

ӘОЖ 517.98
FTAXP 27.39.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-4-136-145>

¹Бесжанова А.Т.,
магистр, ORCID ID: 0009-0000-6314-1343,
e-mail: beszhanova@mail.ru
¹Байарыстанов А.О.,
ф.м.-ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-5840-5401,
e-mail: oskar_62@mail.ru

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ, Қазақстан

ЖОҒАРҒЫ ШЕГІ АЙНЫМАЛЫ БОЛАТЫН МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ МОНОТОНДЫ ТІЗБЕКТЕР КОНУСЫНДАҒЫ САЛМАҚТЫ БАҒАЛАУЫ

Аңдатпа

Харди теңсіздігі 1920 ж. тұжырымдалып, 1925 ж. дәлелденді. Сол уақыттан бері бұл теңсіздік айтарлықтай дамыды. Алғашқы жұмыстар жалпы салмақтарды қарастырумен байланыста болды. Кейінгі жұмыстарда Харди операторының орнына басқа ядролары бар жалпы операторлар қарастырылды. Қазіргі уақытта Харди типтес теңсіздіктерге арналған көптеген зерттеулер жүргізілуде. Харди теңсіздігінің жалпылаулары маңызды қолданбаларға негізделіп, тек теріс емес функциялар конусында ғана емес, сонымен қатар монотонды функциялар конусында да қарастырылады. Бұл жұмыста $1 < p \leq q < \infty$ үшін монотонды тізбектер конусында салмақты Харди типтес теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шартын анықтау қарастырылады. Есепті шешудің негізгі әдісі –редукциялау. Ол Сойер принципін қолдана отырып, монотонды тізбектер конусындағы Харди типті теңсіздікті барлық теріс емес тізбектер үшін белгілі бір теңсіздікке келтіруге мүмкіндік береді.

Тірек сөздер: Харди теңсіздігі, матрицалық оператор, монотонды тізбектер.

Кіріспе

Монотонды сандар тізбегі конусының қасиеттері функциялар теориясында, функционалдық анализде, математикалық экономика есептерінде, ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистикада қойылған әртүрлі экстремалды есептер үшін үлкен маңызға ие. Бұл тізбектер операторлардың аппроксимативті сандары, функциялардың ең жақсы жуықтауларының сандық сипаттамалары, функциялардың моменттік тізбектері және басқа да сәйкес объектілер туралы маңызды ақпаратты қамтиды. Ал кейбір объектілердің сапалық қасиеттері монотонды тізбектердің функционалдық қатынастары арқылы өрнектеледі.

Монотонды функциялар конусындағы салмақты Харди теңсіздігі мен оның жалпыламаларының көптеген қолданыстары бар. Олар, мысалы, операторлар теориясында, Лоренц кеңістігіндегі операторлардың шенелімдігін зерттеуде, Лоренц кеңістігінің енгізулері теориясында және басқа да салаларда кеңінен қолданылады.

Материалдар мен әдістер

Монотонды функциялар конусында зерттеулер басталғалы бері негізгі зерттеу әдісі – «редукция әдісі». Бұл әдіс арқылы монотонды функциялар конусындағы берілген теңсіздікті теріс емес функциялар жиынындағы теңсіздікке келтіруге болады. Алғаш рет Е. Сойердің жұмысында [1] өспейтін функциялар жиынындағы сызықты оң операторлар үшін теңсіздікті

қандай да бір теріс емес функциялар жиынындағы теңсіздікке редукциялау әдісі қарастырылды. Бұл әдіс «Сойердің қосалқылық принципі» (Сойер принципі) деп аталады. [2, 3] Жұмыстарда осы принциптің кемімейтін функциялар үшін орындалуы қарастырылған. Сондай-ақ, Сойер принципін қолданып әртүрлі оператор кластары үшін жасалған жұмыстарды [4–7] қарауға болады.

А. Гогатишвили және В.Д. Степанов [8] жұмысында монотонды функциялар конусында сызықты болуы міндетті емес операторлардың салмақты теңсіздіктерін теріс емес функциялар жиынында қандай да бір салмақты теңсіздікке келтіруге болатыны қарастырылған.

[9] Жұмыста $1 < p, q < \infty$ жағдайы үшін келесі түрде Сойер принципінің дискретті аналогы алынды:

Мұндағы $1 < p < \infty$, $r = \{r_i\}$ және $v = \{v_i\}$ теріс емес сандық тізбектер.

Бұл нәтиже бойынша монотонды тізбектер конусында Харди теңсіздігін теріс емес тізбектер үшін қандай да бір теңсіздікке келтіруге болады. [10]–[13] Дискретті Сойер принципін қолданып, Харди операторының монотонды тізбектер конусындағы матрицалық операторлардың салмақты бағалаулары алынған. Осы жұмыста біз осы әдісті қолдана отырып, жоғарғы шегі айнымалы болатын матрицалық операторды теріс емес, өспейтін тізбектер

$$\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} r_i f_i}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i f_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k r_i \right)^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} r_i}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\right)^{\frac{1}{p}}},$$

конусындағы салмақты бағалауын қарастырамыз.

Нәтижелер мен талқылау

Айталық $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ – теріс емес, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ – оң нақты сандар тізбегі болсын. l_{pv} – $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ нақты сандарының тізбектері кеңістігі және олар үшін

$$\|f\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

нормасы ақырлы болсын.

Келесі түрде анықталған жоғарғы шегі айнымалы болатын матрицалық операторды қарастырайық:

$$(Ag)_n = \sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i} g_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

мұндағы, $\mathbb{N}$ – натурал сандар жиыны, $a_{n,i} \geq 0$, $\beta(n)$ – натурал сандар тізбегі келесі қасиеттерге ие:

- 1) қатаң өспелі;
- 2) $\beta(1) = 1$, $n < \beta(n)$, $n \geq 2$.

Жұмыстың негізгі мақсаты $1 < p \leq q < \infty$ болғанда кез келген l_{pv} -дан алынған теріс емес, өспейтін $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ тізбектер үшін

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q (Ag)_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^p v_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

теңсіздігінің орындалуының қажетті және жеткілікті шартын алу.

Егер $\beta(n) = n$, $a_{ni} \equiv 1, n \geq i \geq 1$ болғанда A операторы дискретті Харди операторын береді: $(Ag)_n = \sum_{i=1}^n g_i$. Дискретті Харди операторының теріс емес тізбектер үшін орындалуы p және q параметрлерінің әртүрлі жағдайында толығымен зерттелген. Бұл мәселенің толық талдауы мен шолуын [5] жұмыстан көруге болады.

$a_{n,i} \equiv 1, n \geq i \geq 1$ болғанда (1) операторы жоғарғы шегі айнымалы болатын Харди операторын береді. Бұл оператордың теріс емес тізбектер үшін (2) түрдегі салмақты бағалауы [14]–[16] жұмыстарда зерттелген.

Ал [17] жұмыста жоғарғы және төменгі шектері айнымалы болатын $(Ag)_n = \sum_{i=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,i} g_i$ матрицалық оператордың теріс емес тізбектер үшін (2) түрдегі салмақты бағалауы $1 < p \leq q < \infty$ жағдайында қарастырылған.

Алайда жоғарғы не төменгі шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың теріс емес, өспейтін тізбектер жиынында салмақты бағалауы осыған дейін қарастырылмаған еді. Бұл мәселені осы жұмыста қарастырмыз.

Ескерту. Бұдан ары $M \ll K$ символы $M \leq cK$ білдіреді, мұндағы константа $c > 0$ маңызды емес параметрлерге ғана тәуелді. Егер $M \ll K \ll M$ болса, онда $M \approx K$.

Айталық,

$$V_k = \sum_{i=1}^k v_i^p, \quad k \geq 1, \quad A_{n,n} = \sum_{j=1}^n a_{n,\beta(j)}, \quad A_{n,k} = \sum_{j=1}^k a_{n,\beta(j)}, \quad W_k = \sum_{j=1}^k \omega_{\beta(j)},$$

$$F_1 = \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=1}^s u_n^q \left(\sum_{j=1}^n a_{n,\beta(j)} \right) \right)^{\frac{1}{q}} (V_s)^{-\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

$$F_2 = \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=s}^{\infty} b_{n,s}^q u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^s \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) W_k^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (4)$$

$$F_3 = \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^s \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) A_{s,k}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (5)$$

Айталық, $m \in \mathbb{N}$ және $\Omega(m) := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \leq m\}$. $1 \in \Omega(m)$ болғандықтан, $\forall m \in \mathbb{N}, \Omega(m) \neq \emptyset$. Сондай-ақ $\forall m \in \mathbb{N}$ үшін $\beta^{-1}(m) := \max \Omega(m)$ деп белгілейік. Онда $\beta^{-1}(\beta(m)) = m$, $\beta(\beta^{-1}(m)) \leq m$ болады.

Теорема 1. Айталық $1 < p \leq q < \infty$ болсын. (2) теңсіздігі өспейтін теріс емес ($\downarrow g \geq 0$) тізбектері үшін орындалады сонда және тек сонда, егер $F = \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$. Мұндағы $F \approx C$, ал C – (2)-дегі ең кіші тұрақты.

Дәлелдеу. (2) теңсіздігін ыңғайлы түрде жазып, Гелдер теңсіздігінің кері есебін қолданамыз ($i = \beta(j)$) алмастыруын қолданып және қосындылардың ретін ауыстырамыз)

$$C = \sup_{\downarrow g \geq 0} \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i} g_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}}{\|g\|_{p,v}} = \sup_{\downarrow g \geq 0} \sup_{f \geq 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{i=1}^{\beta(n)} a_{n,i} g_i}{\|f\|_{q',u^{-1}} \|g\|_{p,v}} =$$

(дискретті Соьер принципін қолданамыз)

$$= \sup_{\downarrow g \geq 0} \sup_{f \geq 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{j=1}^n a_{n,\beta(j)} g_{\beta(j)}}{\|f\|_{q',u^{-1}} \|g\|_{p,v}} = \sup_{f \geq 0} \sup_{\downarrow g \geq 0} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} g_{\beta(j)} \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)}}{\|f\|_{q',u^{-1}} \|g\|_{p,v}} \approx$$

Осыдан (2) теңсіздігі келесі теңсіздіктерге эквивалентті болатынын аламыз:

$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \infty$ жағдайында

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} \right)^{p'} \left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \tilde{C} \|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0 \quad (6)$$

және $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k < \infty$ жағдайында

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} \right)^{p'} \left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p \right)^{-\frac{1}{p}} \leq \hat{C} \|f\|_{q',u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0, \quad (7)$$

Мұндағы $C \approx \tilde{C}$ егер $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \infty$, және $C \approx \hat{C}$ егер $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k < \infty$.

Алдымен $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \infty$ жағдайын қарастырайық.

$a_{n,\beta(j)}, f_i$ теріс емес болғандықтан

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} &\approx \sum_{j=1}^k \sum_{n=j}^k f_n a_{n,\beta(j)} + \sum_{j=1}^k \sum_{n=k}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} = \\ &= \sum_{n=1}^k f_n \sum_{j=1}^n a_{n,\beta(j)} + \sum_{n=k}^{\infty} f_n \sum_{j=1}^k a_{n,\beta(j)} = \sum_{n=1}^k f_n A_{n,n} + \sum_{n=k}^{\infty} f_n A_{n,k}. \end{aligned}$$

яғни

$$\left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} \right)^{p'} \approx \left(\sum_{n=1}^k A_{n,n} f_n \right)^{p'} + \left(\sum_{n=k}^{\infty} A_{n,k} f_n \right)^{p'}. \quad (8)$$

(8) өрнекті (6) қойсақ, онда (6) теңсіздігінің орындалуы келесі теңсіздіктердің бірізгілікте орындалуына эквивалентті болатынын аламыз

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k f_n A_{n,n} \right)^{p'} \left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \tilde{C}_1 \|f\|_{q', u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0, \quad (9)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} f_n A_{n,k} \right)^{p'} \left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \tilde{C}_2 \|f\|_{q', u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0, \quad (10)$$

мұндағы

$$\tilde{C} \approx \max\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}. \quad (11)$$

(9) теңсіздігі Харди теңсіздігі болды және орындалады, сонда тек сонда ғана, егер келесі шарт орындалса

$$\begin{aligned} F_1 &= \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=1}^s A_{n,n}^q u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=s}^{\infty} \left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \sup_{s \geq 1} V_s^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^s u_n^q \left(\sum_{j=1}^n a_{n,\beta(j)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{C}_1 \approx F_1 \quad (13)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k A_{n,k} \right)^q u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \tilde{C}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^p \left(V_k^{\frac{-p'}{p}} - V_{k+1}^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{p}{p'}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \varphi \geq 0. \quad (14)$$

(10) теңсіздігіне дуалды теңсіздікті қарастырайық

Келесі түрлендірулерді жасайық: $a_{n,\beta(j)} = \tilde{a}_{n,j}$, онда $A_{n,k} = \sum_{j=1}^k a_{n,\beta(j)} = \sum_{j=1}^k \tilde{a}_{n,j}$. Олай болса $(\tilde{a}_{n,j})$ – матрица элементтері [18] жұмыстағы 1.1-шартын қанағаттандыратынын айқын көруге болады, яғни $1 \leq j \leq m \leq n$ үшін $\tilde{a}_{n,j} \approx b_{n,m} \tilde{\omega}_j + \tilde{a}_{m,j}$.

Айталық, $s \in N: n \geq s \geq k \geq j$, онда

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \sum_{j=1}^k a_{n,\beta(j)} = \sum_{j=1}^k \tilde{a}_{n,j} \approx \sum_{j=1}^k (b_{n,s} \tilde{\omega}_j + \tilde{a}_{s,j}) = b_{n,s} \sum_{j=1}^k \tilde{\omega}_j + \sum_{j=1}^k \tilde{a}_{s,j} \\ &= b_{n,s} \sum_{j=1}^k \omega_{\beta(j)} + \sum_{j=1}^k a_{s,\beta(j)} = b_{n,s} W_k + A_{s,k}. \end{aligned}$$

[18] жұмыстағы Теорема 2.1 бойынша (14) теңсіздігі орындалуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажет және жеткілікті:

$$F_2 = \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=s}^{\infty} b_{n,s}^q u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^s W_k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (15)$$

$$F_3 = \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^s A_{s,k}^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (16)$$

мұндағы

$$\tilde{C}_2 \approx \max\{F_2, F_3\}. \quad (17)$$

(13) пен (17)-ден байқайтынымыз, (9) және (10) теңсіздіктер орындалады, сонда тек сонда ғана, егер $F = \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$. Онда (11)-ден $\tilde{C} = \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$ аламыз. $C \approx \tilde{C}$ ескерсек, $F = \max\{F_1, F_2, F_3\} \approx C$ аламыз, яғни $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \infty$ жағдайда Теорема орындалады, сонда тек сонда ғана, егер $C = \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$ болса.

Енді $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k < \infty$ жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда (2) теңсіздік орындалады, сонда тек сонда ғана, егер (7) теңсіздігі орындалса немесе (6) теңсіздік келесі теңсіздікпен қатар орындалса:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} f_n a_{n,\beta(j)} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p \right)^{-\frac{1}{p}} \leq \hat{C}' \|f\|_{q', u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0, \quad (18)$$

мұндағы $\hat{C}'$ – (18) теңсіздігінің ең кіші оң константасы.

Онда $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k < \infty$ жағдайында (7) теңсіздік орындалады, сонда тек сонда ғана, егер

$\hat{C} = \max\{F_1', F_2, F_3\} < \infty$ болса.

Мұндағы

$$F_1' = \sup_{s \geq 1} \left(\sum_{n=1}^s A_{n,n}^q u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Расында да, егер $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k < \infty$ болса, онда (13)-тен (9) теңсіздіктің $F_1' < \infty$ болғанда ғана орындалатыны шығады, және $F_1' \approx \tilde{C}_1$.

(18) теңсіздікте қосындылардың ретін алмастырсақ келесі теңсіздікті аламыз

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{j=1}^n a_{n,\beta(j)} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p \right)^{-\frac{1}{p}} \leq \hat{C}' \|f\|_{q', u^{-1}}, \quad \forall f_n \geq 0.$$

Онда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n A_{n,n} \right) \leq \hat{C}' \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{q'} u_n^{-q'} \right)^{\frac{1}{q'}} V_{\infty}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f_n \geq 0.$$

Гелдер теңсіздігінің кері есебін қолдансақ

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q A_{n,n}^q \right)^{\frac{1}{q}} = \hat{C}' V_{\infty}^{\frac{1}{p}}.$$

Олай болса (18) теңсіздік орындалады, сонда тек сонда ғана, егер

$$\hat{C}' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q A_{n,n}^q \right)^{\frac{1}{q}} V_{\infty}^{-\frac{1}{p}} < \infty$$

болса.

$\frac{1}{2}(F'_1 + \hat{C}') < F_1$ болатыны айқын. Ал $\forall s \geq 1$ үшін

$$V_s^{-\frac{1}{p}} = \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}} + V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{\infty}^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} + V_{\infty}^{-\frac{1}{p}}$$

аламыз, олай болса $F_1 \leq (F'_1 + \hat{C}')$ екендігі шығады, яғни $F_1 \approx F'_1 + \hat{C}'$. Ендеше (9) және (18) теңсіздіктері орындалады, сонда тек сонда ғана, $F_1 < \infty$ болса. Онда (7) теңсіздігі орындалады, сонда тек сонда ғана, егер $\hat{C} \approx \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$. Бұл жағдайда $C \approx \hat{C}$ ескерсек, онда $C \approx F = \max\{F_1, F_2, F_3\}$.

Олай болса $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k < \infty$ екі жағдайда да (2) теңсіздігінің орындалуы үшін $C \approx F = \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$ қажетті және жеткілікті. Теорема дәлелденді.

Қорытынды

Бұл жұмыста Сойер принципінің дискретті аналогын пайдаланып, жоғарғы шегі айнымалы болатын матрицалық оператордың теріс емес, өспейтін тізбектер конусындағы салмақты бағалауының қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Sawyer E. Boundedness of classical Lorentz spaces// Studia Math.— 1990. — V. 96. — P. 145–158.
- 2 Stepanov V.D. Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. — 1993. — V. 48. — No. 3 — P. 465–487.
- 3 Heinig H.P., Stepanov V.D. Weighted Hardy inequalities for increasing functions // Canad. J. Math. — 1993. — V. 93. — No. 1. — P. 104–116.
- 4 Sinnamon G. Hardy's Inequality and Monotonicity // Function Spaces Differential Operators and Nonlinear Analysis. Prague. — 2005. — P. 292–310.
- 5 Kufner F., Maligranda L., Persson L.E. The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen: Vydavatelsky servis, 2007.

- 6 Kufner F., Persson L.E. *Weighted Inequalities of Hardy Type*. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2003.
- 7 Arendarenko L.S., Oinarov R., Persson L.-E. Some new Hardy – type integral inequalities on cones of monotone functions // *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory*. – 2013. – P. 77–89.
- 8 Гогатишвили А., Степанов В.Д. Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функции // *Успехи мат. наук.* – 2013. – Т. 68. – № 4(412). – С. 3–68.
- 9 Ойнаров Р., Шалгынбаева С.Х. Весовые неравенства Харди на конусе монотонных последовательностей // *Известия НАН РК. Серия физ.-мат.* –1998. – № 1. – С. 33–42.
- 10 Шалгынбаева С.Х. Весовые оценки для класса матриц на конусе монотонных последовательностей // *Известия НАН РК. Серия физ.-мат.* –1998. – №5 – С. 76–80.
- 11 Taspaganbetova Zh. Weighted Hardy type inequalities on the cone of monotone sequences// *Mathematical Journal*. – 2012. –V. 12. – No. 4(46). – P.115–125.
- 12 Taspaganbetova Zh. Weighted estimate for a class of matrices on the cone of monotone sequences// *Eurasian Math. J.* – 2012. – V. 3. – No. 46. – P.137–146.
- 13 Taspaganbetova Zh. Two-sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences// *J. Math. Anal. Appl.* –2014. – V. 410. – P. 82–93.
- 14 Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I // *Вестник РУДН. Серия. Математика. Информатика. Физика.* – 2010. – № 4. – С. 55–68.
- 15 Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования II // *Вестник РУДН. Серия. Математика. Информатика. Физика.* – 2011. – №1. – С. 5–13.
- 16 Альхалил А. Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования III // *Вестник РУДН. Серия. Математика. Информатика. Физика.* – 2011. – № 2. – С. 44–50.
- 17 Temirkhanova A., Beszhanova A. Boundedness and compactness of a certain class of matrix operators with variable limits of summation // *Eurasian Math. J.* – 2020. – V. 11. – No. 4. – P. 66–75.
- 18 Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M., Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \leq q$ // *Math. Inequal. Appl.* – 2009. – V. 12. – P. 891–903.

REFERENCES

- 1 Sawyer E. Boundedness of classical Lorentz spaces. *Studia Math.*, 1990, vol. 96, pp. 145–158.
- 2 Stepanov V.D. Integral operators on the cone of monotone functions. *J. London Math. Soc.*, 1993, vol. 48, no. 3, pp. 465–487.
- 3 Heinig H.P., Stepanov V.D. Weighted Hardy inequalities for increasing functions. *Canad. J. Math.*, 1993, vol. 93, no. 1, pp. 104–116.
- 4 Sinnamon G. *Hardy's Inequality and Monotonicity. Function Spaces Differential Operators and Nonlinear Analysis*. Prague, 2005, pp. 292–310.
- 5 Kufner F., Maligranda L., Persson L.E. *The Hardy inequality. About its history and some related results*. Pilsen: Vydavatel'sky servis, 2007.
- 6 Kufner F., Persson L.E. *Weighted Inequalities of Hardy Type*. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2003.
- 7 Arendarenko L.S., Oinarov R., Persson L.-E. Some new Hardy – type integral inequalities on cones of monotone functions. *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory*, 2013, pp. 77–89.
- 8 Gogatishvili A., Stepanov V.D. Redukcionnye teoremy dlya vesovykh integralnykh neravenstv na conuse monotonnykh funktsii. *Uspexi mat. nauk.*, 2013, vol. 68, no. 4(412), pp. 3–68. [in Russian]
- 9 Oinarov R., Shalgynbaeva S.Kh. Vesovye neravenstva Hardy na conuse monotonnykh posledovatel'nostei. *Izvestiya NAN RK. Serya fis-mat.*, 1998, no.1, pp. 33–42. [in Russian]
- 10 Shalgynbaeva S.Kh. Vesovye ocenki dlya klassa matric na conuse monotonnykh posledovatel'noctei. *Izvestiya NAN RK. Seryafis-mat.*, 1998, no.5, pp. 76–80. [in Russian]
- 11 Taspaganbetova Zh. Weighted Hardy type inequalities on the cone of monotone sequences. *Mathematical Journal*, 2012, vol. 12, no. 4(46), pp. 115–125.
- 12 Taspaganbetova Zh. Weighted estimate for a class of matrices on the cone of monotone sequences. *Eurasian Math. J.*, 2012, vol. 3, no. 46, pp. 137–146.
- 13 Taspaganbetova Zh. Two-sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 410, pp. 82–93.

- 14 Alhalil A. Diskretnye neravenstva tipa Hardy s peremrnnymi predelami summirovaniya I. Vestnik RUDN. Serya. Matematika. Informatika. Fizika, 2010, vol. 4, pp. 55–68. [in Russian]
- 15 Alhalil A. Diskretnye neravenstva tipa Hardy s peremrnnymi predelami summirovaniya II, Vestnik RUDN. Serya. Matematika. Informatika. Fizika, 2011, no.1, pp. 5–13. [in Russian]
- 16 Alhalil A. Diskretnye neravenstva tipa Hardy s peremrnnymi predelami summirovaniya III // Vestnik RUDN. Serya. Matematika. Informatika. Fizika, 2011, no. 2, pp. 44–50. [in Russian]
- 17 Temirkhanova A., Beszhanova A. Boundedness and compactness of a certain class of matrix operators with variable limits of summation. Eurasian Math. J., 2020, vol. 11, no. 4
- 18 Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M., Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \leq q$ // Math. Inequal. Appl., 2009, vol. 12, pp. 891–903.

¹Beszhanova A.T.,

Master, ORCID ID: 0009-0000-6314-1343,

e-mail: beszhanova@mail.ru

¹Bayarystanov A.O.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ORCID ID: 0000-0002-5840-5401,

e-mail: oskar_62@mail.ru

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

WEIGHTED ESTIMATE OF A MATRIX OPERATOR WITH VARIABLE UPPER LIMIT ON THE CONE OF MONOTONE SEQUENCES

Abstract

Hardy's inequality was formulated in 1920 and finally proved in 1925. Since then, this inequality has been significantly developed. The first development was related to the consideration of more general weights. The next step was to use more general operators with other kernels instead of the Hardy operator. Currently, there are many works devoted to Hardy-type inequalities with iterated operators. Motivated by important applications, all these generalizations of Hardy's inequality are studied not only on the cone of non-negative functions, but also on the cone of monotone functions. In this paper, we consider the problem of finding necessary and sufficient conditions for the fulfillment of a weighted Hardy-type inequality on the cone of monotone sequences for $1 < p \leq q < \infty$. The main method for solving the problem is the reduction method, which, using the Sawyer principle, allows us to reduce a Hardy-type inequality on the cone of monotone sequences to some inequality for all non-negative sequences.

Key words: Hardy's inequality, matrix operator, monotone sequences.

¹Бесжанова А.Т.,

магистр, ORCID ID: 0009-0000-6314-1343,

e-mail: beszhanova@mail.ru

¹Байарыстанов А.О.,

к.ф.-м.н., ORCID ID: 0000-0002-5840-5401,

e-mail: oskar_62@mail.ru

¹Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация

Неравенство Харди было сформулировано в 1920 г. и окончательно доказано в 1925 г. С тех пор это неравенство получило значительное развитие. Первое развитие было связано с рассмотрением более общих весов. Следующим шагом было использование более общих операторов с другими ядрами вместо операторов

ра Харди. В настоящее время существует много работ, посвященных неравенствам типа Харди с итерированными операторами. Мотивированные важными приложениями, все эти обобщения неравенства Харди изучаются не только на конусе неотрицательных функций, но и на конусе монотонных функций. В этой работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения весового неравенства типа Харди на конусе монотонных последовательностей при $1 < p \leq q < \infty$. Основным методом решений задачи является метод редукции, который с помощью принципа Сойера позволяет свести неравенство типа Харди на конусе монотонных последовательностей к некоторому неравенству для всех неотрицательных последовательностей.

Ключевые слова: неравенство Харди, матричный оператор, монотонные последовательности.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 30.09.2024