc., ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]**Ysmagul R.S.,**
Cand. Phys.-Math. Sc., Professor, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

[1]Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Kazakhstan

ON SOME CLASSES OF DOUBLY NEARLY CONVEX FUNCTIONS

Abstract

Based on the results obtained by the authors in one of the previous articles (Bulletin of the Kazakh-British Technical University, 2024, 21(2), pp.127-138), the class of doubly close-to-convex in the unit disk $E = \{z: |z| < 1\}$ of the functions f(z), set using the conditions

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a \;\; \text{и} \;\; \left|\left(\frac{g'(z)}{h'(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b,$$

where the functions f(z), g(z) and h(z) have expansions of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, n \geq 1, z \in E$, and the function h(z) is convex. In this class, the theorems of distortion, rotation and radius of convexity are established. In particular cases, we obtain both a number of previously known and a number of new original results for doubly close-to-convex and close-to-convex functions. Based on this class, a class of doubly close-to-starlike functions is introduced, for which the growth theorem and the star radius are found. For specific values of the parameters previously known results for close-to-starlike functions are obtained.

Keywords: univalent functions, close-to-convex functions, close-to-starlike functions, radius of convexity, radius of starlikeness.

Дата поступления статьи в редакцию: 18.02.2025