УДК 517.925.7
МРНТИ 27.31.15, 27.29.21

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-247-258

[1]***Талипова М.Ж.,**
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
*e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]**Бекбауова А.У.,**
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,
e-mail: mirra478@mail.ru
[1]**Сейлова Р.Д.,**
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,
e-mail: roza_seilova@mail.ru

[1]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

НАХОЖДЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация

Цель настоящей работы заключается в исследовании логарифмических решений системы дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, а также в установлении условий их существования и характеристике их свойств. Особое внимание уделяется нахождению таких решений с помощью метода Фробениуса-Латышевой в окрестности регулярной особой точки $(0,0)$. Разработан метод нахождения рекуррентных соотношений для существующих логарифмических решений, когда простые значения корней определяющих уравнений отличаются на целые числа. На конкретном примере показано, как построить логарифмическое решение для однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Ключевые слова: однородная система, логарифмическое решение, определяющие уравнение, многочлен, аналитическая функция, ряд, регулярная особая точка, метод Фробениуса-Латышевой.

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка играют ключевую роль в моделировании множества процессов в математической физике, механике, а также в различных областях инженерных наук. Эти уравнения описывают динамику и распределение различных физических величин, таких как температура, давление, плотность вещества и многие другие [1–9].

Одним из важных направлений в исследовании решений этих уравнений является поиск специальных типов решений, которые могут быть полезны для упрощения вычислений или для получения более глубоких теоретических выводов. Одним из таких типов являются логарифмические решения, которые представляют собой решения, выраженные через логарифмы независимых переменных или их комбинаций [10–13]. Логарифмические решения имеют значительный потенциал в анализе и решении сложных задач, так как они часто связаны с поведением решений в крайних областях пространства и могут выявить специфические особенности, не наблюдающиеся при использовании более традиционных методов.

В работе рассматривается нахождение логарифмических решений для однородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с помощью метода Фробениуса-Латышевой вблизи регулярной особенности (0,0). Метод Фробениуса-Латышевой – это один из методов решения систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, который применяется для поиска решений в окрестности как регулярных, так и иррегулярных особенностей. Этот метод был предложен Латышевой специально для систем дифференциальных уравнений второго порядка и представляет собой расширение классического метода Фробениуса, используемого для обыкновенных дифференциальных уравнений [14–21].

Материалы и методы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{aligned} &x^2 \cdot Z_{xx} + a_{00}^1 xy \cdot Z_{xy} + xp_2 \cdot Z_x + yp_3 \cdot Z_y + p_4 \cdot Z = 0, \\ &y^2 \cdot Z_{yy} + b_{00}^1 xy \cdot Z_{xy} + xq_2 \cdot Z_x + yq_3 \cdot Z_y + q_4 \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_{00}^1, b_{00}^1 – некоторые постоянные, а коэффициенты $p_i(x,y)$ и $q_i(x,y)$ $(i = 2,3,4)$ представимы сходящимися рядами двух переменных

$$p_i(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu}^i \cdot x^\mu \cdot y^\nu \left(a_{00}^i \neq 0\right),$$

$$q_i(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu,\nu}^i \cdot x^\mu \cdot y^\nu \left(b_{00}^i \neq 0\right), (i = 2,3,4).$$

Покажем, что в этом случае можно получить явное разложение четырех аналитических решений, относящихся к особенности в точке $(x = 0, y = 0)$.

Следует отметить, что $x = 0$ и $y = 0$ каждая в отдельности являются особыми линиями. Только по аналогии с обыкновенным случаем мы считаем, что их точка пересечения $(0,0)$ является особой точкой. Теперь поставим вопрос о существовании решений в окрестности регулярной особой точки $(0,0)$.

Образуем ряд

$$Z[x,\rho;y,\sigma] = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{\rho+\mu} \cdot y^{\sigma+\nu} \, (C_{00} \neq 0), \tag{2}$$

где постоянные ρ, σ, коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$ должны быть определены таким образом, чтобы $Z[x,\rho;y,\sigma]$ было решением системы (1).

Система определяющих уравнений играет особую роль при изучении исследуемой системы дифференциальных уравнений в частных производных. С ее помощью устанавливается вид решения. Так, кроме рядов вида (2), возможно существование формальных рядов, которые содержат логарифмы [11].

Приступим к исследованию особенностей решения определяющих систем. Систему определяющих уравнений (1) запишем в развернутом виде

$$\begin{aligned} &f_{00}^1(\rho,\sigma) = \rho(\rho-1) + a_{00}^1\rho\sigma + a_{00}^2\rho + a_{00}^3\sigma + a_{00}^4 = 0, \\ &f_{00}^2(\rho,\sigma) = \sigma(\sigma-1) + b_{00}^1\rho\sigma + b_{00}^2\rho + b_{00}^3\sigma + b_{00}^4 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

и преобразуем к виду

$$\rho^2 + a_{00}^1\rho\sigma + (a_{00}^2 - 1)\rho + a_{00}^3\sigma + a_{00}^4 = 0, \tag{4}$$

$$\sigma^2 + b_{00}^1\rho\sigma + b_{00}^2\rho + (b_{00}^3 - 1)\sigma + b_{00}^4 = 0. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем:

$$(a_{00}^1\rho + a_{00}^3)\sigma + [\rho^2 + (a_{00}^2 - 1)\rho + a_{00}^4] = 0, \tag{6}$$

$$\sigma^2 + [b_{00}^1\rho + (b_{00}^3 - 1)]\sigma + (b_{00}^2\rho + b_{00}^4) = 0. \tag{7}$$

Исключая σ из (6) и подставляя в (7), получим уравнение относительно ρ:

$$(1-a_{00}^1 b_{00}^1)\rho^4+[2(a_{00}^2-1)+(a_{00}^1)^2 b_{00}^2-a_{00}^3 b_{00}^1-a_{00}^1(b_{00}^3-1)-$$
$$-a_{00}^1 b_{00}^1(a_{00}^2-1)]\rho^3+[2a_{00}^4+(a_{00}^2-1)^2+2a_{00}^1 a_{00}^3 b_{00}^2+$$
$$+b_{00}^4(a_{00}^1)^2-a_{00}^3(b_{00}^3-1)-a_{00}^3 b_{00}^1(a_{00}^2-1)-a_{00}^1(b_{00}^3-1)(a_{00}^2-1)+$$
$$+a_{00}^1 b_{00}^1 a_{00}^4]\rho^2+[b_{00}^2(a_{00}^3)^2+2a_{00}^1-a_{00}^3 b_{00}^4-a_{00}^3(b_{00}^3-1)(a_{00}^2-1)-$$
$$-a_{00}^3 b_{00}^1 a_{00}^4-a_{00}^1(b_{00}^3-1)a_{00}^4]\rho+[(a_{00}^4)^2+b_{00}^4(a_{00}^3)^2-a_{00}^3(b_{00}^3-1)a_{00}^4]=0.$$

Отсюда видно, что при исключении σ получается уравнение четвертой степени относительно ρ. Это действительно только в том случае, если коэффициент $1-a_{00}^1 b_{00}^1$ при ρ^4 будет отличен от нуля. Значит, система определяющих уравнений (4) имеет четыре пары корней (ρ_j,σ_j) $(j=1,2,3,4)$ только в том случае, если выполняется условие

$$1-a_{00}^1 b_{00}^1\neq 0. \tag{9}$$

Левая часть (6) есть многочлен первой степени относительно σ и при $a_{00}^1\rho+a_{00}^3\neq 0$:

$$\sigma=-\frac{\rho^2+(a_{00}^2-1)\rho+a_{00}^4}{a_{00}^1\rho+a_{00}^3}.$$

Эта формула дает общее решение (6) при дополнительном условии $a_{00}^1\rho+a_{00}^3\neq 0$. Подставив в уравнение (7), после некоторых преобразований получим уравнение (8).

Далее, при $b_{00}^1\sigma+b_{00}^2\neq 0$ из (7) находим:

$$\rho=-\frac{\sigma^2+(b_{00}^3-1)\sigma+b_{00}^4}{b_{00}^1\sigma+b_{00}^2} \tag{10}$$

Подставляя это значение в (6), получим уравнение четвертой степени относительно σ, что дает возможность определения четырех значений для σ.

Отсюда заключаем, что наряду с условием (9) должны выполняться также условия

$$a_{00}^1\rho+a_{00}^3\neq 0 \text{ или } \rho\neq -a_{00}^3/a_{00}^1, \tag{11}$$

$$b_{00}^1\sigma+b_{00}^2\neq 0 \text{ или } \sigma\neq -b_{00}^2/b_{00}^1. \tag{12}$$

Если эти условия не выполняются, то система (3), возможно, не имеет решения вида $(-a_{00}^3/a_{00}^1,\sigma)$ и $(\rho,-b_{00}^2/b_{00}^1)$. В данном случае требуется дополнительное исследование.

Подытоживая вышеприведенные рассуждения, убеждаемся в справедливости следующих случаев:

1. При выполнении условий (9), (11) и (12) уравнения относительно ρ и σ, с помощью которых определяются их значения, являются уравнениями четвертой степени. Если ρ_1 – простой корень уравнения (8), то (6) и (10) при этом значении имеют общий корень. Этот общий корень будет единственным, если ρ_1 является простым корнем уравнения (8). Поэтому, если через σ_1 обозначим общий корень, то значения ρ_1,σ_1 удовлетворяют системе уравнений (3). Аналогично если ρ_2,ρ_3,ρ_4 – простые корни уравнения (8), то пары $(\rho_2,\sigma_2),(\rho_3,\sigma_3)$ и (ρ_4,σ_4) также удовлетворяют системе уравнений (3).

В этом случае, определяя соответствующие неопределенные коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu=0,1,2,\dots)$, мы сможем образовать четыре ряда вида

$$Z[x,\rho;y,\sigma]=x^{\rho_j}\cdot y^{\sigma_j}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu}\cdot x^{\rho+\mu}\cdot y^{\sigma+\nu}\,(C_{00}\neq 0),(j=1,2,3,4) \tag{13}$$

т.е. система дифференциальных уравнений в частных производных (1) имеет четыре линейно-независимых решения указанного вида [20].

2. Допустим, что ρ_1 – четырехкратный корень уравнения (8), тогда ему соответствует столько же значений σ_1. Иначе говоря, пара (ρ_1,σ_1) будет четырехкратным корнем системы (3). Тогда система (1) имеет четыре линейно-независимых решения:

$$Z_1 = x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \, (C_{00} \neq 0), \tag{14}$$
$$Z_2 = Z_1 \ln x + f_1(x,y),$$
$$Z_3 = Z_1 \ln y + f_2(x,y),$$
$$Z_4 = Z_1 \ln x \ln y + f_3(x,y) \ln x + f_4(x,y) \ln y + f_5(x,y)$$

где

$$f_\ell(x,y) = x^{\rho_j} y^{\sigma_j} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu}^{(\ell)} x^{\mu} y^{\nu} \quad \left(A_{00}^{(\ell)} \neq 0\right), \quad \left(\ell = \overline{1,5}; j = \overline{2,4}\right).$$

Теперь покажем методику построения логарифмических решений. Допустим, что пары корней (ρ_j, σ_j) $(j = 1,2,3,4)$ системы определяющих уравнений (3) равны или отличаются на целые числа, то есть

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 \geq \rho_4 \text{ и } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4.$$

Пока рассмотрим два случая:

1) $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$,
т. е. пары $(\rho_1,\sigma_1) = (\rho_2,\sigma_2) = (\rho_3,\sigma_3) = (\rho_4,\sigma_4)$;
2) $\rho_1 - \rho_2 = m_1, \rho_1 - \rho_3 = m_2, \rho_1 - \rho_3 = m_3$,
$\sigma_1 - \sigma_2 = n_1, \sigma_1 - \sigma_3 = n_2, \sigma_1 - \sigma_3 = n_3$, (15)
($m_1 < m_2 < m_3$ и $n_1 < n_2 < n_3$ – целые числа).

Это означает справедливость строгих неравенств между парами корней:

$$(\rho_1,\sigma_1) > (\rho_2,\sigma_2) > (\rho_3,\sigma_3) > (\rho_4,\sigma_4).$$

Далее, предположим, что приведенные в [10] условия отсутствия логарифмических решений не выполняются и некоторые частные решения системы (1) будут содержать логарифмические члены. Ранее приведенные условия отсутствия логарифмических решений нуждаются в уточнении, поскольку охвачены не все возможные случаи.

Решение системы (1) ищем в виде двойного степенного ряда (13). Подставляя (13) в (1) и учитывая систему характеристических функций, а также последовательность рекуррентных соотношений, имеем, что

$$L_k[Z(x,\rho;y,\sigma)] = f_{00}^k(\rho,\sigma) \cdot C_{00}^k(\rho,\sigma) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma}, (k = 1,2)$$

и

$$L_k[Z(x,\rho;y,\sigma)]|_{\rho=\rho_1,\sigma=\sigma_1} = 0 \ (k = 1,2).$$

Принимая

$$C_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)\big|_{\rho=\rho_1,\sigma=\sigma_1} = A_{\mu,\nu} \ (\mu,\nu = 0,1,2,\dots),$$

получаем не логарифмическое решение, соответствующее паре корней (ρ_1,σ_1):

$$Z_1[x,\rho;y,\sigma] = x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \, (A_{00} \neq 0). \tag{16}$$

В первом случае, т.е. при $(\rho = \rho_j, \sigma = \sigma_j)$ $(j = 1,2,3,4)$, все решения вида (13) будут тождественно равны. Вместо четырех линейно-независимых решений получим всего одно решение.

Второй случай (15) при $(\rho = \rho_j, \sigma = \sigma_j)(j = 2,3,4)$ приводится к первому, если удовлетворить условиям

при

$$\rho = \rho_2, \sigma = \sigma_2, C_{00}^k = C_{10}^k = \dots = C_{m_1-1,n_1}^k = 0, C_{m_1,n_1}^k = A_{00}, \tag{17}$$

при

$$\rho = \rho_3, \sigma = \sigma_3, C_{00}^k = C_{10}^k = \dots = C_{m_2-1,n_2}^k = 0, C_{m_2,n_2}^k = A_{00}, \tag{18}$$

при

$$\rho = \rho_4, \sigma = \sigma_4, C_{00}^k = C_{10}^k = \ldots = C_{m_3,n_3-1}^k = 0, C_{m_3,n_3}^k = A_{00}. \tag{19}$$

Обычно это достигается за счет выбора $C_{00}^k(\rho,\sigma)(k = 1{,}2)$. Учитывая (17) –(19), определим другие частные решения системы (1).

Находим решение, соответствующее паре корней $(\rho = \rho_2, \sigma = \sigma_2)$.

С этой целью найдем частную производную по ρ от $Z(x,\rho;y,\sigma)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho} Z_1[x,\rho;y,\sigma] = \ln x \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)\cdot x^{\rho+\mu}\cdot y^{\sigma+\nu} + \\ + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\cdot x^{\rho+\mu}\cdot y^{\sigma+\nu}.\end{aligned} \tag{20}$$

Определим

$$\begin{aligned} L_k\left[\frac{\partial}{\partial\rho} Z(x,\rho;y,\sigma)\right] = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \{[f_{00}^k(\rho+\mu,\sigma+\nu)C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) + \\ + f_{10}^k(\rho+\mu-1,\sigma+\nu)C_{\mu-1,\nu}(\rho,\sigma) + f_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)C_{00}(\rho,\sigma)] \ln x + \\ + \left[f_{00}^k(\rho+\mu,\sigma+\nu)\frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + \ldots + f_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + \right. \\ \left. + \frac{\partial f_{00}^k(\rho+\mu,\sigma+\nu)}{\partial\rho} C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) + \ldots + \frac{\partial f_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} C_{00}^k(\rho,\sigma)\right]\} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma}. \end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты $\frac{\partial C_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} f_{00}^k(\rho+1,\sigma)\frac{\partial C_{10}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + f_{10}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + \\ + \frac{\partial f_{00}^k(\rho+1,\sigma)}{\partial\rho} C_{10}^k(\rho,\sigma) + \frac{\partial f_{10}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} C_{00}^k(\rho,\sigma) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{00}^k(\rho+\mu,\sigma+\nu)\frac{\partial C_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + \ldots + f_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + \\ + \frac{\partial f_{00}^k(\rho+\mu,\sigma+\nu)}{\partial\rho} C_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma) + \ldots + \frac{\partial f_{\mu,\nu}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} C_{00}^k(\rho,\sigma) = 0, (\mu,\nu = 1,2,\ldots). \end{aligned}$$

Из (21) с учетом рекуррентных систем равенств получаем:

$$\begin{aligned} L_k\left[\frac{\partial}{\partial\rho} Z(x,\rho;y,\sigma)\right] = f_{00}^k(\rho,\sigma)C_{00}^k(\rho,\sigma)x^\rho y^\sigma \ln x + \\ + \left[f_{00}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} + \frac{\partial f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} C_{00}^k(\rho,\sigma)\right] x^\rho y^\sigma. \end{aligned}$$

Используя (17), приходим к заключению, что (20) является решением системы (1) при следующих условиях:

1) если $\rho = \rho_2 = \rho_1; \sigma = \sigma_2 = \sigma_1$, то $f_{00}^k(\rho,\sigma) = \frac{\partial f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} = 0$;

2) если $\rho = \rho_2 < \rho_1; \sigma = \sigma_2 < \sigma_1$, то $f_{00}^k(\rho,\sigma) = 0, C_{00}^k(\rho,\sigma) = 0$.

$C_{00}^k(\rho,\sigma)$ возьмем таким, чтобы пара $(\rho_{\ell+1},\sigma_{\ell+1})$ была корнем кратности ℓ системы $C_{00}^k(\rho,\sigma) = 0$.

Приведенные условия удовлетворяются.

Если примем, что

1) при $\rho = \rho_2 = \rho_1; \sigma = \sigma_2 = \sigma_1$;

$$\frac{\partial C^k_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \rho} = \mathrm{A}'_{\mu,\nu}, \quad C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) = A'_{\mu,\nu},$$

2) при $\rho = \rho_2 \neq \rho_1; \sigma = \sigma_2 \neq \sigma_1$

$$\frac{\partial C^k_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \rho} = \mathrm{A}'_{\mu,\nu}, \quad C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) = A'_{\mu-m_1,\nu-n_1},$$

то второе частное решение получаем в виде

$$Z^{(2)} = Z^{(1)}(x,y)\ln x + x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma_2} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A'_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \; (A'_{00} \neq 0). \qquad (22)$$

Далее, установим вид решения, соответствующий паре корней $(\rho = \rho_3, \sigma = \sigma_3)$. Теперь производную от $Z(x,\rho;y,\sigma)$ найдем по σ:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} Z_1[x,\rho;y,\sigma] = \ln y \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) \cdot x^{\rho+\mu} \cdot y^{\sigma+\nu} + \\ + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} \cdot x^{\rho+\mu} \cdot y^{\sigma+\nu}. \qquad (23)$$

Аналогичным рассуждением убеждаемся, что третье частное решение получится в следующем виде

$$Z^{(3)} = Z^{(1)}(x,y)\ln y + x^{\rho_3} \cdot y^{\sigma_4} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} F'_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \; (F'_{00} \neq 0). \qquad (24)$$

Если $1 - a^1_{00} b^1_{00} = 0$ и система определяющих уравнений (3) имеет трехкратную пару корней, то система (1) имеет три линейно-независимых решения в виде:

1) обобщенного степенного ряда двух переменных (16);

2) логарифмических рядов (22) и (24).

Если (ρ_j, σ_j) $(j = 1,2,3,4)$ являются четырехкратными парами корней, то три частных решения определяются в виде (16), (22) и (24). Остается установить вид четвертого частного решения. Для этой цели можно пользоваться равенствами (20) и (23). Когда используется равенство (20), то от него смешанную производную находим по σ:

$$\frac{\partial}{\partial \rho \partial \sigma}[Z(x,\rho;y,\sigma)] = \\ = \ln x \ln y \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) x^{\rho+\mu} y^{\sigma+\nu} + \ln x \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma} + \\ + \ln y \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma} + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \rho \partial \sigma} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma} \qquad (25)$$

В другом случае из (23) определяется смешанная производная по:

$$\frac{\partial}{\partial \rho \partial \sigma}[Z(x,\rho;y,\sigma)] = \ln x \ln y \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) x^{\rho+\mu} y^{\sigma+\nu} + \\ + \ln x \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma} + \ln y \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma} + \\ + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\partial C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial \rho \partial \sigma} x^{\mu+\rho} y^{\nu+\sigma} \qquad (26)$$

Тогда из (25) имеем:

$$L_k\left\{\frac{\partial}{\partial\rho\partial\sigma}[Z(x,\rho;y,\sigma)]\right\} = f_{00}^k(\rho,\sigma)C_{00}(\rho,\sigma)x^\rho y^\sigma \ln x \ln y +$$
$$+\left[f_{00}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\frac{f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}C_{00}(\rho,\sigma)\right]x^\rho y^\sigma \ln x +$$
$$+\left[f_{00}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\frac{f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho}C_{00}(\rho,\sigma)\right]x^\rho y^\sigma \ln y +$$
$$+\left[f_{00}^k(\rho,\sigma)\frac{\partial C_{00}(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\frac{f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho}C_{00}(\rho,\sigma)\right]x^\rho y^\sigma.$$

Принимая во внимание (17), (18) и (19), заключаем, что (26) будет решением системы (1). При этом имеем условия:

1) если $\rho = \rho_4 = \rho_3 = \rho_2 = \rho_1; \sigma = \sigma_4 = \sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1$,

то $f_{00}^k(\rho,\sigma) = \frac{\partial f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\frac{\partial f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho} = \frac{\partial f_{00}^k(\rho,\sigma)}{\partial\rho\partial\sigma} = 0$,

2) если $\rho = \rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1; \sigma = \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$,

то $f_{\mathbf{0}}^k(\rho,\sigma) = 0$, $C_{00}(\rho,\sigma) = 0$. Эти условия удовлетворяются.

Полагая соответственно:

1) при $\rho = \rho_4, \sigma = \sigma_4$

2) $\frac{\partial^2 C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial\rho\partial\sigma} = K_{\mu,\nu}, \frac{\partial C_{\mu,\nu}}{\partial\rho} = K_{\mu_1,\nu_1}, \frac{\partial C_{\mu,\nu}}{\partial\sigma} = K_{\mu_2,\nu_2}$

при $\rho = \rho_4, \sigma = \sigma_4$

$$\frac{\partial^2 C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma)}{\partial\rho\partial\sigma} = K'_{\mu,\nu}, \frac{\partial C_{\mu,\nu}}{\partial\rho} = K'_{\mu_1-m_3,\nu_1-m_3}, \frac{\partial C_{\mu,\nu}}{\partial\sigma} = K_{\mu_3-m_3,\nu_3-m_3}, \; C_{\mu,\nu}(\rho,\sigma) = K_{\mu-m_3,\nu-m_3}$$

получим четвертое частное решение

$$Z^{(4)}(x,y) = Z^{(1)} \ln x \ln y + \ln x\, x^{\rho_2} y^{\sigma_2} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} K'_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu +$$
$$+ \ln y\, x^{\rho_3} y^{\sigma_3} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} K''_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu + x^{\rho_4} y^{\sigma_4} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} K'''_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu \qquad (27)$$

Когда выполняется условие (9), общее решение системы (1) представляется в виде суммы четырех линейно-независимых решений $Z_j(x,y) (j = 1,2,3,4)$, т.е.

$$Z(x,y) = \sum_{j=1}^{4} C_j \cdot Z_j(x,y).$$

Итак, нами получены рекуррентные соотношения для построения логарифмических решений. Вышеприведенная методика нахождения рекуррентных соотношений для логарифмических решений справедлива и в случае неоднородной системы.

Опираясь на приведенные свойства, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Если условие (9) не выполняется, и система определяющих уравнений (3) имеет трехкратную пару корней, то система (1) имеет три линейно-независимых решения в виде (16), (22) и (24).

Теорема 2. Если система определяющих уравнений (3) имеет четырехкратную пару корней, то одно решений системы (1) может быть представлено в виде обобщенного степенного ряда от двух переменных (16), а остальные решения будут логарифмическими в виде (22), (24), (27).

Результаты и обсуждение

Пример. Пусть задана система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$x^2(x-1)\cdot Z_{xx}+x^2y\cdot Z_{xy}+x\left(\tfrac{5}{3}x-1\right)\cdot Z_x+\tfrac{1}{4}\cdot Z=0,$$
$$y^2(y-1)\cdot Z_{yy}+xy^2\cdot Z_{xy}+y\left(\tfrac{5}{3}y-1\right)\cdot Z_y+\tfrac{1}{4}\cdot Z=0. \qquad (28)$$

Запишем систему характеристических функций

$$L_1[x^\rho\cdot y^\sigma]\equiv x^\rho\cdot y^\sigma\left\{\left(\frac{1}{4}-\rho^2\right)+\left[\rho(\rho-1)+\rho\sigma+\frac{5}{3}\rho\right]x\right\},$$
$$L_2[x^\rho\cdot y^\sigma]\equiv x^\rho\cdot y^\sigma\left\{\left(\frac{1}{4}-\sigma^2\right)+\left[\sigma(\sigma-1)+\rho\sigma+\frac{5}{3}\sigma\right]y\right\},$$

Система определяющих уравнений

$$f_{00}^1(\rho,\sigma)=-\left(\rho^2-\frac{1}{4}\right)=0,$$
$$f_{00}^2(\rho,\sigma)=-\left(\sigma^2-\frac{1}{4}\right)=0$$

имеют пары корней:

$$\left(\rho_1=\tfrac{1}{2},\sigma_1=\tfrac{1}{2}\right);\left(\rho_2=\tfrac{1}{2},\sigma_2=-\tfrac{1}{2}\right);$$
$$\left(\rho_3=-\tfrac{1}{2},\sigma_3=\tfrac{1}{2}\right);\left(\rho_4=-\tfrac{1}{2},\sigma_4=-\tfrac{1}{2}\right),$$

где разности $\rho_1-\rho_2=1,\sigma_1-\sigma_2=1$ – равны единице, то есть равны целому числу.

Пользуясь системой рекуррентных соотношений, определяем искомые решения, соответствующие показателям $\left(\rho_1=\tfrac{1}{2},\sigma_1=\tfrac{1}{2}\right)$в следующем виде:

$$Z^{(1)}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{5}{3\cdot 2^2}x+\frac{5}{3\cdot 2^2}y+\frac{5^2}{3^2\cdot 2^3}xy+\cdots\right).$$

С помощью равенств (20), (23), (25) попробуем определить остальные частные решения, соответствующие показателям $\left(\rho_2=\tfrac{1}{2},\sigma_2=-\tfrac{1}{2}\right);\left(\rho_3=-\tfrac{1}{2},\sigma_3=\tfrac{1}{2}\right);\left(\rho_4=-\tfrac{1}{2},\sigma_4=-\tfrac{1}{2}\right)$.

Во второй паре корней определяющей системы разности $\rho_1-\rho_2=0,\sigma_1-\sigma_2=1$. Отсюда видно, что $\rho_1=\rho_2$ – двукратный корень, а σ_1 и σ_2 друг от друга отличаются на целое неотрицательное число. Проверим условия отсутствия логарифмических решений. Для этого запишем начальные строки рекуррентных соотношений (21), определяющие коэффициенты A_{10}, A_{01}, A_{11}:

$$A_{10}\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\left(\rho+\frac{3}{2}\right)-\rho\left(\rho+\sigma+\frac{2}{3}\right)A_{00}=0,$$
$$A_{01}\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)-\sigma\left(\rho+\sigma+\frac{2}{3}\right)A_{00}=0,$$
$$A_{11}\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\left(\rho+\frac{3}{2}\right)\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)-\rho\left(\rho+\sigma+\frac{2}{3}\right)\sigma\left(\rho+\sigma+\frac{2}{3}\right)A_{00}=0. \qquad (29)$$

Коэффициент при A_{10} обращается в нуль при $\rho = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{2}$, а коэффициент при A_{01} обращается в нуль при $\sigma = \sigma_2 = \sigma_4 = -\frac{1}{2}$. При этих значениях обращается в нуль и коэффициент при A_{11}. В то же время суммы слагаемых в (29) отличны от нуля. Поэтому показателям $\left(\rho_2 = \frac{1}{2}, \sigma_2 = -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\rho_3 = -\frac{1}{2}, \sigma_3 = \frac{1}{2}\right)$; $\left(\rho_4 = -\frac{1}{2}, \sigma_4 = -\frac{1}{2}\right)$ соответствуют логарифмические решения. Теперь найдем их

$$Z^{(1,2)} = x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{3^2 \cdot 2^2} x - \frac{5}{3^2 \cdot 2^2} y + \frac{5^2}{3^3 \cdot 2^3} xy + \cdots \right).$$

$$Z^{(1,3)} = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{3^2 \cdot 2^2} x - \frac{5}{3^2 \cdot 2^2} y + \frac{5^2}{3^3 \cdot 2^3} xy + \cdots \right)$$

$$Z^{(1,4)} = x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{5}{3^4 \cdot 2^3} x - \frac{5}{3^4 \cdot 2^3} y + \frac{5^2}{3^5 \cdot 2^5} xy + \cdots \right)$$

Однако можно заметить, что

$$Z^{(1,2)} = -\frac{1}{3} A Z^{(1)}, \qquad Z^{(1,3)} = -\frac{1}{3} A_1 Z^{(1)}, \qquad Z^{(1,4)} = -\frac{1}{2 \cdot 3^2} A Z^{(1)}$$

то есть результаты подстановки пар $(\rho_2, \sigma_2), (\rho_3, \sigma_3) (\rho_4, \sigma_4)$ в Z отличаются только постоянными множителями от результатов подстановки (ρ_1, σ_1). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться только решением $Z^{(1)}(x, y)$.

Второе частное решение имеет следующий вид:

$$Z^{(2)} = A Z^{(1)} lnx + A x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} y + \cdots \right).$$

Два оставшихся частных решения имеют следующий вид:

$$Z^{(3)} = A_1 Z^{(1)} lny + A_1 x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{2} y + \cdots \right)$$

$$Z^{(4)} = A_2 Z^{(1)} lnx lny + A_2 lnx x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{6} x + \cdots \right) +$$

$$+ A_2 lny x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{6} y + \cdots \right) + A_2 x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{19}{4} x + \cdots \right)$$

Таким образом, все четыре линейно независимых частных решения системы (28) полностью определены.

Заключение

В заключение в рамках настоящего исследования был проведен анализ логарифмических решений системы дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, а также установлены условия их существования. Особое внимание уделено применению метода Фробенуса-Латышевой для нахождения решений в окрестности регулярной особой точки (0,0), что позволило выявить особенности таких решений в данной области. Разработанный метод рекуррентных соотношений, позволяющий находить логарифмические решения при наличии различия в простых корнях определяющих уравнений на целые числа. На конкретном примере показана пошаговая процедура построения логарифмического решения для однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, что является важным вкладом в теорию и практическое применение таких решений в различных областях математики и физики.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

ЛИТЕРАТУРА

1 Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИЛ, 1957. – 443 с.

2 Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964. – 206 с.

3 Спиваков Ю.Л. Специальные классы решений линейных дифференциальных уравнений и их приложения к анизотропной и неоднородной теории упругости. – Ташкент.: Фан, 1986. – 186 с.

4 Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966. – 260 с.

5 Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

6 Пуанкаре А. Избранные методы. Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – 771 с.

7 Assanova A.T., Bekbauova A.U., Talipova M.Zh. On a non-local problem for system of partial differential equations of hyperbolic type in a specific domain // International Journal of Mathematics and Physics. – 2023.

8 Assanova A.T. On a solvability to the problem with parameter for differential-algebraic equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024.

9 Bekbauova A.U., Meirambekuly A. Construction of solutions in a broad sense of systems of first order partial differential equations with periodic conditions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2025.

10 Тасмамбетов Ж.Н., Терещенко Н.И. О логарифмических решениях системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Сборник трудов инст. мат. и мех. АН КазССР. – 1974. – С. 236–244.

11 Tasmambetov Zh. About logarithmic decisions of the special system of the differential equations in partial derivatives // Abstracts of the third congress of the World mathematical Society of Turkic countries. – Almaty, 2009. – P. 407–411.

12 Тасмамбетов Ж.Н., Исенова А.А. Нормально-регулярные и логарифмические решения системы Уиттекера состоящей из трех уравнений // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки РК. Тезисы докладов. – Алматы. – 2020. – С. 167–168.

13 Исенова А.А. Нормально-регулярные и логарифмические решения системы Уиттекера состоящей из трех уравнений // IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе. – 2022. – С. 281–288.

14 Латышева К.Я., Терещенко Н.И. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. Метод Фробениуса-Латышевой. – Киев: Изд. Института математики АН УССР, 1970. – 394 с.

15 Тасмамбетов Ж.Н. Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса (Препр. /АН УССР. Институт математики: 91.29) Киев, 1991. – 44 с.

16 Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. Киев: Вища школа, 1974. – 136 с.

17 Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No. 11. – P. 3167–3173.

18 Тасмамбетов Ж.Н., Нургалиева Д.М., Талипова М.Ж. О применении метода Фробениуса-Латышевой при решении задач математической физики // Материалы 6-й Казахстанской науч. конф. по физике твердого тела. г. Актобе, 4–6 октября 2000 г. – С. 174–177.

19 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1880. https://doi.org/10.1063/1.5000629.

20 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актобе: ИП Жандилдаева С.Т., 2015. – 464 с.

REFERENCES

1 Trikomi F. (1957) Lekcii po uravnenijam v chastnyh proizvodnyh, 443 p. [in Russian]

2 Smirnov M.M. (1964) Differencial'nye uravnenija v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka, 206 p. [in Russian]

3 Spivakov Ju.L. (1986) Special'nye klassy reshenij linejnyh differencial'nyh uravnenij i ih prilozhenija k anizotropnoj i neodnorodnoj teorii uprugosti, 186 p. [in Russian]

4 Kamke Je. (1966) Spravochnik po differencial'nym uravnenijam v chastnyh proizvodnyh pervogo porjadka, 260 p. [in Russian]

5 Kurant R. (1964) Uravnenija s chastnymi proizvodnymi, 830 p. [in Russian]

6 Puankare A. (1971) Izbrannye metody. Novye metody nebesnoj mehaniki, 771 p. [in Russian]

7 Assanova A.T., Bekbauova A.U., Talipova M.Zh. (2023) On a non-local problem for system of partial differential equations of hyperbolic type in a specific domain. International Journal of Mathematics and Physics.

8 Assanova A.T. (2024) On a solvability to the problem with parameter for differential-algebraic equations. Lobachevskii Journal of Mathematics.

9 Bekbauova A.U., Meirambekuly A. (2025) Construction of solutions in a broad sense of systems of first order partial differential equations with periodic conditions. Mathematical Methods in the Applied Sciences.

10 Tasmambetov Zh.N., Tereshhenko N.I. (1974) O logarifmicheskih reshenijah sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. Sbornik trudov inst. mat. i meh. AN KazSSR, pp. 236–244. [in Russian]

11 Tasmambetov Zh. (2009) About logarithmic decisions of the special system of the differential equations in partial derivatives. Abstracts of the third congress of the World mathematical Society of Turkic countries. Almaty, pp. 407–411.

12 Tasmambetov Zh.N., Isenova A.A. (2020) Normal'no-reguljarnye i logarifmicheskie reshenija sistemy Uittekera sostojashhej iz treh uravnenij. Tradicionnaja mezhdunarodnaja aprel'skaja matematicheskaja konferencija v chest' Dnja rabotnikov nauki RK. Tezisy dokladov. Almaty, pp. 167–168.

13 Isenova A.A. (2022) Normal'no-reguljarnye i logarifmicheskie reshenija sistemy Uittekera sostojashhej iz treh uravnenij. IX mezhdunarodnaja nauchnaja konferencija «Problemy differencial'nyh uravnenij, analiza i algebry». Aktobe, pp. 281–288.

14 Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I. (1970) Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij i ih prilozhenija. Metod Frobeniusa-Latyshevoj. Kiev: Izd. Instituta matematiki AN USSR, 394 p. [in Russian]

15 Tasmambetov Zh.N. (1991) Postroenie reshenija sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s reguljarnoj osobennost'ju obobshhennym metodom Frobeniusa (Prepr. /AN USSR. Institut matematiki: 91.29) Kiev, 44 p. [in Russian]

16 Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I., Orel G.S. (1974) Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija. Kiev: Vishha shkola, 136 p. [in Russian]

17 Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. (2022) Construction of solutions Hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 43, no. 11, pp. 3167–3173. [in Russian]

18 Tasmambetov Zh.N., Nurgalieva D.M., Talipova M.Zh. O primenenii metoda Frobeniusa-Latyshevoj pri reshenii zadach matematicheskoj fiziki. Materialy 6-oj Kazahstanskoj nauch. konf. po fizike tverdogo tela. Aktobe, 4–6 oktjabrja 2000 g., pp. 174–177. [in Russian]

19 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. (2017) Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system. AIP Conference Proceedings, vol. 1880. https://doi.org/10.1063/1.5000629.

20 Tasmambetov Zh.N. (2015) Postroenie normal'nyh i normal'no-reguljarnyh reshenij special'nyh sistem differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka. IP Zhandildaeva S.T., Aktobe, 464 p. [in Russian]

[1]*Талипова М.Ж.,
физ.-мат.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
*e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]Бекбауова А.У.,
физ.-мат.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,
e-mail: mirra478@mail.ru
[1]Сейлова Р.Д.,
физ.-мат.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,
e-mail: roza_seilova@mail.ru

[1]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ДЕРБЕС ТУЫНДЫСЫ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ЛОГАРИФМДІК ШЕШІМДЕРІН ТАБУ

Андатпа

Бұл жұмыстың мақсаты – дербес туындылы екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің логарифмдік шешімдерін зерттеу, сондай-ақ шешімдердің бар болу шарттарын анықтау және олардың қасиеттерін сипаттау. Мұндай шешімдерді (0,0) регулярлы ерекше нүкте маңында Фробениус-Латышева әдісімен табуға ерекше назар аударылады. Анықтаушы теңдеулердің түбірлері бүтін сандармен ерекшеленетін логарифмдік шешімдер үшін рекуррентті қатынастарды анықтау әдісі ұсынылады. Нақты мысал негізінде екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің біртекті жүйесі үшін логарифмдік шешімдерді құру тәсілдері көрсетіледі.

Тірек сөздер: біртекті жүйе, логарифмдік шешім, анықтаушы теңдеу, көпмүшелік, аналитикалық функция, қатар, регулярлы ерекше нүкте, Фробениус-Латышева әдісі.

[1]*Talipova M.Zh.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,
*e-mail: mira_talipova@mail.ru
[1]Bekbauova A.U.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,
e-mail: mirra478@mail.ru
[1]Seilova R.D.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0009-0006-4443-2579,
e-mail: roza_seilova@mail.ru

[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

FINDING LOGARITHMIC SOLUTIONS TO A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The purpose of this work is to study logarithmic solutions of a system of second-order partial differential equations, as well as to establish the conditions of their existence and characterize their properties. Special attention is paid to finding such solutions using the Frobenius-Latysheva method in the vicinity of a regular singular point (0,0). A method has been developed for finding recurrence relations for existing logarithmic solutions when the simple roots of the defining equations differ by integers. A concrete example shows how to construct a logarithmic solution for a homogeneous system of partial differential equations of the second order.

Key words: homogeneous system, logarithmic solution, defining equation, polynomial, analytical function, series, regular singular point, Frobenius-Latysheva method.

Дата поступления статьи в редакцию: 14.02.2024