

УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-3-201-209>

^{1*}Вербовский В.,

д.физ.-мат.н., доцент, ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy@math.kz

¹Ершигешова А.,

магистр, старший преподаватель, ORCID ID: 0000-0001-6732-1077,

e-mail: aisha.yershigeshova@gmail.com

¹Институт математики и математического моделирования КН МНВО РК,
Алматы, 050010, ул. Шевченко, 28

УПОРЯДОЧЕННАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ И ОБОГАЩЕНИЯ ЧИСТОГО ЛИНЕЙНОГО ПОРЯДКА ОДНОМЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Аннотация

Линейно упорядоченная структура называется упорядоченно стабильной, если каждое ее дедекиндово сечение имеет «малое» число расширений до полных 1-типов. Данное понятие, которое ввели Б.С. Байжанов и В.В. Вербовский, обобщает такие широко известные в среде специалистов по теории моделей понятия, как слабая о-минимальность, (слабая) квази-о-минимальность и дп-минимальность упорядоченных структур. Оно основано на соединении понятия стабильности и о-минимальности. Как мы знаем, элементарная теория любого чистого линейного порядка упорядоченно суперстабильна. Действительно, это следует из того факта, которые доказал еще Рубин в конце 70-х годов XX века, что любой тип от одной переменной определяется своим сечением и формульными подмножествами, выделяемыми одноместными предикатами или формулами от одной свободной переменной. В данной работе мы исследуем вопрос, что будет, если чистый линейный порядок обогатить одноместной функцией. Построены два примера, когда упорядоченная стабильность нарушается. Кроме того, найдены достаточные условия сохранения упорядоченной стабильности при таком обогащении языка. Исследовательская работа по данной теме еще не окончена. В идеале было бы хорошо найти критерий сохранения упорядоченной стабильности при обогащении структуры с чистым линейным порядком новой функцией от одной переменной.

Ключевые слова: линейно упорядоченное множество, свойство независимости, унар, упорядоченная стабильность, о-минимальность.

Введение

С момента появления весьма удачного понятия о-минимальности [1], которое принесло огромное число плодов в теории моделей, изучение линейно упорядоченных структур стало развиваться очень и очень активно. В силу всего вышесказанного не могли не быть придуманными его обобщения, причем самого разного вида. Мы в данной работе будем касаться только одного из таких обобщений, а именно понятия упорядоченной стабильности, которое было придумано Б.С. Байжановым и В.В. Вербовским и впервые опубликовано в их совместной статье [2]. Дальнейшее развитие теории упорядоченной стабильности получило в работах [2–9, 11], но там речь шла либо об общих вопросах [6–8], либо были исследованы упорядоченные группы [3–5, 9]. Эта статья направлена на изучение вопроса, что будет, если мы обогатим чистый линейный порядок одноместной функцией. Данная работа является продолжением работы [11].

Основная часть

Упорядоченные структуры являются классическим объектом в математике. Их исследуют с самых разных сторон. В нашем исследовании мы смотрим на них с точки зрения упорядоченной стабильности – относительно нового понятия в теории моделей.

Материалы и методы

В нашей работе мы использовали методы теории моделей, а именно те методы, которые касаются изучения свойства независимости и построения формульных подмножеств данной алгебраической структуры. Кроме того, был использован метод элиминации кванторов для доказательства упорядоченной стабильности элементарных теорий построенных структур.

Результаты исследования и их обсуждение

Следующие примеры демонстрируют, что вопрос сохранения упорядоченной стабильности чистого линейного порядка при его обогащении функцией от одной переменной имеет место, поскольку существуют примеры, которые приведены ниже, когда такого вида обогащения выводят нас за рамки упорядоченной стабильности.

Пример 1. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, <, g^1)$, где символ $<$ мы интерпретируем как лексикографический порядок, а функциональный символ g мы интерпретируем так, как написано: $g((q_1, q_2)) = (q_2, q_1)$. В этом случае появляется возможность определить при помощи формулы $a < b \Leftrightarrow g(a) < g(b)$ такой порядок $<$, который принято называть обратным лексикографическим. В статье [1] был получен следующий результат: «Элементарная теория структуры $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, <, <)$ является зависимой (не обладает свойством независимости), но не является упорядоченно стабильной». Следует обратить внимание, что определенная таким образом функция g ни в коем случае не есть локально монотонная функция, в том смысле, что область определения функции g является открытым множеством и для любого элемента (за исключением конечного их числа) из области определения существует такая открытая выпуклая окрестность этого элемента, что сужение функции g на это открытое выпуклое множество есть монотонная функция.

Пример 2. $\mathcal{M} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} + \mathbb{R}, <, h^1)$, где символ $<$ мы интерпретируем как линейный порядок, причем на множестве $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ он задается как лексикографический порядок, на множестве $\mathbb{R}$ этот порядок мы определяем естественным образом, более того, мы полагаем, что какой бы мы ни взяли элемент из $\mathbb{R}$, он будет больше каждого элемента из $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, а функция h от одной переменной будет определена в следующих строках. Мы определим вспомогательные функции g_1, g_2 из декартового квадрата $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ в множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ в виде обычной проекции: $g_i((z_1, z_2)) = z_i$. Нам осталось привести формулу для вычисления функции h . Если $a = (z_1, z_2)$, то очевидно, что $g_1(a) = z_1$ и $g_2(a) = z_2$. Итак,

$$h(a) = g_2(a) + \frac{1}{g_1(a) + 2}, \text{ если } g_1(a) > 0$$

$$h(a) = g_2(a), \text{ если } g_1(a) = 0$$

$$h(a) = g_2(a) + \frac{1}{g_1(a) - 2}, \text{ если } g_1(a) < 0$$

$$h(r) = (0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \text{ если } r \in \mathbb{R}$$

Напишем формулу, которая выделяет множество $\mathbb{R}$:

$$R(x) = \forall y, z (y < x < z \rightarrow \exists u, v (y < u < x < v < z))$$

Очевидно, что формула $\neg R$ в таком случае имеет своим множеством реализаций декартов квадрат $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Перейдем к формуле $\varphi(z, q) = h(z) > q$. Определим сечение $s = (C, D)$ следующим образом: положим, что $C = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и, кроме того, $D = \mathbb{R}$. В следующих строках мы докажем, что вышеопределенная формула $\varphi(z, q)$ удовлетворяет свойству строгого порядка внутри только что построенного нами сечения s . Для этого сделаем следующее рассуждение. Возьмем из множества $R(\mathcal{M})$ такой элемент $q = n$, который является целым числом. В этом случае множество $\varphi(\mathcal{M}, q)$ можно представить в виде объединения таких выпуклых множеств, которые приведены далее. Пусть $(z_1, z_2) \in \{z_1\} \times \mathbb{Z}$, причем первая координата z_1 положительна. Имеет место формула

$$h((z_1, z_2)) = g_2((z_1, z_2)) + \frac{1}{g_1((z_1, z_2)) + 2} = z_2 + \frac{1}{z_1 + 3}.$$

Из определения функции h следует, что $h((z_1, z_2)) > n$, если и только если вторая координата $z_2 > n$. Отсюда получаем, что

$$\varphi(\mathcal{M}, n) = \bigcup_{z_1 \in \mathbb{Z}} [(z_1, n), +\infty),$$

здесь $[(z_1, n), +\infty)$ является подмножеством множества $\{z_1\} \times \mathbb{Z}$.

Исходя из определения свойства строгого порядка внутри сечения s , рассматриваемая нами формула $\varphi(z, q)$ обладает этим свойством, когда можно найти такую последовательность элементов q_i , здесь i пробегает множество натуральных чисел ω , что каковы бы ни были элементы c из C и d из D , включение

$$\varphi(\mathcal{M}, q_i) \cap (c, d) \subset \varphi(\mathcal{M}, q_j) \cap (c, d)$$

верно, если и только если индекс i меньше индекса j [2]. В работе [2] было доказано: «упорядоченно стабильная теория не обладает свойством строгого порядка внутри никакого сечения».

Наконец, мы приступаем к доказательству того, что свойством строгого порядка внутри сечения s построенная нами выше формула $\varphi(z, n)$ все-таки обладает.

Пусть $q_n = n \in P(\mathcal{M})$, где индекс n пробегает множество натуральных чисел ω . Положим, что $c = (\zeta_1, \zeta_2), d = q$. Имеем, что

$$\varphi(\mathcal{M}, q_n) \cap (c, d) = ((\zeta_1, \zeta_2), +\infty) \cap [(\zeta_1, n), +\infty) \cup \bigcup_{z_1 \in \mathbb{Z}, z_1 > \zeta_1} [(z_1, n), +\infty)$$

Включение $\varphi(\mathcal{M}, q_n) \cap (c, d) \subset \varphi(\mathcal{M}, q_{n+1}) \cap (c, d)$ настолько очевидно для каждого n , что не требует пояснений. В силу приведенного нами немного выше факта получаем, что $Th(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, <, h^1)$ не может быть упорядоченно стабильной, тем не менее функция h является локально монотонной, что достаточно легко проверить.

Теперь мы вводим в рассмотрение сигнатуру $\Sigma = \{=, <, f^1, P_i^1\}_{i \in I}$. Символ $<$ мы будем интерпретировать только в качестве линейного порядка, символ f будет интерпретировать как некоторую монотонную функцию одной переменной, которая является еще и непрерывной. Что же касается символов P_i , то это одноместные предикаты.

Напишем в виде аксиом то, что мы только что сказали, иначе говоря, зададим теорию T :

- 1) $<$ – линейный порядок;
- 2) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ (f возрастающая);
- 3) f непрерывна, то есть,
 $\forall x \forall y_1 \forall y_2 (y_1 < f(x) < y_2 \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 (x_1 < x < x_2 \wedge \forall t (x_1 < t < x_2 \rightarrow y_1 < f(t) < y_2)))$;
- 4) $\forall x (x < f(x))$.

Пусть $R(y) := \exists x (y = f(x))$ и $D(y) = \exists y (y = f(x))$.

Если A – формульное подмножество, то положим, что $A^n = f^n(A)$:

$$y \in A^n \Leftrightarrow \exists x \in A (f^n(x) = y), \text{ если } n > 0$$

$$y \in A^0 \Leftrightarrow y \in A$$

$$y \in A^{-n} \Leftrightarrow \exists x \in A (f^n(y) = x), \text{ если } n > 0$$

Пусть $\Sigma^+ = \{=, <, P_i^n, R^n, D^n\}_{i \in I, n \in \mathbb{Z}}$

Заметим, что следующий факт легко следует из результатов Рубина [10].

Факт 1. [2] Пусть $\mathcal{M} = (M, \Sigma^+)$ – линейно упорядоченная структура с одноместными предикатами. Тогда $Th(\mathcal{M})$ является упорядоченно суперстабильной теорией.

Добавим к сигнатуре Σ^+ один символ одноместной функции, в итоге мы получим $\mathcal{M}_1 = (M, \Sigma^+ \cup \{f^1\})$. Так как факт 1 имеет место для произвольной сигнатуры Σ^+ , которая содержит только символ $<$ и символы P_i^1 , где индекс i пробегает некоторое множество индексов I , то, не умаляя общности, мы имеем право положить, что для любого i существуют j и k , такие, что

$$f(P_i(\mathcal{M})) = P_j(\mathcal{M}) \text{ и } f^{-1}(P_i(\mathcal{M})) = P_k(\mathcal{M}).$$

Также положим, что $\text{dom } f, \text{range } f \in \Sigma^+$.

Пусть $T = Th(\mathcal{M})$ и пусть $\Sigma_{qe}^+ \supset \Sigma^+$ – такая сигнатура, что теория $T_{qe}^+ = Th(M, \Sigma_{qe}^+)$ допускает сокращение кванторов. Для дальнейших рассуждений мы введем еще одно допущение. Мы ограничимся только такими алгебраическими структурами $\mathcal{M} = (M, \Sigma^+)$, для которых построенная нами только что сигнатура Σ_{qe}^+ содержит только символ $<$ и только одноместные предикаты. Без ограничения общности мы можем допустить, что если одноместные предикаты P и R лежат в Σ_{qe}^+ , то $\neg P, \neg Q, P \wedge Q \in \Sigma_{qe}^+$.

Пусть $T_{qe}^f = Th(M, \Sigma_{qe}^+ \cup \{f\})$. Обозначим, $\Sigma_{qe}^f = \Sigma_{qe}^+ \cup \{f\}$.

Теорема 1. Теория T_{qe}^f допускает элиминацию кванторов.

Доказательство. Это является стандартом, что для начала необходимо разобраться в устройстве термов сигнатуры Σ_{qe}^f . Как они могут выглядеть? Терм может быть переменной, констант у нас нет, а может быть и $f^n(x)$, здесь $n \in \mathbb{Z}^+$. Для упрощения записи мы будем писать $f^n(x)$ и в том случае, когда $n \in \mathbb{Z}$, но это только временно. Когда мы подойдем к концу, станет понятно, что делать с отрицательными индексами n , чтобы их не осталось. Мы используем классический критерий Тарского, то есть для наших задач достаточно доказать, что квантор существования элиминируется в формулах вида элементарной конъюнкции с одним экзистенциальным квантором

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(x, \bar{y}_i) \right),$$

здесь $\varphi_i(x, \bar{y}_i)$ есть не что иное, как атомарная формула или ее отрицание, а значит, она описывается одним из нижеприведенных видов:

- 1) $f^n(x) = f^m(y)$;
- 2) $f^n(x) \neq f^m(y)$;
- 3) $f^n(x) < f^m(y)$;
- 4) $f^n(x) \neq f^m(y)$;
- 5) $f^n(x) > f^m(y)$;
- 6) $f^n(x) \neq f^m(y)$;
- 7) $P(f^n(x))$, где P – одноместный предикат из Σ_{qe}^+ ;

Ввиду введенных нами обозначений и допущений имеет место эквивалентность $P(f^n(x)) \Leftrightarrow P^{-n}(x)$, из этого следует, что среди формул вида (7) достаточно перебирать только такие формулы, которые имеют самый простой вид – $P(x)$.

Не умаляя общности, можно считать, что формулы с отрицанием (то есть вида 2, 4, 6) отсутствуют в силу нижеприведенных рассуждений.

$$f^n(x) \neq f^m(y) \Leftrightarrow (f^n(x) < f^m(y)) \vee (f^n(x) > f^m(y)).$$

Обозначим конъюнкцию вида $\exists x(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(x, \bar{y}_i))$ как θ . Тогда

$$\begin{aligned} \exists x(f^n(x) \neq f^m(y) \wedge \theta) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists x \left(\left((f^n(x) < f^m(y)) \vee (f^n(x) > f^m(y)) \right) \wedge \theta \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists x \left(\left((f^n(x) < f^m(y)) \wedge \theta \right) \vee \left((f^n(x) > f^m(y)) \wedge \theta \right) \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists x \left((f^n(x) < f^m(y)) \wedge \theta \right) \vee \exists x \left((f^n(x) > f^m(y)) \wedge \theta \right) \end{aligned}$$

Поскольку квантор существования проносится через дизъюнкцию, мы имеем полное право рассматривать эти дизъюнкты не вместе, а по отдельности.

Так как $f^n(x) \neq f^m(y) \Leftrightarrow (f^n(x) = f^m(y)) \vee (f^n(x) > f^m(y))$, рассуждения аналогичны. Подобным образом можно избавиться и от формул вида 6.

Нам потребуется еще одно наблюдение. Ввиду того факта, что функция f предполагается всегда быть возрастающей, неравенство $f^n(x) \geq f^m(y)$ эквивалентно неравенству $f^{n+s}(x) \geq f^{m+s}(y)$, какое бы число s мы ни взяли, здесь $\geq \in \{=, <, >\}$ (иначе говоря, мы в одном выражении записали сразу три эквивалентности). Из этого следует, что при рассмотрении формул вида 1, 3 и 5 можно ограничиться только следующими видами:

$$x = f^m(y); \quad x < f^m(y); \quad x > f^m(y).$$

Если есть формула вида 1, то есть $x = f^m(y)$, то если $m \geq 0$, получаем:

$$\exists x \left(x = f^m(y) \wedge \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(x, \bar{y}_i) \right) \Leftrightarrow D(y) \wedge \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(f^m(y), \bar{y}_i)$$

Рассмотрим случай, когда $m < 0$. Пусть $m = -n$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists x \left(x = f^{-n}(y) \wedge \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(x, \bar{y}_i) \right) &\Leftrightarrow \exists x \left(f^n(x) = y \wedge \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(x, \bar{y}_i) \right) \\ &\Leftrightarrow D^n(y) \wedge \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(f^{-n}(y), \bar{y}_i) \end{aligned}$$

Формула φ_i – атомарная, то есть лежит в Σ_{qe}^f .

А) $\varphi_i = f^{-n}(y) < u$. Тогда меняем $f^{-n}(y) < u$ на $y < f^n(u)$.

Б) $\varphi_i = f^{-n}(y) > u$. Тогда меняем $f^{-n}(y) > u$ на $y > f^n(u)$.

В) $\varphi_i = U(f^{-n}(y))$. Тогда меняем $U(f^{-n}(y))$ на $U^n(y)$.

Это рассуждение позволяет нам сделать допущение об отсутствии формул вида 1.

Не умаляя общности, позволительно считать, что количество формул третьего вида либо

0, либо 1. Если их хотя бы две, то отметим, что конъюнкция $(x < u \wedge x < v)$ эквивалентна дизъюнкции $(x < u \wedge u < v) \vee (x < v \wedge u \not< v)$ двух конъюнкций. А когда у нас есть дизъюнкция, то, как мы знаем, над каждым дизъюнктом мы имеем право проводить рассуждения отдельно. Такое же допущение мы можем сделать и о количестве формул пятого вида.

Предположим, что среди рассматриваемых формул отсутствуют формулы восьмого вида. В этом случае достаточно ограничиться перебором формул трех следующих видов:

$$\begin{aligned} \exists x \left(x < f^m(y) \wedge \bigwedge_i U_i(x) \right), \exists x \left(x > f^m(y) \wedge \bigwedge_i U_i(x) \right), \\ \exists x \left(f^j(z) < x < f^m(y) \wedge \bigwedge_i U_i(x) \right) \end{aligned}$$

где U_i – одноместные предикаты.

Но тогда из определения следует, что

$$\begin{aligned} \exists x(x < f^m(y)) &\Leftrightarrow \exists x(f^{-m}(x) < y) \Leftrightarrow \exists z \exists x(f^{-m}(x) = z \wedge z < y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists z(\exists x(f^{-m}(x) = z) \wedge z < y) \Leftrightarrow \exists z(R^{-m}(z) \wedge z < y) \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\exists x(x > f^m(y)) \Leftrightarrow \exists x(f^{-m}(x) > y) \Leftrightarrow \exists z(R^{-m}(z) \wedge z > y)$$

Заметим, что написанные справа формулы на самом деле есть формулы сигнатуры Σ_{qe}^+ , а по сделанному нами допущению T_{qe}^+ допускает элиминацию кванторов, что влечет эквивалентность этих формул некоторым бескванторным формулам.

Перейдем к формулам последнего (третьего) вида:

$$\begin{aligned} \exists x(f^j(z) < x < f^m(y)) &\Leftrightarrow \exists x(z < f^{-j}(x) \wedge f^{-m}(x) < y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \exists u \exists v(u = f^{-j}(x) \wedge z < u \wedge v = f^{-m}(x) \wedge v < u) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists u \exists v(\exists x(u = f^{-j}(x) \wedge v = f^{-m}(x)) \wedge z < u \wedge v < u) \end{aligned}$$

Пусть $j \geq 0, m \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists x(f^j(z) < x < f^m(y)) &\Leftrightarrow \exists x \exists u \exists v(f^j(z) = u \wedge f^m(y) = v \wedge u < x < v) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists u \exists v(f^j(z) = u \wedge f^m(y) = v \wedge \exists x(u < x < v)) \end{aligned}$$

Заметим, что $\exists x(u < x < v)$ – формула сигнатуры Σ_{qe}^+ , следовательно, эквивалентна бескванторной формуле, скажем, $\Xi(u, v)$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists u \exists v(f^j(z) = u \wedge f^m(y) = v \wedge \exists x(u < x < v)) &\Leftrightarrow \exists u \exists v(f^j(z) = u \wedge f^m(y) = v \wedge \Xi(u, v)) \\ &\Leftrightarrow \Xi(f^j(z), f^m(y) = v) \end{aligned}$$

Итого, если в исходной формуле $\exists x(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i(x, \bar{y}_i))$ среди конъюнктов φ_i отсутствуют формулы восьмого вида, то данная формула эквивалентна некоторой формуле, не содержащей кванторов. Теорема доказана.

Теорема 2. Теория T_{qe}^f упорядоченно суперстабильна.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ – это модель теории T_{qe}^f , а (C, D) – некоторое ее сечение. Выше, а именно в доказательстве теоремы 1, мы сделали наблюдение, что в любой формуле терм $f^n(x)$ заменяем на терм x , на всего лишь переменную. Если не вдаваться в детали, что вместо формулы $\psi(f^n(x), a)$ мы можем взять формулу $\psi_1(x, f^{-n}(a))$.

Положим, что $b = f^{-n}(a)$. Это дает нам формулу $\psi_1(x, b)$. Из этого мы приходим к выводу, что любой 1-тип мы можем полностью определить только соответствующим сечением и формулами, заданными при помощи сигнатуры Σ_{qe}^+ , но, как мы знаем, она есть не что иное, как несущественное расширение сигнатуры Σ^+ . Факт 1 говорит, что любая теория сигнатуры Σ^+ , где символ $<$ проинтерпретирован как линейный порядок, является упорядоченно суперстабильной. Таким образом, (C, D) не может иметь больше, чем $2^{|\Sigma^+|}$ расширений. Следовательно, упорядоченная суперстабильность теории T_{qe}^f доказана.

Заключение

По данной теме есть несколько открытых вопросов. Основной из них пока представляется очень сложным – найти критерий того, что обогащение чистого линейного порядка будет упорядоченно стабильным. Можно отметить еще один вопрос.

Вопрос. Предположим, что элементарная теория обогащения чистого линейного порядка одноместной функцией является упорядоченно стабильной. Можем ли мы сказать, что эта теория будет более того – упорядоченно суперстабильной?

Информация о финансировании

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МНВО РК, грант № AP22685272.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures.1 // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 295. – P. 565–592.
- 2 Байжанов Б.С., Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50. – № 3. – С. 303–325.
- 3 Verbovskiy V.V. O-Stable Ordered Groups // Siberian Advances in Mathematics. – 2012. – Т. 22. – No. 1. – С. 50–74.
- 4 Verbovskiy V.V. On ordered groups of Morley o-rank 1. // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2018. – V. 15 – P. 314–320.
- 5 Dauletiyarova A.B., Verbovskiy V.V. Piecewise monotonicity for unary functions in o-stable groups // Algebra and Logic. – 2021. – V. 60. – No. 1. – P. 23–38.
- 6 Verbovskiy V.V. On a classification of theories without the independence property // Mathematical Logic Quarterly. – 2013. – V. 59. – P. 119–124.
- 7 Verbovskiy V.V. On definability of types and relative stability // Mathematical Logic Quarterly. – 2019. – V. 65. – P. 332–346.
- 8 Вербовский В.В. Дп-минимальные и упорядоченно стабильные упорядоченные структуры // Математический журнал. – 2010. – Т. 10. – № 2 (36). – С. 35–38.
- 9 Verbovskiy V.V., Yerzhigeshova A.D. On non-essentiality of an o-stable expansion of $(\mathbb{Z}, <, +)$, Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – V. 44. – P. 5485–5492. <https://doi.org/10.1134/S1995080223120387>.
- 10 Rubin M. Theories of linear orders // Israel Journ. Math. – 1974. – No. 17. – P. 392–443.
- 11 Вербовский В.В., Ершигешова А.Д. Примеры линейных порядков с определяемой унарной функцией и свойством независимости // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2023. – Т. 20 (3). – С. 45–50.

REFERENCES

- 1 Pillay A., Steinhorn C. (1986) Definable sets in ordered structures.1, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 295, pp. 565–592.
- 2 Bajzhanov B.S., Verbovskiy V.V. (2011) Uporjadochenno stabil'nye teorii. Algebra i logika, vol. 50, no. 3, pp. 303–325 [in Russian].
- 3 Verbovskiy V.V. (2012) O-Stable Ordered Groups. Siberian Advances in Mathematics, , vol. 22, no. 1, pp. 50–74.
- 4 Verbovskiy V.V. (2018) On ordered groups of Morley o-rank 1. Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 15, pp. 314–320.
- 5 Dauletiyarova A.B., Verbovskiy V.V. (2021) Piecewise monotonicity for unary functions in o-stable groups. Algebra and Logic, vol. 60, no. 1, pp. 23–38.
- 6 Verbovskiy V.V. (2013) On a classification of theories without the independence property, Mathematical Logic Quarterly, vol. 59, pp. 119–124.
- 7 Verbovskiy V.V. (2019) On definability of types and relative stability. Mathematical Logic Quarterly, vol. 65, pp. 332–346.
- 8 Verbovskiy V.V. (2010) Dp-minimal'nye i uporjadochenno stabil'nye upo-rjadochennye struktury, Matematicheskij zhurnal, vol. 10, no. 2 (36), pp. 35–38 [in Russian].
- 9 Verbovskiy V.V., Yershigeshova A.D. (2023) On non-essentiality of an o-stable expansion of $(\mathbb{Z}, <, +)$, Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 44, pp. 5485–5492. doi.org/10.1134/S1995080223120387.
- 10 Rubin M. (1974) Theories of linear orders, Israel Journ. Math., no. 17, pp. 392–443.
- 11 Verbovskiy V.V., Ershigeshova A.D. (2023) Primery linejnyh porjadkov s opredeljaemoj unarnoj funkcij i svoystvom nezavisimosti, Vestnik Kazahstansko-Britanskogo tehničeskogo universiteta, vol. 20, no. 3, pp. 45–50 [in Russian].

¹*Verbovsky V.,

Dr.Phys.-Math.Sc., Associate Professor, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy@math.kz

¹Ershigeshova A.,

Master, Senior Lecturer, ORCID ID 0000-0001-6732-1077,

e-mail: aisha.yershigeshova@gmail.com

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Science Comittee
of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic
of Kazakhstan, Almaty, 050010, Shevchenko st., 28

ORDERED STABILITY AND EXPANSIONS OF A PURE LINEAR ORDER BY A UNARY FUNCTION

Abstract

A linearly ordered structure is said to be o-stable if each of its Dedekind cut has a “small” number of extensions to complete 1-types. This concept, which was introduced by B.S. Baizhanov and V.V. Verbovsky, generalizes such widely known concepts among specialists in model theory as weak o-minimality, (weak) quasi-o-minimality and dp-minimality of ordered structures. It is based on a combination of the concepts of o-minimality and stability. As we know, the elementary theory of any pure linear order is o-superstable. Indeed, this follows from the fact, which Rubin proved in the late 70s of the 20th century, that any type of one variable is determined by its cut and definable subsets, distinguished by unary predicates or formulas with one free variable. In this paper, we explore the question of what happens if a pure linear order is expanded with a unary function. Two examples were constructed when o-stability is violated; in addition, sufficient conditions for preserving o-stability with such language expansion were found. Research work on this topic is not yet finished, ideally, it would be good to find a criterion for preserving ordered stability when enriching a structure with pure linear order with a new function of one variable.

Key words: linearly ordered set, independence property, unar, o-stability, o-minimality.

¹*Вербовский В.,

физ.-мат.ғ.к., доцент, ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,

*e-mail: verbovskiy@math.kz

¹Ершигешова А.,

магистр, аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0001-6732-1077,

e-mail: aisha.yershigeshova@gmail.com

¹ҚР ҒЖЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты,
Алматы қ., 050010, Шевченко көшесі, 28

РЕТТЕЛГЕН ТҰРАҚТЫЛЫҚ ЖӘНЕ БІР ОРЫНДЫ ФУНКЦИЯМЕН ТАЗА СЫЗЫҚТЫҚ РЕТТІ БАЙЫТУЛАР

Аңдатпа

Сызықтық реттелген құрылым, егер оның әрбір Дедекиндр кимасында толық 1-типке дейін кеңейтулердің аз саны болса, реттелген тұрақты деп аталады. Бұл ұғымды Б.С. Байжанов пен В.В. Вербовский енгізген және ол модельдер теориясы саласында әлсіз о-минималдылық, әлсіз квази-о-минималдылық және реттелген құрылымдардың др-минималдылығы сияқты кеңінен танымал ұғымдарды жалпылайды. Бұл тұжырымдама тұрақтылық пен о-минималдылық ұғымдарының бірігуіне негізделген. Белгілі болғандай, кез келген таза сызықтық тәртіптің элементар теориясы реттелген супертұрақты болады. Шынында да, бұл факт 20 ғасырдың 70-жылдарының соңында Рубин дәлелдеген тұжырымнан шығады, яғни бір айнымалыдан кез келген тип өз қимасы мен бір орындық предикаттар немесе бір бос айнымалыдан тұратын формулалар арқылы ерекшеленетін формулалық ішкі жиындармен анықталады. Бұл жұмыста біз таза сызықтық тәртіпті бір орындық функциямен байытқанда не болатынын зерттейміз. Реттелген тұрақтылықтың бұзылуына әкелетін екі мысал келтірілді, сондай-ақ тілді осындай байыту барысында реттелген тұрақтылықты сақтау үшін жеткілікті шарттар табылды. Бұл тақырып бойынша зерттеулер әлі де жалғасуда, алдағы уақытта құрылымды жаңа бір айнымалы функциямен байыту кезінде реттелген тұрақтылықты сақтаудың нақты критерийін анықтау маңызды.

Тірек сөздер: сызықтық реттелген құрылым, тәуелсіздік қасиеті, унар, реттелген тұрақтылық, о-минималдық.

Дата поступления статьи в редакцию: 29.07.2024