

ӘОЖ 517.956.3
ҒТАХР 27.31.33, 27.31.44

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-3-191-200>

^{1*}Асанова А.Т.,
ф.-м.ғ.д., б.ғ.к., ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,
e-mail: assanova@math.kz

¹Бименова Р.А.,
ORCID ID: 0009-0002-9456-3025,
e-mail: b.rabiga@mail.ru

^{1,2}Минглибаева Б.Б.,
ф.-м.ғ.к., аға оқытушы, а.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: bayan_math@mail.ru

³Сабалахова А.П.,
аға оқытушы, ORCID ID: 0000-0003-1921-0174,
e-mail: sabalahova@mail.ru

¹Математика және математикалық моделдеу институты, 050010, Алматы қ., Қазақстан

²Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

³М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, 160012, Шымкент қ., Қазақстан

ИМПУЛЬСТІ ДИСКРЕТТІ ЖАДЫ БАР ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Импульс әсері бар дискрет жадылы гиперболаалық жоғарғы ретті тендеу үшін шеттік есеп тіктөртбұрышты облыста зерттеледі. Қарастырылатын есеп жаңадан енгізілетін функциялар көмегімен импульс әсері бар дискрет жадылы белгісіз функциялардан тәуелді бірінші ретті дифференциалдық тендеулер жүйесіне және интегралдық тендеулерге әкелінеді. Осы пара-пар есепке Д.С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісі қолданылады. Облысты уақыт айнаымалысы бойынша бөлу және ішкі облыстарда дискретті жады мәндерінде функционалдық параметрлерді енгізу арқылы зерттелген импульс әсері бар дискрет жадылы белгісіз функциялардан тәуелді бірінші ретті дифференциалдық тендеулер жүйесі зерттелді. Бұл пара-пар есептер жүйесі интегралдық-көп нүктелі шеттік есептерге келтіріледі, нәтижесінде функционалдық параметрлері мен белгісіз функциялары бар жаңа есептер туады. Шыққан пара-пар есептер жаңа функцияларға қатысты дифференциалдық бірінші ретті тендеулер жүйесі арқылы алғашқы есептерді қамтиды. Алғашқы есептердің шешімдері Вольтер интегралдық тендеулері арқылы өрнектеледі. Бұл шешімдерді шеттік шарттар мен импульс шарттарына қойып, функционалдық параметрлер бойынша сызықтық функционалдық тендеулер жүйесі құрылады. Шыққан пара-пар есептердің шешімдерін табу жолдарын сипаттайтын алгоритм ұсынылады. Интегралдық-көп нүктелі шеттік есептердің функционалдық параметрлері мен белгісіз функцияларға тәуелділігі кезінде бірімәнді шешімділіктің жеткілікті шарттары тұжырымдалады. Сонымен қатар, импульсті дискрет жадылы жоғарғы ретті гиперболаалық тендеу үшін шеттік есептің бастапқы шарттары тұрғысынан оның бірімәнді шешімділігінің жеткілікті шарттары анықталады.

Тірек сөздер: импульсті дискретті жады, жоғарғы ретті гиперболаалық тендеу, шеттік есептер әулеті, функционалдық-дифференциалдық тендеулер.

Кіріспе

Мақалада тіктөртбұрышты $\Pi = [0, T] \times [0, \Omega]$ облысында келесі түрдегі импульсті дискретті жады бар жоғарғы ретті гиперболаалық тендеу үшін

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial t} = \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \frac{\partial^j z}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \frac{\partial^j z}{\partial x^{j-1} \partial t} + c(t, x)z + g(t, x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n a_{0j}(t, x) \frac{\partial^j z(\eta(t), x)}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^n b_{0j}(t, x) \frac{\partial^j z(\eta(t), x)}{\partial x^{j-1} \partial t} + c_0(t, x) z(\eta(t), x),$$

$$t \neq \tau_i, \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (1)$$

қос нүктелі бейлокал шарты

$$p(x) \frac{\partial^n z(0, x)}{\partial x^n} + s(x) \frac{\partial^n z(T, x)}{\partial x^n} = \omega_0(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

импульс шарттары

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i + 0} \frac{\partial^n z(t, x)}{\partial x^n} - \lim_{t \rightarrow \tau_i - 0} \frac{\partial^n z(t, x)}{\partial x^n} = \omega_i(x), \quad x \in [0, \omega], \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (3)$$

сипаттамалардағы шарттары

$$z(t, 0) = \phi_0(t), \quad \frac{\partial z(t, 0)}{\partial x} = \phi_1(t), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-1} z(t, 0)}{\partial x^{n-1}} = \phi_{n-1}(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

түрінде берілген қос нүктелі бейлокал есеп қарастырылады.

Мұнда $z(t, x)$ – белгісіз функция, $a_j(t, x)$, $b_j(t, x)$, $c(t, x)$, $a_{0j}(t, x)$, $b_{0j}(t, x)$, $c_0(t, x)$ және $g(t, x)$ функциялары Π облысында үзіліссіз,

$$\eta(t) = \zeta_r, \quad t \in [\tau_{r-1}, \tau_r), \quad \tau_{r-1} \leq \zeta_r < \tau_r, \quad r = \overline{1, L},$$

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{L-1} < \tau_L = T,$$

$p(x)$, $s(x)$ және $\omega_0(x)$ функциялары $[0, \Omega]$ кесіндісінде үзіліссіз, $\omega_i(x)$ функциялары $[0, \Omega]$ кесіндісінде үзіліссіз, $i = \overline{1, L-1}$, $\phi_s(t)$ функциялары $[0, T]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданады, $s = \overline{0, n-1}$.

$\Pi_r = [\tau_{r-1}, \tau_r) \times [0, \Omega]$, $r = \overline{1, L}$, белгілеулерін енгізейік, яғни $\Pi = \bigcup_{r=1}^L \Pi_r$.

$PC(\Pi, \{\tau_j\}_{j=1}^{L-1}, \mathbb{R})$ – Π облысындағы $t = \tau_i$, $i = \overline{1, L-1}$, сызықтарында мүмкін үзілістері болатын бөлікті үзіліссіз $z(t, x)$ функцияларының кеңістігі болсын және нормасы $\|z\|_1 = \max_{r=\overline{1, L}} \sup_{(t, x) \in \Pi_r} \|z(t, x)\|$.

Егер $z(t, x) \in PC(\Pi, \{\tau_j\}_{j=1}^{L-1}, \mathbb{R})$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырса:

(i) $z(t, x)$ функциясының $\frac{\partial^j z(t, x)}{\partial x^j} \in PC(\Pi, \{\tau_j\}_{j=1}^{L-1}, \mathbb{R})$, $\frac{\partial^j z(t, x)}{\partial x^{j-1} \partial t} \in PC(\Pi, \{\tau_j\}_{j=1}^{L-1}, \mathbb{R})$ дербес туындылары бар болса, мұнда $j = \overline{1, n}$;

(ii) $\frac{\partial^{n+1} z(t, x)}{\partial x^n \partial t}$ жоғарғы ретті аралас дербес туындысы, $t = \tau_i$, $i = \overline{1, L-1}$, сызықтарындағы мүмкін үзілістерін қоспағанда, әрбір $(t, x) \in \Pi$ нүктелерінде бар болса, мұнда барлық $x \in [0, \Omega]$ үшін біржақты жоғарғы ретті аралас дербес туындылары бар болады;

(iii) (1) гиперболалық теңдеулер жүйесі әрбір $[\tau_i, \tau_{i+1}) \times [0, \Omega]$, мұнда $i = \overline{0, L-1}$, ішкі облысындағы $z(t, x)$ функциясы үшін орындалады және ол (τ_i, x) нүктелеріндегі $z(t, x)$ функциясының оң жақты жоғарғы ретті аралас дербес туындысы үшін орындалады, мұнда $i = \overline{0, L-1}$, $x \in [0, \Omega]$;

(iv) шеттік (2) және (4) сипаттамадағы шарттар сәйкесінше $t = 0$, $t = T$, $x = 0$

сызықтарында $z(t, x)$ функциясының дербес туындылары үшін орындалады. (v) $z(t, x)$ функциясының $t = \tau_i, i = \overline{1, L-1}$ сызықтарындағы дербес туындылары үшін импульстік әсерлердің (3) шарттары барлық $x \in [0, \Omega]$ үшін орындалады;

онда (1)–(4) есебінің шешімі деп аталады.

Дискретті жадылы гиперболалық теңдеулер көптеген құбылыстарды математикалық модельдеу кезінде туындайды. Осындай теңдеулердің ішінде импульстік әсерлері бар дискретті жадылы гиперболалық теңдеулер ерекше орын алады. Бұл нейрондық желілер мен динамикалық жүйелерді зерттеу барысында импульстік әсерлі дискретті жадылы гиперболалық теңдеулерге арналған әртүрлі шеттік есептерді зерттеу қажеттілігімен байланысты. Осындай есептердің шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы, шешімдердің бастапқы деректерден үзіліссіз тәуелділігі, сондай-ақ шешімдерді құру әдістері мен жолдары әлі де толық зерттелмей, өзекті болып отыр.

Оған қоса, импульсті дискретті жады бар жоғары ретті гиперболалық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешу әдістерінің тапшылығы бұл есептерді зерттеуге арналған жаңа конструктивті әдістерді әзірлеуге итермелейді. Импульсті гиперболалық екінші ретті теңдеулер үшін түрлі шеттік есептерді шешуге Д.С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісінің модификациялары [1–13] еңбектерінде ұсынылған болатын. Осы модификациялар арқылы қарастырылған есептердің бірімәнді шешімділік шарттары, шешімдерді тұрғызу алгоритмдері және табу жолдары көрсетілген. Алынған нәтижелер импульсті жоғары ретті гиперболалық теңдеулерге де дамытылды [14, 15].

Екінші жағынан, дискретті жады деп аталатын жалпыланған құрақты-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер теориясы соңғы жылдары үлкен қарқынмен дамып келеді [16–21]. Бұл үзілістері бар дифференциалдық теңдеулер теориясындағы маңызды орын алатын функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің белгілі өкілі болып табылады және құбылыстарды барынша дәл сипаттайтын модельдерге негізделген.

Жалпыланған құрақты-тұрақты аргументті дифференциалдық және гиперболалық теңдеулер үшін әртүрлі шеттік есептерді шешуде параметрлеу әдісінің тиімділігі мен әмбебаптығы көрсетілді [11, 22].

Осы жоғарыда келтірілгендердің негізінде импульсті дискретті жады бар жоғары ретті гиперболалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу және шешу мәселесі қазіргі уақытта үзілісті дифференциалдық теңдеулер теориясындағы аса өзекті әрі маңызды сұрақтардың бірі болып отыр. Осы бағыттағы алғашқы жұмыс импульсті дискретті жады бар екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепті шешуге арналды [23].

Осы есептің бірімәнді шешімділік шарттары анықталып, жуық шешімді табу алгоритмдері ұсынылған. Шешімділік шарттары теңдеудің коэффициенттері мен шекаралық матрицалар арқылы арнайы құрылған функционалдық матрицаның қайтарымдылығы терминінде анықталған.

Ұсынылған әдіс енді (1)–(4) импульсті дискретті жады бар жоғары ретті гиперболалық теңдеу үшін шеттік есепті зерттеуге және шешуге бейімделеді. Зерттеліп отырған есеп жаңа ізделінді функцияларды енгізу арқылы импульсті дискретті жады бар бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін қос нүктелі шеттік есептер жүйесіне және интегралдық қатынастарға келтіріледі. Пара-пар есепті шешу алгоритмдері ұсынылып, олардың жинақтылығы дәлелденеді. (1)–(4) есебінің бірімәнді шешімділік шарттары анықталады.

Материалдар мен әдістер

Жаңа функциялар енгізу әдісі пайдаланылады және пара-пар есепке келтіріледі.

Алдымен, $u_1(t, x) = z(t, x)$, $u_2(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial x}$, ..., $u_n(t, x) = \frac{\partial^{n-1} z(t, x)}{\partial x^{n-1}}$,
 $v(t, x) = \frac{\partial^n z(t, x)}{\partial x^n}$ жаңа белгісіз функцияларын енгізейік.

Онда (1)-(4) есебі келесідей жаңа есепке келеді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a_n(t, x)v(t, x) + a_{0n}(t, x)v(\eta(t), x) + \\ &\sum_{j=1}^{n-1} a_j(t, x)u_{j+1}(t, x) + \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} + c(t, x)u_1(t, x) + g(t, x) + \\ &\sum_{j=1}^{n-1} a_{0j}(t, x)u_{j+1}(\eta(t), x) + \sum_{j=1}^n b_{0j}(t, x) \frac{u_j(\eta(t), x)}{\partial t} + c_0(t, x)u_1(\eta(t), x) \\ &t \neq \tau_i, \quad i = \overline{1, L-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$p(x)v(0, x) + s(x)v(T, x) = \omega_0(x), \quad x \in [0, \Omega], \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i + 0} v(t, x) - \lim_{t \rightarrow \tau_i - 0} v(t, x) = \omega_i(x), \quad x \in [0, \Omega], \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (7)$$

$$u_s(t, x) = \phi_{s-1}(t) + \int_0^x u_{s+1}(t, \theta) d\theta, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (t, x) \in \Pi, \quad (8)$$

$$u_n(t, x) = \phi_{n-1}(t) + \int_0^x v(t, \theta) d\theta, \quad (t, x) \in \Pi, \quad (9)$$

мұнда (8), (9) интегралдық қатынастарында (4) сипаттамалардағы шарттар ескерілген.

(5)–(9) есебі – $u_s(t, x)$, $s = \overline{1, n}$, белгісіз функциялардан тәуелді импульсті дискретті жады бар бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін $v(t, x)$ функциясына қатысты қос нүктелі шеттік есептер әулеті болып табылады.

(5)–(9) есебін шешуге Д.С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісі қолданылады.

$\Pi = \bigcup_{r=1}^L \Pi_r$ екенін ескерсек, ізделінді $v(t, x)$ функциясының бөлінген ішкі облыстарға сығылуын $v_r(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_r$, $r = \overline{1, L}$, деп белгілейік. $\xi_r(x) = v_r(\zeta_{r-1}, x)$, $r = \overline{1, L}$, қосымша параметрлерін енгізіп және әрбір Π_r , $r = \overline{1, L}$, ішкі облыстарында $w_r(t, x) = v_r(t, x) - \xi_r(x)$, $r = \overline{1, L}$, алмастырулары орындалса, (5)–(9) есебі келесі түрдегі функционалдық параметрлері мен белгісіз функциялары бар бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін көп нүктелі интегралдық шеттік есептер әулетіне келеді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_r}{\partial t} &= a_n(t, x)w_r(t, x) + [a_n(t, x) + a_{0n}(t, x)]\xi_r(x) + \\ &\sum_{j=1}^{n-1} a_j(t, x)u_{j+1}(t, x) + \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} + c(t, x)u_1(t, x) + g(t, x) + \\ &\sum_{j=1}^{n-1} a_{0j}(t, x)u_{j+1}(\zeta_{r-1}, x) + \sum_{j=1}^n b_{0j}(t, x) \frac{u_j(\zeta_{r-1}, x)}{\partial t} + c_0(t, x)u_1(\zeta_{r-1}, x) \\ &(t, x) \in \Pi_r, \quad r = \overline{1, L}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_r(\zeta_{r-1}, x) = 0, \quad x \in [0, \Omega], \quad r = \overline{1, L}, \quad (11)$$

$$p(x)w_1(0, x) + p(x)\xi_1(x) + s(x) \lim_{t \rightarrow \tau_i+0} w_L(t, x) + s(x)\xi_L(x) = \omega_0(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i+0} w_{i+1}(t, x) + \xi_{i+1}(x) - \lim_{t \rightarrow \tau_i-0} w_i(t, x) - \xi_i(x) = \omega_i(x), \quad x \in [0, \Omega], \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (13)$$

$$u_s(t, x) = \phi_{s-1}(t) + \int_0^x u_{s+1}(t, \theta) d\theta, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (t, x) \in \Pi, \quad (14)$$

$$u_n(t, x) = \phi_{n-1}(t) + \int_0^x w_r(t, \theta) d\theta + \int_0^x \xi_r(\theta) d\theta, \quad (t, x) \in \Pi_r, \quad r = \overline{1, L}, \quad (15)$$

Функционалдық параметрлердің бекітілген мәндерінде (10), (11) есебі $w_r(t, x)$ функциясына қатысты бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін алғашқы есептер әулеті болып табылады. (12) және (13) қатынастары $\xi_r(x)$, $r = \overline{1, L}$, функционалдық параметрлерін анықтауға мүмкіндік берсе, (14) және (15) интегралдық қатынастары белгісіз $u_s(t, x)$, $s = \overline{1, n}$, функцияларын табуға қажет.

Сонымен, $\{w([t], x), \xi(x), U(t, x)\}$ функциялар үштігі, мұнда

$$(w[t], x) = (w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_L(t, x)), \quad \xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_L(x)),$$

$U(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$, (10)–(15) пара-пар есебінің шешімі дейміз, егер $w_r(t, x)$, $\xi_r(x)$, және $u_s(t, x)$ функциялары (10) дифференциалдық теңдеулерін барлық $(t, x) \in \Pi_r$ үшін, (11) алғашқы шарттарын, (12), (13) қатынастарын барлық $x \in [0, \Omega]$ үшін және (14), (15) интегралдық қатынастарын қанағаттандыратын болса, $r = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n}$.

$\xi_r(x)$, $r = \overline{1, L}$, функционалдық параметрлерінің және $u_s(t, x)$, $s = \overline{1, n}$, белгісіз функцияларының бекітілген мәндерінде (10), (11) бастапқы есептерінің әулеті Вольтер интегралдық теңдеулерге пара-пар болады:

$$w_r(t, x) = \int_{\zeta_{r-1}}^t a_n(\tau, x) w_r(\tau, x) d\tau + \int_{\zeta_{r-1}}^t [a_n(\tau, x) + a_{0n}(\tau, x)] d\tau \xi_r(x) + \int_{\zeta_{r-1}}^t g(\tau, x) d\tau + \int_{\xi_{r-1}}^t \tilde{H}_r(\tau, x, u_1, u_2, \dots, u_m) d\tau, \quad (t, x) \in \Pi_r, \quad r = \overline{1, L}, \quad (16)$$

мұнда

$$\tilde{H}_r(t, x, u_1, u_2, \dots, u_m) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j(t, x) u_{j+1}(t, x) + \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} + c(t, x) u_1(t, x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{0j}(t, x) u_{j+1}(\zeta_{r-1}, x) + \sum_{j=1}^n b_{0j}(t, x) \frac{u_j(\zeta_{r-1}, x)}{\partial t} + c_0(t, x) u_1(\zeta_{r-1}, x), \quad r = \overline{1, L}.$$

(16) теңдеулерінен $w_1(0, x)$, $\lim_{t \rightarrow T-0} w_L(t, x)$, $\lim_{t \rightarrow \tau_i+0} w_{i+1}(t, x)$, $\lim_{t \rightarrow \tau_i-0} w_i(t, x)$, $i = \overline{1, L-1}$, шектерін анықтап, табылған өрнектерді (12), (13) қатынастарындағы сәйкес мәндерге қойып, $\xi_r(x)$, $r = \overline{1, L}$, функционалдық параметрлері үшін сызықты функционалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q(x)\xi(x) = -F(x) - \mathcal{H}(x, U) - \mathcal{G}(x, w), \quad \xi(x) \in C([0, \Omega], \mathbb{R}^L), \quad (17)$$

мұндағы

$$Q(x) =$$

$$\begin{array}{ccccccc}
p(x)[1 + \mathcal{D}_1(0, x)] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s(x)[1 + \mathcal{D}_L(T, x)] \\
-1 - \mathcal{D}_1(\tau_1, x) & 1 + \mathcal{D}_2(\tau_1, x) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 - \mathcal{D}_2(\tau_2, x) + \mathcal{D}_3(\tau_2, x) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 - \mathcal{D}_{L-1}(\tau_{L-1}, x) + \mathcal{D}_L(\tau_{L-1}, x) &
\end{array}$$

$$\mathcal{D}_r(t, x) = \int_{\tau_{r-1}}^t [a_n(\tau, x) + a_{0n}(\tau, x)] d\tau, \quad \mathcal{F}_r(t, x) = \int_{\tau_{r-1}}^t g(\tau, x) d\tau,$$

$$\mathcal{H}_r(t, x, U) = \int_{\tau_{r-1}}^t \tilde{H}_r(\tau, x, u_1, u_2, \dots, u_n) d\tau,$$

$$\mathcal{G}_r(t, x, w) = \int_{\tau_{r-1}}^t a_n(\tau, x) w_r(\tau, x) d\tau,$$

$$\mathcal{F}(x) = (-\omega_0(x) + s(x)\mathcal{F}_1(0, x) + s(x)\mathcal{F}_L(T, x), -\mathcal{F}_1(\tau_1, x) + \mathcal{F}_2(\tau_1, x), \dots, -\mathcal{F}_{L-1}(\tau_{L-1}, x) + \mathcal{F}_L(\tau_{L-1}, x)),$$

$$\mathcal{H}(x, U) = (p(x)\mathcal{H}_1(0, x, U) + s(x)\mathcal{H}_L(T, x, U), -\mathcal{H}_1(\tau_1, x, U) + \mathcal{H}_2(\tau_1, x, U), \dots, -\mathcal{H}_{L-1}(\tau_{L-1}, x, U) + \mathcal{H}_L(\tau_{L-1}, x, U)),$$

$$\mathcal{G}(x, w) = (p(x)\mathcal{G}_1(0, x, w) + s(x)\mathcal{G}_L(T, x, w), -\mathcal{G}_1(\tau_1, x, w) + \mathcal{G}_2(\tau_1, x, w), \dots, -\mathcal{G}_{L-1}(\tau_{L-1}, x, w) + \mathcal{G}_L(\tau_{L-1}, x, w)).$$

Нәтижелер мен талқылау

Сонымен, белгісіз $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_L(x))$ функционалдық параметрлерін табу үшін (17) сызықты функционалдық теңдеулер жүйесін алдық, белгісіз $U(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$ функцияларын (14), (15) интегралдық қатынастарынан анықтаймыз, ал белгісіз $w([t], x) = (w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_L(t, x))$ функциялар жүйесін (10), (11) бастапқы есептер әулетінен табамыз. Әрі қарай пар-пар (10)–(15) есебінің шешімдерін келесі алгоритм көмегімен табылатын $\{w^{(m)}([t], x), \xi^{(m)}(x), U^{(m)}(t, x)\}$, $m = 0, 1, \dots$, үштіктерінен тұратын тізбектің шегі түрінде анықталады.

0-інші қадам:

а) алдымен $Q(x)$ матрицасының барлық $x \in [0, \Omega]$ үшін кері матрицасы бар болсын деп болжайық, функционалдық $\xi(x)$ параметрі бойынша алғашқы жуықтауды

$$Q(x)\xi(x) = -\mathcal{F}(x) - \mathcal{H}(x, \Phi),$$

$$\text{теңдеуінен табамыз, мұнда } \Phi(t) = (\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{n-1}(t)),$$

$$\text{яғни } \xi^{(0)}(x) = -[Q(x)]^{-1}\{\mathcal{F}(x) + \mathcal{H}(x, \Phi)\};$$

ә) табылған $\xi^{(0)}(x)$ пайдаланып және $(t, x) \in \Pi_r$, $r = \overline{1, L}$, ішкі облыстарында (15) интегралдық қатынасында $\xi_r(x) = \xi_r^{(0)}(x)$, $w_r(t, x) = 0$, $r = \overline{1, L}$, болғанда

$$u_n^{(0)}(t, x) \text{ бастапқы жуықтауын анықтаймыз:}$$

$$u_n^{(0)}(t, x) = \phi_{n-1}(t) + \int_0^x \xi_r^{(0)}(\theta) d\theta, \quad (t, x) \in \Pi_r, \quad r = \overline{1, L},$$

одан кейін $u_n^{(0)}(t, x)$ функциясын пайдаланып, қалған функцияларды (14) интегралдық қатынастарынан біртіндеп табамыз:

$$u_s^{(0)}(t, x) = \phi_{s-1}(t) + \int_0^x u_{s+1}^{(0)}(t, \theta) d\theta, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (t, x) \in \Pi,$$

б) (10) дифференциалдық теңдеулерінің оң жағында $\xi_r(x) = \xi_r^{(0)}(x)$, $r = \overline{1, L}$, $u_s(t, x) = u_s^{(0)}(t, x)$, $s = \overline{1, n}$, деп алып, (10), (11) бастапқы есептер әулетін шешіп $w^{(0)}([t], x) = (w_1^{(0)}(t, x), w_2^{(0)}(t, x), \dots, w_L^{(0)}(t, x))$ функцияларын табамыз.

m-інші кадам:

а) табылған $U^{(m-1)}(t, x) = (u_1^{(m-1)}(t, x), u_2^{(m-1)}(t, x), \dots, u_n^{(m-1)}(t, x))$ және $w^{(m-1)}([t], x) = (w_1^{(m-1)}(t, x), w_2^{(m-1)}(t, x), \dots, w_L^{(m-1)}(t, x))$, $m = 1, 2, \dots$, функцияларын (17) сызықты функционалдық теңдеулер жүйесінің оң жағына қойып,
 $Q(x)\xi(x) = -F(x) - H(x, U^{(k-1)}) - G(x, w^{(m-1)})$,

теңдеуінен $\xi^{(m)}(x) = (\xi_1^{(m)}(x), \xi_2^{(m)}(x), \dots, \xi_L^{(m)}(x))$, $m = 1, 2, \dots$, функционалдық параметрін табамыз;

ә) анықталған $\xi^{(m)}(x)$ параметрін пайдаланып және $(t, x) \in \Pi_r$, $r = \overline{1, L}$, ішкі облыстарында (15) интегралдық қатынасында $\xi_r(x) = \xi_r^{(m)}(x)$, $w_r(t, x) = w_r^{(m-1)}(t, x)$, $r = \overline{1, L}$, болғанда $u_n^{(m)}(t, x)$ жуықтауын анықтаймыз:

$$u_n^{(m)}(t, x) = \phi_{n-1}(t) + \int_0^x \xi_r^{(m)}(\theta) d\theta, \quad (t, x) \in \Pi_r, \quad r = \overline{1, L},$$

одан кейін $u_n^{(m)}(t, x)$ функциясын пайдаланып, қалған функцияларды (14) интегралдық қатынастарынан біртіндеп табамыз:

$$u_s^{(m)}(t, x) = \phi_{s-1}(t) + \int_0^x u_{s+1}^{(k)}(t, \theta) d\theta, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (t, x) \in \Pi,$$

б) (10) дифференциалдық теңдеулерінің оң жағында $\xi_r(x) = \xi_r^{(m)}(x)$, $r = \overline{1, L}$, $u_s(t, x) = u_s^{(m)}(t, x)$, $s = \overline{1, n}$, деп алып, (10), (11) бастапқы есептер әулетін шешіп $w^{(m)}([t], x) = (w_1^{(m)}(t, x), w_2^{(m)}(t, x), \dots, w_L^{(m)}(t, x))$ функцияларын табамыз.

Сонымен $\{w^{(m)}([t], x), \xi^{(m)}(x), U^{(m)}(t, x)\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ үштіктер жүйесін аламыз.

Белгілеулер енгізейік

$$\alpha_n(x) = \max_{t \in [0, T]} \|a_n(t, x)\|, \quad \alpha_{0n}(x) = \max_{t \in [0, T]} \|a_{0n}(t, x)\|,$$

$$\vartheta = \max_{r=\overline{1, L}} (\tau_r - \zeta_{r-1}, \zeta_{r-1} - \tau_{r-1}).$$

Құрылған алгоритмнің жүзеге асырылуы мен (10)–(15) есебінің жалғыз шешіміне жинақталуының жеткілікті шарттары келесі тұжырымда баяндалады:

Теорема 1. Егер $Q(x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \Omega]$ үшін қайтарымды болса және

$$i) \| [Q(x)]^{-1} \| \leq q(x),$$

мұнда $q(x)$ – оң, $[0, \Omega]$ аралығында үзіліссіз функция,

$$ii) h(x) = q(x) \max(2, \|p(x)\| + \|s(x)\|)$$

$$\alpha_n(x) \vartheta \{e^{\alpha_n(x)\vartheta} - 1 + \vartheta \alpha_{0n}(x) e^{\alpha_n(x)\vartheta}\} \leq \gamma < 1,$$

мұнда γ – оң тұрақты.

Онда (10)–(15) есебі бірімді шешімді болады.

(1)–(4) және (10)–(15) есептері өзара бір-біріне пара-парлығынан келесі тұжырым орын алады.

Теорема 2. Егер $Q(x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \Omega]$ үшін қайтарымды болса және жоғарыда келтірілген теореманың теңсіздіктері орындалса, онда (1)–(4) параметрі бар есебінің жалғыз $z^*(t, x)$ шешімі болады.

Теорема 1 және теорема 2 дәлелдеулері [13] пен [23] жұмыстарындағы теоремаларға ұқсас дәлелденеді.

Қорытынды

Ұсынылып отырған жұмыста тіктөртбұрышты облыста импульсті дискретті жады бар жоғары ретті гиперболалық теңдеу үшін шеттік есеп зерттелген. Қарастырылатын есеп жаңа белгісіз функциялар енгізу арқылы импульсті дискретті жады бар белгісіз функциялардан тәуелді бірінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептер әулетіне және интегралдық қатынастарға келтірілген. Шыққан есепке Д.С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісі қолданылып, пара-пар функционалдық параметрлері мен белгісіз функциялары бар көп нүктелі интегралдық шеттік есептер әулеті зерттелген. Шыққан пара-пар мәселенің шешімін табу алгоритмі құрылған. Функционалдық параметрлері мен белгісіз функциялары бар көп нүктелі интегралдық шеттік есептер әулетінің бірімәнді шешімділігінің жеткілікті шарттары тұжырымдалған. Импульсті дискретті жады бар жоғары ретті гиперболалық теңдеу үшін шеттік есептің бастапқы деректері тұрғысында оның бірімәнді шешімділігінің жеткілікті шарттары анықталған.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеулерге Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (AP19675193 гранты мен BR20281002 іргелі зерттеулер гранты).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, vol. 29, no. 1, pp. 34–46.
- 2 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, vol. 402, no. 1, pp. 167–178. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012>.
- 3 Assanova A.T., Sabalakhova A.P. On the unique solvability of nonlocal problems with integral conditions for a hybrid system of partial differential equations. *Eurasian Mathematical Journal*, 2018, vol. 9, no. 3, pp. 14–24. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2018-9-3-14-24>.
- 4 Assanova A.T. An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order. *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, no. 4, pp. 1967–1978. <https://doi.org/10.3906/mat-1903-111>.
- 5 Bakirova E.A., Dzhumabaev D.S. and Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, no. 7, pp. 1788–1802. <https://doi.org/10.1002/mma.6003>.
- 6 Assanova A.T. On the solvability of a nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition. *Georgian Mathematical Journal*, 2021, vol. 28, no. 1, pp. 49–57. <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.
- 7 Bakirova E.A., Assanova A.T. and Kadirbayeva Zh.M. A problem with parameter for the integro-differential equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2021, vol. 26, no. 1, pp. 34–54. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>.
- 8 Minglibayeva B.B., Assanova A.T. An existence of an isolated solution to nonlinear two-point boundary value problem with parameter. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 587–597. <https://doi.org/10.1134/S199508022103015X>.
- 9 Assanova A.T., Sabalakhova A.P., and Toleukhanova Z.M. On the unique solvability of a family of boundary value problems for integro-differential equations of mixed type. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 6, pp. 1228–1238. <https://doi.org/10.1134/S1995080221060044>.
- 10 Assanova A.T. and Imanchiyev A.E. The problem with non-separated multipoint-integral conditions for high-order differential equations and a new general solution. *Quaestiones Mathematicae*, 2022, vol. 45, no. 10, pp. 1641–1653. <https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1967503>.
- 11 Assanova A.T. and Uteshova R. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, vol. 165, no. 12, art. no. 112816. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112816>.
- 12 Assanova A.T. A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications. *Haceteppe Journal of Mathematics and Statistics*, 2023, vol. 52, no. 6, pp. 1513–1532. <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.

13 Assanova A.T. and Imanchiyev A.E. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order, *Filomat*, 2024, vol. 38, no. 1, pp. 295–304. <https://doi.org/10.2298/FIL2401295A>.

14 Assanova A.T. and Tleulessova A.B. Nonlocal problem for a system of partial differential equations of higher order with pulsed actions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 71, no. 12, pp. 1821–1842. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01750-9>.

15 Assanova A.T., Abildayeva A.D., Tleulessova A.B. Nonlocal problems for the fourth order impulsive partial differential equations. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2020, vol. 333, pp. 81–94. https://doi.org/10.1007/978-3-030-56323-3_7.

16 Akhmet M.U. *Principles of discontinuous dynamical systems*, Springer, New-York, 2010, 176 p.

17 Akhmet M.U. *Nonlinear hybrid continuous/discrete-time models*, Atlantis Press, Paris, 2011, 216 p.

18 Akhmet M.U. and Yilmaz E. *Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations*, Springer, New-York, 2013, 168 p.

19 Akhmet M.U. *Almost Periodicity, Chaos, and Asymptotic Equivalence*, Springer, Switzerland, 2020, 368 p.

20 Nieto J.J. and Rodriguez-Lopez R. Green's function for second order periodic BVPs with piecewise constant argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, vol. 304, no. 1, pp. 33–57. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.023>.

21 Dominguez-Perez M.A., Rodriguez-Lopez R. Multipoint BVPs of Neumann type for functional differential equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, vol. 13, no. 4, pp. 1662–1675. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.11.023>.

22 Abildayeva A., Assanova A., Imanchiyev A. A multi-point problem for a system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type as a neural network model. *Eurasian Mathematical Journal*, 2022, vol. 13, no. 2, pp. 8–17. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-2-08-17>.

23 Imanchiyev A.E., Assanova A.T., Molybaikyzы A. Properties of a nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4299–4309. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100177>.

^{1*}Assanova A.T.,

Dr. Phys.-Math. Sc., Principal Researcher, ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,
e-mail: assanova@math.kz

¹Bimenova R.A.,

ORCID ID: 0009-0002-9456-3025, e-mail: b.rabiga@mail.ru.

^{1,2}Minglibayeva B.B.,

Cand. Phys.-Math.Sc., Senior Lecturer, Senior Researcher, ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: baran_math@mail.ru.

³Sabalakhova A.P.

Senior Lecturer, ORCID ID: 0000-0003-1921-0174,
e-mail: sabalakhova@mail.ru

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan

²Kazakh National Women's Teacher Training University, 050000, Almaty, Kazakhstan

³Mukhtar Auezov South Kazakhstan University, 160012, Shymkent, Kazakhstan

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HIGH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH IMPULSE DISCRETE MEMORY

Abstract

The investigation focuses on a boundary value problem for a high-order hyperbolic equation with impulse discrete memory in a rectangular domain. By introducing new functions, the problem is transformed into a set of boundary value problems for a first-order differential equation with impulse discrete memory, which depends on unknown functions and integral relations. D.S. Dzhumabaev's parametrization method is applied to this equivalent problem. The domain is divided according to the time variable, and functional parameters representing discrete memory values are introduced within the interior domains. As a result, the family of boundary value problems for the first-order differential equation with impulse discrete memory and unknown functions is converted into an

equivalent family of integral-multipoint boundary value problems involving functional parameters and unknown functions. These equivalent problems include initial value problems for first-order differential equations related to the new functions. The solutions to the initial value problems are expressed using Volterra integral equations. By substituting these solutions into the boundary and impulse conditions, a system of linear functional equations concerning the functional parameters is derived. An algorithm is developed to solve the equivalent problem, and sufficient conditions for the unique solvability of the family of integral-multipoint boundary value problems with functional parameters and unknown functions are provided. Additionally, sufficient conditions for the unique solvability of the original boundary value problem for the high-order hyperbolic equation with impulse discrete memory are established based on the initial data.

Key words. Impulse discrete memory, high-order hyperbolic equation, family of boundary value problems, functional-differential equations.

^{1*}Асанова А.Т.,

д.ф.-м.н., г.н.с., ORCID ID: 0000-0001-8697-8920,
e-mail: assanova@math.kz

¹Бименова Р.А.,

ORCID ID: 0009-0002-9456-3025, e-mail: b.rabiga@mail.ru

^{1,2}Минглибаева Б.Б.,

к.ф.-м.н., ст. преподаватель, с.н.с., ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: bayan_math@mail.ru

³Сабалахова А.П.,

ст. преподаватель, ORCID ID: 0000-0003-1921-0174, e-mail: sabalahova@mail.ru

¹Институт математики и математического моделирования, 050010, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный женский педагогический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан

³Южно-Казахстанский университет имени М. Ауезова, 160012, г. Шымкент, Казахстан

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ПАМЯТЬЮ

Аннотация

Исследуется краевая задача для гиперболического уравнения высокого порядка с импульсной дискретной памятью в прямоугольной области. С помощью введения новых функций рассматриваемая задача сводится к семейству краевых задач для дифференциального уравнения первого порядка с импульсной дискретной памятью, зависящей от неизвестных функций, и интегральным равенствам. К этой эквивалентной задаче применяется метод параметризации Д.С. Джумабаева. Разбиением области по временной переменной, введением функциональных параметров как значений дискретной памяти во внутренних областях исследуемое семейство краевых задач для дифференциального уравнения первого порядка с импульсной дискретной памятью, зависящее от неизвестных функций, и интегральные равенства переходят к эквивалентному семейству интегральных-многоточечных краевых задач с функциональными параметрами и неизвестными функциями. Полученные эквивалентные задачи содержат начальные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка относительно новой функции. Решение начальных задач выражается через интегральные уравнения Вольтерра. Подставляя эти решения в краевые условия и импульсные условия, строится система линейных функциональных уравнений относительно функциональных параметров. Построен алгоритм нахождения решения эквивалентной задачи. Сформулированы достаточные условия однозначной разрешимости семейства интегральных-многоточечных краевых задач с функциональными параметрами и неизвестными функциями. В терминах исходных данных краевой задачи для гиперболического уравнения высокого порядка с импульсной дискретной памятью установлены достаточные условия ее однозначной разрешимости.

Ключевые слова: импульсная дискретная память, гиперболическое уравнение высокого порядка, семейство краевых задач, функционально-дифференциальные уравнения.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 27.08.2024