

УДК 517.927.2

МРНТИ 27.29.15, 27.29.17, 27.29.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-173-183>

^{1*}Усманов К.И.,

к.ф.-м. н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807,

*e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

¹Назарова К.Ж.,

к.ф.-м. н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,

e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

¹Турганбаева Ж. Н.,

PhD, ORCID ID: 0000-0001-9680-2347,

e-mail: zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz

¹Международный казахско-турецкий университет им. А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Аннотация

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с инволютивным преобразованием. Цель работы – применить метод параметризации, разработанный профессором Д. Джумабаевым, для изучения разрешимости нелокальных краевых задач в контексте дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями. Известно, что задача Коши для таких уравнений может не обладать единственностью решения. Поэтому вводятся параметры $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и производится замена переменных $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Значения параметров определяются в средней точке интервала, что позволяет гарантировать существование единственного решения для задачи Коши исходного уравнения. Проведенная замена переменных формально делит задачу на две составляющие: задача Коши для исходного уравнения и система линейных уравнений по введенным параметрам. Решив задачу Коши и подставив ее решение в краевые условия, можно получить систему линейных уравнений относительно параметров. Если матрица этой системы обратима, то задача имеет единственное решение. В случае, когда матрица необратима, возможны два варианта: либо краевая задача неразрешима, либо у нее существует множество решений. Для второго случая в работе определены собственные значения и условия разрешимости краевой задачи.

Ключевые слова: метод Джумабаева, параметр, задача Коши, система линейных уравнений, однозначная разрешимость, собственные значения.

Введение

Уравнение с отклоняющимися аргументами имеют множество приложений в экономике, биологии и т.д. Некоторые из таких отклонений обладают определенными свойствами, обозначенными как $\alpha: [0, T] \rightarrow [0, T]$ и $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$. Дифференциальные уравнения, в которых наряду с искомой функцией $y(x)$ также фигурируют значения $y(\alpha(x))$, $y'(\alpha(x))$, называются дифференциальными уравнениями с инволютивными преобразованиями. Приведем некоторые инволютивные преобразования: $\frac{1}{x}$, $1 - x$, $-x$, $\frac{x-1}{x+1}$.

Исследование разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений встречается в работах многих авторов [1–5]. Например, в работе А. Cabada и F. Tojo [6] рассматриваются одномерные краевые задачи для дифференциальных уравнений, и для данных задач построены функции Грина. В работе [7] определена функция Грина главной части дифференциального

уравнения второго порядка. В работе [8] показано, что задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка на середине заданного отрезка имеет единственное решение.

Многие аспекты разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями исследованы достаточно глубоко. Тем не менее отдельные вопросы остаются нерешенными. В данной работе, используя метод Джумабаева [9], будут сформулированы условия разрешимости одной из таких задач.

В данной работе на отрезке $[0,1]$ исследуется краевая задача типа Самарского–Ионкина для дифференциального уравнения с инволюцией

$$y''(x) + \varepsilon y''(1-x) = -\lambda y(x) + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \lambda \in R \quad (1)$$

$$y(0) = y(1), \quad y'(1) = 0, \quad (2)$$

функция $f(x)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Разрешимость данной нелокальной краевой задачи (1), (2) будем исследовать методом Джумабаева. Метод Джумабаева применяется для исследования различных краевых задач [10–12].

Материалы и методы

Значение функции и его производной в середине отрезка обозначим через $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$. Выполним замену $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, тогда краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$u''(x) + \varepsilon u''(1-x) = -\lambda u(x) + f^*(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (4)$$

$$u(0) - u(1) - \mu_2 = 0, \quad (5)$$

$$u'(1) + \mu_2 = 0. \quad (6)$$

где $f^*(x) = f(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Лемма 1. Задачи (1), (2) и (3) – (6) эквивалентны.

Доказательство. Пусть $y(x)$ решение краевой задачи (1), (2). Тогда определяемая в виде функция $u(x) = y(x) - \mu_1 - \mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет (3) – (6), где $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Действительно, $u''(x) = y''(x)$ и $u''(1-x) = y''(1-x)$. Тогда

$$u''(x) + \varepsilon u''(1-x) = -\lambda u(x) + f(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\lambda u(x) + f^*(x), \quad \text{т.е. } u(x)$$

удовлетворяет (3). Так как, $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$, то

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) - \mu_1 = \mu_1 - \mu_1 = 0.$$

$$u'\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) - \mu_2 = \mu_2 - \mu_2 = 0.$$

Условия (5), (6) следует из

$$u(0) - u(1) - \mu_2 = \left(y(0) - \mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right) - \left(y(1) - \mu_1 - \frac{\mu_2}{2}\right) - \mu_2 = y(0) - y(1) = 0,$$

$$u'(1) + \mu_2 = (y'(1) - \mu_2) + \mu_2 = y'(1) = 0.$$

Обратно, пусть $u(x)$, μ_1 , μ_2 решение задачи (3) – (6). Тогда определяемая в виде функция $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет (1), (2). Действительно, $y''(x) = u''(x)$ и $y''(1-x) = u''(1-x)$. Тогда

$$y''(x) + \varepsilon y''(1-x) = u''(1-x) + \varepsilon u''(1-x)$$

Используя то, что $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$, $f^*(x) = f(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$, получим

$$y''(x) + \varepsilon y''(1-x) = -\lambda y(x) + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right) + f^*(x) = -\lambda y(x) + f(x).$$

т.е. решение (3) – (6) удовлетворяет (1).

Докажем, что $y(x)$ определенный равенством $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет и краевым условиям (2).

$$\text{Так как } y(0) - y(1) = u(0) + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} - u(1) - \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} = u(0) - u(1) - \mu_2 = 0.$$

Используя (6), можно показать, что $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет и $y'(1) = 0$. Лемма доказана.

Как видно из (3) – (6), краевая задача формально разделена на две части, т.е. задача Коши (3), (4) и в системе линейных алгебраических уравнений (5), (6) для определения введенных параметров μ_1 , μ_2 .

Решение задачи Коши. Рассмотрим уравнение (3) в точках $x^* = 1 - x$, тогда

$$u''(1-x) + \varepsilon u''(x) = -\lambda u(1-x) + f^*(1-x), \quad (7)$$

Складываем уравнения (3) и (7). Обозначим через $\vartheta(x) = u(x) + u(1-x)$, тогда

$$(1 + \varepsilon)\vartheta''(x) = -\lambda\vartheta(x) + f_+^*(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

$$\vartheta\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \vartheta'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (9)$$

где $f_+^*(x) = f^*(x) + f^*(1-x)$.

Вычитаем от уравнения (3) уравнение (7). Обозначим через $w(x) = u(x) - u(1-x)$, тогда

$$(1 - \varepsilon)w''(x) = -\lambda w(x) + f_-^*(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (11)$$

где $f_-^*(x) = f^*(x) - f^*(1-x)$.

Случай $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda > 0$, тогда решение задачи (8), (9) определяется в виде

$$\vartheta(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda(1 + \varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1 + \varepsilon}} (x - \xi) f_+^*(\xi) d\xi,$$

а решение задачи Коши (10), (11) в виде

$$w(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda(1 - \varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \varepsilon}} (x - \xi) f_-^*(\xi) d\xi.$$

Так как задачи Коши (8), (9) и (10), (11) имеют единственные решения, то единственное решение задачи Коши (3), (4) определяется в виде $u(x) = \frac{1}{2}(\vartheta(x) + w(x))$, т.е.

$$u(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (x-\xi) f_+^*(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (x-\xi) f_-^*(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Далее определяем значение введенных параметров. Для этого подставим в (12) вместо $f_+^*(x)$, $f_-^*(x)$ их выражения $f_+^*(x) = f^*(x) + f^*(1-x)$, $f_-^*(x) = f^*(x) - f^*(1-x)$, где $f^*(x) = f(x) - \lambda\mu_1 - \lambda\mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$. Тогда

$$u(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (x-\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (x-\xi) f(1-\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (x-\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (x-\xi) f(1-\xi) d\xi - \\ - \mu_1 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) - \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right) + \mu_2 \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

или, выполняя замену $z = 1 - \xi$ в интегральных членах с $f(1 - \xi)$, получим

$$u(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (x-\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (1-x-z) f(z) dz + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (x-\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-x-z) f(z) dz - \\ - \mu_1 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) - \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right) + \mu_2 \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} \left(x - \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Определив значения $u(0)$, $u(1)$, $u'(1)$ в (13) и подставляя в условия (5), (6), получим

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi - \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-z) \cdot f(z) dz - \\ - 2\mu_2 \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{\lambda}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} = 0, \\ \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (1-\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \xi f(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) d\xi - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi - \\ - \mu_1 \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} + \mu_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} = 0$$

или

$$\mu_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} = \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) dz, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & -\mu_1 \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} + \mu_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} = \\ & = -\frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (1-\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \xi f(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) d\xi + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Матрицу относительно μ_1, μ_2 обозначим через

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} & \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \end{pmatrix}.$$

Результаты и обсуждения

Теорема 1. Краевая задача (1), (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица Q обратима.

Доказательство. Пусть матрица Q обратима. Тогда из системы линейных уравнений (14), (15) однозначно определим параметры μ_1, μ_2 . Подставляя полученные значения параметров в (3), (4), найдем единственное решение задачи Коши. Так как $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$, тогда на основании леммы 1 определяем единственное решение краевой задачи (1), (2).

Обратно, пусть краевая задача (1), (2) однозначно разрешима и $y(x)$ его решение. Введя обозначения $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $u(x) = y(x) - \mu_1 - \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ от краевой задачи (1), (2) перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами (3) – (6).

Предположим, что матрица Q необратима. Тогда система линейных уравнений имеет по крайней мере два различных решения μ_1, μ_2 и $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$. Но $\mu_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\tilde{\mu}_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\tilde{\mu}_2 = y'\left(\frac{1}{2}\right)$, отсюда следует что матрица Q обратима и $\mu_1 = \tilde{\mu}_1$, $\mu_2 = \tilde{\mu}_2$.

Теорема доказана.

Подставим (13) в $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$, находим решение краевой задачи (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (x-\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (1-x-z) f(z) dz + \\ & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (x-\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-x-z) f(z) dz + \\ & \mu_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \mu_2 \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \left(x - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Если матрица Q обратима, то $\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} \cdot \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 = & \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}}} \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}}}{2(1-\varepsilon)} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) dz \right) + \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} (1-\xi) f(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}} \xi f(\xi) d\xi + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \sqrt{\frac{1}{\lambda(1-\varepsilon)}} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi \right\}, \\ \mu_2 = & \frac{1}{2(1-\varepsilon) \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) dz \right\}. \end{aligned}$$

Если матрица Q необратима, тогда $\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} \cdot \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} = 0$. В этом случае для разрешимости системы линейных уравнений (14), (15) возможны два случая:

- 1) $\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} = 0$ или $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$;
- 2) $\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)}} = 0$ или $\lambda_{2k} = 4(1+\varepsilon)k^2\pi^2$;

здесь n, k – целые числа.

Теорема 2. Если $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi) d\xi = 0. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2$ и

$$\int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi) d\xi = 0.$$

Так как $\mu_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{1n}}{(1-\varepsilon)}} = \mu_2 \cos(n\pi) = (-1)^n \mu_2$, то система уравнений (14), (15) совместная.

В уравнении (16) считая μ_1 свободным, находим значение μ_2 . Подставляя полученные значения μ_1, μ_2 в $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$, находим решения краевой задачи (1), (2).

Наоборот, пусть краевая задача (1), (2) имеет решение при

$$\lambda_{1n} = 4(1-\varepsilon)n^2\pi^2. \text{ Предположим, что } \int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi) d\xi \neq 0.$$

Применяя метод параметризации, от краевой задачи (1), (2) приходим к системе линейных уравнений (14), (15). Тогда из уравнения (14) получим

$$0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi) d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin 2n\pi(1-\xi) \cdot f(\xi) dz = \int_0^1 \sin 2n\pi\xi \cdot f(\xi) d\xi \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает необходимость выполнения условия (16) при $\lambda_{1n} = 4(1 - \varepsilon)n^2\pi^2$.

Теорема 3. Если $\lambda_{2k} = 4(1 + \varepsilon)k^2\pi^2$, то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \right) \cos 2k\pi\xi \right) f(\xi) d\xi = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $\lambda_{2k} = 4(1 + \varepsilon)k^2\pi^2$ и выполнено условие (17). Тогда система линейных уравнений (14), (15) примет вид

$$\mu_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} = \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) dz, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}} &= -\frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_0^1 \cos 2k\pi\xi \cdot f(\xi) d\xi \\ &- \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} (1-\xi) \cdot f(\xi) d\xi + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \xi \cdot f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Если $\lambda_{2k} = 4(1 + \varepsilon)k^2\pi^2$, $\lambda_{1n} = 4(1 - \varepsilon)n^2\pi^2$, то из условия (17) следует условие (16).

Пусть $\lambda_{1n} \neq 4(1 - \varepsilon)n^2\pi^2$ и выполнено условие (17), то система линейных уравнений (18), (19) совместная. Считая значение параметра μ_1 свободным, находим значение μ_2 из системы (18), (19). Подставляя полученные значения в $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2} \right)$, определим решение краевой задачи (1), (2).

Наоборот, пусть краевая задача (1), (2) имеет решение при

$$\lambda_{2k} = 4(1 + \varepsilon)k^2\pi^2.$$

Применяя метод параметризации, от краевой задачи (1), (2) приходим к системе линейных уравнений (18), (19). Предположим, что

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \right) \cos 2k\pi\xi \right) f(\xi) d\xi \neq 0.$$

Умножаем уравнение (18) на $-\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}}$, а уравнение (19) на $\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)}}$ и складываем полученные уравнения. Тогда

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \right) \cos 2k\pi\xi \right) f(\xi) d\xi \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает необходимость выполнения условия (17), при $\lambda_{2k} = 4(1 + \varepsilon)k^2\pi^2$.

Случай $\lambda = 0$.

Пусть $\lambda = 0$, тогда решение задачи (7), (8) определяется в виде

$$\vartheta(x) = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^x (x-\xi) f_+(\xi) d\xi,$$

а решение задачи Коши (9), (10) определяется в виде

$$w(x) = \frac{1}{(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^x (x-\xi) f_-(\xi) d\xi.$$

Тогда

$$u(x) = \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^x (x-\xi) f_+(\xi) d\xi + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\frac{1}{2}}^x (x-\xi) f_-(\xi) d\xi,$$

где $f_+(x) = f(x) + f(1-x)$, $f_-(x) = f(x) - f(1-x)$.

Подставляем полученные выражения в (5), (6) для определения введенных параметров μ_1 , μ_2 , т.е.

$$\mu_2 = \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^1 \xi f(\xi) d\xi - \frac{1}{1-\varepsilon} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$-\mu_2 = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi) d\xi - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Складывая уравнения (20), (21), получим

$$\int_0^1 [(1+\varepsilon)\xi - \varepsilon] f(\xi) d\xi = 0. \quad (22)$$

Теорема 4. Если $\lambda = 0$, тогда для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнение условий (22).

Заключение

В данной работе была рассмотрена краевая задача типа Самарского–Ионкина для дифференциального уравнения. Для исследования разрешимости рассматриваемой задачи был применен метод параметризации Д. Джумабаева.

Определены собственные значения исследуемой задачи при $\lambda \geq 0$. В случае $\lambda < 0$ краевая задача не исследовалась, так как она однозначно разрешима, т.е. не имеет собственных значений. В дальнейшем предполагается применение результатов данной работы для исследования краевых задач для интегро-дифференциального уравнения с дробной производной, а также для исследования краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Финансирование. Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Кожанов А.И., Бжеумихова О.И. Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией // Сибирский математический журнал. – 2024. – Т. 65. – № 5. – С. 953–964.
- 2 Карачик В.В. Бигармоническая задача Неймана с двойной инволюцией // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математика. Механика. Физика. – 2024. – Т. 16. – № 3. – С. 18–26.

- 3 Дехконов Ф.Н. On the boundary control problem for a pseudo-parabolic equation with involution // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2024. – Т. 20. – № 3. – С. 416–427.
- 4 Кадиркулов Б.Ж., Каюмова Г.А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа дробного порядка с инволюцией // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 210. – С. 55–65.
- 5 Турметов Б.Х., Карачик В.В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т. 31. – № 4. – С. 651–667.
- 6 Cabada A.; Tojo F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015. ISBN 978-94-6239-120-8.
- 7 Sarsenbi A.A., Mussirepova E. Green's function of a boundary value problem for a second-order differential equation with involution // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан. – 2022. – Т. 11. – № 12. – С. 21.
- 8 Dildabek G., Ivanova M.B., Sadybekov M.A. On root functions of nonlocal differential second-order operator with boundary conditions of periodic type // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2021. – Т. 112. – № 4.
- 9 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. // Comput Maths Math Phys. –1989. – V. 29. – No. 34. – P. 34–46.
- 10 Асанова А.Т. и др. О краевой задаче для гиперболического уравнения высокого порядка с импульсной дискретной памятью // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2024. – Т. 21. – № 3. – С. 191–200.
- 11 Усманов Қ.И., Жаппар А.С. Импульсты шеттік шартты параметрлі интегралдық-дифференциалдық тендеулер жүйесінің дербес бір жағдайының бірімді шешімділігі // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия Физико-математические науки. – 2020. – Т. 72. – № 4. – С. 78–84.
- 12 Исакова Н.Б. и др. Численный метод решения краевой задачи для параболического уравнения // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2024. – Т. 21. – № 3. – С. 165–175.

REFERENCE

- 1 Kozhanov A.I., Bzheumihova O.I. (2024) Sobstvennye funktsii i sobstvennye chisla differentsial'nykh uravnenij s involutsiej. Sibirskij matematicheskij zhurnal, vol. 65, no. 5, pp. 953–964. [in Russian]
- 2 Karachik V.V. (2024) Bigarmonicheskaja zadacha Nejmana s dvojnoj involutsiej. Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija Matematika. Mehanika. Fizika, vol. 16, no. 3, pp. 18–26. [in Russian]
- 3 Dehkonov F.N. (2024) On the boundary control problem for a pseudo-parabolic equation with involution. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija, vol. 20, no. 3, pp. 416–427.
- 4 Kadirkulov B.Zh., Kajumova G.A. (2022) Nelokal'naja zadacha dlja uravnenija smeshannogo tipa drobnogo porjadka s involutsiej. Itogi nauki i tehniki. Sovremennaja matematika i ee prilozhenija. Tematicheskie obzory, vol. 210, pp. 55–65. [in Russian]
- 5 Turmetov B.H., Karachik V.V. (2021) O razreshimosti kraevykh zadach Dirihle i Nejmana dlja uravnenija Puassona s mnozhestvennoj involutsiej. Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki, vol. 31, no. 4, pp. 651–667. [in Russian]
- 6 Cabada A., Tojo F.A.F. (2015) Differential Equations with Involutions, 1st ed., Atlantis Press: Paris, France. ISBN 978-94-6239-120-8.
- 7 Sarsenbi A.A., Mussirepova E. (2022) Green's function of a boundary value problem for a second-order differential equation with involution. Vestnik Nacional'noj inzhenernoj akademii Respubliki Kazakhstan, vol. 11, no. 12, p. 21.

8 Dildabek G., Ivanova M.B., Sadybekov M.A. (2012) On root functions of nonlocal differential second-order operator with boundary conditions of periodic type. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, vol.112, no. 4.

9 Dzhumabayev D.S. (1989) Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Comput Maths Math Phys.*, vol. 29, no. 34, pp. 34–46.

10 Asanova A.T. i dr. (2024) O kraevoy zadache dlja giperbolicheskogo uravnenija vysokogo porjadka s impul'snoj diskretnoj pamjat'ju. *Vestnik Kazhstanskogo-Britanskogo tehničeskogo universiteta*, vol. 21, no. 3, pp. 191–200. [in Russian]

11 Usmanov Q.İ., Jappar A.S. (2020) İmpülsly şettık şartty parametrlı integraldyq-diferensialdyq teñdeuler jüiesinıń derbes bır jaǵdaiynyń birmandı şeşimdılıǵı. *Vestnik KazNPU imeni Abaja. Serija Fiziko-matematicheskie nauki*, vol. 72, no. 4, pp. 78–84. [in Kazakh]

12 Iskakova N.B. i dr. (2024) Chislennyj metod reshenija kraevoy zadachi dlja parabolicheskogo uravnenija. *Vestnik Kazhstanskogo-Britanskogo tehničeskogo universiteta*, vol. 21, no. 3, pp. 165–175. [in Russian]

^{1*}**Usmanov K.I.,**

Cand. Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807

*e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

¹**Nazarova K.Zh.,**

Cand. Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,

e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

¹**Turganbaeva Zh.**

PhD, ORCID ID: 0000-0001-9680-2347

e-mail: zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz

¹Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan

SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE SAMARSKY-IONKIN TYPE FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION.

Abstract

In this paper, we investigate a non-local boundary value problem for a second-order differential equation with an involutive transformation. The aim of this work is to apply the parametrization method developed by Professor D. Dzhumabayev to study the solvability of non-local boundary value problems in the context of differential equations with involutive transformations. It is known that the Cauchy problem for such equations may not have a unique solution. Therefore, parameters $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ are introduced, and variables $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ are replaced. The parameter values are determined at the midpoint of the interval, which guarantees the existence of a unique solution for the Cauchy problem of the original equation. The performed variable substitution formally divides the problem into two components: the Cauchy problem for the initial equation and a system of linear equations with respect to the introduced parameters. By solving the Cauchy problem and substituting its solution into the boundary conditions, one can obtain a system of linear equations with respect to the parameters. If the matrix of this system is invertible, then the problem has a unique solution. In the case when the matrix is non-invertible, two scenarios are possible: either the boundary value problem is unsolvable, or it has multiple solutions. For the second case, the paper defines the eigenvalues and solvability conditions of the boundary value problem.

Key words: Dzhumabayev's method, parameter, Cauchy problem, system of linear equations, unique solvability, eigenvalues.

^{1*}Усманов К.И.,

ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-4311-5807

*e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

¹Назарова К.Ж.,

ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-2093-1879,

e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

¹Турганбаева Ж.

PhD, аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0001-9680-2347

e-mail: zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz

¹Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ-түрік университеті,
Түркістан қ., Қазақстан

ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН САМАРСКИЙ-ИОНКИН ТИПТЕС ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Аңдатпа

Бұл жұмыста инволютивтік түрлендіруі бар екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін локальды емес шеттік есептер қарастырылады. Бұл жұмыстың мақсаты инволютивтік түрлендірулері бар дифференциалдық теңдеулер үшін локальды емес шеттік есептердің шешілімділік мүмкіндігін зерттеуде профессор Д. Джумабаевтың параметрлеу әдісін қолдану болып табылады. Белгілі болғандай, инволютивтік түрлендірулері бар дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің әрқашан жалғыз шешімі бола бермейді. Сондықтан $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ параметрлері енгізіліп $y(x) = u(x) + \mu_1 + \mu_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ айнымалыны алмастыру жасалады. Параметр мәндері интервалдың орта нүктесінде енгізіледі, бұл бастапқы теңдеу үшін алынған Коши есебінің жалғыз шешімінің болуын қамтамасыз етеді. Айнымалыларды ауыстыру формальды түрде есепті екі құрамдас бөлікке бөледі: бастапқы теңдеу үшін Коши есебі және енгізілген параметрлер үшін сызықтық теңдеулер жүйесі. Коши есебін шешу және оның шешімін шеттік шарттарға қою арқылы параметрлер үшін сызықтық теңдеулер жүйесін алуға болады. Егер бұл жүйенің матрицасының кері матрицасы бар болса, онда есептің жалғыз шешімі болады. Матрицаның кері матрицасы болмаған жағдайда екі нұсқа болуы мүмкін: не шеттік есептің шешімі жоқ, не оның шексіз көп шешімдері бар. Екінші жағдай үшін, осы жұмыста меншікті мәндері мен шеттік есептің шешілімдік шарттары анықталады.

Тірек сөздер. Джумабаев әдісі, параметр, Коши есебі, сызықты теңдеулер жүйелері, бірімәнді шешілімділік, меншікті мәндер.

Дата поступления статьи в редакцию: 13.11.2024