УДК 519.6
МРНТИ 27.41.41

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-259-270

[1]**Темирбеков Н.М.,**
доктор физико-математических наук, профессор, академик НИА РК,
член-корреспондент НАН РК, ORCID:0000-0001-7542-3778,
e-mail: temirbekov@rambler.ru
[2]***Жаксылыкова Ж.Р.,**
сениор-лектор, ORCID: 0009-0000-1566-1926,
*e-mail: zhaksylykova0507@mail.ru

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[2]Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С УЧЕТОМ УДВОЕННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Аннотация

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области, решаемая с использованием системы нелинейных уравнений Навье-Стокса. Уравнения описывают движение жидкости с учетом вязкости, давления и массовой силы, а также условия соленоидальности поля скорости. В общем случае нахождение аналитического решения системы уравнений представляет значительные трудности, и до сих пор не доказано, существует ли всегда гладкое решение для всех возможных условий. В связи с этим для решения задачи применяется метод фиктивных областей, позволяющий свести задачу к решению системы дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями. Особое внимание уделяется введению понятия удвоенной средней кривизны поверхности, которая необходима для применения метода фиктивных областей. Для этого в статье приводится подробное вычисление средней кривизны с использованием параметризации поверхности и матриц первой и второй форм. Также приводится доказательство леммы, связанной с вычислением удвоенной средней кривизны, что имеет важное значение для дальнейших численных методов решения системы уравнений Навье-Стокса. Полученные результаты расширяют область применения метода фиктивных областей в решении задач гидродинамики, особенно в сложных геометриях, и могут быть использованы для разработки более экономичных численных алгоритмов.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, метод фиктивных областей, функциональные пространства, удвоенная средняя кривизна.

Введение

Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости играет важную роль в различных областях науки и техники. Основу математического описания таких процессов составляют уравнения Навье-Стокса – система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение жидкости. Вопрос о возможности аналитического решения этих уравнений в общем случае остается открытым. Существует гипотеза о существовании гладкого решения уравнений Навье-Стокса для всех возможных условий, однако она не была доказана, что оставляет неопределенность в этом вопросе. В связи с этим актуальным является применение численных методов.

В данной работе исследуется начально-краевая задача, описывающая нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области. Для численного решения системы уравнений Навье-Стокса применяется метод фиктивных областей, который упрощает постановку задачи и позволяет эффективно использовать вычислительные методы. Основы данного подхода заложены в работах Вабищевича, Коновалова и Гловинского [1–6].

В работе [7] рассматривается начально-краевая задача, описывающая нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области. Данное течение моделируется системой нелинейных уравнений Навье-Стокса, записанных в терминах скорости и давления. Для приближенного решения задачи в областях со сложной границей применяется метод фиктивных областей, основанный на продолжении по старшим коэффициентам. При этом на границе регулярной области для вспомогательной задачи задаются условия для касательной составляющей скорости и давления, что позволяет корректно сформулировать граничные условия для уравнений Навье-Стокса в естественных переменных [8]. Дано определение обобщенного решения вспомогательной задачи в функциональных пространствах. Для изучения дифференциальных свойств вспомогательной задачи метода фиктивных областей используется метод Галеркина. В работе [9] авторы демонстрируют эффективность метода фиктивных областей для моделирования сложных течений вязкой жидкости. В работе [10] проведено математическое обоснование метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для модели пограничного слоя атмосферы. В [11] предложен метод приближенного решения нелинейных уравнений в произвольной области, в которой представлено исследование численных методов, позволяющих решать нелинейные задачи с высокой точностью. В работах [12–16] рассматривается численная реализация метода фиктивных областей, который позволяет эффективно решать задачи с учетом сложной геометрии и граничных условий, что актуально для уравнений Навье-Стокса.

Одним из ключевых аспектов метода фиктивных областей является учет геометрических характеристик границы области, в частности удвоенной средней кривизны.

Материалы и методы

В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ рассмотрим начально-краевую задачу для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \mu\Delta\vec{v} - \nabla p + \vec{f}, \tag{1}$$

$$\vec{v} = 0 \tag{2}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \vec{v}|_s = 0 \tag{3}$$

где $\vec{v}(x)$ – поле скоростей; $p(x)$ – давление; $\vec{f}(x)$ – поле массовой силы; $\mu > 0$ – коэффициент вязкости, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, при котором поле скорости описывается соленоидальным (без дивергентным) векторным полем.

Уравнения Навье-Стокса – это система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости.

Нахождение в аналитическом виде решения системы (1)–(3) сопряженно с непреодолимыми трудностями. До сих пор решение этих уравнений найдены лишь в некоторых частных случаях. Известные результаты относятся к простейшим случаям движения. В остальных случаях используются разные численные методы решения системы уравнений Навье-Стокса.

Для решения системы (1)–(3) используется метод фиктивных областей. Для простоты будем предполагать, что $\vec{v}_0(x) = 0$. Вспомогательная задача с параметром ε, соответствующая методу фиктивных областей, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в $D = D_1 \cup \Omega$ с границей S_1:

$$\frac{\partial \vec{v}^\varepsilon}{\partial t} + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon = \operatorname{div}(\mu^\varepsilon \nabla \vec{v}^\varepsilon) - \nabla p^\varepsilon + \vec{f} \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon = 0 \tag{5}$$

$$\vec{v}^\varepsilon|_{t=0} = 0, \vec{v}^\varepsilon \cdot \tau|_{S_1} = 0, p^\varepsilon|_{S_1} = 0 \tag{6}$$

$$\mu^\varepsilon = \begin{cases} \mu, \text{в } \Omega \\ \dfrac{\mu}{\varepsilon}, \text{в } D_1 \end{cases} \tag{7}$$

с условием согласования на границе S

$$[(\mu^\varepsilon \nabla \vec{v}^\varepsilon - p^\varepsilon \cdot \delta)n]\,|_S = 0, [\vec{v}^\varepsilon]\,|_S = 0 \tag{8}$$

n, τ – нормальный и касательный вектор к границе S_1. $[\cdot]$ означает скачок при переходе через S, δ – метрический тензор, s – нормаль к границе S, $\vec{f}$ – продолжен в D_1 с сохранением нормы $L_2(\Omega)$.

Введем $M(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых соленоидальных в D вектор-функций $\vec{v}(x)$, касательные составляющие которых обращаются в нуль на границе S:

$$M(D) = \{\vec{v}(x) \in C^\infty(D), \operatorname{div} \vec{v} = 0, \vec{v}(x) \cdot \tau(x) = 0, x \in S\},$$

где τ – касательный вектор к границе S. Пространства, полученные замыканием $M(D)$ в нормах $L_2(D)$ и $\overset{o}{W}{}_2^1(D)$, обозначим соответственно через $V(D), V_1(D)$, их сопряженные пространства $V^*(D), V_1^*(D)$, причем $V(D)$ и $V^*(D)$ отождествляются.

Результаты и обсуждение

Введем следующее определение.

Определение. Общим решением задачи (4)–(8) называется функция v^ε, принадлежащая классу $L_2\big(0,T;\ V_1(D)\big) \cap L_\infty\big(0,T;\ L_2(D)\big)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству:

$$-\int_0^T (\vec{v}^\varepsilon, \Phi_t)_D dt - \int_0^T \big((\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\Phi, a^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon\big)_D dt + \int_0^T \int_{S_1} (\vec{v}^\varepsilon \cdot \Phi)\vec{v}^\varepsilon\, nds dt + \\ + \frac{\mu}{\varepsilon}\int_0^T \int_{S_1} k(x)(\vec{v}^\varepsilon \Phi)\, dsdt + \int_0^T (\mu^\varepsilon \nabla \vec{v}^\varepsilon, \nabla \Phi)_D dt = \int_0^T (f, \Phi)_D dt \tag{9}$$

для любого $\Phi \in C^1\big(0,T;\ V_1(D)\big), \Phi(T) = 0, (\vec{u}, \vec{v})_D = \int_D \vec{u} \cdot \vec{v} \mathrm{dx}$, где $k(x)$ – удвоенная средняя кривизна границы S_1.

Пусть поверхность S_1 задана в виде $x_3 = f(x_1, x_2)$. Покажем, какой вид имеет средняя кривизна. Для этого выполним параметризацию $\vec{r}(x_1, x_2) = \big(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\big)$.

Дифференцируем по параметрам x_1 и x_2 $\vec{r}_{x_1} = \big(1{,}0, f_{x_1}\big)$, $\vec{r}_{x_2} = \big(0{,}1, f_{x_2}\big)$.

Матрица первой фундаментальной формы поверхности:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} \\ f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_2}^2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим нормальный вектор к поверхности S_1:

$$\vec{n} = \frac{\left(-f_{x_1}, -f_{x_2}, 1\right)}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1}}$$

Находим вторые производные $\vec{r}_{x_1x_1} = \left(0,0,f_{x_1x_1}\right)$, $\vec{r}_{x_1x_2} = \left(0,0,f_{x_1x_2}\right)$, $\vec{r}_{x_2x_2} = \left(0,0,f_{x_2x_2}\right)$ и строим матрицу второй формы

$$Q = \begin{pmatrix} \left(\vec{r}_{x_1x_1}, \vec{n}\right) & \left(\vec{r}_{x_1x_2}, \vec{n}\right) \\ \left(\vec{r}_{x_2x_1}, \vec{n}\right) & \left(\vec{r}_{x_2x_2}, \vec{n}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1}} \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}.$$

Среднюю кривизну посчитаем как след матрицы QG^{-1}. Для этого построим G^{-1}.

Находим определитель

$$|G| = \left(1 + f_{x_1}^2\right)\left(1 + f_{x_2}^2\right) - f_{x_1}^2 f_{x_2}^2 = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2$$

и алгебраические дополнения

$$G_{11}^A = 1 + f_{x_2}^2, \quad G_{12}^A = -f_{x_1} f_{x_2}, \quad G_{21}^A = -f_{x_1} f_{x_2}, \quad G_{22}^A = 1 + f_{x_1}^2.$$

Тогда

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \begin{pmatrix} G_{11}^A & G_{21}^A \\ G_{12}^A & G_{22}^A \end{pmatrix} = \frac{1}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 + f_{x_2}^2 & -f_{x_1} f_{x_2} \\ -f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_1}^2 \end{pmatrix}.$$

Далее вычислим матрицу

$$\mathrm{QG}^{-1} = \frac{1}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + f_{x_2}^2 & -f_{x_1} f_{x_2} \\ -f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_1}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}\left(1 + f_{x_2}^2\right) - f_{x_1x_2} f_{x_1} f_{x_2}; & -f_{x_1x_1} f_{x_1} f_{x_2} + f_{x_1x_2}\left(1 + f_{x_1}^2\right) \\ f_{x_1x_2}\left(1 + f_{x_2}^2\right) - f_{x_2x_2} f_{x_1} f_{x_2}; & -f_{x_1x_2} f_{x_1} f_{x_2} + f_{x_2x_2}\left(1 + f_{x_1}^2\right) \end{pmatrix}$$

Сумма диагональных элементов этой матрицы образует ее след

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{QG}^{-1}\right) = \frac{1}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \left(f_{x_1x_1}\left(1 + f_{x_2}^2\right) - 2 f_{x_1x_2} f_{x_1} f_{x_2} + f_{x_2x_2}\left(1 + f_{x_1}^2\right)\right),$$

которая является средней кривизной поверхности S_1.

Лемма. Пусть $\vec{v}(x)$ и $\vec{u}(x)$ – две произвольные вектор-функции такие, что $\vec{v}(x) \in V_1 \cap W_2^2(\Omega), \vec{u}(x) \in V_1$.

Тогда справедливо равенство

$$-(\Delta \vec{v}, \vec{u})_{2,\Omega} = (\nabla \vec{v}, \nabla \vec{u})_{V_1} - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \cdot \vec{u}\right) ds$$

Покажем, что

$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \cdot \vec{u}\right) = -k(x)(\vec{v} \cdot \vec{u})$ на S_1

Пусть S_1 имеет вид $x_3 = f(x_1, x_2)$, тогда $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1}}\left(f_{x_1}, f_{x_2}, -1\right)$ нормальный вектор, $\vec{\tau}_1 = \left(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)$, $\vec{\tau}_2 = \left(f_{x_2}, -f_{x_1}, 0\right)$ касательные векторы поверхности S_1.

По условию

$$(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_i)=0,(\vec{u}\cdot\vec{\tau}_i)=0,i=1,2.$$

Тогда

$$\vec{v}=(\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}=\lambda_v\vec{n},\ \vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}=\lambda_u\vec{n}.$$

Отсюда имеем следующие три равенства:

$$0=\frac{\partial}{\partial\tau_1}(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_1),0=\frac{\partial}{\partial\tau_2}(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_2),\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right)=\lambda_u\left(\frac{\partial v_1}{\partial n}n_1+\frac{\partial v_2}{\partial n}n_2+\frac{\partial v_3}{\partial n}n_3\right)$$

где n_1,n_2,n_3 – компоненты нормального вектора $\vec{n}$.

Умножаем первое равенство на

$$\frac{\lambda_u}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}$$

второе на

$$\frac{\lambda_u}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}$$

и третье на 1, затем их сложим.

Тогда получим

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right)=\frac{\lambda_u}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}\frac{\partial}{\partial\tau_1}(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_1)+ \\ +\frac{\lambda_u}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}\frac{\partial}{\partial\tau_2}(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_2)+\lambda_u\left(\frac{\partial v_1}{\partial n}n_1+\frac{\partial v_2}{\partial n}n_2+\frac{\partial v_3}{\partial n}n_3\right) \qquad (10)$$

Сначала вычислим производные от скалярного произведения, используя формулу производной по направлению. Третье слагаемое (10) раскрывается следующим образом

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right)=\lambda_u\left(\frac{\partial v_1}{\partial n}n_1+\frac{\partial v_2}{\partial n}n_2+\frac{\partial v_3}{\partial n}n_3\right)=\lambda_u\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}n_3\right)n_1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}n_3\right)n_2+\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}n_3\right)n_3\right]=$$

$$=\frac{\lambda_u}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1}f_{x_1}^2+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}f_{x_1}f_{x_2}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}f_{x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}f_{x_1}f_{x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}f_{x_2}^2-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}f_{x_2}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}f_{x_1}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}f_{x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right]$$

Производная от скалярного произведения $\vec{v}\cdot\vec{\tau}_1$ раскрывается следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_1)=\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(v_1\cdot f_{x_1}+v_2f_{x_2}+v_3\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_1f_{x_1}+v_2f_{x_2}+v_3\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)\right)f_{x_1}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(v_1\cdot f_{x_1}+v_2f_{x_2}+v_3\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)\right)f_{x_2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(v_1 f_{x_1} + v_2 f_{x_2} + v_3\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)\right)\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right) =$$
$$= v_1 f_{x_1x_1} f_{x_1} + v_2 f_{x_1x_2} f_{x_1} + v_3\left(2f_{x_1} f_{x_1x_1} + 2f_{x_2} f_{x_1x_2}\right) f_{x_1} + v_1 f_{x_1x_2} f_{x_2} +$$
$$+ v_2 f_{x_2x_2} f_{x_2} + v_3\left(2f_{x_1} f_{x_1x_2} + 2f_{x_2} f_{x_2x_2}\right) f_{x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} f_{x_1}^2 +$$
$$+\frac{\partial v_2}{\partial x_1} f_{x_1} f_{x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right) f_{x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} f_{x_1} f_{x_2} +$$
$$+\frac{\partial v_2}{\partial x_2} f_{x_2}^2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right) f_{x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} f_{x_1}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right) +$$
$$+\frac{\partial v_2}{\partial x_3} f_{x_2}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)^2$$

Слагаемое $\frac{\partial}{\partial \tau_2}(\vec{v} \cdot \vec{\tau}_2)$ раскрывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2}(\vec{v} \cdot \vec{\tau}_2) = \frac{\partial}{\partial \tau_2}\left(v_1 \cdot f_{x_2} - v_2 f_{x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_1 f_{x_2} - v_2 f_{x_1}\right) f_{x_2} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(v_1 f_{x_2} - v_2 f_{x_1}\right) f_{x_1} = v_1 f_{x_1x_2} f_{x_2} - v_2 f_{x_1x_1} f_{x_2} - v_1 f_{x_2x_2} f_{x_1} +$$
$$+ v_2 f_{x_1x_2} f_{x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} f_{x_2}^2 - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} f_{x_1} f_{x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} f_{x_1} f_{x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} f_{x_1}^2$$

Эти выражения подставляем в (9) и группируем слагаемые, содержащие $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3$.
Сначала рассмотрим слагаемые с $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, i, j = 1,2,3$.
Тогда

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\left(\frac{f_{x_1}^2}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1} + \frac{f_{x_1}^2}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)} + \frac{f_{x_2}^2}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{f_{x_1}^2\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right) + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\left(\frac{1}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1} + \frac{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1}\right) = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\left(\frac{1}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1} + \frac{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1}\right) = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{13}$$

Из этих трех (11)–(13) соотношений имеем

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Коэффициенты при остальных производных

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i \neq j$$

равны нулю:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\left(\frac{f_{x_1} f_{x_2}}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1} + \frac{f_{x_1} f_{x_2}}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)} - \frac{f_{x_1} f_{x_2}}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\left(\frac{f_{x_1}f_{x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}+\frac{f_{x_1}f_{x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}-\frac{f_{x_1}f_{x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\left(-\frac{f_{x_1}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}+\frac{f_{x_1}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}\right)=0,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\left(-\frac{f_{x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}+\frac{f_{x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}\right)=0,$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\left(-\frac{f_{x_1}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}+\frac{f_{x_1}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}\right)=0,$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\left(-\frac{f_{x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}+\frac{f_{x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}\right)=0.$$

Тогда в (9) останутся слагаемые, содержащие только v_i

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right)=\lambda_u\left[v_1\cdot\left(\frac{f_{x_1}f_{x_1x_1}+f_{x_1x_2}f_{x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}+\frac{f_{x_2}f_{x_1x_2}-f_{x_1}f_{x_2x_2}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}\right)+\right.$$
$$+v_2\cdot\left(\frac{f_{x_1}f_{x_1x_2}+f_{x_2x_2}f_{x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}+\frac{f_{x_1}f_{x_1x_2}-f_{x_2}f_{x_1x_1}}{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}\right)+$$
$$\left.+v_3\cdot\left(\frac{2f_{x_1}^2f_{x_1x_1}+4f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}+2f_{x_2}^2f_{x_2x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}\right)\right] \tag{14}$$

Далее, учитывая, что

$$v_1=\lambda_v n_1=\lambda_v\frac{f_{x_1}}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}}$$
$$v_2=\lambda_v n_2=\lambda_v\frac{f_{x_2}}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}}$$
$$v_3=\lambda_v n_3=-\lambda_v\frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1}}$$

Из (14) имеем

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right)=\lambda_u\lambda_v\cdot$$
$$\left(\frac{f_{x_1}^2f_{x_1x_1}+f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}+f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}+f_{x_2}^2f_{x_2x_2}-2f_{x_1}^2f_{x_1x_1}-4f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}-2f_2^{\,2}f_{x_2x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)^{3/2}\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}-f_{x_1}^2f_{x_2x_2}-f_{x_2}^2f_{x_1x_1}+f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)^{1/2}\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}\right)=$$
$$=\lambda_u\lambda_v\left(\frac{-f_{x_1}^2f_{x_1x_1}-2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}-f_{x_2}^2f_{x_2x_2}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)^{3/2}\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}+\frac{-f_{x_1}^2f_{x_2x_2}+2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}-f_{x_2}^2f_{x_1x_1}}{\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+1\right)^{1/2}\left(f_{x_1}^2+f_{x_2}^2\right)}\right).$$

Выносим знак «минус» за скобки и приводим к общему знаменателю, получим

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right) = -\lambda_u\lambda_v\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{f_{x_1}^2 f_{x_1x_1} + 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + f_{x_2}^2 f_{x_2x_2} + \left(f_{x_1}^2 f_{x_2x_2} - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + f_{x_2}^2 f_{x_1x_1}\right)\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)}\right) =$$

$$= -\lambda_u\lambda_v \frac{f_{x_1}^2\left(f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2}\right) + f_{x_2}^2\left(f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2}\right) + \left(f_{x_1}^2 f_{x_2x_2} - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + f_{x_2}^2 f_{x_1x_1}\right)\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2\right)} =$$

$$= -\lambda_u\lambda_v \frac{f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + f_{x_1}^2 f_{x_2x_2} - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + f_{x_2}^2 f_{x_1x_1}}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}} =$$

$$= -\lambda_u\lambda_v \frac{f_{x_1x_1}\left(1 + f_{x_2}^2\right) + f_{x_2x_2}\left(1 + f_{x_1}^2\right) - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2}}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}} \tag{15}$$

Так как $\vec{v} = \lambda_v\vec{n}, \vec{u} = \lambda_u\vec{n}$ имеем $(\vec{u},\vec{v}) = \lambda_u\lambda_v$. Поэтому из (15) получается $\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\cdot\vec{u}\right) = -k(x)(\vec{v}\cdot\vec{u})$, где

$$k(x) = \frac{f_{x_1x_1}\left(1 + f_{x_2}^2\right) - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + f_{x_2x_2}\left(1 + f_{x_1}^2\right)}{\left(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + 1\right)^{3/2}}$$

удвоенная средняя кривизна поверхности S_1. Это утверждение доказывает лемму.

Это доказательство используется как подробное доказательство леммы 1 в работе [16].

Заключение

В данной работе рассмотрена начально-краевая задача для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, описываемая системой нелинейных уравнений Навье-Стокса. Сложность аналитического решения этой системы требует применения численных методов, в частности метода фиктивных областей. Метод оказался эффективным для преобразования задачи в задачу с границами, где возможен численный расчет.

Особое внимание уделено введению понятия удвоенной средней кривизны, которое является необходимым для корректного применения метода фиктивных областей. В работе приведены детальные вычисления средней кривизны с использованием параметризации поверхности, а также доказательство леммы, связанной с удвоенной средней кривизной. Это доказательство имеет важное значение для развития численных методов решения уравнений Навье-Стокса.

Полученные результаты расширяют возможности применения метода фиктивных областей в сложных гидродинамических задачах, особенно в случае сложных геометрий. Разработанные методы могут быть использованы для улучшения точности и эффективности численных алгоритмов, что открывает новые перспективы для более эффективного моделирования течений жидкости в различных областях науки и техники.

Информация о финансировании

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, ИРН AP22688601, 2024–2026 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1 Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 156 с.

2 Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – 3-е изд. Singapure et al.: World Scientific, 1994. – 173 с.

3 Glowinski R. and Kuznetsov Y.A. Distributed Lagrange multipliers based on fictitious domain method for second order elliptic problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2007. – Vol. 196. – P. 1498–1506.

4 Glowinski R., Pan T., Hesla T.I., Joseph D.D. and Periaux J. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies: Application to particulate flow // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2000. – Vol. 184. – P. 241–267.

5 Girault V., Glowinski R., López H. and J.P. Vila. A boundary multiplier/fictitious domain method for the steady incompressible Navier-Stokes equations // Numerische Mathematik. – 2001. – Vol. 88. – P. 75–103.

6 Glowinski R., Pan T., Hesla T.I., Joseph D.D. and J. Périaux. A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow // Journal of Computational Physics. – 2001. – Vol. 169. – P. 363–426.

7 Темирбеков Н.М. Приближенные методы решения уравнений вязкой жидкости в областях со сложной геометрией. – Алматы, 2000. – 143 с.

8 Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задачах гидродинамики с помощью метода фиктивных областей // Доклады Академии наук России. – 2000. – Т. 374. – № 3. – С. 333–335.

9 Orunkhanov M.K., Smagulov Sh.S. The method of fictitious domains for the Navier-Stokes equations in terms of stream function and velocity of the vortex with inhomogeneous boundary conditions //Computational technologies.Novosibirsk: SB RAS. – 2000. – Vol. 5. – No. 3. – P. 46–53. [in Russian]

10 Smagulov Sh.S., Temirbekov N.M., Kamaubaev K.S. Modeling by the method of fictitious regions of the boundary condition for pressure in fluid flow problems // Siberian Journal of Computational Mathematics. – Novosibirsk: SB RAS, 2000. – Vol. 3. – No. 1. – P. 57–71.

11 Smagulov Sh.S., Otelbaev M.O. On a new method of approximate solutions of nonlinear equations in an arbitrary domain // Computational Technology. – 2001. – Vol. 6. – No. 6. – P. 93–107.

12 Temirbekov A.N., Danaev N.T. The method of fictitious regions for the model of the atmospheri boundary layer // Bulletin of KazNU, Mathematics, Mechanics, computer science series. – 2014. – No. 2(81). – P. 98–107.

13 Temirbekov A.N., Wójcik W. Numerical Implementation of the Fictitious Domain Method for Elliptic Equations // International Journal of Electronics and Telecommunications. – 2014. – Vol. 60. – No. 3. – P. 219–223.

14 Temirbekov A.N. Numerical implementation of the method of fictitious domains for elliptic equations // 3rd International Conference on Analysis and Applied Mathematics. – ICAAM 2016. – Vol. 1759. – P. 020053-1–020053-6. https://doi.org/10.1063/1.4959667.

15 Temirbekov A., Malgazhdarov Y., Tleulessova A., Temirbekova L. Fictitious Domain Method for the Navier-Stokes Equations. – Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2021. – № 3. – С. 138–147.

16 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the Fictitious Domain Method for Navier-Stokes Equations // Computers, Materials & Continua. – 2022. – No. 73(1). – P. 2035–2055. https://doi.org/10.32604/cmc.2022.027830.

REFERENCES

1 Vabishhevich P.N. (1991) Metod fiktivnyh oblastej dlja zadachi matematicheskoj fiziki. M.:Izd-vo MGU, 156 p. [in Russian]

2 Konovalov A.N. (1994) Zadachi fil'tracii mnogofaznoj neszhimaemoj zhidkosti. Singapure et al.: World Scientific, 173 p. [in Russian]

3 Glowinski R. and Kuznetsov Y.A. (2007) Distributed Lagrange multipliers based on fictitious domain method for second order elliptic problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pp. 1498–1506.

4 Glowinski R., Pan T., Hesla T.I., Joseph D.D. and Periaux J. (2000) A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies: Application to particulate flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 184, pp. 241–267.

5 Girault V., Glowinski R., López H. and J.P. Vila. (2001) A boundary multiplier/fictitious domain method for the steady incompressible Navier-Stokes equations. Numerische Mathematik, vol. 88, pp. 75–103.

6 Glowinski R., Pan T., Hesla T.I., Joseph D.D. and J. Périaux. (2001) A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow. Journal of Computational Physics, vol. 169, pp. 363–426.

7 Temirbekov N.M. (2000) Priblizhennye metody reshenija uravnenij vjazkoj zhidkosti v oblastjah so slozhnoj geometriej, Almaty,143 p. [in Russian]

8 Smagulov Sh.S., Danaev N.T., Temirbekov N.M. (2000) Modelirovanie kraevyh uslovij dlja davlenija i polnogo napora v zadachah gidrodinamiki s pomoshh'ju metoda fiktivnyh oblastej. Doklady Akademii nauk Rossii, vol. 374, no. 3, pp. 333–335. [in Russian]

9 Orunkhanov M.K., Smagulov Sh.S. (2000) The method of fictitious domains for the Navier-Stokes equations in terms of stream function and velocity of the vortex with inhomogeneous boundary conditions. Computational technologies.Novosibirsk: SB RAS, vol. 5, no. 3, pp. 46–53. [in Russian]

10 Smagulov Sh.S., Temirbekov N.M., Kamaubaev K.S. (2000) Modeling by the method of fictitious regions of the boundary condition for pressure in fluid flow problems. Siberian Journal of Computational Mathematics, Novosibirsk: SB RAS, vol.3, no. 1, pp. 57–71.

11 Smagulov Sh.S., Otelbaev M.O. (2001) On a new method of approximate solutions of nonlinear equations in an arbitrary domain. Computational Technology, vol. 6, no. 6, pp. 93–107.

12 Temirbekov A.N., Danaev N.T. (2014) The method of fictitious regions for the model of the atmospheri boundary layer. Bulletin of KazNU, Mathematics, Mechanics, computer science series, no. 2(81), pp. 98–107.

13 Temirbekov A.N., Wójcik W. (2014) Numerical Implementation of the Fictitious Domain Method for Elliptic Equations. International Journal of Electronics and Telecommunications, vol. 60, no. 3, pp. 219–223.

14 Temirbekov A.N. (2016) Numerical implementation of the method of fictitious domains for elliptic equations. 3rd International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM, vol. 1759, pp. 020053-1–020053-6. https://doi.org/10.1063/1.4959667.

15 Temirbekov A., Malgazhdarov Y., Tleulessova A., Temirbekova L. (2021) Fictitious Domain Method for the Navier-Stokes Equations, Izvestija NAN RK. Serija fiziko-matematicheskaja, no. 3, pp. 138–147.

16 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. (2022) Application of the Fictitious Domain Method for Navier-Stokes Equations. Computers, Materials & Continua, no. 73(1), pp. 2035–2055. https://doi.org/10.32604/cmc.2022.027830.

[1]**Темирбеков Н.М.,**
ф.-м.ғ.д., профессор, ҚР ҰИА-ның академигі, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі.,
ORCID:0000-0001-7542-3778,
e-mail: temirbekov@rambler.ru
[2]*Жаксылыкова Ж.Р.,
сениор-лектор, ORCID: 0009-0000-1566-1926,
*e-mail: zhaksylykova0507@mail.ru

[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Сәрсен Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., Қазақстан

НАВЬЕ-СТОКС ТЕҢДЕУЛЕРІН ШЕШУДЕ ЕКІ ЕСЕЛЕНГЕН ОРТАША ҚИСЫҚТЫҚТЫ ЕСКЕРЕ ОТЫРЫП ЖАЛҒАН ОБЛЫСТАР ӘДІСІН ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Бұл мақалада Навье-Стокс теңдеулер жүйесін қолдана отырып, тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың тұрақсыз ағыны үшін шектеулі аймақтағы бастапқы-шеткі есеп қарастырылады. Теңдеулер жүйесі сұйықтықтың тұтқырлығы, қысымы, массалық күші және жылдамдық өрісінің электромагниттік әсерлері секілді факторларды ескере отырып, сұйықтық қозғалысын сипаттайды. Жалпы жағдайда бұл теңдеулердің аналитикалық шешімін табу айтарлықтай қиындық тудырады, әрі барлық мүмкін жағдайлар үшін тегіс шешімнің бар-жоғы әлі дәлелденбеген. Осыған байланысты, шекаралық шарттарды ескере отырып, дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге мүмкіндік беретін жалған облыстар әдісі қарастырылады. Әдістің тиімділігін арттыру үшін қажетті беттің екі еселенген орташа қисықтығы ұғымын енгізуге ерекше көңіл бөлінеді. Бұл мақсатта бірінші және екінші фундаменталды формалардың беттік параметрлері мен матрицаларын қолдана отырып, орташа қисықтықты есептеудің егжей-тегжейлі әдістемесі ұсынылады. Сонымен қатар, Навье-Стокс теңдеулерін шешудің сандық әдістерінде маңызды рөл атқаратын екі еселенген орташа қисықтықты есептеуге қатысты лемманың дәлелі келтіріледі. Алынған нәтижелер гидродинамикалық есептерді шешуде, әсіресе күрделі геометриялық конфигурациялар үшін жалған облыстар әдісін қолдану аясын кеңейтуге ықпал етеді. Сонымен қатар, ұсынылған әдістеме үнемді және жоғары дәлдіктегі сандық алгоритмдерді әзірлеуге негіз бола алады.

Тірек сөздер: Навье-Стокс теңдеулері, тұтқыр сығылмайтын сұйықтық, бастапқы-шеткі есеп, жалған облыстар әдісі, функционалды кеңістіктер, екі еселенген орташа қисықтық.

[1]**Temirbekov N.M.,**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NEA RK,
Corresponding Member of NAS RK, ORCID: 0000-0001-7542-3778,
e-mail: temirbekov@rambler.ru
[2]*Zhaksylykova Zh.R.,
Senior Lecturer ORCID: 0009-0000-1566-1926,
*e-mail: zhaksylykova0507@mail.ru

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]Sarsen Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

APPLICATION OF THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR SOLVING THE NAVIER-STOKES EQUATIONS CONSIDERING THE DOUBLED MEAN CURVATURE

Abstract

In this paper, we consider an initial-boundary value problem for an unsteady flow of a viscous incompressible fluid in a bounded region, solved using a system of nonlinear Navier-Stokes equations. The equations describe the motion of the fluid considering viscosity, pressure, and mass force, as well as the solenoidality condition of the velocity field. In the general case, finding an analytical solution to the system of equations presents significant difficulties, and it has not yet been proven whether there is always a smooth solution for all possible conditions. In this regard, the fictitious domain method is used to solve the problem, which allows us to reduce the problem by solving a system of differential equations with appropriate boundary conditions. Particular attention is paid to introducing the concept of twice the mean curvature of the surface, which is necessary for the correct application of the fictitious domain method. For this purpose, the article provides a detailed calculation of the mean curvature using surface parameterization and matrices of the first and second forms. Proof of a lemma related to the calculation of twice the mean curvature is also given, which is of great importance for further numerical methods for solving the Navier-Stokes system of equations. The obtained results expand the scope of application of the fictitious domain method in solving hydrodynamic problems, especially in complex geometries, and can be used to develop more efficient numerical algorithms.

Key words: Navier-Stokes equations, viscous incompressible fluid, initial-boundary value problem, fictitious domain method, functional spaces, double mean curvature.

Дата поступления статьи в редакцию: 31.01.2025