

УДК 517.54
МРНТИ 27.27.17

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-4-168-185>

^{1*}Майер Ф.Ф.,

канд. физ.-мат. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,

*e-mail: maiyer@mail.ru

¹Тастанов М.Г.,

канд. физ.-мат. наук, профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,

e-mail: tastao@mail.ru

¹Утемисова А.А.,

канд. пед. наук, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,

e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Байманкулов А.Т.,

докт. физ.-мат. наук, доцент, ORCID ID: 0000-0002-6435-9560,

e-mail: g_talgat_a@mail.ru

¹Костанайский региональный университет имени Ахмета Байтурсынулы,
г. Костанай, Казахстан

КЛАССЫ ПОЧТИ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ ОБЩЕГО ВИДА

Аннотация

Цель статьи – представить и исследовать широкий класс дважды почти звездообразных функций, продемонстрировав при этом единый подход к решению определенного круга экстремальных задач. В статье определена опорная функция общего вида – звездообразная функция, на базе которой можно строить классы почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций. На базе опорной функции общего вида, содержащей три параметра, и новых оценок аналитических функций вводится обобщение различных подклассов классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций, рассмотренных в ряде статей, вышедших в последние годы, в том числе введенный класс содержит обобщенный класс типично вещественных функций. Изучены свойства введенного класса функций, например, получены теорема роста, оценки модуля логарифмической производной функции и радиус звездообразности, в частных случаях приводящие как к ранее известным результатам, так и представляющие собой новые результаты. Все результаты статьи являются точными.

Ключевые слова: однолистные функции, звездообразные функции, почти звездообразные функции, типично вещественные функции, радиус звездообразности.

Введение

Изучение геометрических свойств различных классов аналитических функций является одной из важнейших задач геометрической теории функций. Особый интерес представляет класс S однолистных функций [1]. Вспомним, что аналитическая в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функция $w = f(z)$ называется однолистной, если она осуществляет взаимно однозначное отображение круга E на некоторую область $f(E)$ расширенной комплексной плоскости.

В статье [2] введены почти звездообразные функции, что послужило основой для исследования их различных подклассов (напр., [2–12]).

В настоящей статье на основе построения трехпараметрической опорной функции общего вида и использования новых оценок аналитических функций вводится достаточно широкий класс дважды почти звездообразных функций, который, как частные случаи, включает прак-

тически все классы функций, исследуемые в статьях [3–12]. На примере построения данного класса функций и определения точных оценок $|f(z)|$, $|zf'(z)/f(z)|$ и радиусов звездообразности продемонстрирован единый подход к решению определенного круга экстремальных задач. В частных случаях получаются как новые оригинальные результаты, так и ряд результатов процитированных выше статей.

Пусть $\mathcal{N}$ – класс аналитических в круге E функций $f(z)$, нормированных условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. В частности, класс однолистных функций $S \subset \mathcal{N}$. Ряд подклассов класса S имеет хорошо изученные наглядные описания (см., напр., [1], §2–5). Среди них отметим класс S^* звездообразных функций $f(z)$, обладающих наглядными геометрическими свойствами, который задается с помощью условия $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0$, $z \in E$.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется звездообразной в круге E , если область $f(E)$ является звездообразной относительно точки $w = 0$, то есть наряду с любой точкой $w \in f(E)$ области $f(E)$ принадлежит и отрезок $[0, w]$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ принадлежит классу CS^* почти звездообразных функций («close-to-starlike functions»), если она удовлетворяет некоторому неравенству, содержащему отношение $f(z)/g(z)$, причем функция $g(z) \in S^*$. Если же функция $g(z)$ сама является почти звездообразной, то функцию $f(z)$ будем называть дважды почти звездообразной функцией («doubly close-to-starlike functions») и писать $f(z) \in CCS^*$.

Заметим, что классы CS^* и CCS^* в столь общей формулировке, которая дана в определении 2, ранее в научной литературе не вводились.

Впервые почти звездообразные функции были введены М.О. Ридом в [2] как функции $f(z)$ из $\mathcal{N}$, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \quad g(z) \in S^*, \quad z \in E, \quad (1)$$

Здесь же было отмечено без обоснования, что почти звездообразные функции могут быть и не однолиственными.

В силу общности класса CS^* , введенного определением 2, почти звездообразные функции М.О. Рида включаются в класс CS^* . Кроме того, класс CS^* включает и почти звездообразные функции, не удовлетворяющие условию (1), например, если использовать неравенства

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq \alpha, \quad \alpha < 0,$$

или

$$m \leq \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq M, \quad 0 \leq m < 1, \quad M > 1,$$

где $g(z) \in S^*$, $z \in E$.

Пусть $f(z) \in CS^*$, $g(z) \in S^*$. Тогда в соответствии с определением 2 функция $f(z)$ для всех $z \in E$ удовлетворяет некоторому неравенству, содержащему отношение $f(z)/g(z)$. Поэтому, если $f(z) \equiv g(z)$, то $f(z)/g(z) \equiv f(0)/g(0) = 1$ также удовлетворяет данному неравенству. В силу этого любая звездообразная функция $f(z)$ принадлежит классу CS^* . То есть $S^* \subset CS^*$. Аналогично устанавливается, что $CS^* \subset CCS^*$. Таким образом,

$$S^* \subset CS^* \subset CCS^*.$$

Пример функции $f_0(z) = z \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ показывает, что $f_0(z) \in CS^*$ с $g(z) = z$, поскольку $\operatorname{Re} \frac{f_0(z)}{z} \geq 0$ для всех $z \in E$. Но $f_0'(z) = \frac{1+2z-z^2}{(1-z)^2} = 0$ в точке $z = 1 - \sqrt{2} \in E$. Поэтому функ-

ция $f_0(z)$ не является однолистной в круге E и, значит, $f_0(z)$ не является звездообразной в E . Таким образом, класс CS^* кроме звездообразных функций содержит и функции, которые не являются ни звездообразными, ни однолиственными.

Аналогично функция

$$f_1(z) = f_0(z) \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = z \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \in CCS^*$$

с $g(z) = z$, поскольку $f_0(z) \in CS^*$ и $\operatorname{Re} \frac{f_1(z)}{f_0(z)} = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} \geq 0, z \in E$. При этом функция $f_1(z) \notin CS^*$, поскольку $\frac{f_1(z)}{z} = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$ и условие $\operatorname{Re} \frac{f_1(z)}{z} \geq 0$ в круге E не выполняется. Таким образом, класс дважды почти звездообразных функций содержит и функции, которые не являются почти звездообразными.

В настоящей статье на основе класса $\mathcal{P}(a, \gamma)$ и построения звездообразной опорной функции общего вида вводится некоторый класс дважды почти звездообразных функций и исследуются его свойства.

Обзор литературы

К первым исследованиям в этом направлении кроме статьи [2] М.О. Рида также относятся исследования Т.Х. МакГрегора [3–4] классов почти звездообразных функций $f(z)$, удовлетворяющих одному из условий

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0 \text{ или } \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, g(z) \in S^*. \quad (2)$$

Данные статьи дали толчок исследованию других подклассов класса почти звездообразных функций за счет введения вместо (2) новых условий, применения вместо класса S^* некоторых его подклассов или использования конкретных звездообразных функций $g(z)$, которые будем называть опорными функциями для классов почти звездообразных функций.

Примерами опорных звездообразных функций являются функции вида

$$h_1(z) = \frac{z}{1-z^2}, h_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, h_3(z) = \frac{z}{1-z}, h_4(z) = z - \frac{z^2}{2}, h_5(z) = z.$$

Заметим, что с помощью замен $\hat{h}_1(z) = (1/i)h_1(iz)$, $\hat{h}_k(z) = -h_k(-z)$, $k = 2, 3, 4, 5$, от функций $h_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$, можно перейти к функциям

$$\hat{h}_1(z) = \frac{z}{1+z^2}, \hat{h}_2(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \hat{h}_3(z) = \frac{z}{1+z}, \hat{h}_4(z) = z + z^2/2,$$

обладающим аналогичными свойствами, определяющими, по сути, тот же самый класс почти звездообразных или дважды почти звездообразных функций $f(z)$, а $\hat{h}_5(z) = h_5(z) = z$.

Отметим также статью [5], в которой найдены радиусы звездообразности классов почти звездообразных функций, определяемых с помощью одного из условий

$$\left| \frac{f(z)}{z} - a \right| \leq a, a > \frac{1}{2} \text{ или } \left| \frac{f(z)}{z + kz^2} - a \right| \leq a, |k| \leq 1, a > \frac{1}{2}.$$

Заметим, что все исследования, проводимые в процитированных выше статьях [3–5], не выходят за пределы класса почти звездообразных функций, введенного М.О. Ридом [2] с помощью условия (1).

В работах [6–11] для некоторых подклассов классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций решалась задача определения их радиусов звездообразности отно-

сительно некоторых подклассов класса S^* , таких как классы функций $f(z) \in \mathcal{N}$, для которых множество значений $z f'(z)/f(z)$ содержится в полуплоскости $\operatorname{Re} w > \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ (класс звездообразных функций порядка α), в области, ограниченной правой половиной лемнискаты Бернулли (класс лемнискатных функций), в области, ограниченной кардиоидой (класс функций, связанных с кардиоидой) и другие классы.

При этом рассматривались классы почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций, построенные с помощью конструкций вида

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ f(z) : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} \geq 0 \right\}, \quad \mathcal{M}_2 = \left\{ f(z) : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{M}_3 = \left\{ f(z) : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{h(z)} \geq 0 \right\},$$

в которых $h(z) = h_k(z)$, $k = \overline{1, 5}$. Стоит отметить, что в статьях [6–11] исследование проводилось отдельно для каждого из классов $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ и в каждой статье использовалась своя опорная функция $h(z) = h_k(z)$, $k = \overline{1, 5}$.

Наша гипотеза состоит в том, что можно построить класс $\mathcal{M}$, который включает классы $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, и построить опорную функцию $h(z) \in S^*$ общего вида с несколькими параметрами, которая при определенных значениях параметров дает функции $h_k(z)$, $k = \overline{1, 5}$, и, кроме того, содержит целый ряд других конкретных случаев.

Целью работы является определение многопараметрической опорной функции $h(z) \in S^*$ общего вида и класса $\mathcal{M}$, для которого можно найти радиусные константы относительно различных подклассов класса S^* , позволяющие получить результаты статей [6–11] как следствия одного результата, а также ряд новых результатов.

К классу почти звездообразных функций относится и введенный В. Рогозински в [12] класс T типично вещественных функций. При этом $f(z) \in T$ тогда и только тогда, когда при любом вещественном $z \in E$ она принимает вещественные значения и $\operatorname{Im} f(z) \operatorname{Im} z > 0$ в остальных точках круга E . В [12] также установлено, что

$$f(z) \in T \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1 - z^2}{z} f(z) \right) \geq 0, z \in E, \quad (3)$$

то есть для функций $f(z)$ из T выполняется условие (1) с $g(z) = z/(1 - z^2)$.

Материалы и методы

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс аналитических в круге E функций $\varphi(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ с положительной вещественной частью, через $\mathcal{P}(a, \gamma)$ – класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих условию $|(\varphi(z))^{1/\gamma} - a| \leq a$, где $a > 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$. Обозначим также через $\mathcal{P}(\gamma) := \mathcal{P}(\infty, \gamma)$ подкласс класса $\mathcal{P}(a, \gamma)$ функций $\varphi(z) \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих условию $|\arg \varphi(z)| \leq \frac{\gamma\pi}{2}$, $z \in E$.

Доказательства основных результатов настоящей статьи опираются на следующее утверждение, полученное на основе метода подчиненности.

Лемма 1 [13]. Пусть аналитическая в круге E функция $\varphi(z)$ разлагается в ряд вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, $z \in E$, и выполняется условие $\varphi(z) \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, $a > 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$, и пусть $c = 1 - 1/a$, $-1 < c \leq 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+cr^n}\right)^{\gamma} \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-cr^n}\right)^{\gamma}, \quad (4)$$

$$\left|z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leq \frac{\gamma(1+c)nr^n}{(1-r^n)(1+cr^n)}, \quad (5)$$

которые достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^{\gamma}. \quad (6)$$

Определение 3. Аналитическая в круге E функция $\varphi(z)$ называется подчиненной однолистной функции $\varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$, что обозначается в виде $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$.

Суть метода подчиненности заключается в том, что если $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ в круге E , то подчиненность распространяется и на внутренние круги, то есть $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r)$ при любом r , $0 \leq r < 1$.

Результаты и обсуждение

1. Опорная функция общего вида для классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций

Определим опорную функцию $h_m(z)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $h_m(0) = 0$, $h'_m(0) = 1$, для классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций как решение дифференциального уравнения

$$z \frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m}, \quad (7)$$

где $\psi_0(z) = \frac{1+Az}{1+Bz}$, $-1 \leq B < A \leq 1$, – функция Яновского [14]. Поскольку

$$\operatorname{Re} z \frac{h'(z)}{h(z)} = \operatorname{Re} \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \geq \frac{1-A}{1-B} \geq 0,$$

в круге E , то все решения $h_m(z)$ уравнения (7) являются функциями, звездообразными в круге E . Кроме того, нетрудно установить, что функции $h_m(z)$ при $m \geq 2$ обладают m -кратной симметрией вращения вокруг точки $h_m(0) = 0$ и определяются [15] по формуле

$$h_m(z) = \begin{cases} z \cdot (1 + Bz^m)^{\frac{A-B}{mB}}, & B \neq 0, \\ z \cdot \exp\left\{\frac{A}{m}z^m\right\}, & B = 0 \ (0 < A \leq 1), \end{cases} \quad (8)$$

причем $h_m(z) = z + b_{m+1}z^{m+1} + b_{2m+1}z^{2m+1} + \dots$, $m \geq 1$, $z \in E$.

Если $B = -1$, то

$$h_m(z) = \frac{z}{(1-z^m)^{\frac{A+1}{m}}}, \quad -1 < A \leq 1,$$

и, в частности,

$$h_m(z) = \frac{z}{(1-z^m)^{1/m}} \text{ при } A = 0, m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$h_m(z) = \frac{z}{(1 - z^m)^{2/m}} \text{ при } A = 1, m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$h_m(z) = \frac{z}{(1 - z^{2m})^{1/m}} \text{ при } A = 1, m = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда получаем наиболее распространенные случаи использования опорной функции (например, [7–9, 11])

$$h_m(z) = \frac{z}{1 - z} \text{ при } m = 1, A = 0,$$

$$h_m(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} \text{ при } m = 1, A = 1,$$

$$h_m(z) = \frac{z}{1 - z^2} \text{ при } m = 2, A = 1.$$

Если положить $A = 2B$, то из условия $-1 \leq B < A \leq 1$ получаем, что $0 < B \leq 1/2$ и $h_m(z) = z(1 + Bz^m)^{1/m}$, причем функция $h_m(z)$ является звездообразной и при $B = 0$. В частности, при $m = 1$ имеем опорную функцию из [5, 10] и при $B \rightarrow 0$ – из [3–4, 16–18]:

$$h_m(z) = z + Bz^2, 0 < B \leq 1/2, \text{ и при } B = 0 \text{ имеем } h_m(z) = z.$$

Кроме того, из второго выражения (8) получаем следующий пример опорной функции

$$h_m(z) = z \cdot \exp \left\{ \frac{A}{m} z^m \right\}, 0 < A \leq 1.$$

2. Описание классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций

Определение 4. Будем говорить, что функция $g(z)$ из $\mathcal{N}$ принадлежит классу $CS_m^*(b, \delta, A, B)$ почти звездообразных функций тогда и только тогда, когда для некоторой функции $h_m(z)$ вида (8) $\frac{g(z)}{h_m(z)} \in \mathcal{P}(b, \delta)$, то есть

$$\left| \left(\frac{g(z)}{h_m(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| \leq b, \quad b > 1/2, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad z \in E. \quad (9)$$

Заметим, что класс $CS_m^*(b, \delta, A, B)$ является подклассом класса почти звездообразных функций, введенного М.О. Ридом с помощью условия (1), поскольку из (9) вытекает условие $\operatorname{Re} \frac{g(z)}{h_m(z)} \geq 0$, причем $h_m(z) \in S^*$.

Определение 5. Будем говорить, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ принадлежит классу $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ дважды почти звездообразных функций тогда и только тогда, когда для некоторой функции $g(z) \in CS_m^*(b, \delta, A, B)$ выполняется условие

$$\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}(a, \gamma).$$

Таким образом,

$$f(z) \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B) \Leftrightarrow \left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - a \right| \leq a \text{ и } \left| \left(\frac{g(z)}{h_m(z)} \right)^{\frac{1}{\delta}} - b \right| \leq b, \quad (10)$$

в круге E , где $a, b > 1/2, 0 < \gamma, \delta \leq 1$, и функция $h_m(z)$ задается формулой (8).

Заметим, что поскольку $h_m(z) \in S^*$, то $g(z)$ является почти звездообразной функцией. Поэтому функции класса $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ дважды почти звездообразными. Также $CCS_m^*(a, \gamma, \infty, 0, A, B) \equiv CS_m^*(a, \gamma, A, B)$.

Пусть $m = 2, B = -1, A = 1$, тогда $h_m(z) = \frac{z}{1 - z^2}$. Предположим также, что $g(z)$ в точках $z \in (-1; 1)$ принимает вещественные значения. Тогда в силу (3) условие

$$\operatorname{Re} \frac{g(z)}{h_m(z)} = \operatorname{Re} \left((1-z^2) \frac{g(z)}{z} \right) \geq 0$$

задает класс T типично вещественных функций $g(z)$. С учетом этого введем класс $CCT^*(a, \gamma, b, \delta)$ функций $f(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a \text{ и } \left| \left((1-z^2) \frac{g(z)}{z} \right)^{1/\delta} - b \right| \leq b. \quad (11)$$

Пусть $b \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Тогда $g(z) = \frac{z}{1-z^2}$, второе условие в (11) становится тривиальным и получается класс $CT^*(a, \gamma) \equiv CCT^*(a, \gamma, \infty, 0)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left((1-z^2) \frac{f(z)}{z} \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a, \quad a > 1/2, 0 < \gamma \leq 1,$$

обобщающий класс типично вещественных функций $T \equiv CT^*(\infty, 1)$.

3. Оценки в классе $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$

Теорема 1. Пусть $f(z) \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ и пусть $c = 1 - 1/a$, $k = 1 - 1/b$, $-1 < c, k \leq 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки:

1) при $-1 \leq B < A \leq 1$, $B \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-r}{1+cr} \right)^\gamma \left(\frac{1-r}{1+kr} \right)^\delta r (1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} &\leq |f(z)| \leq \\ &\leq \left(\frac{1+r}{1-cr} \right)^\gamma \left(\frac{1+r}{1-kr} \right)^\delta r (1 + Br^m)^{\frac{A-B}{mB}}, \end{aligned} \quad (12)$$

2) при $0 < A \leq 1$, $B = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-r}{1+cr} \right)^\gamma \left(\frac{1-r}{1+kr} \right)^\delta r \exp \left(-\frac{A}{m} r^m \right) &\leq |f(z)| \leq \\ &\leq \left(\frac{1+r}{1-cr} \right)^\gamma \left(\frac{1+r}{1-kr} \right)^\delta r \exp \left(\frac{A}{m} r^m \right), \end{aligned} \quad (13)$$

3) при $-1 \leq B < A \leq 1$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right| \leq \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right). \quad (14)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $\psi(z) = \frac{g(z)}{h_m(z)}$. Тогда $f(z) = \varphi(z)g(z)$, $g(z) = \psi(z)h_m(z)$ и

$$f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_m(z). \quad (15)$$

Поскольку $\varphi(z) \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, $\psi(z) \in \mathcal{P}(b, \delta)$, то в силу леммы 1 при $n = 1$

$$\left(\frac{1-r}{1+cr} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-cr} \right)^\gamma, \quad \left(\frac{1-r}{1+kr} \right)^\delta \leq |\psi(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-kr} \right)^\delta \quad (16)$$

С другой стороны, так как функция $h_m(z) \in S^*(A, B)$ и разлагается в ряд вида $h_m(z) = z + b_{m+1}z^{m+1} + b_{2m+1}z^{2m+1} + \dots$, $m \geq 1$, то (напр., [15])

$$r(1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \leq |h_m(z)| \leq r(1 + Br^m)^{\frac{A-B}{mB}}, B \neq 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{rexp}\left(-\frac{A}{m}r^m\right) \leq |h_m(z)| \leq \operatorname{rexp}\left(\frac{A}{m}r^m\right) \quad B = 0 \quad (0 < A \leq 1). \quad (18)$$

Применяя, соответственно, левые или правые оценки для $|\varphi(z)|$ и $|\psi(z)|$ в (16), левые или правые оценки в (17)–(18), на основе равенства (15) получим оценки (12) и (13).

Докажем теперь оценку (14). В силу (15) и (4)–(5) имеем

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} + \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m}.$$

Отсюда в силу оценки (5), примененной к функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при $n = 1$, получаем оценку

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right| \leq \frac{\gamma(1+c)r}{(1-r)(1+cr)} + \frac{\delta(1+k)r}{(1-r)(1+kr)},$$

которая равносильна оценке (14).

Докажем точность оценок (12)–(14).

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = z(1 + Bz^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1+z}{1-cz} \right)^\gamma \left(\frac{1+z}{1-kz} \right)^\delta = \left(\frac{1+z}{1-cz} \right)^\gamma g_0(z), \quad (19)$$

где

$$g_0(z) = z(1 + Bz^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1+z}{1-kz} \right)^\delta,$$

и покажем, что $f_0(z) \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$. Учитывая, что $z(1 + Bz^m)^{\frac{A-B}{mB}} = h_m(z)$ для случая $B \neq 0$ и $w(z) = \frac{1+z}{1-kz}$ есть отображение круга E на круг $|w - b| < b$, получаем

$$\left| \left(\frac{g_0(z)}{h_m(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| = |w(z) - b| < b.$$

Следовательно, по определению $1 \ g_0(z) \in CS_m^*(b, \delta, A, B)$ и, так как

$$\frac{f_0(z)}{g_0(z)} = \left(\frac{1+z}{1 - (1 - 1/a)z} \right)^\gamma = \left(\frac{1+z}{1 - cz} \right)^\gamma \in \mathcal{P}(a, \gamma),$$

то $f_0(z) \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ и для функции $f_0(z)$ в точке $z = r$ в правой оценке (12) достигается знак равенства.

Если m – нечетное, то для функции $f_0(z)$ в точке $z = -r$ получаем

$$f_0(-r) = -r(1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1-r}{1+cr} \right)^\gamma \left(\frac{1-r}{1+kr} \right)^\delta.$$

Поэтому в левой оценке (12) также достигается знак равенства.

Пусть теперь m является четным. Рассмотрим два случая.

а) $m = 2, 6, 10, \dots, 2(2j-1), \dots, j \in \mathbb{N}$. Тогда $i^m = -1$ и для $z = ir$ имеем $z^m = i^m r^m = -r^m$, $iz = -r$. Поэтому для функции

$$f_1(z) = z(1 + Bz^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1+iz}{1-ciz} \right)^\gamma \left(\frac{1+iz}{1-kiz} \right)^\delta \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B) \quad (20)$$

в точке $z = ir$ получаем

$$f_1(ir) = ir(1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1-r}{1+cr} \right)^{\gamma} \left(\frac{1-r}{1+kr} \right)^{\delta},$$

то есть в этом случае левую оценку (12) улучшить нельзя.

б) $m = 4, 8, 12, \dots, 4j, \dots, j \in \mathbb{N}$. Обозначим $\varepsilon = i^{\frac{m+2}{m}}$, Тогда для $z = -\varepsilon r$ имеем $z^m = (-1)^m i^{m+2} r^m = -r^m$, $\varepsilon^{-1}z = -\varepsilon^{-1}\varepsilon r = -r$. Поэтому для функции

$$f_2(z) = z(1 + Bz^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1 + \varepsilon^{-1}z}{1 - c\varepsilon^{-1}z} \right)^{\gamma} \left(\frac{1 + \varepsilon^{-1}z}{1 - k\varepsilon^{-1}z} \right)^{\delta} \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B) \quad (21)$$

в точке $z = -\varepsilon r$ имеем

$$f_2(-\varepsilon r) = -\varepsilon r (1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \left(\frac{1-r}{1+cr} \right)^{\gamma} \left(\frac{1-r}{1+kr} \right)^{\delta}.$$

Следовательно, в левой оценке (12) достигается равенство, что доказывает неулучшаемость левой оценки (12) и в этом случае.

Доказательство точности оценки (13) проводится точно так же, только в качестве $h_m(z)$ используется вторая формула в (8).

Докажем точность оценки (14). Для функции $f_0(z)$ имеем

$$z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} = \frac{\gamma(1+c)z}{(1+z)(1-cz)} + \frac{\delta(1+k)z}{(1+z)(1-kz)}.$$

Поскольку в точке $z = -r$

$$\left(z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right) \Big|_{z=-r} = -\frac{\gamma(1+c)r}{(1-r)(1+cr)} - \frac{\delta(1+k)r}{(1-r)(1+kr)},$$

то оценку (14) улучшить нельзя.

Теорема 1 доказана.

4. Радиус звездообразности класса $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$

В качестве примера применения оценки (14) как дополнение к теореме 1 найдем радиус звездообразности порядка α класса $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$, обобщающий аналогичные результаты из [3–4, 6–10] и ряда других статей. При этом через $S^*(\alpha)$ будем обозначать введенный в [19] класс функций $f(z)$, звездообразных порядка α , то есть удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $z \in E$.

Отметим, что, следуя методике статей [6–10], также можно найти радиусы звездообразности класса $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ относительно других подклассов класса S^* , связанных с лемнискатой Бернулли, кардиоидой, луной, синусоидальной или экспоненциальной функцией и рассмотренных в [6–10].

Теорема 2. Точный радиус звездообразности порядка α класса $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ определяется как единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \alpha - \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right) = 0, \quad (22)$$

где $c = 1 - 1/a$, $k = 1 - 1/b$, $-1 < c, k \leq 1$.

Доказательство. В силу теоремы 1 для любой функции $f(z) \in CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, имеет место оценки (14), откуда

$$\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} - \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right).$$

В [15] (формула (2.5) установлено, что

$$\operatorname{Re} \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \geq \frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m}.$$

Поэтому в круге $|z| \leq r$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq \frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right).$$

Следовательно, если $|z| \leq r$, где $r = r^*$ – корень уравнения (22), то $\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq \alpha$ и $f(z)$ в круге $|z| \leq r^*$ является звездообразной порядка α .

Покажем, что уравнение (22) на $(0; 1)$ имеет единственный корень. Действительно, не трудно установить, что функция

$$m_1(r) = \frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \alpha$$

монотонно убывает на $[0; 1)$ от $1 - \alpha$ до $(1 - A)/(1 - B) - \alpha$, а функции

$$m_2(r) = \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right)$$

монотонно возрастают на $[0; 1)$ от 0 до $+\infty$. Поэтому уравнение $m_1(r) - m_2(r) = 0$ на $[0; 1)$ имеет единственный корень r^* .

По аналогии с доказательством теоремы 1 покажем, что радиус звездообразности увеличить нельзя.

Пусть m – нечетное. Для функции $f_0(z)$ из (19) в точке $z = -r$ получаем

$$\begin{aligned} z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} \Big|_{z=-r} &= \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} + \frac{z}{1+z} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1-cz} + \frac{\delta(1+k)}{1-kz} \right) \Big|_{z=-r} = \\ &= \frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right) = \alpha. \end{aligned}$$

Если m – четное, то рассмотрим два случая.

а) Пусть $m = 2(2j - 1)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда для $z = ir$ имеем $z^m = -r^m$, $iz = -r$. Поэтому для функции $f_1(z)$ из (20) в точке $z = ir$ получаем

$$\begin{aligned} z \frac{f'_1(z)}{f_1(z)} \Big|_{z=ir} &= \left(\frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} + \frac{\gamma(1+c)iz}{(1+iz)(1-ciz)} + \frac{\delta(1+k)iz}{(1+iz)(1-kiz)} \right) \Big|_{z=ir} = \\ &= \frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right) = \alpha. \end{aligned}$$

б) Пусть $m = 4j$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда если обозначить $\varepsilon = i^{\frac{m+2}{m}}$, то для $z = -\varepsilon r$ имеем $z^m = -r^m$, $\varepsilon^{-1}z = -r$. Поэтому для функции $f_2(z)$ из (21) получаем

$$\begin{aligned}
\left| z \frac{f'_2(z)}{f_2(z)} \right|_{z=-\varepsilon r} &= \left(\frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} + \frac{\gamma(1+c)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)(1-c\varepsilon^{-1}z)} + \frac{\delta(1+k)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)(1-k\varepsilon^{-1}z)} \right) \\
&= \left(\frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} + \frac{\gamma(1+c)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)(1-c\varepsilon^{-1}z)} + \frac{\delta(1+k)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)(1-k\varepsilon^{-1}z)} \right) \Big|_{z=-\varepsilon r} = \\
&= \frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \frac{r}{1-r} \left(\frac{\gamma(1+c)}{1+cr} + \frac{\delta(1+k)}{1+kr} \right) = \alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно, во всех случаях в условии звездообразности порядка α достигается знак равенства. Поэтому радиус звездообразности увеличить нельзя. Теорема 2 доказана.

5. Частные случаи

Следствие 1 ($a \rightarrow \infty$, $\gamma = 1$, $b \rightarrow \infty$, $\delta = 1$). Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{h_m(z)} \geq 0, z \in E,$$

где функция $h_m(z)$ задается формулой (8). Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки:

1) при $-1 \leq B < A \leq 1$, $B \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 r(1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} &\leq |f(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 r(1 + Br^m)^{\frac{A-B}{mB}}, \\
\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right| &\leq \frac{4r}{1-r^2};
\end{aligned}$$

2) при $0 < A \leq 1$, $B = 0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 r \exp\left(-\frac{A}{m} r^m\right) &\leq |f(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 r \exp\left(\frac{A}{m} r^m\right), \\
\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 - Az^m \right| &\leq \frac{4r}{1-r^2}
\end{aligned}$$

и функция $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z| \leq r^*$, где r^* – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \alpha - \frac{4r}{1-r^2} = 0. \quad (23)$$

Следствие 2 ($a = 1$, $\gamma = 1$, $b \rightarrow \infty$, $\delta = 1$). Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{h_m(z)} \geq 0, z \in E,$$

где функция $h_m(z)$ задается формулой (8), и пусть $c = 0$, $k = 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки:

1) при $-1 \leq B < A \leq 1$, $B \neq 0$

$$\frac{r(1-r)^2}{1+r} (1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)^2}{1-r} (1 + Br^m)^{\frac{A-B}{mB}},$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right| \leq \frac{r(3+r)}{1-r^2};$$

2) при $0 < A \leq 1, B = 0$

$$\frac{r(1-r)^2}{1+r} \exp\left(-\frac{A}{m} r^m\right) \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)^2}{1-r} \exp\left(\frac{A}{m} r^m\right),$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 - Az^m \right| \leq \frac{r(3+r)}{1-r^2}$$

и функция $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z| \leq r^*$, где r^* – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \alpha - \frac{r(3+r)}{1-r^2} = 0, \quad (24)$$

Следствие 3 ($a \rightarrow \infty, \gamma = 1, b \rightarrow \infty, \delta = 0$). Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{h_m(z)} \geq 0, z \in E,$$

где функция $h_m(z)$ задается формулой (8). Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки:

1) при $-1 \leq B < A \leq 1, B \neq 0$

$$\frac{1-r}{1+r} r(1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} r(1 + Br^m)^{\frac{A-B}{mB}},$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2};$$

2) при $0 < A \leq 1, B = 0$

$$\frac{1-r}{1+r} r \exp\left(-\frac{A}{m} r^m\right) \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} r \exp\left(\frac{A}{m} r^m\right),$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 - Az^m \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

и функция $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z| \leq r^*$, где r^* – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \alpha - \frac{2r}{1-r^2} = 0. \quad (25)$$

Следствие 4 ($a = 1, \gamma = 1, b \rightarrow \infty, \delta = 0$). Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{f(z)}{h_m(z)} - 1 \right| \leq 1, z \in E,$$

где функция $h_m(z)$ задается формулой (8). Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки:

1) при $-1 \leq B < A \leq 1, B \neq 0$

$$(1-r)r(1 - Br^m)^{\frac{A-B}{mB}} \leq |f(z)| \leq (1+r)r(1 + Br^m)^{\frac{A-B}{mB}},$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1 + Az^m}{1 + Bz^m} \right| \leq \frac{r}{1-r};$$

2) при $0 < A \leq 1, B = 0$

$$(1-r)r \exp\left(-\frac{A}{m}r^m\right) \leq |f(z)| \leq (1+r)r \exp\left(\frac{A}{m}r^m\right),$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 - Az^m \right| \leq \frac{r}{1-r}$$

и функция $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z| \leq r^*$, где r^* – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1 - Ar^m}{1 - Br^m} - \alpha - \frac{r}{1-r} = 0. \quad (26)$$

Примечание 1. При определенных значениях m, A, B из следствий 1–3 вытекают радиусы звездообразности порядка α для классов функций, найденные в статьях:

1) при $m = 2, A = 1, B = -1$, то есть, при $h_m(z) = \frac{z}{1-z^2}$, для классов

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} (1-z^2) \frac{f(z)}{z} \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{K}_2 &= \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} (1-z^2) \frac{f(z)}{z} \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{K}_3 &= \{ f(z): \operatorname{Re} (1-z^2) f(z)/z \geq 0 \} \text{ из [7];} \end{aligned}$$

2) при $m = 1, A = 1, B = -1$, то есть при $h_m(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ для классов

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} \frac{(1-z)^2}{z} g(z) \geq 0, z \in E \right\}, \\ \Pi_2 &= \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} \frac{(1-z)^2}{z} g(z) \geq 0, z \in E \right\} \text{ из [8];} \end{aligned}$$

3) при $m = 1, A = 0, B = -1$, или при $m = 1, A = 1, B = -1$, то есть при $h_m(z) = \frac{z}{1-z}$, или при $h_m(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ для классов

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} \frac{1-z}{z} g(z) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} \frac{1-z}{z} g(z) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{1-z}{z} f(z) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_4 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{(1-z)^2}{z} f(z) \geq 0, z \in E \right\} \text{ из [9];} \end{aligned}$$

4) при $m = 1, A = 1, B = 1/2$, то есть при $h_m(z) = z + \frac{z^2}{2}$ для классов

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} (g(z)/(z + z^2/2)) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} (g(z)/(z + z^2/2)) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{ f(z): \operatorname{Re} (f(z)/(z + z^2/2)) \geq 0 \} \text{ из [10];} \end{aligned}$$

5) при $m = 1, A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$, то есть при $h_m(z) = z$ для классов

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} \geq 0, \operatorname{Re} \left(\frac{g(z)}{z} \right) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} \left(\frac{g(z)}{z} \right) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{F}_5 &= \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, g(z) \in S^o \right\} \text{ из [6].}\end{aligned}$$

Примечание 2. В силу общности класса $CCS_m^*(a, \gamma, b, \delta, A, B)$ и точности результатов теорем 1 и 2 данные теоремы в частных случаях приводят ко многим ранее опубликованным результатам, в том числе и отличным от приведенных в примечании 1. Например, при $m = 1, A = 1, B = 1/2, b \rightarrow \infty, \delta = 1$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 5. Пусть $f(z), g(z) \in \mathcal{N}$, $\left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a$ и $\operatorname{Re} \frac{g(z)}{z} \geq 0$. Тогда точный радиус звездообразности r^* функции $f(z)$ определяется как единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$cr^3 + [1 + \gamma + (2 + \gamma)c]r^2 - [(1 - \gamma)c - 2 - \gamma]r - 1 = 0,$$

где $c = 1 - 1/a$.

При $\gamma = 1$ следствие 5 дает радиусы звездообразности $r^* = \sqrt{5} - 2$ и $r^* = (\sqrt{17} - 3)/4$, соответствующие случаям $a \rightarrow \infty$ и $a = 1$, впервые полученные в [17].

При $m = 1, A = 1, B = 1/2, b \rightarrow \infty, \delta = 0$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 6. Пусть $f(z) \in \mathcal{N}$, $\left| \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a, a > \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq 1, z \in E$. Тогда точный радиус звездообразности r^* функции $f(z)$ определяется по формуле

$$r_0 = \begin{cases} \frac{1 + \gamma(2a - 1) - \sqrt{(1 + \gamma(2a - 1))^2 + 4a(a - 1)}}{2(1 - a)}, & a \neq 1; \\ (1 + \gamma)^{-1}, & a = 1. \end{cases}$$

Для случая $\gamma = 1$ следствие 6 получено в [5, теорема 2]. При $\gamma = 1, a \rightarrow \infty$ или при $\gamma = 1, a = 1$ из следствия 6 вытекают два ранних результата Т.Х. МакГрегора [3] $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} \geq 0 \Rightarrow r^* = \sqrt{2} - 1$ и [4] $\left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| \leq 1 \Rightarrow r^* = 1/2$.

При $m = 2, A = 1, B = -1, b \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 7. Пусть функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию

$$\left| \left(\frac{1 - z^2}{z} f(z) \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a, \quad a > \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq 1.$$

Тогда $f(z)$ является звездообразной в круге $|z| \leq r^*$, где r^* определяется как единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$(1 - r^2)(1 - r)(1 + cr) - \gamma(1 + c)r(1 + r^2) = 0.$$

Из следствия 7 вытекает целый ряд результатов, в том числе и ранее известных.

1) $\gamma = 1$, то есть $\left| \frac{1 - z^2}{z} f(z) - a \right| \leq a, a > \frac{1}{2} \Rightarrow r^*$ – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения $(1 - r^2)(1 - r)(1 + (1 - 1/a)r) - (1 + r^2)(2 - 1/a)r = 0$;

2) $a \rightarrow \infty$, то есть $\left| \arg \left[\frac{1-z^2}{z} f(z) \right] \right| \leq \gamma \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma \leq 1 \Rightarrow r^*$ – единственный на $(0;1)$ корень уравнения $r^4 - 2\gamma r^3 - 2r^2 - 2\gamma r + 1 = 0$;

3) $\gamma = 1$, $a \rightarrow \infty$, то есть $\operatorname{Re} \frac{1-z^2}{z} f(z) \geq 0$ ($f(z)$ является типично-вещественной) $\Rightarrow$

$$r^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \right).$$

Заметим, что следствие 7 вытекает из теоремы 4 в [20], случай 3) рассмотрен в [21, 22].

Заключение

В статье получили дальнейшее развитие идеи, связанные с исследованием различных подклассов класса почти звездообразных функций, введенного М.О. Ридом в [2]. На основе нового подхода, связанного с применением опорной функции общего вида, введен новый подкласс класса почти звездообразных функций из [2] и на его базе определен новый подкласс класса дважды почти звездообразных функций, обобщающий различные классы почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций из статей [2–11].

Все это позволило систематизировать ряд сходных разрозненных результатов данного направления и получить обобщенные результаты, включающие как частные случаи многие результаты отмеченных выше статей.

Доказанные в статье теоремы и следствия являются новыми результатами в теории экстремальных задач для подклассов аналитических в единичном круге функций.

Примененные в статье подходы и оценки могут быть также использованы для нахождения радиусов звездообразности введенного в статье класса дважды почти звездообразных функций относительно других подклассов класса S^* , связанных с лемниской Бернулли, кардиоидой, луной, синусоидальной или экспоненциальной функцией.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. – 1975. – Т. 30. – Вып. 4(184). – С. 3–60. <https://www.mathnet.ru/links/e7c4d119db41755ee64c4677f4c40f9b/rm4232.pdf>.
- 2 Reade M.O. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J. –1955. – No. 3. – P. 59–62.
- 3 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions / Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 14. – 514–520.
- 4 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions / II. Proc. Am. Math. Soc. – 1963. – Vol. 14. – P. 521–524. <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5>.
- 5 Chichra P. On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions // J. of the Australian Math. Soc. – 1972. – Vol. 13. – No. 2. – P. 208–218. <https://doi.org/10.1017/S1446788700011290>.
- 6 Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. On the radius constants for classes of analytic functions // arXiv:1207.4529v1 [math.CV]. – 2012. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.4529>.
- 7 Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>.
- 8 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734. – 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>.
- 9 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. – 2021. – Vol. 71. – No. 1. – P. 83–104. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454>.
- 10 Kanaga R., Ravichandran V. Starlikeness for Certain Close-to-Star Functions // Hacet. J. Math. Stat. – Vol. 50. – No. 2. – P. 414–432. <https://doi.org/10.15672/hujms.702703>.
- 11 Sharma M., Jain N.K., Kumar S. Constrained radius estimates of certain analytic functions // arXiv:2305.16210v1 [math.CV] – 2023.
- 12 Rogosinski W. Über Positive Harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen // Math. Zeitschr. – 1932. – Vol. 35. – No.1. – P. 93–121. <https://doi.org/10.1007/BF01186552>.

- 13 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций. // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2024. – Т. 21. – №2. – С.127–138. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138>.
- 14 Janowski J. Some extreme problems for certain families of analytic functions // *Ann. Polon. Math.* – 1973. – Vol. 28. – P. 297–326. <https://doi.org/10.4064/ap-28-3-297-326>
- 15 Anh V.V., Tuan P.D. Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications // *Austral. Math. Soc. (Series A)*. 1986. – Vol. 41. – P. 152–164. <https://doi.org/10.1017/S1446788700033577>.
- 16 Shah G.M. On the univalence of some analytic functions // *Pacific J. Math.* – 1972. – Vol. 43. – No. 1. – P. 239–250. <https://doi.org/10.2140/pjm.1972.43.239>.
- 17 Ratti J.S. The radius of univalence of certain analytic functions // *Math. Z.* – 1968. – Vol. 107. – P. 241–248.
- 18 Anh V.V., Tuan P.D. On starlikeness and convexity of certain pacific // *Journal of Mathematics.* – 1977. – Vol. 69. – No. 1. – P. 1–9. <https://doi.org/10.2140/PJM.1977.69.1>
- 19 Robertson M.S. Certain classes of starlike functions // *Michigan Math. J.* – 1985. – Vol.32. – No. 2. – P. 135–140.
- 20 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Kenzhebekova D.S., Temirbekov N.M. Estimates and radii of convexity in some classes of regular functions / *WSEAS Transactions on Mathematics.* – 2024. – Vol. 23. – Art. #18. – P. 446–457. E-ISSN: 2224-2880. <https://doi.org/10.37394/23206.2024.23.47>.
- 21 Гельфер С.А. Типично вещественные функции // *Матем. сб.* – 1964. – Т. 64 (106). – № 2. – С. 171–184. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4441&option_lang=rus
- 22 Libera R.J. Some radius of convexity problems // *Duke Math. J.* – 1964. – Vol. 31. – №1. – P. 143–158. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>

REFERENCES

- 1 Avkhadiyev F.G., Aksent'ev L.A. The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. *Russian Mathematical Surveys*, 1975, vol. 30, no. 4, pp. 1–63. https://www.mathnet.ru/links/f5a3866220d851a8713bf8b1673e35c7/rm4232_eng.pdf
- 2 Reade M.O. (1955) On close-to-close univalent functions. *Michigan Math. J.*, vol. 3, pp. 59–62.
- 3 MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 14, pp. 514–520.
- 4 MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, II. *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 14, pp. 521–524. <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5>.
- 5 Chichra P. (1972) On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions. *J. of the Australian Math. Soc.*, vol. 13, no. 2, pp. 208–218 <https://doi.org/10.1017/S1446788700011290>.
- 6 Ali R.M., Jain N.K. and Ravichandran V. (2012) On the radius constants for classes of analytic functions. *arXiv:1207.4529v1*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.4529>.
- 7 Khatter K., Lee S.K. and Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. *arXiv preprint arXiv:2006.11744*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>.
- 8 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V. and Supramaniam S. (2020) Starlikeness of certain analytic functions. *arXiv preprint arXiv:2006.11734*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>.
- 9 Sebastianc A. and Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. *Math. Slovaca*, vol. 71, no. 1, pp. 83–104. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454>.
- 10 Kanaga R. and Ravichandran V. (2021). Starlikeness for certain close-to-star functions. *Hacet. J. Math. Stat.*, vol. 50, no. 2, pp. 414–432. <https://doi.org/10.15672/hujms.702703>.
- 11 Sharma M., Jain N.K. and Kumar S. (2023) Constrained radius estimates of certain analytic functions. *arXiv:2305.16210v1*.
- 12 Rogosinski W. (1932) Über positive harmonische entwicklungen und typisch-reelle potenzreihen. *Math. Zeitschr.*, vol. 35, no. 1, pp. 93–121. <https://doi.org/10.1007/BF01186552>.
- 13 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A. and Ysmagul R.S. (2024) Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness of some classes of starlike and close-to-starlike functions. *Herald of the Kazakh-British technical university*, vol. 21, no. 2, pp. 127–138 [In Russian]. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138>.

- 14 Janowski J. (1973) Some extreme problems for certain families of analytic functions. Ann. Polon. Math, vol. 28, pp. 297–326. <https://doi.org/10.4064/ap-28-3-297-326>.
- 15 Anh V.V. and Tuan P.D. (1986) Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications. Austral. Math. Soc. (Series A), vol. 41, pp. 152–164. <https://doi.org/10.1017/S1446788700033577>.
- 16 Shah G.M. (1972) On the univalence of some analytic functions. Pacific J. Math., vol. 43, no. 1, pp. 239–250. <https://doi.org/10.2140/pjm.1972.43.239>.
- 17 Ratti J.S. (1968) The radius of univalence of certain analytic functions. Math. Z., vol. 107, pp. 241–248.
- 18 Anh V.V. and Tuan P.D. (1977) On starlikeness and convexity of certain pacific. J. of Math., vol. 69, no. 1, pp. 1–9. <https://doi.org/10.2140/PJM.1977.69.1>.
- 19 Robertson M.S. (1985) Certain classes of starlike functions. Michigan Math. J., vol. 32, no. 2, pp. 135–140.
- 20 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Kenzhebekova D.S. and Temirbekov N.M. (2024) Estimates and radii of convexity in some classes of regular functions. WSEAS Transactions on Mathematics, E-ISSN: 2224-2880, vol. 23, Art. #18, pp. 446–457. <https://doi.org/10.37394/23206.2024.23.47>.
- 21 Gelfer S.A. (1964) Tipichno veshhestvennyye funktsii [Typically real functions]. Matem. sb., vol. 64(106), no. 2, pp. 171–184 [In Russian]. <https://www.mathnet.ru/rus/sm4441>.
- 22 Libera R.J. (1964) Some radius of convexity problems. Duke Math. J., vol. 31, no. 1, pp. 143–158. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>.

^{1*}Майер Ф.Ф.,

физ.-мат.ф.к., профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,

*e-mail: maiyer@mail.ru

¹Тастанов М.Г.,

физ.-мат.ф.к., профессор, ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,

e-mail: tastao@mail.ru

¹Утемисова А.А.,

пед.ф.к., ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,

e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Байманкулов А.Т.,

физ.-мат.ф.д., доцент, ORCID ID: 0000-0002-6435-9560,

e-mail: g_talgat_a@mail.ru

¹Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан

ТІРЕК ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ЖАЛПЫ КӨРІНІСІ НЕГІЗІНДЕ ҚҰРЫЛҒАН ЖҰЛДЫЗ ТӘРІЗДІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЛАСТАРЫ

Аңдатпа

Мақаланың мақсаты – белгілі бір экстремалды есептер шеңберіне біртұтас көзқарасты көрсете отырып, екі рет жұлдыз тәрізді функциялардың үлкен класын ұсыну және зерттеу. Мақалада тірек функциясының жалпы көрінісі ретінде жұлдыз тәрізді функция анықталып, оның негізінде жұлдыз тәрізді және екі есе жұлдыз тәрізді функциялар кластарын құру мүмкіндігі талқыланады. Үш параметрден тұратын жалпы типтегі тірек функциясына және аналитикалық функциялардың жаңа бағалауларына сүйене отырып, соңғы жылдары жарық көрген бірқатар мақалаларда қарастырылған жұлдыз тәрізді және екі есе жұлдыз тәрізді функциялар кластарын жалпылау ұсынылады. Бұл класс типтік нақты функциялардың жалпыланған кластарын да қамтиды. Мақалада енгізілген функциялар класының қасиеттері жан-жақты зерттеліп, өсу теоремасы, функцияның логарифмдік туынды модулін бағалау қолданылып, жұлдыздық радиус есептелді. Арнайы жағдайларда бұл зерттеу бұрын белгілі нәтижелерге және жаңа нәтижелерге әкеледі. Мақалада ұсынылған барлық нәтижелер дәлелденген.

Тірек сөздер: бір жапырақты функциялар, жұлдыз тәрізді функциялар, әдепкі нақты функциялар, жұлдыз тәрізді радиустар.

^{1*}**Maiyer F.F.,**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, ID: 0000-0002-2278-2723,

*e-mail: maiyer@mail.ru

¹**Tastanov M.G.,**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,

e-mail: tastao@mail.ru

¹**Utemissova A.A.,**

Candidate of Pedagogical Sciences, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,

e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹**Baimankulov A.T.,**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

ORCID ID: 0000-0002-6435-9560,

e-mail: g_talgat_a@mail.ru

¹Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Kazakhstan

CLASSES OF CLOSE-TO-STARLIKE FUNCTIONS BASED ON THE REFERENCE FUNCTION OF A GENERAL FORM

Abstract

The purpose of the article is to introduce and explore a wide class of doubly close-to-starlike functions, while demonstrating a unified approach to solving a certain range of extreme problems. The article defines a reference function of a general form – a starlike function, on the basis of which classes of close-to-starlike and doubly close-to-starlike functions can be constructed. On the basis of a general support function containing three parameters and new estimates of analytical functions, a generalization of various classes of close-to-starlike and doubly close-to-starlike functions is introduced, considered in a number of articles published in recent years, including the introduced class contains a generalized class of typically real functions. The properties of the introduced class of functions are studied, for example, the growth theorem, estimates of the modulus of the logarithmic derivative of the function and the radius of starlikeness are obtained, in particular cases leading to previously known results and representing new results. All the results of the article are accurate.

Key words: univalent functions, starlike functions, close-to-starlike functions, typically real functions, radii of starlikeness.

Дата поступления статьи в редакцию: 14.10.2024