

МРНТИ 27.17.29
УДК 517.9

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-229-238>

¹Сатпаева З.З.,

докторант, ORCID ID: 0009-0006-9593-793X,

e-mail: satpaeva.zuxra@mail.ru

^{2*}Кангужин Б.Е.,

доктор физ.-матем. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0001-5504-6362,

*e-mail: kanbalta@mail.ru

¹Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Қазақстан

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФ-ЗВЕЗДЕ

Аннотация

В работе исследуются дифференциальный оператор второго порядка на граф-звезде. Выбран специальный класс дифференциальных операторов на граф-звезде с простыми собственными значениями. Изучена структура характеристических определителей таких операторов. В случае оператора Штурма-Лиувилля с постоянными коэффициентами выписана формула первого регуляризованного следа. Основной целью работы является вычисление регуляризованного следа оператора на граф-звезде, что отличается от вычислений для аналогичных операторов на отрезках, рассмотренных в других работах. В статье также подробно раскрываются свойства собственных значений оператора, включая теорему о том, что собственные значения оператора совпадают с нулями целой функции и алгебраическая кратность каждого собственного значения равна кратности нуля функции. Для наглядности результаты работы представлены через характеристический определитель оператора и числовые ряды, которые описывают поведение регуляризованного следа. При использовании методов теории функций и аналитических рядов вычисляется первый регуляризованный след, что является важным шагом в изучении спектральных характеристик оператора на графах. Статья представляет интерес для специалистов в области теории спектральных операторов и дифференциальных уравнений на графах, а также для исследователей, занимающихся вычислением следов операторов и анализом их асимптотических свойств.

Ключевые слова: регуляризованный след, дифференциальный оператор, оператор Штурма-Лиувилля, характеристический определитель.

Введение

В данной статье рассматривается математический объект, представляющий собой граф-звезду, который включает внутреннюю вершину и несколько ориентированных ребер, представляющих собой отрезки с заданными длинами. Оператор Штурма-Лиувилля определяется для этого графа, и целью работы является изучение его спектральных свойств, в частности, вычисление регуляризованного следа оператора.

Материалы и методы

Пусть граф-звезда включает m дуги и $(m + 1)$ вершину. Длины этих дуг $b_1, \dots, b_m$ выбираются согласно следующему правилу. Оператор Штурма-Лиувилля A_i на отрезке длины b_i определяется через формулу:

$$A_i y(x) = -y''(x) + q_i(x)y(x), x \in (0, b_i)$$

при этом область определения:

$$D(A_i) = \{y \in W_2^2[0, b_i]; y(0) = 0, y'(b_i) - h_i y(b_i) = 0\}.$$

Здесь $q_i(x)$ – гладкая функция на $[0, b_i]$, h_i – вещественное число. Пусть $\sigma(A_i)$ обозначает множество собственных значений оператора $\sigma(A_i)$.

Требование 1. Положительные числа $b_1, \dots, b_m$ должны удовлетворять условию: $\sigma(A_i) \cap \sigma(A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Это означает, что собственные значения оператора A_i не могут совпадать с собственными значениями оператора A_j .

Пусть задан граф-звезда $\Gamma = \{V, E\}$ [2.3]. Мы нумеруем вершины графа от 1- до $(m+1)$, причем $(m+1)$ - это номер внутренней вершины. Ребра $e_1, \dots, e_m$ представляют собой ориентированные отрезки с длинами $b_1, \dots, b_m$. Числа $b_1, \dots, b_m$ подчинены требованию 1. На графе-звезде Γ определим оператор Штурма-Лиувилля с помощью выражений (1)

$$l_j(y_j) = -y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j), \quad x_j \in e_j = (0, b_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

для гладких функций, которые удовлетворяют граничным условиям (2)

$$y_j'(b_j) - h_j y_j(b_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

и условиям согласования в внутренней вершине, описанным в формулах (3) и (4)

$$y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_m(0), \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m (y_j'(0) - k_j y_j(0)) = 0. \quad (4)$$

Также предполагается, что для $j = 1, \dots, m$ потенциалы $q_j(x_j) \in L_2(0, b_j)$ и числа h_j и k_j являются вещественными.

Оператор, заданный выражениями $(l_1(\cdot), \dots, l_m(\cdot))$ и действующий на гладких функциях, которые удовлетворяют граничным условиям (2), а также условиям согласования (3) и (4), будем обозначать как A . Оператор, заданный набором выражений $(l_1(\cdot), \dots, l_m(\cdot))$ на $W_2^2(\Gamma)$, будем обозначать через $A_{\max}$.

Для $j = 1, \dots, m-1$ введем решение $\varphi_j(x, \lambda)$ уравнений $l_j(\varphi_j) = \lambda \varphi_j, x_j \in e_j = (0, b_j)$, которые удовлетворяют условиям Коши при $x_i = b_i$, как указано в (5)

$$\varphi_j(b_j) = 1, \quad \varphi_j'(b_j) = h_j. \quad (5)$$

Заметим, что функции $\varphi_j(x_j, \lambda)$ для фиксированного x_j из e_j являются целыми функциями от λ . Если $j = 1, 2, \dots, m-1$, то при любом комплексном значении параметра λ величины $\varphi_j(0, \lambda)$ не могут одновременно обращаться в нуль. Это следует из того, что числа $b_1, \dots, b_m$ были выбраны так, что они удовлетворяют требованию 1.

Введем систему функций $\psi_j(x, \lambda) = B_j \varphi_j(x, \lambda)$, где $x \in e_j$. Числа $B_1, \dots, B_{m-1}$ выбираются так, чтобы система функций $\{\psi_1(x_1, \lambda), \dots, \psi_{m-1}(x_{m-1}, \lambda)\}$ должна удовлетворять условиям (3). Выберем числа $B_1, \dots, B_{m-1}$ следующим образом:

$$B_j = B_m \prod_{i=1, i \neq j}^{m-1} \varphi_i(0, \lambda),$$

где B_m – некоторая общая константа для всех $j = 1, \dots, m-1$.

Обозначим через $\Phi_m(x_m, \lambda)$ решение однородного уравнения $l_m(\Phi_m) = \lambda \Phi_m$ для $x_m \in (0, b_m)$, при условии $\Phi_m(0, \lambda) = \prod_{i=1}^{m-1} \varphi_i(0, \lambda)$, а также при условии

$$\varphi_m'(0, \lambda) = \prod_{j=1}^{m-1} \varphi_j(0, \lambda) \sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^m \prod_{j=1, j \neq i}^{m-1} \varphi_j(0, \lambda) \varphi_i'(0, \lambda).$$

Так как оператор $l_m(\Phi_m) = \lambda \Phi_m(x_m, \lambda)$, $x_m \in e_m = (0, b_m)$ линейный, то решение будет иметь вид:

$$\Phi_m(x_m, \lambda) = \Phi_m(0, \lambda) c_m(x_m, \lambda) + \varphi_m'(0, \lambda) s_m(x_m, \lambda), \quad x_m \in e_m,$$

где $c_m(x_m, \lambda)$ и $s_m(x_m, \lambda)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $l_m(y_m) = \lambda y_m(x_m)$, $x_m \in e_m$, которая удовлетворяет условиям Коши при $x_m = 0$

$$s_m(0, \lambda) = c'_m(0, \lambda) = 0, \quad s'_m(0, \lambda) = c_m(0, \lambda) = 1.$$

Отметим, что $\varphi_m(x_m, \lambda)$ является целой функцией от λ для фиксированного $x_m \in (0, b_m)$. Обозначим через $\Delta(\lambda)$ целую функцию от λ , определяемую как

$$\Delta(\lambda) = \varphi'_m(b_m, \lambda) - h_m \varphi_m(b_m, \lambda).$$

Учитывая ранее приведенные рассуждения и введенные обозначения, характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ можно выразить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \prod_{i=1}^{m-1} \varphi_i(0, \lambda) (c'_m(b_m, \lambda) - h_m c_m(b_m, \lambda)) + \\ & + (s'_m(b_m, \lambda) - h_m s_m(b_m, \lambda)) \left(\prod_{j=1}^{m-1} \varphi_j(0, \lambda) \sum_{i=1}^m k_i - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1, j \neq i}^{m-1} \varphi_j(0, \lambda) \varphi'_i(0, \lambda) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

При $j = 1, \dots, m-1$ обозначим через $c_j(x_j, \lambda)$ и $s_j(x_j, \lambda)$ – фундаментальную систему решений однородного уравнения $l_j(y_j) = \lambda y_j(x_j)$, $x_j \in l_j$, которая удовлетворяет условиям Коши при $x_j = b_j$:

$$s_j(b_j, \lambda) = c'_j(b_j, \lambda) = 0, \quad s'_j(b_j, \lambda) = c_j(b_j, \lambda) = 1.$$

Тогда из соотношений (7) вытекает, что

$$\varphi_j(0, \lambda) = c_j(0, \lambda) + h_j s_j(0, \lambda), \quad \varphi'_j(0, \lambda) = c'_j(0, \lambda) + h_j s'_j(0, \lambda). \quad (7)$$

Из соотношений (6) и (7) следует, что характеристический определитель имеет представление:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \prod_{i=1}^{m-1} (c_i(0, \lambda) + h_i s_i(0, \lambda)) (c'_m(b_m, \lambda) - h_m c_m(b_m, \lambda)) + \\ & + (s'_m(b_m, \lambda) - h_m s_m(b_m, \lambda)) \left(\prod_{j=1}^{m-1} (c_j(0, \lambda) + h_j s_j(0, \lambda)) \sum_{i=1}^m k_i - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1, j \neq i}^{m-1} (c_j(0, \lambda) + h_j s_j(0, \lambda)) (c'_i(0, \lambda) + h_i s'_i(0, \lambda)) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Собственные значения оператора A совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda)$, заданной формулой (8). Алгебраическая кратность каждого собственного значения равна кратности нуля функции $\Delta(\lambda)$.

Теорема 1 – стандартное утверждение теории линейных дифференциальных операторов [6]. Смысл теоремы 1 заключается в том, что задачу нахождения собственных значений линейного дифференциального оператора сводит к проблеме нахождения нулей некоторой целой функции.

Из результатов работы [1], что оператор A является самосопряженным оператором. Поэтому его собственные значения вещественные. Также в работе [1] доказано, что все собственные значения оператора A являются простыми собственными значениями.

Основная цель этой статьи заключается в вычислении регуляризованного следа оператора A . В исследовании А.М. Савчука [3] был вычислен регуляризованный след оператора Штурма-Лиувилля на отрезке с дельта потенциалом. Дальнейший прогресс по поводу вычисления регуляризованных следов операторов на отрезках можно найти в работах [7, 8]. В отличие от вышеприведенных работ в данной работе вычисляется след оператора Штурма-Лиувилля на граф-звезде.

Для наглядности результатов положим $m = 3$ и $q_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3, \dots$. Положим $z = \sqrt{\lambda}$, $K = \sum_{i=1}^m k_i$.

$$\begin{aligned} \Delta(z^2) = & \left(\cos zb_1 - h_1 \frac{\sin zb_1}{z} \right) \left(\cos zb_2 - h_2 \frac{\sin zb_2}{z} \right) (-z \sin zb_3 - h_3 \cos zb_3) + K (\cos zb_1 - \\ & - h_1 \frac{\sin zb_1}{z}) \left(\cos zb_2 - h_2 \frac{\sin zb_2}{z} \right) \left(\cos zb_3 - h_3 \frac{\sin zb_3}{z} \right) \\ & - \left(\cos zb_3 - h_3 \frac{\sin zb_3}{z} \right) (z \sin zb_1 - h_1 \cos zb_1) \left(\cos zb_2 - h_2 \frac{\sin zb_2}{z} \right) - (\cos zb_3 - \\ & - h_3 \frac{\sin zb_3}{z}) (z \sin zb_2 - h_2 \cos zb_2) \left(\cos zb_1 - h_1 \frac{\sin zb_1}{z} \right) \end{aligned}$$

Легко понять, что

$$\begin{aligned} \cos zb_1 \cos zb_2 \sin zb_3 &= \frac{1}{4} (\sin z(b_3 + b_1 + b_2) + \sin z(b_3 - b_1 + b_2) + \sin z(b_3 + b_1 - b_2) + \\ &+ \sin z(b_3 - b_1 - b_2)) \\ \cos zb_1 \cos zb_2 \cos zb_3 &= \frac{1}{4} (\cos z(b_3 + b_1 + b_2) + \cos z(b_3 - b_1 + b_2) + \cos z(b_3 + b_1 - b_2) + \\ &+ \cos z(b_3 - b_1 - b_2)) \\ \cos zb_1 \sin zb_2 \sin zb_3 &= \frac{1}{4} (\cos z(b_3 - b_2 + b_1) + \cos z(b_3 - b_2 - b_1) - \cos z(b_3 + b_2 + b_1) - \\ &- \cos z(b_3 + b_2 - b_1)) \\ \sin zb_1 \sin zb_2 \sin zb_3 &= \frac{1}{4} (\sin z(b_1 + b_3 - b_2) + \sin z(b_1 - b_3 + b_2) - \sin z(b_1 + b_3 + b_2) - \\ &- \sin z(b_1 - b_3 - b_2)) \end{aligned}$$

Из указанных формул вытекает следующее представление

$$4\Delta(z^2) = \Delta_0(z^2) + \sum_{j=0}^3 \Theta_j(z^2), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0(z^2) = & -3z \sin z(b_1 + b_2 + b_3) - z \sin z(b_1 - b_2 + b_3) - z \sin z(b_2 - b_1 + b_3) \\ & - z \sin z(b_2 - b_3 + b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_1(z^2) = & (h_2 + h_1 - 3h_3 + K)(\cos z(b_3 + b_1 + b_2)) + (h_2 - h_1 - h_3 + K)(\cos z(b_1 - b_2 + b_3)) \\ & + (3h_1 + 3h_2 + 3h_3 + K)\cos z(b_1 + b_2 - b_3) \\ & + (h_1 - h_2 - h_3 + K)(\cos z(b_2 + b_3 - b_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_2(z^2) = & (h_1 h_3 - h_1 h_2 - h_2 h_3 - K h_1 + K h_2 - K h_3) \frac{\sin z(b_1 + b_3 - b_2)}{z} \\ & + (h_1 h_2 + 3h_1 h_3 + 3h_2 h_3 - K h_1 - K h_2 - K h_3) \frac{\sin z(b_1 + b_2 - b_3)}{z} \\ & + (h_2 h_3 - h_1 h_3 - h_1 h_2 + K h_1 - K h_2 - K h_3) \frac{\sin z(b_2 + b_3 - b_1)}{z} + (3h_1 h_2 - h_1 h_3 \\ & - h_2 h_3 - K h_1 - K h_2 - K h_3) \frac{\sin z(b_1 + b_2 + b_3)}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_3(z^2) &= (h_1 h_2 h_3 + K h_1 h_2 + K h_1 h_3 - K h_2 h_3) \frac{\cos z(b_2 + b_3 - b_1)}{z^2} \\ &\quad + (-h_1 h_2 h_3 + K h_1 h_2 - K h_1 h_3 + K h_2 h_3) \frac{\cos z(b_1 + b_3 - b_2)}{z^2} \\ &\quad + (-K h_1 h_2 + K h_1 h_3 + K h_2 h_3 - h_1 h_2 h_3) \frac{\cos z(b_1 + b_2 - b_3)}{z^2} \\ &\quad + (-K h_1 h_2 - K h_1 h_3 - K h_2 h_3 + 3 h_1 h_2 h_3) \frac{\cos z(b_1 + b_2 + b_3)}{z^2} \\ \theta_4(z^2) &= -K h_1 h_2 h_3 \left[-\frac{\sin z(b_1 + b_3 - b_2)}{z^3} + \frac{\sin z(b_1 + b_2 - b_3)}{z^3} + \frac{\sin z(b_1 + b_3 + b_2)}{z^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin z(b_2 + b_3 - b_1)}{z^3} \right]\end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_0(z^2)$ представляет характеристический определитель оператора A_0 . Здесь оператор A_0 получается из оператора A при $h_j = 0$, $k_j = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Не умаляя общности, можно считать, что $b_1 > b_2 > b_3$, $b_2 + b_3 - b_1 > 0$. Поэтому выполняются неравенства

$$b_1 + b_2 + b_3 > b_1 + b_2 - b_3 > b_1 > b_1 + b_3 - b_2 > b_2 + b_3 - b_1 > 0.$$

Согласно результатам главы 12 монографии [9] число нулей $N(R)$ в прямоугольнике R

$$|Im z| \leq const_1, |Re z - const| \leq const_2$$

функции

$$\begin{aligned}& 2i \frac{\Delta_0(z^2) \exp(iz(b_1 + b_2 + b_3))}{z} \\ &= -3 \exp(iz2(b_1 + b_2 + b_3)) - \exp(iz2(b_1 + b_2)) + 3 - \exp(iz2(b_1 + b_3)) \\ &\quad - \exp(iz2(b_3 + b_2)) + \exp(iz2(b_1)) + \exp(iz2(b_3)) + \exp(iz2(b_2))\end{aligned}$$

удовлетворяет неравенствам

$$-7 + \frac{const_2}{\pi} 2(b_1 + b_2 + b_3) \leq N(R) \leq 7 + \frac{const_2}{\pi} 2(b_1 + b_2 + b_3) \quad (10)$$

Результаты и обсуждение

Последовательность собственных значений оператора A обозначим через $\{\lambda_n, n > 0\}$, причем нумерация подчинена неравенствам $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ при всех $n > 0$. Собственные значения оператора A_0 будем обозначать через λ_n^0 . Из неравенств (10) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^0}{n^2} = \frac{(b_1 + b_2 + b_3)^2}{\pi^2} \quad (11)$$

Обозначим через $\mathcal{Y}_n$ окружность радиуса R_n . Радиусы выбраны так, что $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что $\Delta(z^2)$, $\Delta_0(z^2)$, $\theta_j(z^2)$ – четные функций. Для дальнейших целей удобно переписать формулу (9) в виде

$$\Delta(z^2) = \Delta_0(z^2) \left(1 + \sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right).$$

В то же время функций $\frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)}$ ограничены на $\mathcal{Y}_n$ некоторой константой, не зависящей от n .

Функций $\ln \left(1 + \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)}\right)$ голоморфны на γ_n при больших n . Поэтому в силу теоремы о вычетах получим

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} z^2 d \ln \Delta(z^2) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} z^2 d \ln \Delta_0(z^2) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} z^2 d \ln \left(1 + \sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)}\right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^0 - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} 2z \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)^2 \right) dz + o(1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^0 - \sum_{j=1}^3 \sum_{|\lambda_k^0| < R_n} \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(2z \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right) + \sum_{|\lambda_k^0| < R_n} \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(z \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)^2 \right) + o(1) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n (2\lambda_k - 2\lambda_k^0 + \sum_{j=1}^3 \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(2z \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)) = \sum_{|\lambda_k^0| < R_n} \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(z \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)^2 \right) + o(1).$$

При $n \rightarrow \infty$ правая часть последнего неравенства сходится, поэтому справедлива формула для первого регуляризованного следа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2\lambda_k - 2\lambda_k^0 + \sum_{j=1}^3 \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(2z \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k^0| < R_n} \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(z \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)^2 \right).$$

Таким образом, основной результат статьи примет вид.

Теорема 2. Пусть числа $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ требованию 1. При любых вещественных числах $\mathbf{h}_j$ и $\mathbf{k}_j$ справедлива формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2\lambda_k - 2\lambda_k^0 + \sum_{j=1}^3 \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(2z \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k^0| < R_n} \operatorname{res}_{\lambda_k^0} \left(z \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\theta_j(z^2)}{\Delta_0(z^2)} \right)^2 \right)$$

Здесь λ_n – собственные значения оператора $\mathbf{A}$ при $\mathbf{q}_1(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{q}_2(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{q}_3(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Частный случай последней формулы можно найти в работе [10]. Регуляризованные следы для линейных дифференциальных операторов ранее вычислялись для различных классов операторов [5]. Однако их формулы регуляризованных следов являлись линейными функциями от коэффициентов исходного дифференциального выражения, порождающего дифференциальный оператор. Впервые в работе А.М. Савчука [3], а затем в других статьях [8, 9], следы предстали нелинейными функционалами от коэффициентов дифференциального выра-

жения. Оказалось, что если отмеченные коэффициенты являются распределениями, то следы могут оказаться уже нелинейными функционалами. Указанные результаты касались дифференциальных операторов на отрезке. Возникает проблема: как выглядят регуляризованные следы для дифференциальных операторов на графах? Теорема 2 утверждает, что след в указанном нами случае нелинейный функционал относительно h_j и k_j .

Заключение

Статья представляет собой важный вклад в теорию операторов Штурма-Лиувилля на граф-звездах, рассматривая вычисление регуляризованного следа и исследуя спектральные характеристики оператора. Результаты работы расширяют существующие теории, посвященные оператору Штурма-Лиувилля на отрезках, и применяют их к более сложным структурам, таким как графы. Полученные формулы и методы могут быть использованы для дальнейших исследований в области спектральной теории и теории дифференциальных уравнений на графах.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP19678089).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Recovering of the Stiffness Coefficients of the Sturm-Liouville Operator on a Star Graph from a Finite Set of its Eigenvalues // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 15. – No. 6. – P. 2725–2730.
- 2 Bondarenko N.P. Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition. – Bol. Soc. Mat. Mex. – 2023. – Vol. 29. – No. 2. <https://doi.org/10.1007/s40590-022-00476-x>
- 3 Савчук А.М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ -потенциалом // Успехи мат. наук. – 2000. – Т. 55. – № 6. – С. 155–156.
- 4 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – № 4. – С. 593–596.
- 5 Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов // Успехи мат. наук. – 2006. – Т. 61. – № 5. – С. 89–156.
- 6 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – Физматлит, 2010.
- 7 Nazarov A.I., Stolyarov D.M., Zatitskiy P.B. The Tamarkin equiconvergence theorem and a first-order trace formula for regular differential operators revisited // J. Spectr. Theory. – 2014. – Vol. 4. – No. 2. – P. 365–389.
- 8 Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. – 2001. – Т. 69. – № 3. – С. 427–442.
- 9 Гальковский Е.Д., Назаров А.И. Общая формула следов для дифференциального оператора на отрезке при возмущении младшего коэффициента конечным зарядом // Алгебра и анализ. – 2018. – Т. 30. – № 3. – С. 30–54.
- 10 Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М., 1967
- 11 Кангузин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Аниязов А.А., Сатпаева З. Регуляризованный след оператора двукратного дифференцирования на граф-звезде // Differential Equations. – 2025.
- 12 Kirsten, K. Spectral Functions in Mathematics and Physics. – CRC Press., 2001.
- 13 Erdal G., Aylan C. A Second Regularized Trace Formula for a Fourth Order Differential Operator // Symmetry. – 2021. – No. 4. – P. 629.
- 14 Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Первый регуляризованный след дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2014. – № 2. – С. 66–71.
- 15 Bondarenko N.P. Linear Differential Operators with Distribution Coefficients of Various Singularity Orders // arXiv preprint. – 2022.
- 16 Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды Московского математического общества. – 2003. – № 64. – С. 159–212.

- 17 Кангузин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О формуле регуляризованного следа корректно возмущенного оператора Лапласа // Доклады Академии наук. –2013.
- 18 Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Математический сборник. – 2001. – № 2. – С. 109–138.
- 19 Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю. Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере S^2 // Математические заметки. – 2005. – № 3. – С. 434–448.
- 20 Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. Формула регуляризованного следа для возмущений из класса Шатена–фон Неймана дискретных операторов. – Башкирский университет, 2015.
- 21 Bondarenko N.P. Regularization and inverse spectral problems for differential operators with distribution coefficients // arXiv preprint, 2023.
- 22 Law C.K., Pivovarchik V. Characteristic functions of quantum graphs // Journal of Physics A: mathematical and theoretical, 2009.

REFERENCES

- 1 Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. (2021) Recovering of the Stiffness Coefficients of the Sturm-Liouville Operator on a Star Graph from a Finite Set of its Eigenvalues. Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 15, no. 6, pp. 2725–2730.
- 2 Bondarenko N.P. (2023) Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition. Bol. Soc. Mat. Mex., vol. 29, no. 2. <https://doi.org/10.1007/s40590-022-00476-x>.
- 3 Savchuk A.M. (2000) Reguljarizovannyj sled pervogo porjadka operatora Shturma-Liuvillja s δ -potencialom. Uspehi mat. nauk, vol. 55, no. 6, pp. 155–156. [in Russian]
- 4 Gel'fand I.M., Levitan B.M. (1953) Ob odnom prostom tozhdestve dlja sobstvennyh znachenij differencial'nogo operatora vtorogo porjadka. Dokl. AN SSSR, vol. 88, no. 4, pp. 593–596. [in Russian]
- 5 Sadovnichij V.A., Podol'skij V.E. (2006) Sledy operatorov. Uspehi mat. Nauk, vol. 61, no. 5, pp. 89–156. [in Russian]
- 6 Najmark M.A. (2010) Linejnye differencial'nye operatory. [in Russian]
- 7 Nazarov A.I., Stolyarov D.M., Zatitskiy P.B. (2014) The Tamarkin equiconvergence theorem and a first-order trace formula for regular differential operators revisited. J. Spectr. Theory, vol. 4, no.2, pp. 365–389.
- 8 Savchuk A.M., Shkalikov A.A. (2001) Formula sleda dlja operatorov Shturma-Liuvillja s singuljarnymi potencialami. Mat. Zametki, vol. 69, no. 3, pp. 427–442. [in Russian]
- 9 Gal'kovskij E.D., Nazarov A.I. (2018) Obshhaja formula sledov dlja differencial'nogo operatora na otrezke pri vozmushhenii mladshego koeficienta konechnym zarjadom. Algebra i analiz, vol. 30, no. 3, pp. 30–54. [in Russian]
- 10 Bellman R., Kuk K.L. (1967) Differencial'no- raznostnye uravnenija. [in Russian]
- 11 Kanguzhin B.E., Nurahmetov D.B., Anijarov A.A., Satpaeva Z. (2025) Reguljarizovannyj sled operatora dvukratnogo differencirovanija na graf-zvezde. Differential Equations. [in Russian]
- 12 Kirsten K. (2001) Spectral Functions in Mathematics and Physics. CRC Press.
- 13 Erdal G., Aylan C. (2021) A Second Regularized Trace Formula for a Fourth Order Differential Operator. Symmetry, no. 4, p. 629.
- 14 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. (2014) Pervyj reguljarizovannyj sled differencial'nogo operatora tipa Shturma-Liuvillja na otrezke s prokolotymi tochkami. Vestnik KazNU. Serija matematika, mehanika, informatika, no. 2, pp. 66–71. [in Russian]
- 15 Bondarenko N.P. (2022) Linear Differential Operators with Distribution Coefficients of Various Singularity Orders. arXiv preprint.
- 16 Savchuk A.M., Shkalikov A.A. (2003) Operator Shturma-Liuvillja s potencialami-raspredelenijami. Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshhestva, no. 64, pp. 159–212. [in Russian]
- 17 Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.E. (2013) O formule reguljarizovannogo sleda korrektno vozmushhennogo operatora Laplasa. Doklady Akademii nauk. [in Russian]
- 18 Fazullin Z.Ju., Murtazin H.H. (2001) Reguljarizovannyj sled dvumernogo garmonicheskogo oscilljatora. Matematicheskij sbornik, no. 2, pp. 109–138. [in Russian]
- 19 Sadovnichij V.A., Fazullin Z.Ju. (2005) Asimptotika sobstvennyh chisel i formula sleda vozmushhenija operatora Laplasa na sfere S^2 . Matematicheskie zametki, no. 3, pp. 434–448. [in Russian]
- 20 Fazullin Z.Ju., Murtazin H.H. (2015) Formula reguljarizovannogo sleda dlja vozmushhenij iz klassa Shatena–fon Nejmana diskretnyh operatorov. Bashkirskij universitet. [in Russian]

21 Bondarenko N.P. (2023) Regularization and inverse spectral problems for differential operators with distribution coefficients. arXiv preprint.

22 Law C.K., Pivovarchik V. (2009) Characteristic functions of quantum graphs. Journal of Physics A: mathematical and theoretical.

¹**Сатпаева З.З.,**

докторант, ORCID ID: 0009-0006-9593-793X,

e-mail: satpaeva.zuxra@mail.ru

^{2*}**Кангужин Б.Е.,**

физ.-мат.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0001-5504-6362,

*e-mail: kanbalta@mail.ru

¹С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ГРАФ-ЖҰЛДЫЗЫНДАҒЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ РЕТТЕЛГЕН ІЗІ

Аңдатпа

Бұл зерттеуде граф-жұлдызындағы екінші ретті дифференциалдық оператор қарастырылып, қарапайым меншікті мәндері бар дифференциалдық операторлардың арнайы класы таңдалды. Мұндай операторлардың сипаттамалық анықтауыштарының құрылымы жан-жақты зерттелді. Тұрақты коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль операторы жағдайында бірінші ретті іздің формуласы алғаш рет алынды. Зерттеудің негізгі мақсаты – басқа жұмыстарда қарастырылған кесіндідегі ұқсас операторларға қарағанда граф-жұлдызындағы оператордың өңделген ізін есептеу. Мақалада оператордың меншікті мәндерінің қасиеттері егжей-тегжейлі талданады. Атап айтқанда, оператордың меншікті мәндері бүтін функцияның нөлдерімен сәйкес келетіні және әрбір меншікті мәндің алгебралық еселігі осы функцияның нөлдік еселігіне тең екендігі дәлелденді. Жұмыстың негізгі нәтижелері оператордың сипаттамалық анықтауышы және реттелген іздің әрекетін сипаттайтын сандық қатарлар арқылы көрсетілді. Функциялар теориясы мен аналитикалық қатарлар әдістерін қолдану арқылы графтардағы операторлардың спектрлік сипаттамаларын зерттеуде маңызды қадам жасалды. Бұл мақала спектрлік операторлар теориясы және графтардағы дифференциалдық теңдеулер саласында жұмыс істейтін мамандарға, сондай-ақ операторлардың іздерін есептеу және олардың асимптотикалық қасиеттерін талдау мәселелерімен айналысатын зерттеушілерге арналған.

Тірек сөздер: реттелген із, дифференциалды оператор, Штурм-Лиувилл операторы, сипаттамалық анықтауыш.

¹**Satpayeva Z.Z.,**

PhD student, ORCID ID: 0009-0006-9593-793X,

e-mail: satpaeva.zuxra@mail.ru

^{2*}**Kanguzhin B.E.,**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

ORCID ID: 0000-0001-5504-6362,

*e-mail: kanbalta@mail.ru

¹S. Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

²Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan

THE REGULARIZED TRACE OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR ON A STAR-GRAPH

Abstract

The paper investigates a second-order differential operator on a star graph. A special class of differential operators on a star graph with simple eigenvalues is chosen. The structure of the characteristic determinants of such

operators is studied. In the case of the Sturm-Liouville operator with constant coefficients, the formula of the first regularized trace is written out. The main purpose of this work is to calculate the regularized trace of an operator on a star graph, which differs from calculations for similar operators on segments considered in other papers. The article also describes in detail the properties of the eigenvalues of an operator, including the theorem that the eigenvalues of an operator coincide with the zeros of an entire function, and the algebraic multiplicity of each eigenvalue is equal to the multiplicity of zero of the function. For clarity, the results of the work are presented through the characteristic determinant of the operator and numerical series that describe the behavior of the regularized trace. Using the methods of function theory and analytical series, the first regularized trace is calculated, which is an important step in studying the spectral characteristics of an operator on graphs. The article is of interest to specialists in the theory of spectral operators and differential equations on graphs, as well as to researchers involved in calculating operator traces and analyzing their asymptotic properties.

Key words: regularized trace, differential operator, Sturm-Liouville operator, characteristic determinant.

Дата поступления статьи в редакцию: 12.02.2025