

FTAMP 272717
ӘОЖ 517.956.2

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-239-246>

¹***Көшербаева Ұ.Р.**,

ф.-м.ғ.к., аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0002-4820-2264

*e-mail: ulbyke1970@gmail.com

¹әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

СИНГУЛЯРЛЫҚ НҮКТЕСІ БАР СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС БЕЛЬТРАМИ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ДИРИХЛЕ ТҮРІНДЕГІ ЕСЕП

Аңдатпа

Комплекс жазықтықтың ақырсыз бұрыштық облысында сингулярлық нүктесі бар сызықты емес бірінші ретті Бельтрами теңдеулер жүйесін қарастырамыз. Бұл теңдеулер жүйесі тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң ақырсыз аз иілетін беттер теориясында және тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды құрастыру үшін қолданылады. Бұл жұмыста осы теңдеулер жүйесі үшін қойылған Дирихле есебі түріндегі есептің үзіліссіз функциялар кеңістігінде шешілуінің жеткілікті шарты алынған. Ол үшін сингулярлық нүктесі бар сәйкес сызықты эллиптикалық дербес туындылы теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін пайдаланамыз. Дирихле есебінің үзіліссіз шешімінің бар болуы Шаудердің қозғалмайтын нүкте қағидасын пайдалану арқылы дәлелденеді.

Тірек сөздер: Дирихле есебі, Бельтрами теңдеуі, эллиптикалық жүйе, сызықты емес теңдеу, шексіз облыс.

Кіріспе

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының маңызды бөлімдерінің бірін эллипстік теңдеулер мен жүйелер үшін қойылған шекаралық есептер құрайды. Бұрыштық нүктелері бар облыста эллиптикалық есептерді зерттеуді ең бірінші болып И. Радон [1] қарастырды. Жазықтықта берілген облыстың шекарасында бұрыштар болған кезде ол Лаплас операторы үшін қойылған шекаралық есептерді (Нейман және Дирихле) облыс шекарасындағы интегралдық теңдеулерге келтіру үшін дербес туындылы теңдеулерді шешу әдісін қолданды. Кейіннен бұл әдіс функциялар теориясындағы шекаралық есептерде [2], серпімділік теориясының [3] шекаралық есептерінде, сонымен қатар эллиптикалық есептердің жалпы теориясы [4] сияқты әртүрлі бағыттарда кең қолданыс тапты. И.Н. Векуа [5, 6] өзінің еңбегінде жазықтықтағы нақты аналитикалық коэффициентті эллиптикалық теңдеулер үшін функционалдық-теориялық әдісті дамытты. М. Өтелбаев пен Қ. Оспанов [7] жұмыстарында Векуа кеңістігін (V-кеңістік) енгізе отырып, негізгі нәтижелердің дәлелдеулерін жеңілдетті. Тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды тұрғызу Бельтрами теңдеуінің гомеоморфты шешімдерін табумен бірдей екенін З.Д. Усманов [8–10] дәлелдеді. [11–14] еңбектерде шенелмеген бұрыштық облыста бірінші ретті дербес дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне қойылған шекаралық есептерді екі бағытта – біреуінің коэффициенттерінде сингулярлық нүкте бар, ал екіншісінде сингулярлы сызықтар бар жағдайлар қарастырылған. А.П. Солдатов [15] бірнеше мақалаларды жинақтаған еңбегінде екінші және жоғары ретті эллиптикалық теңдеулер үшін қойылған шекаралық есептерді бірінші ретті эллиптикалық жүйелерге келтіріп зерттеу туралы жазған.

Айталық, $0 < \varphi \leq \varphi_0$ және $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < R, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$ болсын. v, σ – оң сандар, γ – берілген комплекс сан; $[0, \varphi_0]$ сегментте елеулі шенелген және өлшенетін $f(\varphi)$

функциялардың класын $S[0, \varphi_0]$ деп белгілейік, мұнда норма $\|f\|_1 = \sup_{\varphi \in [0; \varphi_0]} |f(\varphi)|$ формуламен табылады.
 G облысында берілген

$$\partial_{\bar{z}} V - \beta e^{2i\varphi} \partial_z V + \frac{b(\varphi)}{2\bar{z}} \bar{V} = \frac{r^{\nu} a(z, V)}{2\bar{z}} \quad (1)$$

теңдеуді қарастырайық. Мұнда $0 < \beta < 1$ – эллиптикалық шарт, $b(\varphi \in S[0, \varphi_0])$, ал $a(z, V) - \{(z, V) : z \in G, |r^{-\nu} V - \gamma| < \sigma\}$ облыста айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз функция және z, V – ге қатысты бірінші ретті біртекті функция, яғни, кез келген t нақты саны үшін $a(tz, tV) = ta(z, V)$ теңдігі орындалады.

(1) теңдеудің шешімін

$$V(\varphi) = r^{\nu} e^{i\nu\varphi} W(\varphi) = z^{\nu} W(\varphi) \quad (2)$$

түрде іздейміз, мұндағы $W(\varphi) \in C[0, \varphi_0] \cap W_{\infty}^1[0, \varphi_0]$, ал $W_{\infty}^1[0, \varphi_0]$ арқылы $f'(\varphi) \in S[0, \varphi_0]$ орындалатын $f(\varphi)$ функциялар класы белгіленген.

Жаңалығы

Қарастырылған теңдеудің коэффициенттерінің координаталар бас нүктесінде бірінші ретті полюстері бар және олар $L_2(G)$ класында жатпайды. Бұл жағдай И.Н. Векуа ұсынған аналитикалық аппараттың қолданыс аясынан тыс, сондықтан мәселені зерттеу жеке назарды қажет етеді. Есептің шешімін табу үшін функционалдық анализ және комплекс айнымалыға байланысты функциялар әдістерімен үйлестірілген Ә.Б. Тұнғатаровтың зерттеу әдістемесі қолданылды. $\beta = 0$ жағдайда А.Б. Тұнғатаровтың [16] жұмысындағы нәтижелерді аламыз. Ақырсыз облыста берілген полярлық ерекше нүктесі бар Бельтрами теңдеуі үшін қойылған бастапқы-шекаралық есеп [17] еңбекте шешілген. [18] жұмыста Бельтрами операторы үшін дөңгелекте қойылған Нейманның шекаралық есебінің шешімі айқын табылған және есептің шешілу шарттары да алынған. Ал, [19] жұмыста сақиналық аймақта кез келген ретті біртекті емес полианалитикалық теңдеу үшін Дирихле есебінің шешілу шарттары және айқын шешімі зерттелген.

Бұл жұмыста (1) теңдеуі үшін қойылған шекаралық есепті қарастырамыз.

D есебі. (1) теңдеудің

$$W(0) = \gamma \quad (3)$$

шартын қанағаттандыратын (2) түріндегі шешімін табу керек. Мұнда γ – берілген комплекс сан.

Айта кету керек, (1) теңдеу – жазықтықта сингулярлық нүктесі бар сызықты емес дифференциалдық теңдеулерден құралған эллиптикалық жүйенің комплекс түрі, ал D есебі – (1) жүйе үшін шекаралық шарты $\varphi = 0$ оң нақты осьте қойылған Дирихле типті есеп болып табылады.

Материалдар мен әдістер

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \exp(i\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \partial_z = \frac{1}{2} \exp(-i\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

формулаларды пайдалансак, (1) теңдеуі полярлық координаттар жүйесінде

$$(1 - \beta) \frac{\partial W}{\partial r} + (1 + \beta) \frac{i}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{b(\varphi)}{r} W = \frac{r^{\nu} a(e^{i\nu\varphi}, r^{-\nu} W(\varphi))}{r} \quad (4)$$

түрде жазылады.

Мұнда біз $a(z, V) - (z, V)$ ге қатысты бірінші ретті біртекті функция екенін пайдаландық. (2) формуланы (4)-ке апарып қойсақ, V -ге қатысты теңдеуді аламыз:

$$V' - b_1(\varphi)\bar{V} = a_1(\varphi, V) \quad (5)$$

$$\text{Мұнда } b_1(\varphi) = \frac{i}{1+\beta} b(\varphi) e^{-2i\nu\varphi}, \quad a_1(\varphi, V) = \frac{-i e^{-i\nu\varphi} a(e^{i\nu\varphi}, e^{i\nu\varphi} V) - 2i\beta\nu V}{1+\beta}.$$

(5) сызықты емес теңдеуді шешу үшін [20] табылған

$$V' - b_1(\varphi)\bar{V} = a_1(\varphi) \quad (6)$$

теңдеудің жалпы шешімін пайдаланамыз.

(6) теңдеудің жалпы шешімі

$$V(\varphi) = \bar{c}P_1(\varphi) + cP_2(\varphi) + P_3(\varphi) \quad (7)$$

Мұнда c – кез келген комплекс сан,

$$P_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(\varphi), \quad P_2(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(\varphi), \quad P_3(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\varphi),$$

$$I_1(\varphi) = \int_0^\varphi b_1(t)dt, \quad I_k(\varphi) = \int_0^\varphi b_1(t)\overline{I_{k-1}(t)}dt, \quad (k = \overline{2, \infty}),$$

$$A_0(\varphi) = \int_0^\varphi a_1(t)dt, \quad A_k(\varphi) = \int_0^\varphi b_1(t)\overline{A_{k-1}(t)}dt, \quad (k = \overline{1, \infty}).$$

$P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $P_3(\varphi)$ функцияларға қатысты төмендегідей бағалаулар мен қатынастар орынды:

$$|P_1(\varphi)| \leq \operatorname{sh}\left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi\right), \quad |P_2(\varphi)| \leq \operatorname{ch}\left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi\right), \quad (8)$$

$$|P_3(\varphi)| \leq |A_0|_0 \exp\left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi\right),$$

мұнда $|f|_0 = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_0} |f(\varphi)|$,

$$P'_1 = b_1(\varphi)\overline{P_2}, \quad P'_2 = b_1(\varphi)\overline{P_1}, \quad P'_3 = b_1(\varphi)\overline{P_3} + a_1(\varphi). \quad (9)$$

Соңғы теңдіктерден

$$\begin{aligned} P_1(\varphi) &= \int_0^\varphi b_1(t)\overline{P_2(t)}dt, & P_2(\varphi) &= \int_0^\varphi b_1(t)\overline{P_1(t)}dt, \\ P_3(\varphi) &= \int_0^\varphi b_1(t)\overline{P_3(t)}dt + \int_0^\varphi a_1(t)dt \end{aligned} \quad (10)$$

аламыз. (7) арқылы табылған $V(\varphi)$ функциясы (6) теңдеудің $C^1[0; \varphi_0]$ класта жататын шешімі болатынын (9) формула көрсететеді. (10) формуладағы екінші теңдікті пайдаланып, төмендегідей тепе-теңдік жазуға болады:

$$|P_2(\varphi)|^2 - |P_1(\varphi)|^2 \equiv 1$$

Осы тепе-теңдіктен және (9) теңдіктен $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ функциялардың Вронскианы – $b_1(\varphi) \neq 0$ екені шығады. Сондықтан $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ функциялар $[0; \varphi_0]$ аралықта сызықтық тәуелсіз болады.

(4) теңдеуді шешу үшін (7) формуланың көмегімен

$$V(\varphi) = \bar{c}P_1(\varphi) + cP_2(\varphi) + P_3(\varphi, V) \quad (11)$$

интегралдық теңдеуді пайдаланамыз. Мұнда

$$P_3(\varphi, V) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\varphi, V), \quad A_0(\varphi) = \int_0^{\varphi} a_1(t, V(t)) dt,$$

$$A_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b_1(t) \overline{A_{k-1}(t, V(t))} dt, \quad (k = \overline{1, \infty}).$$

(8) теңсіздіктер мен (10) теңдіктер арқылы төмендегі бағалаулар орынды:

$$\begin{aligned} |P_1(\varphi)| &\leq |b_1|_0 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi \right) \cdot \varphi, \\ |P_2(\varphi)| &\leq |b_1|_0 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi_0 \right) \cdot \varphi, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |P_1(\varphi_2) - P_1(\varphi_1)| &\leq |b_1|_0 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi_0 \right) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \\ |P_2(\varphi_2) - P_2(\varphi_1)| &\leq |b_1|_0 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{|b_1|_0}{1+\beta} \cdot \varphi_0 \right) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (13)$$

мұнда $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_0$.

$P_3(\varphi, V)$ функцияның $\{(\varphi, V) : 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, |V - \gamma| < \sigma\}$ облыстағы максимум мәнін a_2 деп алайық. Сонда

$$|A_0(\varphi, V)| \leq \frac{1}{1+\beta} (a_2 + 2\beta\nu(\sigma + |\gamma|)) \cdot \varphi$$

орындалады. $P_3(\varphi, V)$ функцияның түрінен

$$|P_3(\varphi, V)| \leq \frac{a_3}{(1+\beta)|b_1|_0} (\exp(|b_1|_0 \cdot \varphi) - 1), \quad (14)$$

$$|P_3(\varphi_2, V) - P_3(\varphi_1, V)| \leq \frac{a_3}{(1+\beta)} \exp(|b_1|_0 \cdot \varphi_0) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (15)$$

теңсіздіктер шығады, мұнда $a_3 = \frac{1}{1+\beta} (a_2 + 2\beta\nu(\sigma + |\gamma|))$.

$P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $P_3(\varphi, V)$ функциялардың түрінен (11) формуланың оң жағы $C^1[0; \varphi_0]$ класта жататыны шығады. (11) теңдіктің екі жағынан туындыласақ, (5) аламыз. Осылайша, төмендегі теоремалар орынды.

Нәтижелер мен талқылаулар

1-теорема. (11) теңдеудің $C[0; \varphi_0]$ класта жататын кез келген шешімі (5) теңдеудің $C^1[0; \varphi_0]$ класта жататын шешімі болады.

Енді (5) теңдеудің $V = V(\varphi)$ шешімін (3) шартқа бағындырамыз.

$P_1(0) = 0$, $P_2(0) = 1$, $P_3(0) = 0$ ескеріп, (11) теңдеуден $c = \gamma$ аламыз.

Осылайша, $(TV)(\varphi) = \bar{\gamma}P_1(\varphi) + \gamma P_2(\varphi) + P_3(\varphi, V)$ деп алсақ,

$$V(\varphi) = (TV)(\varphi) \quad (16)$$

теңдеудің $C[0; \varphi_0]$ класта жататын шешімі (5) теңдеудің (3) шартты қанағаттандыратын шешімі болады.

$$\gamma \cdot |b_1|_0 \cdot \varphi_0 \cdot \exp(|b_1|_0 \cdot \varphi_0)(1 + a_2) < \sigma \quad (17)$$

орындалсын. φ_0 – ді жеткілікті аз ету арқылы (17) теңсіздікті алуға болады.

Сонымен, (17) теңсіздік орындалса, төмендегі теорема орынды.

2-теорема. Егер φ_0 үшін (17) теңсіздік орындалса, онда (1) теңдеудің $\{(\varphi, V) : 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, |V - \gamma| < \sigma\}$ облыста (3) шартты қанағаттандыратын (2) түріндегі кем дегенде бір шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Егер (16) теңдеудің $C[0; \varphi_0]$ класта жататын шешімі бар болса, онда ол 1-теорема бойынша (5) теңдеудің (3) шартты қанағаттандыратын шешімі болады. Сондықтан D есебінің (2) түріндегі шешімі бар болады, мұндағы $V(\varphi)$ – (6) теңдеудің (3) шартты қанағаттандыратын шешімі.

Айталық, $\|V\| = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_0} |V(\varphi)|$ болсын. $C[0; \varphi_0]$ кеңістіктегі $\|V - \gamma\| < \sigma$ шарда $(TV)(\varphi) = \bar{\gamma}P_1(\varphi) + \gamma P_2(\varphi) + P_3(\varphi, V)$ теңдікпен берілген T операторын қарастырамыз. (12)–(15) және (17) теңсіздіктерге сүйенсек, $(TV)(\varphi)$ операторы $V(\varphi)$ функциялардың тұйық дөңес жиынын өзінің компакт бөлігіне түрлендіреді. Сондықтан Шаудер [21] қағидасы бойынша (16) теңдеудің $C[0; \varphi_0]$ класта жататын шешімі бар болады.

Теорема дәлелденді.

Қорытынды

Бұл жұмыста тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң ақырсыз аз иілетін беттер теориясында және тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды құрастыруда туындайтын Бельтрами теңдеуі үшін қойылған Дирихле типтес есеп қарастырылған. Дәлірек айтқанда, ақырсыз облыста берілген полярлық ерекше нүктесі бар Бельтрами теңдеуі үшін Дирихле есебі типтес есептің үзіліссіз шешімі Ә.Б.Түнғатаровтың зерттеу әдісіне сүйеніп табылды.

Қаржылық қолдау. Зерттеу жұмысы ешбір қаржылық қолдаудың көмегінсіз орындалды.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала // УМН. –1946. – Т. 1. – № 3–4(13–4). – С. 96–124.
- 2 Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. – М.: Наука, 1975. – 296 с.
- 3 Магнарадзе Л. Г. Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками / Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 16, № 3. – С. 157–161.
- 4 Лопатинский Я.Б. Теория общих граничных задач. – К.: Наукова думка, 1984. – 316 с.
- 5 Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. –512 с. <https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=ru&blang=ru&page=Book&id=275914>.
- 6 Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Матем. сб. – 1952. – Т. 31(73). – № 2. – С. 234–314. <https://www.mathnet.ru/rus/sm5531>
- 7 Оспанов К.Н., Отелбаев М. Об обобщенной системе Коши–Римана с негладкими коэффициентами // Изв. вузов. матем. – 1989. – № 3. – С. 48–56; Soviet Math. (Iz. VUZ), 1989, vol. 33, no. 3, pp. 75–89.

8 Усманов З.Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения // Матем. сб. – 1970. – Т. 83(125):4(12). – С. 596–615. <https://www.mathnet.ru/sm 3531>.

9 Усманов З.Д. Об одном классе обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой // Сиб. матем. журнал. – 1973. – Т. 14. – № 5. – С. 1076–1087.

10 Усманов З.Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения. <https://bibliotekanauki.pl/articles/719678.pdf>

11 Абдыманапов С.А., Тунгатаров А. Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. – Алматы: «Гылым», 2005. – 169 с.

12 Тунгатаров А. О непрерывных решениях уравнения Карлемана – Векуа с сингулярной точкой // ДАН СССР. – 1991. – Т. 319. – № 3. – С. 570–573.

13 Тунгатаров А. Об одном классе нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Материалы международной научно-практической конференции «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», посвященной 90-летию со дня рождения член-корр. АН КазССР, доктора физ.-мат. наук, профессора Т.И. Аманова. – Т. 1. – Семей, 2013. – С. 132–136.

14 Akhmed-Zaki D.K., Danaev N.T., Tungatarov A. Elliptic systems in the plane with singular coefficients along lines // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 3. – No. 1. – P. 3–10. <https://www.naturalspublishing.com/download.asp?ArtID=17372>

15 Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Совр. мат. фундам. напр. – 2017. – Т. 63. – № 1. – С. 1–189.

16 Tungatarov A. Задача типа Дирихле для одного класса нелинейных уравнений Карлемана – Векуа с сингулярной точкой // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2014. – Т. 80. – № 1. – С. 102–107.

17 Kuserbaeva U. and Altynbek S. On the initial boundary value problem for the Beltrami equation with polar singularity in an unbounded region // Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and mathematical sciences. – 2024. – Vol. 86. – No. 2. – P. 65–73. <https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.86.2.006>

18 Gençtürk İlker. Neumann boundary value problem for the Beltrami equation in a ring domain // Turkish Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 47. – No. 5. – Article 20. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3449>

19 Karaca B. Dirichlet problem for complex model partial differential equations // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2020. – Vol. 65. – No. 10. – P. 1748–1762. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1684478>

20 Kuserbayeva U., Abduakhitova G. On Continuous Solutions of the Homogeneous Beltrami Equation with a Polar Singularity // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2023. – Vol. 69. – No. 5. – P. 842–848. <https://doi.org/10.1080/17476933.2023.2164886>

21 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

REFERENCES

1 Radon I. (1946) On boundary value problems for a logarithmic potential. UMN, vol. 1, no. 3–4(13–4), pp. 96–124. [in Russian]

2 Danilyuk I.I. (1975) Irregular boundary value problems in the plane, M.: Nauka, 296 p. [in Russian]

3 Magnaradze L.G. (1937) Basic problems of the plane theory of elasticity for contours with angular points. Dokl. AS USSR, vol. 16, no. 3, pp. 157–161. [in Russian]

4 Lopatinsky Ya.B. (1984) Theory of general boundary value problems, 316 p. [in Russian]

5 Vekua I.N. (1988) Generalised analytic functions. Moscow: Nauka, 512 p. <https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=ru&lang=ru&page=Book&id=275914> [in Russian]

6 Vekua I.N. (1952) Systems of differential equations of elliptic type and boundary value problems with application to the theory of shells. Matem. sb., vol. 31(73), no.2, pp.234–314. <https://www.mathnet.ru/rus/sm5531> [in Russian]

7 Ospanov K.H., Otelbayev M. (1989) On the generalized Cauchy-Riemann system with nonsmooth coefficients, Izv. vyuzov. Math., no. 3, pp. 48–56; Soviet Math. (Iz. VUZ), 1989, vol. 33, no. 3, pp. 75–89. [in Russian]

8 Usmanov Z.D. (1970) About infinitesimal bending of surfaces of positive curvature with an isolated point of flattening. Matem.sb., vol. 83(125):4(12), pp. 596–615. <https://www.mathnet.ru/sm 3531> [in Russian]

- 9 Usmanov Z.D. (1973) About one class of generalised Cauchy-Riemann systems with a singular point. *Sib. matem. journal.*, vol. 14, no. 5, p. 1076–1087. [in Russian]
- 10 Usmanov Z.D. Infinitesimal bending of surfaces of positive curvature with a flattening point <https://bibliotekanauki.pl/articles/719678.pdf>. [in Russian]
- 11 Abdymanapov S.A., Tungatarov A. (2005) Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients. *Almaty: 'Fylym'*, 169 p. [in Russian]
- 12 Tungatarov A. (1991) On continuous solutions of the Karleman-Vekua equation with singular point. *DAN USSR*, vol. 319, no. 3, pp. 570–573. [in Russian]
- 13 Tungatarov A. (2013) About one class of nonlinear systems of ordinary differential equations of the first order. *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference 'Theory of Functions, Functional Analysis and their Applications' devoted to the 90th anniversary of the birth of member - corr. of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR, Doctor of Physical Sciences, Professor T.I. Amanov, 1-volume, Semey*, pp. 132–136. [in Russian]
- 14 Akhmed-Zaki D.K., Danaev N.T., Tungatarov A. (2012) Elliptic systems in the plane with singular coefficients along lines. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. Azerbaijan*, vol. 3, no. 1, pp. 3–10. <https://www.naturalspublishing.com/download.asp?ArtcID=17372>
- 15 Soldatov A.P. (2017) Singular integral operators and elliptic boundary value problems. I. *Sovremennr. mat. Fundam. napravlenie*, vol. 63, no. 1, pp. 1–189. [in Russian]
- 16 Tungatarov A. (2014) Dirichlet type problem for one class of nonlinear Karleman-Vekua equations with singular point. *Vestnik KazNU. Series of Mathematics, Mechanics, Informatics*, vol. 80, no. 1, pp. 102–107. [in Russian]
- 17 Kuserbaeva U. and Altynbek S. (2024) On initial boundary value problem for Beltrami equation with polar singularity in unbounded region. *Bulletin of Abay KazNPU. Series of physical and mathematical sciences*, vol. 86, no. 2 (June 2024), pp. 65–73. <https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.86.2.006>
- 18 Gençürk Ilker. (2023) Neumann boundary value problem for the Beltrami equation in the ring domain, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 47, no. 5, Article 20. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3449>
- 19 Karaca B. (2020) The Dirichlet problem for complex model differential equations, *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 65, no. 10, pp. 1748–1762. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1684478>
- 20 Kuserbaeva U., Abduakhitova G. (202) On continuous solutions of the homogeneous Beltrami equation with polar singularity, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 3, vol. 69, no. 5, pp. 842–848, <https://doi.org/10.1080/17476933.2023.2164886>
- 21 Lusternik L.A., Sobolev V.I. (1965) *Elements of functional analysis*. Moscow: Nauka, 519 p. [in Russian]

^{1*}Kuserbayeva U.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer,

ORCID ID: 0000-0002-4820-2264

*e-mail: ulbyke1970@gmail.com

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

DIRICHLET TYPE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF NONLINEAR BELTRAMI EQUATIONS WITH SINGULAR POINT

Abstract

In this paper we consider a system of first order nonlinear Beltrami equations with singular point in the angular unbounded region of the complex plane. This system of equations is used in the theory of surfaces of positive infinitesimal curvature with a density point and for the construction of isometric nodal coordinates on surfaces of positive curvature with a density point. In this paper, for this system of equations we obtain sufficient condition for the solution of the Dirichlet type problem in the space of continuous functions. For this purpose, we will use the general solution of the system of corresponding linear elliptic differential equations with singular point. The proof of existence of continuous solutions of the Dirichlet problem is based on the Schauder fixed point principle.

Key words: Dirichlet problem, Beltrami equation, elliptic system, nonlinear equation, unbounded domain.

^{1*}Кушербаева У.Р.,

к.ф.-м.н., ст. преподаватель, ORCID ID: 0000-0002-4820-2264,

*e-mail: ulbyke1970@gmail.com

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Аннотация

В статье рассматривается система нелинейных уравнений Бельтрами первого порядка с сингулярной точкой в угловой неограниченной области комплексной плоскости. Эта система уравнений используется в теории поверхностей положительной бесконечно малой кривизны с точкой плотности и для построения изометрических узловых координат на поверхностях положительной кривизны с точкой плотности. В данной работе для этой системы уравнений получено достаточное условие решения задачи типа Дирихле в пространстве непрерывных функций. Для этого воспользуемся общим решением системы соответствующих линейных эллиптических дифференциальных уравнений с сингулярной точкой. Доказательство существования непрерывных решений задачи Дирихле основано на принципе неподвижной точки Шаудера.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Бельтрами, эллиптическая система, нелинейное уравнение, неограниченная область.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 22.12.2024