

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICAL SCIENCES
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ӘОЖ 517.95
ҒТАХР 27.31.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-2-155-164>

^{1*}Кошанова М.Д.,

т.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

¹Муратбекова М.А.,

PhD, доцент м.а., ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

e-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

^{1,2}Турметов Б.Х.,

физ.-мат.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0001-7735-6484,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

¹Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан

²Альфраганус университеті, Ташкент қ., Өзбекстан

БИГАРМОНИЯЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ БЕЙЛОКАЛ АНАЛОГЫ
ҮШІН КЕЙБІР СПЕКТРЛІК ЕСЕПТЕР ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Дирихле шеттік шартымен берілген классикалық бигармониялық оператордың меншікті функциялар жүйесі L_2 кеңістігінде толық және ортонормальды екені белгілі. Осы меншікті функцияларға сәйкес келетін меншікті мәндер оң және өсу ретімен нөмірленуі мүмкін. Кейбір жағдайларда толқытылған бигармониялық оператор үшін шеттік есептердің меншікті функциялары мен меншікті мәндері ұқсас қасиеттерге ие болады. Бұл жұмыста ортогональды матрицаларды пайдалана отырып толқытылған бигармониялық оператордың бейлокал аналогы енгізіледі. Бұл оператор үшін екі шекаралық есептердің спектрлік мәселелері зерттеледі. Бірінші есепте Дирихле шекаралық шарттары, екіншісінде Дирихле түріндегі шарттар қарастырылады. Бірінші есепті зерттеу барысында толқытылған бигармониялық оператор үшін Дирихле есебінің меншікті функциялар жүйесінің толықтық қасиетін қолданамыз. Осы жүйелердің қасиеттерін, сондай-ақ ортогональды матрицалармен анықталатын бейнелеулердің қасиеттерін пайдалана отырып, біз негізгі есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін табамыз. Екінші есепте Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері қолданылады. Бұл жүйелердің айқын түрін, сонымен қатар осы жүйелердің қасиеттерін пайдалана отырып, екінші есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері құрылады. Қарастырылатын есептердің меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістігінде толықтығы туралы теоремалар дәлелденді.

Тірек сөздер: ортогональды матрица, бейлокал бигармониялық оператор, Дирихле есебі, Дирихле түріндегі есеп, меншікті мәндер, меншікті функциялар, жүйенің толықтығы.

Кіріспе

Ортогональды матрицаларды пайдаланып, толқытылған бигармониялық оператордың бейлокал аналогы енгізіле отырып, екі шекаралық есептер зерттеледі. Бірінші есепте Дирихле шекаралық шарттары, екіншісінде Дирихле түріндегі шарттар қарастырылады. Екінші есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері беріледі. Қарастырылатын есептердің меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістігінде толықтығы туралы теоремалар дәлелденеді.

Бұл жұмыста толқытылған бигармониялық оператордың бейлокал аналогы үшін кейбір шеттік есептердің спектрлік мәселелері зерттеледі. Біз қарастыратын теңдеулер көп айнымалды ығысулары бар дифференциалдық теңдеулер класына жатады. Аргументтері түрлендірілген дифференциалдық теңдеулердің көптеген түрлері бар, олардың ішінде аргументтің жылжулары инволютивтік сипатта болатын теңдеулер ерекше орын алады. Егер Sx түрлендіру $S^2x = x$ қасиетке ие болса оны инволюция деп атайды. Инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулер қазіргі заман ғылымының әртүрлі салаларында көптеген қолданыстарға ие. Мысалы, [1, 2] жұмыстарда мұндай теңдеулерді жылулық диффузияның нақты физикалық процесін модельдеуде қолданысы көрсетілген, ал [3, 4] жұмыстарда оптикалық жүйелерді модельдеуде аргументтері түрленетін дифференциалдық теңдеулер қарастырылған. Инволюциясы бар қарапайым дифференциалдық операторларға байланысты туындайтын спектрлік мәселелер бірінші ретті операторлар үшін [5–7], екінші ретті операторлар үшін [8–11] және жоғары ретті операторлар үшін [12–14] қарастырылған.

Материалдар мен әдістер

Енді осы жұмыста қарастырылатын есептердің қойылымына өтейік. Айталық, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, α, β – нақты сандар болсын. Келесі $\Delta_{\alpha, \beta}^2 = \Delta^2 + \alpha(-\Delta) + \beta$ түрдегі 4-ші ретті дифференциалдық операторды қарастырайық. Егер $\alpha = \beta = 0$ болса, онда $\Delta_{0,0}^2 = \Delta^2$ бигармониялық оператор болады.

Ω символымен $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$ – бірлік шары, $\partial\Omega$ бірлік сфераны, ал Q деп қандайда бір $l \in \mathbb{N}$ үшін $Q^l = E$ және $k < l$ $Q^k \neq E$ шарттарды қанағаттандыратын, $n \times n$ өлшемді нақты ортогональды матрицаны белгілейік. Бұл жерде E – бірлік матрица.

Q бейнелеуін қолдана отырып, келесі

$$L_{Q, \alpha, \beta} u(x) = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \Delta_{\alpha, \beta}^2 u(Q^i x),$$

түрдегі бейлокал операторды енгіземіз, мұндағы $a_0, a_1, \dots, a_l$ – берілген нақты сандар.

Ω облысында келесі есептерді қарастырайық.

1-есеп. $C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ класында жататын, келесі

$$L_{Q, \alpha, \beta} u(x) = \lambda u(x), x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(x) = 0, \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \neq 0$ функциясы және $\lambda \in \mathbb{C}$ санын табу керек. Мұндағы ν – векторы $\partial\Omega$ сферасына жүргізілген сыртқы нормаль вектор, $\mathbb{C}$ – комплекс сандар жиыны.

2-есеп. $C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ класында жататын, (1.1)-теңдеуін және

$$u(x) = 0, \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega \quad (1.3)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \neq 0$ функциясымен $\lambda \in \mathbb{C}$ санын табу керек.

1 және 2-есептер бейлокал Лаплас операторы үшін [15, 16] жұмыстарда зерттелген.

Нәтижелер мен талқылау

1-есепті зерттеу.

$w_k(x)$ функциялары және μ_k сандары келесі

$$\Delta_{\alpha,\beta}^2 w(x) = \mu w(x), x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$w(x) = 0, \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

түрде берілген Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болады деп ұйғарым жасайық.

Егер α және β теріс емес нақты сандар болса, онда анықталу облысы

$$D(\Delta_{\alpha,\beta}^2) = \left\{ w(x) \in C^4(\bar{\Omega}): w(x) = 0, \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega \right\}$$

түрінде берілген $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ операторы өз өзіне түйіндес және оң анықталған оператор болып табылады, яғни кез келген $w(x) \in D(\Delta_{\alpha,\beta}^2)$ үшін $(\Delta_{\alpha,\beta}^2 w, w) \geq C(w, w)$ теңсіздігі орындалатындай $C > 0$ тұрақтысы табылады. Бұл жағдайда $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ оператордың μ_k меншікті мәндері нақты әрі оң сандар болып табылады, ал $w_k(x)$ меншікті функциялары $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық ортонормальданған жүйе құрайды (мысал үшін қараңыз, [17]).

$\varepsilon_j = e^{i2\pi j/m} \in \mathbb{C}, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандары $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі, ал $w(x)$ функция және μ саны (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциясы мен меншікті мәндері болсын делік. Мына функцияны қарастырайық:

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w(Q^i x). \quad (2.3)$$

2.1-лемма. Егер $w(x)$ функция және μ саны (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциясы мен меншікті мәні болса, онда барлық $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандарға сәйкес келетін $u_j(x)$ функциялары (2.1), (2.2) есебінің шарттарын қанағаттандырады.

Дәлелдеуі: I_Q операторы мына $I_Q u(x) = u(Qx)$ түрде берілген, ал $\Lambda = r \frac{\partial}{\partial r}, \Lambda^{[2]} = \Lambda(\Lambda - 1)$ болсын. [21] жұмыста мына теңдіктер дәлелденген

$$\Delta I_Q u(x) = I_Q \Delta u(x), \Lambda I_Q u(x) = I_Q \Lambda u(x).$$

Осы теңдіктердің біріншісінен $\Delta_{\alpha,\beta}^2 I_Q u(x) = I_Q \Delta_{\alpha,\beta}^2 u(x)$ нәтижені аламыз. Егер (2.3)-теңдікке $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ операторын қолдансақ, онда

$$\Delta_{\alpha,\beta}^2 u_j(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \Delta_{\alpha,\beta}^2 w(Q^i x) = \frac{\mu}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w(Q^i x) = \mu u_j(x), x \in \Omega.$$

Сонымен қатар, егер $x \in \partial\Omega$ болса, онда i параметрдің $i = 0, 1, \dots, l-1$ мәндерінде $Q^i x \in \partial\Omega$ және сондықтан да (2.2) теңдігінен келесі шарттардың орындалатындығы келіп шығады

$$w(Q^i x) = 0, \frac{\partial}{\partial \nu} I_{Q^i} w(x) = \Lambda(I_Q w(x)) = I_Q(\Lambda w(x)) = I_{Q^i} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = 0, 0 \leq i \leq l-1,$$

мұндағы $x \in \partial\Omega$. Ендеше, $u_j(x)$ функциялары (2.1), (2.2) есебінің шарттарын қанағаттандырады. Лемма дәлелденді.

Ары қарай, $u_j(x)$ функциялары үшін келесі $u_j(Qx) = \bar{\varepsilon}_j u_j(x)$ теңдіктің орындалатынына көз жеткізу қиын емес.

Сондықтан, кез келген $1 \leq q \leq l-1$ (тіпті $q \in \mathbb{N}_0$ болғанда да) үшін келесі теңдік орындалады

$$u_j(Q^q x) = \bar{\varepsilon}_j^q u_j(x) \quad (2.5)$$

2.1-лемма нәтижесі бойынша $u_j(x)$ функциялары (2.1), (2.2) есептің меншікті функциялары болады. Олай болса, (2.5) теңдігін қолдана отырып, біз келесіні аламыз

$$\begin{aligned} (-\Delta)^m \left(\sum_{q=0}^{l-1} a_q u_j(Q^q x) \right) &= (-\Delta)^m \left(\sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q u_j(x) \right) = (-\Delta)^m u_j(x) \left(\sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q \right) = \\ &= \mu u_j(x) \sigma_j = \lambda_j u_j(x), \end{aligned}$$

мұнда $\lambda_j = \mu \sigma_j$, $\sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q$.

Ендеше, келесі тұжырым дәлелденді.

2.2-лемма. $w(x)$ функциясы және μ саны (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциясы мен меншікті мәндері болсын. Егер $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандары $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі болса, онда (2.3) теңдігіндегі $u_j(x)$ функциялары және μ саны 1-есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болып табылады.

Айталық, $\{w_k(x), \mu_k\}_{k=1}^\infty$ жүйе (2.1), (2.2) Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндерінің толық жүйесі, ал $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ сандары $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің шешімдерінің бірі болсын.

Әрбір $w_k(x)$ функциялары үшін

$$u_{k,j}(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x), \quad (2.6)$$

түрде берілген l функцияларды және де

$$\lambda_{k,j} = \mu_k \sigma_j, \sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q, \quad (2.7)$$

сандарды анықтаймыз.

2.1-теорема. Айталық, 1-Есепте $a_q, q = 0, 1, \dots, l-1$ коэффициенттері барлық $j = 0, 1, \dots, l-1$ үшін $\sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \bar{\varepsilon}_j^q \neq 0$ шарттары орындалатындай етіп таңдап алынған болсын. Онда (2.6) және (2.7) формулалармен берілген $u_{k,j}(x)$ функциялары және $\lambda_{k,j}$ сандары сәйкесінше 1-Есептің меншікті функциялары және меншікті мәндері болып табылады.

Бұған қосымша $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1}^\infty, j=0$ функциялар жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық болады.

Дәлелдеуі. $\{u_{k,j}(x), \lambda_{k,j}\}$ жүйе 1-Есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болатыны туралы тұжырым 2.2-леммадан келіп шығады. Енді $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1}^\infty, j=0$ жүйенің толықтығын дәлелдейік. Айталық, $f(x) \in L_2(\Omega)$ функциясы $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1}^\infty, j=0$ жүйесінің барлық элементтеріне ортогональ болсын делік, яғни $(u_{k,j}, f) = 0$. [18] жұмыста кез-келген $w(x), f(x)$ тегіс функциялар және Q ортогоналды матрица үшін

$$\int_{\Omega} w(Qx) f(x) dx = \int_{\Omega} w(x) f(Qx) dx$$

теңдік орынды болатыны көрсетілген. Осы формуланы қолдансақ, онда

$$\begin{aligned} 0 = (u_{k,j}, f) &= \int_{\Omega} u_{k,j}(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \left[\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x) \right] \overline{f(x)} dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{\Omega} w_k(x) \left(\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \overline{f(Q^i x)} \right) dx, \end{aligned}$$

мұндағы $k \in \mathbb{N}, j = 0, 1, \dots, l-1$. Шартымыз бойынша $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық, сондықтан да келесі $\sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \overline{f(Q^i x)} = 0$ теңдік орынды болады. Ендеше, соңғы теңдікті j бойынша қосып және (2.4) теңдікті қолданатын болсақ, біз мынаны аламыз

$$0 = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i \overline{f(Q^i x)} = \sum_{i=0}^{l-1} \overline{f(Q^i x)} \sum_{j=0}^{l-1} \varepsilon_j^i = \overline{f(x)},$$

олай болса $f(x) = 0$. Бұдан $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1; j=0}^{\infty; l-1}$ жүйесінің толық екендігі шығады. Теорема дәлелденді.

2-есепті зерттеу.

2-есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін құру үшін Лаплас операторы үшін Дирихле шартымен берілген спектральды есеп нәтижелерін қолданамыз. Атап айтқанда, $w_k(x)$ функциялары және μ_k сандар келесі

$$-\Delta w(x) = \mu w(x), x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$w(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.2)$$

Дирихле есебінің сәйкесінше меншікті функциялары мен меншікті мәндері болады деп ұйғарым жасаймыз. $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық және ортонормальданған болады [17].

4.1-лемма. $w_k(x)$ функциялары және $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ сандары келесі түрде берілген шарттарды қанағаттандырады:

$$\Delta_{\alpha,\beta}^2 w(x) = \mu_{\alpha,\beta} w(x), x \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$w(x)|_{\partial\Omega} = \Delta w(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.4)$$

мұндағы $\mu_{\alpha,\beta} = \mu^2 + \alpha\mu + \beta$.

Дәлелдеуі. $\Delta w_k(x) = -\mu_k w_k(x)$ екендігі анық, олай болса осы теңдікке $\Delta_{\alpha,\beta}^2$ операторын қолдана отырып, мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,\beta}^2 w_k(x) &= (\Delta^2 + \alpha(-\Delta) + \beta)w_k(x) = \Delta^2 w_k(x) + \alpha(-\Delta)w_k(x) + \beta w_k(x) = \\ &= \mu_k^2 w_k(x) + \alpha\mu_k w_k(x) + \beta w_k(x) = (\mu_k^2 + \alpha\mu_k + \beta)w_k(x) = \mu_{k,\alpha,\beta} w_k(x). \end{aligned}$$

Сонымен қатар, (3.1)-(3.2) есебінің шекаралық шарттарынан, келесіні алуға болады

$$w_k(x)|_{\partial\Omega} = 0, \Delta w_k(x)|_{\partial\Omega} = -w_k(x)|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega.$$

Осылайша, $w_k(x)$ функциялары (3.3)-(3.4) есебінің шарттарын қанағаттандырады. Лемма дәлелденді.

Енді, 1-есеп жағдайындағыдай $\varepsilon^l = 1$ теңдеуінің $\varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ кез келген түбірлерінің біреуі деп есептеп, әрбір $w_k(x)$ функциялары үшін (2.6) түріндегі $u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функцияларын және (2.7) түріндегі $\lambda_{k,j}$ мәндерін қарастырамыз.

$u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функциялары үшін мына теңдік орынды екендігін ескереміз

$$-\Delta u_{k,j}(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i (-\Delta) w_k(Q^i x) = \frac{\mu_k}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x) = \mu_k u_{k,j}(x), x \in \Omega.$$

Сонымен қатар, $u_{k,j}(x)|_{\partial\Omega} = 0$. Ендеше, $u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функциялары (3.1)-(3.2) есебінің шарттарын қанағаттандырады. Олай болса, 4.1-лемма бойынша бұл функциялар және оларға сәйкес келетін $\mu_{k,\alpha,\beta} = \mu_k^2 + \alpha\mu_k + \beta$ сандар (3.3)-(3.4) есебінің де шарттарын қанағаттандырады. Біз жоғарыда көрсеткеніміздей, $u_{k,j}(x), j = 0, 1, \dots, l-1$ функциялары үшін келесі теңдік $u_{k,j}(Q^q x) = \varepsilon_j^q u_{k,j}(x)$ орынды болады, онда

$$L_{Q,\alpha,\beta} u_{k,j}(x) = \Delta_{\alpha,\beta}^2 \left[\sum_{i=0}^{l-1} a_i u_{k,j}(Q^i x) \right] = \Delta_{\alpha,\beta}^2 \left[\sum_{i=0}^{l-1} a_i \varepsilon_j^i u_{k,j}(x) \right] =$$

$$\mu_{k,\alpha,\beta} \sigma_j u_{k,j}(x) = \lambda_{k,j,\alpha,\beta} u_{k,j}(x),$$

мұндағы $\sigma_j = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \varepsilon_j^i, \lambda_{k,j,\alpha,\beta} = \mu_{k,\alpha,\beta} \sigma_j \cdot \{u_{k,j}(x)\}_{k=1,j=0}^{\infty,l-1}$ меншікті функциялар жүйесінің толықтығы 1-есептің жағдайындағыдай дәлелденеді.

Сонымен, келесі тұжырым дәлелденді.

4.1-теорема. 2-есепте барлық $j = 0, 1, \dots, l-1$ үшін $a_q, q = 0, 1, \dots, l-1$ коэффициенттері мына шартты $\sigma_j = \sum_{q=0}^{l-1} a_q \varepsilon_j^q \neq 0$ қанағаттандыратындай болсын. Егер $w_k(x)$ функциялары және $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ сандары, сәйкесінше, (3.1)-(3.2) есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болса, онда мына функция

$$u_{k,j}(x) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \varepsilon_j^i w_k(Q^i x)$$

және мына сандары $\lambda_{k,j,\alpha,\beta} = \mu_{k,\alpha,\beta} \sigma_j$ 2-есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болып табылады. Сонымен қатар $\{u_{k,j}(x)\}_{k=1,j=0}^{\infty,l-1}$ функциялар жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық болады.

Қорытынды

Бұл жұмыста бигармониялық оператордың бейлокал аналогтары үшін спектрлік мәселелер зерттелді. Бейлокал бигармониялық теңдеу үшін Дирихле және Дирихле типті шеттік шарттармен берілген есептер қарастырылды. Бұл есептердің меншікті функциялары және меншікті мәндері анықталды. Меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістігінде толықтығы туралы теоремалар дәлелденді. Алдағы зерттеулерімізде осы нәтижелерді параболалық және гиперболалық теңдеулердің бейлокал аналогтары үшін бастапқы-шеттік есептерді зерттеуде қолданыстарын қарастыру жоспарланады.

Қаржыландыру туралы ақпарат

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитетінің гранты аясында (грант № AP19677926) қаржыландырылды.

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019. – Vol. 42. – No. 6. – P. 2043–2052. <https://doi.org/10.1002/mma.5498>.

2 Torebek B.T, Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2017. – Vol. 40. – No. 18. – P. 6468–6479. <https://doi.org/10.1002/mma.4468>.

3 Kornuta A.A., Lukianenko V.A. Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 5. – P. 911–930. <https://doi.org/10.1134/S1995080221050073>.

4 Kornuta A. A., Lukianenko V. A. Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. – 2023. – Vol. 69. – No. 2. – P. 276–288. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>.

5 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions // Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 11. – No. 2. – P. 30–39. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-30-39>.

6 Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for functional-differential operators with involution // Journal of Differential Equations. – 2022. – Vol. 318. – No. 5. – P. 169–186. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.02.027>.

7 Granilshchikova Y.A., Shkalikov A.A. Spectral Properties of a Differential Operator with Involution // Moscow Univ. Math. Bull. – 2022. – Vol. 77. – No. 4. – P. 204–208. <https://doi.org/10.3103/S0027132222040040>.

8 Kritskov L.V., Ioffe V.L. Spectral Properties of the Cauchy Problem for a Second-Order Operator with Involution // Differential Equations. – 2021. – Vol. 57. – No. 2. – P. 1–10. <https://doi.org/10.1134/S0012266121010018>.

9 Kritskov L., Sadybekov M., Sarsenbi A. Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43. – No. 1. – P. 393–401. <https://doi.org/10.3906/mat-1809-12>.

10 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution // Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – No. 1972. – P. 1–9. <https://doi.org/10.3390/sym13101972>.

11 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability // AIMS Mathematics. – 2023. – Vol. 8. – No. 11. – P. 26275–26289. <https://doi.org/10.3934/math.20231340>.

12 Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Regular Ordinary Differential Operators with Involution // Math Notes. – 2019. – Vol. 106. – P. 674–687. <https://doi.org/10.1134/S0001434619110026>.

13 Kirane M., Sarsenbi A.A. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative // Fractal and Fractional. – 2023. – Vol. 7. – No. 131. – P. 1–12. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7020131>.

14 Polyakov D.M. On the Bari basis property for even-order differential operators with involution // Tamkang journal of mathematics. – 2023. – Vol. 54. – No. 4. – P. 339 – 351. <http://dx.doi.org/10.5556/j.tkm.54.2023.4899>.

15 Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2023. – Vol. 68. – No. 7. – P. 1204–1218. <https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021>.

16 Turmetov B., Karachik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2879. – No. 1. – P. 1–4. <https://doi.org/10.1063/5.0175246>.

17 Rektorys K., Variational methods in mathematics, science and engineering. – Dordrecht: Springer, 1977. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-6450-4>.

18 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B. Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish journal of mathematics. – 2019. – Vol. 43. – No. 3. – P. 1604–1625. <https://doi.org/10.3906/mat-1901-71>.

REFERENCES

- 1 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42 (6), 2043–2052 (2019). <https://doi.org/10.1002/mma.5498>.
- 2 Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40 (18), 6468–6479 (2017). <https://doi.org/10.1002/mma.4468>.
- 3 Kornuta A.A., Lukianenko V.A. Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42 (5), 911–930 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221050073>.
- 4 Kornuta A.A., Lukianenko V.A. Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 69 (2), 276–288 (2023). <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>.
- 5 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions. *Eurasian Mathematical Journal*, 11 (2), 30–39 (2020). <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-30-39>.
- 6 Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for functional-differential operators with involution. *Journal of Differential Equations*, 318 (5), 169–186 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.02.027>.
- 7 Granilshchikova Y.A., Shkalikov A.A. Spectral Properties of a Differential Operator with Involution. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 77 (4), 204–208 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0027132222040040>.
- 8 Kritskov L.V., Ioffe V.L. Spectral Properties of the Cauchy Problem for a Second-Order Operator with Involution. *Differential Equations*, 57 (2), 1–10 (2021). <https://doi.org/10.1134/S0012266121010018>.
- 9 Kritskov L., Sadybekov M., Sarsenbi A. Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution. *Turkish Journal of Mathematics*, 43 (1), 393–401 (2019). <https://doi.org/10.3906/mat-1809-12>.
- 10 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. *Symmetry*, 13 (1972), 1–9 (2021). <https://doi.org/10.3390/sym13101972>.
- 11 Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability. *AIMS Mathematics*, 8 (11), 26275–26289 (2023). <https://doi.org/10.3934/math.20231340>.
- 12 Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Regular Ordinary Differential Operators with Involution. *Math Notes*, 106, 674–687 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0001434619110026>.
- 13 Kirane M., Sarsenbi A.A. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative. *Fractal and Fractional*, 7 (131), 1–12 (2023). <https://doi.org/10.3390/fractalfract7020131>.
- 14 Polyakov D.M. On the Bari basis property for even-order differential operators with involution. *Tamkang journal of mathematics*, 54 (4), 339–351 (2023). <http://dx.doi.org/10.5556/j.tkjm.54.2023.4899>.
- 15 Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68 (7), 1204–1218 (2023). <https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021>.
- 16 Turmetov B., Karachik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped. *AIP Conference Proceedings*, 2879 (1), 1–4 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0175246>.
- 17 Rektorys K. *Variational methods in mathematics, science and engineering*, Dordrecht: Springer, 1977. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-6450-4>.
- 18 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation. *Turkish journal of mathematics*, 43 (3), 1604–1625 (2019). <https://doi.org/10.3906/mat-1901-71>.

^{1*}Кошанова М.Д.,

к.т.н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

¹Муратбекова М.А.,

PhD, доцент и.о., ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

e-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

^{1,2}Турметов Б.Х.

д.ф.-м.н., профессор, ORCID ID: 0000-0001-7735-6484,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

¹Международный казахско-турецкий университет А. Ясави,

г. Туркестан, Казахстан,

²Университет Альфраганус,

г. Ташкент, Узбекистан.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО АНАЛОГА БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация

Известно, что система собственных функций классического бигармонического оператора с краевым условием Дирихле является полной и ортонормированной в пространстве L_2 . Соответствующие этим собственным функциям собственные значения являются положительными, и их можно пронумеровать в порядке возрастания. В некоторых случаях аналогичными свойствами обладают собственные функции и собственные значения краевых задач для возмущенного бигармонического оператора. В данной работе при помощи ортогональных матриц вводится нелокальный аналог возмущенного бигармонического оператора. Для данного оператора исследуются спектральные вопросы двух краевых задач. В первой задаче рассматриваются краевые условия Дирихле, во второй – условия типа Дирихле. При исследовании первой задачи мы используем полноту системы собственных функций задачи Дирихле для возмущенного бигармонического оператора. Используя свойства данных систем, а также свойства отображений с ортогональными матрицами, находим собственные функции и собственные значения основной задачи. Во второй задаче используем собственные функции и собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа. При использовании явного вида, а также свойств этих систем строятся собственные функции и собственные значения второй задачи. Доказаны теоремы о полноте систем собственных функций, рассматриваемых задач в пространстве L_2 .

Ключевые слова: ортогональная матрица, нелокальный бигармонический оператор, задача Дирихле, задача типа Дирихле, собственные значения, собственные функции, полнота системы.

^{1*}Koshanova M.D.,

Cand. Tech. Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

¹Muratbekova M.A.,

PhD, a.d, ORCID ID: 0000-0002-1377-4633,

e-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

^{1,2}Turmetov B.H.,

d.f.-m.s., professor, ORCID ID: 0000-0001-7735-6484,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

¹Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University,

Turkistan, Kazakhstan,

²Alfraganus University,

Tashkent, Uzbekistan

**ON SOME SPECTRAL PROBLEMS FOR THE NONLOCAL
ANALOGUE OF THE BIHARMONIC OPERATOR****Abstract**

It is known that the system of eigenfunctions of the classical biharmonic operator with the Dirichlet boundary condition is complete and orthonormal in space. The eigenvalues corresponding to these eigenfunctions are positive and can be numbered in ascending order. In some cases, eigenfunctions and eigenvalues of boundary value problems for a perturbed biharmonic operator have similar properties. In this work, a nonlocal analogue of the perturbed biharmonic operator is introduced using orthogonal matrices. Spectral problems of two boundary value problems are studied for this operator. Dirichlet boundary conditions are considered in the first problem, and Dirichlet-type conditions in the second. When studying the first problem, we use the complete system of eigenfunctions of the Dirichlet problem for the perturbed biharmonic operator. Using the properties of these systems, as well as the properties of the image with orthogonal matrices, we find the eigenfunctions and eigenvalues of the main problem. In the second task, we use the eigenfunctions and eigenvalues of the Dirichlet problem for the Laplace operator. Using the explicit form, as well as the properties of these systems, we construct the eigenfunctions and eigenvalues of the second task. The proof of the theorem on the completeness of the system of eigenfunctions of the considered tasks in space is provided.

Keywords: Orthogonal matrix, nonlocal biharmonic operator, Dirichlet problem, Dirichlet-type problem, eigenvalues, eigenfunctions, system completeness.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 25.11.2024