

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICAL SCIENCES
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

ӨОЖ 517.925.7
ГТАХР 27.31.15, 27.29.21

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-163-172>

^{1*}Талипова М.Ж.,

ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

¹Бекбауова А.У.,

ф.-м.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,

e-mail: mirra478@mail.ru

¹Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

**ИРРЕГУЛЯРЛЫ ЕРЕКШЕ НҮКТЕЛЕРІ БАР БІРТЕКТІ
ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ
ҚАЛЫПТЫ ШЕШІМДЕРІН ТҰРҒЫЗУ**

Аңдатпа

Екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің иррегуляр ерекше нүктесінің маңайында қалыпты шешімін Фробениус-Латышева әдісімен тұрғызу мәселесі қарастырылады. Қарастырылып отырған дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің үйлесімді болу шарттары көрсетіліп, шексіз алыстатылған нүкте маңайындағы қалыпты шешімдерін тұрғызу алгоритмі жасалады. Екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімінің құрылымы туралы теорема дәлелденеді. Сонымен қатар, сәйкес біртекті жүйенің дербес шешімі біртекті емес жүйенің оң жағымен тең болған жағдайда пайда болатын «резонанстық» жүйе зерттеледі. Нақты мысал арқылы біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің дербес шешімін тұрғызу жолы көрсетіледі.

Тірек сөздер: біртекті емес жүйе, біртекті жүйе, қалыпты шешім, ранг, көпмүшелік, аналитикалық функция, қатар, иррегулярлы ерекше нүкте, Фробениус-Латышева әдісі.

Кіріспе

Сызықтық дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясы комплексті айнымалы функциялар теориясы әдістерінің көмегімен теңдеулердің шешімдерін табуды қарастырады. Шешімдерді айқын түрде табуға болмайтын жағдайларда, оны дәрежелік қатарлар түрінде немесе басқа жуықталған әдістердің көмегімен іздестіреді, олардың арасында асимптотикалық әдістер маңызды орын алады.

Дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясымен көптеген ғалымдар айналысты [1–7]. Айнымалы коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясы саласындағы негізгі зерттеулер [8–10] жұмыстарда қарастырылған. Екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық жүйелері үшін Фробениус-Латышева әдісін одан әрі дамыту, сондай-ақ ерекше қисықтар төңірегінде теңдеулер жүйесінің әр түрлі түрдегі шешімдерін зерттеу маңызды бағыт болып табылады және де бұл бағытпен көптеген ғалымдар айналысуда [11–17]. Бұл жобалық-дифференциалдық геометрия есептерін шешуде, арнайы функциялар теориясы және екі айнымалының ортогональды көпмүшеліктерін қоса алғанда, әртүрлі салаларда, соның ішінде электродинамикада, радиоэлектроникада және математикалық физиканың қолданбалы есептерінде практикалық маңызы зор [18–20].

Ұсынылып отырған жұмыста екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің иррегулярлы ерекше нүктесінің маңайында қалыпты шешімдерін Фробениус-Латышева әдісімен тұрғызу мәселесі қарастырылады.

Материалдар мен әдістер

Біртекті емес дербес туындылы екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін

$$\begin{aligned} P^{(0)}(x, y) \cdot Z_{xx} + P^{(1)}(x, y) \cdot Z_x + P^{(2)}(x, y) \cdot Z &= P^{(3)}(x, y), \\ Q^{(0)}(x, y) \cdot Z_{yy} + Q^{(1)}(x, y) \cdot Z_y + Q^{(2)}(x, y) \cdot Z &= Q^{(3)}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

мұндағы коэффициенттер $|x|$ және $|y|$ жеткілікті үлкен мәндері үшін жинақталатын қатар түрінде берілген

$$\begin{aligned} P^{(i)}(x, y) &= x^{\alpha_i} \cdot y^{\beta_i} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} p_{\mu, \nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \\ Q^{(i)}(x, y) &= x^{\alpha_i} \cdot y^{\beta_i} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} q_{\mu, \nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (i = 0, 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

$Z = Z(x, y)$ – жалпы белгісіз функция, ал (1) біртекті емес жүйенің оң жағы екі айнымалыдан тұратын дәрежелік қатар түрінде берілсін

$$\begin{aligned} P^{(3)}(x, y) &= \exp Q(x, y) \cdot x^m \cdot y^n \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (a_{0,0} \neq 0) \\ Q^{(3)}(x, y) &= \exp Q(x, y) \cdot x^m \cdot y^n \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} b_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (b_{0,0} \neq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

($m \geq 0, n \geq 0, a_{\mu, \nu}$ және $b_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) – белгілі тұрақтылар).

(1) біртекті емес жүйенің қалыпты шешімдерін тұрғызу келесі сұрақтарға жауап беру арқылы жүзеге асырылады:

1) қарастырылып отырған (1) біртекті емес жүйе үшін қалыпты шешімдердің жалпы түрі қандай болады?

2) характеристикалық теңдеулер жүйесінің ℓ – еселі түбірлерінің жұптарына ℓ формальды шешімдердің қалыпты қатарлар түрінде сәйкес келуінің шарттары қандай?

Фробениус-Латышева әдісі ерекше қисықтардың маңайында жүйенің шешімдер құрылымын алдын ала тікелей анықтауға мүмкіндік береді [11].

$x = \infty$ және $y = \infty$ иррегуляр ерекше нүктелерінде жүйенің қалыпты шешімі мына түрде болады:

$$Z = \exp Q(x, y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} c_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (c_{0,0} \neq 0), \quad (4)$$

мұндағы $\rho, \sigma, C_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) – кейбір тұрақтылар, ал $Q(x, y)$ – ең үлкен дәрежесі берілген (1) берілген біртекті емес жүйенің P рангысына тең екі айнымалыдан тұратын көпмүшелік, яғни

$$Q(x, y) = \frac{\alpha_{p,0}}{x^p} \cdot x^p + \frac{\alpha_{0,p}}{y^p} \cdot y^p + \dots + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y, \quad (5)$$

мұндағы $\alpha_{p,0}, \alpha_{0,p}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ – анықталмаған параметрлер; $p = 1 + k$ ранг, k ішкі-рангысы белгісіз x және y айнымалыларының ең үлкен дәрежелері бойынша анықталады [12]. Алдымен (1) біртекті емес жүйені шешпес бұрын $P^{(0)}(x, y) \equiv 1, Q^{(0)}(x, y) \equiv 1$ болған кездегі теңдеулердің үйлесімділік шартын тексереміз.

$$\begin{aligned} 1. & P_y^{(1)} - Q_x^{(1)} = 0, \\ 2. & 2 \cdot Q_x^{(2)} - [P_{yy}^{(1)} - Q^{(1)} \cdot P_y^{(1)}] = 0, \\ 3. & Q_{xx}^{(1)} + P^{(1)} \cdot Q_x^{(1)} - 2P_y^{(2)} = 0, \\ 4. & Q_{xx}^{(2)} + P^{(1)} \cdot Q_x^{(2)} - P_{yy}^{(2)} - Q^{(1)} \cdot P_y^{(2)} = 0, \\ 5. & Q_{xx}^{(3)} + P^{(1)} \cdot Q_x^{(3)} - Q^{(2)} \cdot P^{(3)} - [P_{yy}^{(3)} + Q^{(1)} \cdot P_y^{(3)} - P^{(2)} \cdot Q^{(3)}] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Егер осы шарттар орындалатын болса, онда (1) біртекті емес жүйенің қалыпты шешімдерін тұрғызуға болады.

(1) біртекті емес жүйеге сәйкес біртекті жүйе

$$\begin{aligned} P^{(0)}(x, y) \cdot Z_{xx} + P^{(1)}(x, y) \cdot Z_x + P^{(2)}(x, y) \cdot Z &= 0, \\ Q^{(0)}(x, y) \cdot Z_{yy} + Q^{(1)}(x, y) \cdot Z_y + Q^{(2)}(x, y) \cdot Z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

($x = \infty, y = \infty$) иррегуляр ерекше нүктелерімен [11] жұмыста қарастырылған, және осындай жүйелердің қалыпты шешімдерінің болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Белгілі болғандай, сәйкес (7) біртекті жүйенің жалпы шешімі тек төрт кез-келген тұрақтыдан ғана тәуелді.

1-теорема. Егер де $Z^{(1)}(x, y), Z^{(2)}(x, y), Z^{(3)}(x, y)$ және $Z^{(4)}(x, y)$ – сәйкес біртекті жүйенің төрт сызықты-тәуелсіз дербес шешімдері болса, онда төрт кез-келген $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ тұрақтыдан тәуелді жалпы шешім келесі түрде ұсынылады:

$$Z^o(x, y) = \sum_{i=1}^4 C_i \cdot Z^{(i)}(x, y). \quad (8)$$

Дәлелдеу. $Z^o(x, y)$ $x = x_0$ және $y = y_0$ нүктесінде дәрежесінің өсу реті бойынша жіктелетін (7) біртекті жүйенің шешімі болсын. C_1, C_2, C_3, C_4 мәндері арқылы $x = x_0, y = y_0$ болған жағдайдағы Z, Z_x, Z_y, Z_{xy} мәндерін белгілейміз. Онда $Z^o(x, y)$ келесі түрдегі қатар түрінде ұсынылады:

$$\begin{aligned} Z^o(x, y) &= C_1 + C_2(x - x_0) + C_3 \cdot (y - y_0) + C_4 \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (P_{00}^{(4)} \cdot C_1 + P_{00}^{(3)} \cdot C_2 + P_{00}^{(2)} \cdot C_3 + P_{00}^{(1)} \cdot C_4) \cdot (x - x_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (Q_{00}^{(4)} \cdot C_1 + Q_{00}^{(3)} \cdot C_2 + Q_{00}^{(2)} \cdot C_3 + Q_{00}^{(1)} \cdot C_4) \cdot (y - y_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

мұндағы $P_{00}^{(i)}$ және $Q_{00}^{(i)}$ – $x = x_0, y = y_0$ болған жағдайдағы $P^{(i)}$ және $Q^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) коэффициенттерінің мәндері. Бұдан алынған қатардың барлық коэффициенттері кез-келген

C_1, C_2, C_3, C_4 тұрақтыларының сызықтық комбинациялары болып табылады. Сондықтан мынадай қорытынды жасай аламыз, яғни

$$Z^o(x, y) = C_1 \cdot Z^{(1)}(x, y) + C_2 \cdot Z^{(2)}(x, y) + C_3 \cdot Z^{(3)}(x, y) + C_4 \cdot Z^{(4)}(x, y), \quad (10)$$

мұндағы $Z^{(i)}(x, y) (i = 1, 2, 3, 4)$ $x = x_0, y = y_0$ болғандағы аналитикалық функциялар болып табылады, яғни (7) жүйенің жалпы шешімі оған сызықты түрде енетін төрт кез-келген тұрақтыдан ғана тәуелді.

Теорема дәлелденді.

Ал енді біртекті емес жүйенің шешімдері туралы қарастыратын болсақ, ол қарапайым жағдайдағыдай келесі теоремаға негізделеді.

2-теорема. Егер (1) біртекті емес жүйенің қандай да бір $\bar{Z}(x, y)$ дербес шешімі, ал $Z^o(x, y)$ – сәйкес (7) біртекті жүйенің жалпы шешімі белгілі болса, онда олардың қосындысы

$$Z(x, y) = Z^o(x, y) + \bar{Z}(x, y) \quad (11)$$

(1) біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімі болып табылады.

Дәлелдеу. (1) біртекті емес жүйенің $\bar{Z}(x, y)$ – дербес шешімі, ал $\bar{Z}(x, y)$ – қандай да бір басқа дербес шешімі болсын. Осы шешімдерді (1) біртекті емес жүйеге қоя отырып келесі түрдегі жүйелерді аламыз:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(x, y) \cdot \bar{Z}_{xx} + P^{(1)}(x, y) \cdot \bar{Z}_x + P^{(2)}(x, y) \cdot \bar{Z} &= P^{(3)}(x, y), \\ Q^{(0)}(x, y) \cdot \bar{Z}_{yy} + Q^{(1)}(x, y) \cdot \bar{Z}_y + Q^{(2)}(x, y) \cdot \bar{Z} &= Q^{(3)}(x, y), \end{aligned} \quad (12)$$

және

$$\begin{aligned} P^{(0)}(x, y) \cdot Z_{xx} + P^{(1)}(x, y) \cdot Z_x + P^{(2)}(x, y) \cdot Z &= P^{(3)}(x, y), \\ Q^{(0)}(x, y) \cdot Z_{yy} + Q^{(1)}(x, y) \cdot Z_y + Q^{(2)}(x, y) \cdot Z &= Q^{(3)}(x, y), \end{aligned} \quad (13)$$

Олардың айырымы $\Delta Z = Z - \bar{Z}$ сәйкес (7) біртекті жүйені қанағаттандырады. 1-теорема бойынша (7) біртекті жүйенің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^4 C_i \cdot Z^{(i)}.$$

Бұдан

$$\begin{aligned} Z - \bar{Z} &= \sum_{i=1}^4 C_i \cdot Z^{(i)}, \\ Z &= \sum_{i=1}^4 C_i \cdot Z^{(i)} + \bar{Z}. \end{aligned}$$

Осылайша, (1) біртекті емес жүйенің жалпы шешімін құру үшін сәйкес (7) біртекті жүйенің жалпы шешімінен басқа, (1) біртекті емес жүйенің ең болмағанда бір дербес шешімін табу қажет.

Теорема дәлелденді.

Енді (1) біртекті емес жүйенің дербес шешімін (4) түрге байланысты тұрғызу жолдарын көрсетейік.

Фробениус-Латышева әдісі бойынша $Q(x, y)$ көпмүшелігінің $\alpha_{p,0}, \alpha_{0,p}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$

белгісіз параметрлерін табу үшін келесі түрдегі түрлендіру қолданылады:

$$\bar{Z}(x, y) = \exp Q(x, y) \cdot \bar{U}(x, y). \quad (14)$$

(1) біртекті емес жүйеден (14) түрлендіру арқылы алынған жүйе біріктірілген деп аталады. Белгісіз $\bar{U}(x, y)$ функциясының тәуелсіз айнымалыларының ең жоғары дәрежелеріндегі коэффициенттерді нөлге теңестіре отырып, $Q(x, y)$ көпмүшелігінің $\alpha_{p,0}, \alpha_{0,p}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ белгісіз параметрлерін анықтаймыз.

1. $\alpha_{p,0}, \alpha_{0,p}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ белгісіз параметрлердің табылған мәндерін бастапқы (1) біртекті емес жүйеге қоя отырып, шешімдері (∞, ∞) ерекшеліктерінен тәуелді x және y тәуелсіз айнымалыларының кему реті бойынша жалпыланған дәрежелік қатар

$$\bar{U}(x, y) = x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} C_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (C_{0,0} \neq 0) \quad (15)$$

түрінде ізделетін көмекші жүйелер құрылады.

2. (15) шешімді (1) біртекті емес жүйеге қоя отырып, характеристикалық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \{ & C_{0,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) + [C_{1,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma)] \cdot x + \\ & + [C_{0,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma)] \cdot y + [C_{1,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma + 1) + \\ & + C_{1,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,1} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma)] \cdot xy + \dots \} = \phi_j(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

мұндағы $\phi_1(x, y) = P^{(3)}(x, y)$, $\phi_2(x, y) = Q^{(3)}(x, y)$, ал (∞, ∞) ерекше нүктесіне қатысты $\phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma)$ ($j = 1, 2$) анықтаушы теңдеулер жүйесі келесі түрде болады:

$$\begin{aligned} \phi_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma) &= \rho \cdot (\rho - 1) + a_{00}^{(1)} \cdot \rho + a_{00}^{(2)} \cdot \sigma + a_{00}^{(3)}, \\ \phi_{0,0}^{(2)}(\rho, \sigma) &= \sigma \cdot (\sigma - 1) + b_{00}^{(1)} \cdot \rho + b_{00}^{(2)} \cdot \sigma + b_{00}^{(3)}. \end{aligned}$$

3. Бұдан (15) дербес формальды шешім болуы үшін $C_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) анықталмаған коэффициенттері келесі рекурренттік жүйені қанағаттандыруы міндетті:

$$\begin{aligned} C_{0,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,0}^{(j)} \\ C_{1,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{1,0}^{(j)} \\ C_{0,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,1}^{(j)} \\ C_{1,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma + 1) + C_{1,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + \\ &+ C_{0,1} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)} \\ C_{2,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 2, \sigma) + C_{1,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{2,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{2,0}^{(j)} \\ C_{2,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 2) + C_{0,1} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,2}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,2}^{(j)} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Демек (15) қатардың $C_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) коэффициенттері рекурренттік жүйеден анықталады. $j = 1$ және $j = 2$ болған жағдайда екі жүйеге бөлінеді. $j = 1$ үшін (17) жүйенің оң жағындағы $\alpha_{\mu, \nu}^{(1)} = a_{\mu, \nu}$, ал $j = 2$ үшін $\alpha_{\mu, \nu}^{(2)} = b_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) коэффициенттері арқылы анықталады, мұндағы $a_{\mu, \nu}$ және $b_{\mu, \nu}$ коэффициенттері бастапқы $P^{(3)}$ және $Q^{(3)}$ жалпыланған

дәрежелік қатарлардың коэффициенттері. $j = 1$ және $j = 2$ болған кездегі осы екі жүйеден тізбектей анықталатын $C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$ коэффициенттері бірдей болуы керек. Олар (17) рекурренттік жүйесінен $(\alpha + k_1, \beta + k_1)$ және $(\gamma + k_2, \delta + k_2)$, мұндағы $k_j (j = 1, 2)$ – кез-келген натурал сандар (7) біртекті жүйенің шешімдерінің дәреже көрсеткіштері болмайтын жағдайда ғана анықталады. (16) характеристикалық теңдеулер жүйесінен $\phi_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) қатарының жинақтылығы (14) қатардың жинақты болуына әкеледі. Осыдан бұл жағдайда біртекті емес жүйенің $\bar{Z}(x, y)$ дербес шешімін тұрғызуға болады деген қорытынды жасауға болады.

Екінші жағдайда, егер $(\alpha + k_1, \beta + k_1)$ және $(\gamma + k_2, \delta + k_2)$, мұндағы $k_j (j = 1, 2)$ – кез-келген натурал сандар (7) біртекті жүйенің шешімдерінің дәреже көрсеткіштері болса, онда «резонансты» жағдай туындайды. (1) біртекті емес жүйенің (3) түрдегі $P^{(3)}(x, y)$ және $Q^{(3)}(x, y)$ оң жақ бөліктері (7) біртекті жүйенің қандай да бір $Z_1(x, y)$ дербес шешімімен беттеседі.

(1) біртекті емес жүйе мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(x, y) \cdot Z_{xx} + P^{(1)}(x, y) \cdot Z_x + P^{(2)}(x, y) \cdot Z &= Z_1, \\ Q^{(0)}(x, y) \cdot Z_{yy} + Q^{(1)}(x, y) \cdot Z_y + Q^{(2)}(x, y) \cdot Z &= Z_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Анықтаушы теңдеулер жүйесінің түбірлерінің жұптарының еселігіне байланысты қалған дербес шешімдер логарифмдік немесе олардың сызықтық комбинациясы түрінде ұсынылады [11].

3-теорема. Екінші ретті дербес туындылы біртекті емес (1) дифференциалдық теңдеулердің «резонансты» жүйесінің көрсеткіштердің еселік жұптары және көрсеткіштері бүтін сандарға ерекшеленетін жұптары болмаған жағдайда дербес шешімі мына түрде болады

$$\begin{aligned} Z(x, y) = \frac{C_{0,0}}{A_{0,0}} \cdot [Z_1(x, y) \cdot \ln x \cdot \ln y + x^{\rho_1+1} \cdot y^{\sigma_1} \cdot \phi_1(x, y) \cdot \ln x + \\ + x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1+1} \cdot \phi_2(x, y) \cdot \ln y + x^{\rho_1+1} \cdot y^{\sigma_1+1} \cdot \phi_3(x, y)], \end{aligned} \quad (19)$$

мұндағы $C_{0,0} = \frac{Z_1}{x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_1}} \Big|_{x=0, y=0} \neq 0, A_{0,0}$ – нөлге тең емес белгілі тұрақты, $\phi_l(x, y) (l = 1, 2, 3)$ – аналитикалық функциялар.

Нәтижелер мен талқылаулар

1-мысал. Біртекті емес жүйенің қалыпты шешімін табайық.

$$\begin{aligned} Z_{xx} + (x - y) \cdot Z_x + \left(-\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} \right) \cdot Z &= 1 + \frac{\frac{1}{2}xy}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^3}{3!} + \dots, \\ Z_{yy} - (x + y) \cdot Z_y + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} \right) \cdot Z &= 1 + \frac{\frac{1}{2}xy}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^3}{3!} + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

(20) біртекті емес жүйе үшін (6) түрдегі үйлесімділік шарттары толығымен орындалады.

Ішкі ранг $k = 1$, сондықтан ранг $p = k + 1 = 2$. Олай болса (20) біртекті емес жүйені келесі түрде жазуға болады

$$\begin{aligned} Z_{xx} + xy \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \cdot Z_x + y^2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2y} + \frac{1}{4x}\right) \cdot Z &= \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}xy}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^3}{3!} + \dots, \\ Z_{yy} - xy \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \cdot Z_y + x^2 \cdot y \cdot \left(\frac{1}{4y} + \frac{1}{2x}\right) \cdot Z &= \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}xy}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^3}{3!} + \dots. \end{aligned} \quad (21)$$

Берілген біртекті емес жүйенің ешқандай шектелген облыста ерекше нүктелері жоқ, сондықтан оның шешімін екі айнымалыдан тәуелді дәрежелік қатар түрінде табуға болады.

Сәйкес біртекті жүйенің

$$\begin{aligned} Z_{xx} + xy \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \cdot Z_x + y^2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2y} + \frac{1}{4x}\right) \cdot Z &= 0, \\ Z_{yy} - xy \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \cdot Z_y + x^2 \cdot y \cdot \left(\frac{1}{4y} + \frac{1}{2x}\right) \cdot Z &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

екі шешімі бар

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{\frac{1}{2}xy}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}xy\right)^3}{3!} + \dots \\ Z_2 &= xy \cdot \left(1 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{8}x^2y^2 + \dots\right). \end{aligned} \quad (23)$$

(23) шешімдердің ішінен (20) біртекті емес жүйенің оң жағы (22) біртекті жүйенің табылған шешімдерінің бірімен сәйкес келетінін байқауға болады. Бұл жағдайда «резонанстық» жағдай пайда болады. Ол жағдайда шешімді (19) формулаға сәйкес табуға болады.

Қорытынды

Қорыта келе, бұл зерттеу екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің иррегулярлы ерекше нүктесінің маңайында қалыпты шешімін Фробениус-Латышева әдісі арқылы тұрғызу мәселесіне арналған. Қарастырылып отырған біртекті емес теңдеулер жүйесінің үйлесімділігіне қойылатын шарттар анықталып, шексіз алыстатылған нүктенің маңайында қалыпты шешімі тұрғызылды. Сонымен қатар, жүйенің жалпы шешімінің құрылымы туралы теорема дәлелденіп, біртекті емес жүйенің оң жағы сәйкес біртекті жүйенің дербес шешіміне тең болатын «резонанстық» жағдай зерттелді. Зерттеуде нақты мысал арқылы біртекті емес жүйенің дербес шешімі көрсетілді. Бұл жұмыстар дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құру мен талдау саласында маңызды теоретикалық және практикалық нәтижелер ұсынады.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуге Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант ИРН АР19675358).

ӘДБИЕТТЕР

- 1 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 636 с.
- 2 Poincare H. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences fines // Amer J. Math. – 1884. – №7. – P. 203–258.
- 3 Thome L.W. Sur Theorie der linearen Differential gleichungen // J. für. M. – 1873. – V. 75. – P. 265–291.
- 4 Frobenius G. Über die Integration der linearen Differential gleichungen durch Reihen // Journal für die reine und angewandte Math. – 1873. – V. 76. – P. 214–235.
- 5 Пуанкаре А. Избранные методы. Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – 771 с.
- 6 Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ. – 1962. – 351 с.
- 7 Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
- 8 Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 435 с.
- 9 Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев: Вища школа, 1974. – 136 с.
- 10 Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
- 11 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – ИП Жандилдаева С.Т. – Актөбе, 2015. – 464 с.
- 12 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 1880. DOI: 10.1063/1.5000629.
- 13 Tasmambetov Zh.N., Rajabov N., Ubayeva Zh.K. Features of Constructing a Solution Heterogeneous Equation and Clausen-Type Systems // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2022. – V. 9. – No. 4. – P. 906–918.
- 14 Issenova A.A., Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of Solutions Hypergeometric System of Horn Type in the Form of Laguerre Polynomials // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – V. 43. – No.11. – P. 3167–3173.
- 15 Tasmambetov Z.N., Ubayeva Z.K. Exceptions of Formulating the Normal-Regular Solutions of Confluent Hypergeometric Systems Obtained from the Lauricella System // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – V. 43. – No. 8. – P. 2309–2321.
- 16 Tasmambetov Zh.N., Ubayeva Zh.K. Solution of inhomogeneous systems for differential equations in private derivatives of the third order // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – V. 98. – No. 2. – P. 153–164.
- 17 Ubayeva Zh.K., Tasmambetov Zh.N., Rajabov N. Features of Constructing a Solution Heterogeneous Equation and Clausen-Type Systems // Mathematical Modelling of Engineering Problems. – 2022. – No. 4. – P. 906–918.
- 18 Hasanov A., Yuldashev T.K. Analytic continuation formulas for the hypergeometric functions in three variables of second order // Lobachevskii J. Math. – 2022. – No. 43. – P. 386–393.
- 19 Hasanov A. and Ruzhansky M. Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2020. – V. 41. – No. 1. – P. 27–31.
- 20 Ergashev T.G., Hasanov A., Yuldashev T.K. Euler-type integral representations for the Kampé de Fériet functions // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2024. – V. 279. – No. 1. – P. 22–36.

REFERENCES

- 1 Ajns Je.L. (2005) Obyknovennye differencial'nye uravnenija, p. 636. [in Russian]
- 2 Poincare H. (1884) Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences fines. Amer J. Math., no. 7, pp. 203–258.
- 3 Thome L.W. (1873) Sur Theorie der linearen Differential gleichungen. J. für M., vol. 75, pp. 265–291.
- 4 Frobenius G. (1873) Über die Integration der linearen Differential gleichungen durch Reihen. Journal für die reine und angewandte Math., vol. 76, pp. 214–235.
- 5 Puankare A. (1971) Izbrannye metody. Novye metody nebesnoj mehaniki, p. 771. [in Russian]
- 6 Trikomi F. (1971) Differencial'nye uravnenija, p. 351. [in Russian]
- 7 Suetin P.K. (1988) Ortogonal'nye mnogochleny po dvum peremennym, p. 384. [in Russian]
- 8 Golubev V.V. (1950) Lekcii po analiticheskoi teorii differencial'nyh uravnenij, p. 435. [in Russian]

- 9 Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I., Orel G.S. (1974) Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija, p. 136. [in Russian]
- 10 Kornev B.G. (1971) Vvedenie v teoriju besselevykh funkcij, p. 287. [in Russian]
- 11 Tasmambetov Zh.N. (2015) Postroenie normal'nyh i normal'no-reguljarnykh reshenij special'nyh sistem differencial'nyh uravnenij v chastnykh proizvodnykh vtorogo porjadka, p. 464. [in Russian]
- 12 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. (2017) Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system. AIP Conference Proceedings, vol. 1880. DOI: 10.1063/1.5000629.
- 13 Tasmambetov Zh.N., Rajabov N., Ubayeva Zh.K. (2022) Features of Constructing a Solution Heterogeneous Equation and Clausen-Type Systems. Mathematical Modelling of Engineering Problems, vol. 9, no. 4, pp. 906–918.
- 14 Issenova A.A., Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. (2022) Construction of Solutions Hypergeometric System of Horn Type in the Form of Laguerre Polynomials. Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 43, no. 11, pp. 3167–3173.
- 15 Tasmambetov Z.N., Ubayeva Z.K. (2022) Exceptions of Formulating the Normal-Regular Solutions of Confluent Hypergeometric Systems Obtained from the Lauricella System. Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 43, no. 8, pp. 2309–2321.
- 16 Tasmambetov Zh.N., Ubayeva Zh.K. (2020) Solution of inhomogeneous systems for differential equations in private derivatives of the third order. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, vol. 98, no. 2, pp. 153–164.
- 17 Ubayeva Zh.K., Tasmambetov Zh.N., Rajabov N. (2022) Features of Constructing a Solution Heterogeneous Equation and Clausen-Type Systems. Mathematical Modelling of Engineering Problems, no. 4, pp. 906–918.
- 18 Hasanov A., Yuldashev T.K. (2022) Analytic continuation formulas for the hypergeometric functions in three variables of second order. Lobachevskii J. Math., vol. 43, pp. 386–393.
- 19 Hasanov A. and Ruzhansky M. Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order. Lobachevskii J. of Mathematics, no. 41(1), pp. 27–31.
- 20 Ergashev T.G., Hasanov A., Yuldashev T.K. (2024) Euler-type integral representations for the Kampé de Fériet functions. Journal of Mathematical Sciences (United States), vol. 279, no. 1, pp. 22–36.

^{1*}Талипова М.Ж.,

к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

¹Бекбауова А.У.,

к.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,

e-mail: mirra478@mail.ru

¹Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИРРЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Аннотация

Рассматривается задача построения нормального решения неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с помощью метода Фробенуса-Латышевой в окрестности иррегулярной особой точки. Показаны условия совместности рассматриваемой неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных и создан алгоритм построения нормальных решений в окрестности бесконечно удаленной точки. Доказана теорема о строении общего решения неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и изучается «резонансная» система, возникающей, если частное решение соответствующей однородной системы совпадает в правой части неоднородной системы. На конкретном примере показано, как построить частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: неоднородная система, однородная система, нормальное решение, ранг, многочлен, аналитическая функция, ряд, иррегулярная особая точка, метод Фробенуса-Латышевой.

¹*Talipova M.Zh.,

Cand. Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0001-9728-8378,

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

¹Bekbauova A.U.,

Cand. Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID: 0000-0002-5847-9881,

e-mail: mirra478@mail.ru

¹Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

CONSTRUCTION OF NORMAL SOLUTIONS FOR INHOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IRREGULAR SINGULARITIES

Abstract

The problem of constructing a normal solution to inhomogeneous systems of second-order partial differential equations using the Frobenius-Latysheva method in the neighborhood of an irregular singular point is considered. The compatibility conditions for the considered inhomogeneous system of partial differential equations are shown and an algorithm for constructing normal solutions in the vicinity of a point at infinity is created. A theorem on the structure of the general solution of inhomogeneous systems of second-order partial differential equations is proved and a “resonance” system is studied, which arises if the particular solution of the corresponding homogeneous system coincides on the right side of the inhomogeneous system. A specific example shows how to construct a particular solution to a non-homogeneous system of partial differential equations.

Key words: inhomogeneous system, homogeneous system, normal solution, rank, polynomial, analytic function, series, irregular singular point, the Frobenius-Latysheva method.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 16.11.2024